

Controle Ótimo

1

- **INTRODUÇÃO E HISTÓRICO**
- **DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO**
- **LQR (REGULADOR QUADRÁTICO LINEAR)**
- **ÍNDICE DE DESEMPENHO QUADRÁTICO**
 - Matrizes de ponderação
- **MÉTODO DE PONTRYAGIN**
- **EQUAÇÃO DE RICCATI**
- **EQUAÇÃO ALGÉBRICA DE RICCATI**

Introdução e histórico

2

- Controle Linear Quadrático (LQ)-1980→:
parte dos controle ótimos (1960→)
- Linear: planta linear no Espaço de Estado (EE)
- Quadrático: Índice de desempenho Quadrático (função objetivo): funcional dos estados (\mathbf{x}) e das entradas de controle (\mathbf{u}). Índice usado para otimizar o controlador.

Problema de controle ótimo:

3

- “ Determinar uma lei de controle que minimize um índice quadrático sujeito às restrições do sistema linear”.
- Resolveremos no domínio do tempo. Poderia ser resolvido no domínio da frequência: controle \mathcal{H}_2 .
- Vantagem do LQ: leis de controle linear fáceis de serem implementadas e analisadas (muitos resultados da Álgebra Linear)

LQR

4

- Inicialmente, vamos nos ater ao problema do Regulador: $\mathbf{x}(t_f) \rightarrow 0$.
- LQR: Linear Quadratic Regulator: Regulador Linear Quadrático.
- O Objetivo é minimizar o efeito do distúrbio sobre o sistema e manter o estado próximo à origem. A seguir, apresentaremos o seguidor de trajetórias.
- Preocupação com o Regime Permanente (RP):
 - Horizonte de tempo infinito: neste caso as leis de controle são funções lineares invariantes no tempo;
 - Horizonte finito: leis de controle lineares variantes no tempo (mais difícil de implementar e analisar)

LQR

5

- Sistema Linear:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{array} \right\} \text{eventualmente } \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}$$

- Índice Quadrático:

$$J = \int_0^{tf} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{P} \mathbf{u}) dt \quad \text{ou} \quad J = \int_0^{tf} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q}(t) \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{P}(t) \mathbf{u}) dt$$

- Problema: minimizar J usando $\mathbf{u}(t)$

- Interpretação de J :

- Caso escalar: $J = \int_0^{tf} (qx^2 + pu^2) dt$

Se $p \gg q \rightarrow$ energia de controle é penalizada fortemente (motores e atuadores pequenos, pouco consumo de combustível)

Se $q \gg p \rightarrow$ estado penalizado fortemente (precisão de posicionamento)
sistemas amortecidos, pequenos overshoots, oscilações pequenas.

LQR

6

- **Q** e **P** matrizes: podemos penalizar diferentemente cada estado ou cada ação de controle.
- $\mathbf{Q} \geq 0$: Matriz simétrica semi-definida positiva.
- $\mathbf{P} > 0$: Matriz simétrica definida positiva.

$$\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \geq 0 \Rightarrow \mathbf{Q} = 0 \quad \mathbf{Q} > 0$$

$$\mathbf{u}^T \mathbf{P} \mathbf{u} > 0 \Rightarrow \mathbf{P} > 0 \quad (\mathbf{P} \text{ pode ser invertida})$$

- Soluções do LQR:
 - *Princípio do Mínimo de Pontryagin* (1956)
 - Equações de Euler-Lagrange
 - Hamilton-Jacobi-Bellman (1958)
 - 2º Teorema de Liapunov (1890)

LQR: Método de Pontryagin

7

- Transforma o problema de controle num problema de otimização.
- Hamiltoniana: onde aparecem o funcional a ser minimizado e as restrições do problema:

$$H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, t) = \underbrace{\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{P} \mathbf{u}}_{\mathbf{J}} + \boldsymbol{\lambda}^T \underbrace{(\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u})}_{\dot{\mathbf{x}}}$$

$\boldsymbol{\lambda}$ é um vetor de multiplicadores de Lagrange

LQR: Método de Pontryagin

8

- Este princípio estabelece que o controle ótimo e as trajetórias de estado devem satisfazer três equações:

$$1) \quad \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \boldsymbol{\lambda}^T}; \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \rightarrow \text{condição inicial}$$

$$2) \quad -\dot{\boldsymbol{\lambda}}^T = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{x}}; \quad \boldsymbol{\lambda}(t_f) = \mathbf{0} \rightarrow \text{condição final}$$

$$3) \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}$$

$$1) \Rightarrow \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}; \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \rightarrow \text{condição inicial}$$

$$2) \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\mathbf{Q}\mathbf{x} - \mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda}; \quad \boldsymbol{\lambda}(t_f) = \mathbf{0} \rightarrow \text{condição final}$$

$$3) \Rightarrow \mathbf{u} = -\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda}$$

LQR: Método de Pontryagin

9

(3) \rightarrow (1):

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T \\ -\mathbf{Q} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix}}_{\substack{\text{matriz} \\ \text{Hamiltoniana}}} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix}$$

Seja: $\boldsymbol{\lambda}(t) = \mathbf{R}(t)\mathbf{x}(t)$

$$\begin{aligned} \therefore \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) &= \dot{\mathbf{R}}\mathbf{x} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{x} + \mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{R}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T \overbrace{\mathbf{R}\mathbf{x}}^{\boldsymbol{\lambda}} \\ &= -\mathbf{Q}\mathbf{x} - \mathbf{A}^T \overbrace{\mathbf{R}\mathbf{x}}^{\boldsymbol{\lambda}} \end{aligned}$$

LQR

10

- Equação diferencial de Riccati (Conde Jacopo Riccati – matemático veneziano: 1676-1754):

$$-\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{R} + \mathbf{Q} - \mathbf{R}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{R} \quad ; \mathbf{R}(t_f) = \mathbf{0}$$

- Equação não-linear de primeira ordem que deve ser resolvida regressivamente no tempo (backwards) a partir de $\mathbf{R}(t_f)=\mathbf{0}$.

- Solução de horizonte finito: $\mathbf{u}^o = -\underbrace{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{R}}_{\mathbf{K}}\mathbf{x} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$

Na verdade \rightarrow $\mathbf{u}^o(t) = -\underbrace{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{R}(t)}_{\mathbf{K}(t)}\mathbf{x}(t)$

LQR

11

- Equação Algébrica de Riccati: sob condições bastante fracas: $\mathbf{R}(t) \rightarrow \mathbf{R}$ (matriz constante)

$$\mathbf{R}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{R} + \mathbf{Q} - \mathbf{R}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{R} = \mathbf{0}$$

- Solução de horizonte infinito:

$$\mathbf{u}^o(t) = -\underbrace{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{R}}_{\mathbf{K}}\mathbf{x}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$$

- Scilab: comando $\text{ricc}(\mathbf{A}, \mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T, \mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{R}$
- Matlab: comando $\text{lq}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{Q}, \mathbf{P}) \rightarrow \mathbf{K}$

LQR

12

- Condições Necessárias e Suficientes (fracas) para a validade da ARE:
 - i. O par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) deve ser estabilizável (os modos instáveis são controláveis e os modos incontroláveis são estáveis);
 - ii. $\mathbf{P} > \mathbf{0}$;
 - iii. $\mathbf{Q} \geq \mathbf{0}$ ou $\mathbf{Q} = \mathbf{C}^T \mathbf{C}$ (\mathbf{Q} pode ser fatorada) e o par (\mathbf{A}, \mathbf{C}) deve ser detectável (os modos instáveis são observáveis e os modos não observáveis são estáveis).