PCS 2215

Fundamentos de Engenharia de Computação II

Aulas 4-5

Grafos

Líria Sato

Professor Responsável

versão: 1.2 (agosto 2002)

Conteúdo

4. Representação de grafos, Grafos isomorfos e planares

4.1 Representação de Grafos

Algumas vezes, por exemplo, quando se deseja fazer uma implementação no computador para uma análise do grafo, precisamos de uma representação mais formal. Uma forma de representação é através da **matriz de adjacência**. Outra forma é a **matriz de incidência.**

4.1.1 **Matriz de adjacência**

- atribuímos rótulos às linhas e colunas com os vértices ordenados
- se os vértices da linha e coluna são adjacentes então o valor é 1, caso contrário é 0.

4.1 Representação de Grafos

Exemplo

	a	b	c	d	e
a	0	1	0	1	0
b	1	0	1	0	1
c	0	1	0	1	1
d	1	0	1	0	0
e	0	1	1	0	0

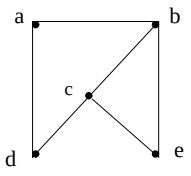


Fig. 1.10: grafo correspondente à matriz de adjacência do exemplo

4.1 Representação de Grafos

Se A é a matriz de adjacência de um grafo simples, a potência de A,

$A, A^2, A^3, .., A^n$

fornece o número de caminhos de vários comprimentos.

Por exemplo: A^2 conta o número de caminhos com comprimento 2.

4.1. Representação de Grafos

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Número de caminhos de a para c com compr. 2 é 2 (linha a, coluna c da matriz resultante)
realmente: (a,b,c) e (a,d,c)

4.1 Representação de Grafos

Entrada na linha x e coluna y de A^2 : é o número de caminhos com comprimento 2

Entradas na diagonal de A^2 : é o grau dos vértices

grau do vértice c: 3 (realmente há 3 arestas incidentes em c)

Teorema 6.5.3

Se A é a matriz de adjacência de um grafo simples, a ij-ésima entrada de A^n é igual ao número de caminhos de comprimento n do vértice i para o vértice j, n=1,2,...

4.1 Representação de Grafos

4.1.2 **Matriz de incidência**

Rotulamos as linhas com os vértices e as colunas com as arestas (em alguma ordem arbitrária).

A entrada para a linha *v* e coluna *e* é:

1: se *e* é incidente sobre *v*

0: caso contrário

4.2. Grafos Isomorfos

Instruções são dadas a duas pessoas, que não estão se vendo, para que desenhem e nomeiem 5 vértices *a*, *b*, *c*, *d*, *e*. Conectem *a* e *b*, *b* e *c*, *c* e *d*, *d* e *e*.

São produzidos os grafos da figura 4.1. Estas figuras definem o mesmo grafo, embora possam parecer que sejam dissimilares. Tais grafos são ditos **isomorfos**.

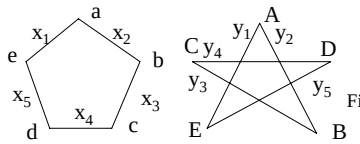


Fig. 4.1: Grafos isomorfos

4.2. Grafos Isomorfos

Definição (6.6.1)

Grafos G_1 e G_2 são **isomorfos** se existe uma função bijetora f dos vértices de G_1 para os vértices de G_2 e uma função bijetora g das arestas de G_1 para as arestas de G_2, de modo que uma aresta *e* é incidente sobre *v* e *w* em G_1 se e somente se a aresta *g(e)* é incidente sobre *f(v)* e *f(w)* em G_2. O par de funções é chamado um isomorfismo de G_1 para G_2.

4.2. Grafos Isomorfos

Um isomorfismo para os grafos G_1 e G_2 da figura 4.1 é definido por:

f(a)=A, f(b)=B, f(c)=C, f(d)=D, f(e)=E

$g(x_i)= y_i$, i=1, .., 5

Se nós definimos uma relação R sobre um conjunto de grafos pela regra $G_1 R G_2$ se G_1 e G_2 são isomorfos, R é uma relação de equivalência. Cada classe de equivalência consiste de um conjunto de grafos mutuamente isomorfos.

4.2. Grafos Isomorfos

Teorema 6.6.4

Seja G_1 e G_2 grafos simples. As afirmações seguintes são equivalentes.

a) G_1 e G_2 são isomorfos.

b) Existe uma função bijetora do conjunto de vértices de G_1 para o conjunto de G_2 satisfazendo: vértices *v* e *w* são adjacentes em G_1 se e somente se os vértices *f(v)* e *f(w)* são adjacentes em G_2.

4.2. Grafos Isomorfos

Teorema 6.6.5

Grafos simples G1 e G2 são isomorfos se e somente se para alguma ordenação de seus vértices, suas matrizes de adjacência são iguais.

Matriz de adjacência de G1 Matriz de adjacência de G2

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

4.2. Grafos Isomorfos

Como determinar se dois grafos são isomorfos?

Algoritmos conhecidos: requerem tempo exponencial ou fatorial , no pior caso.

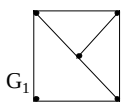
Existe um algoritmo que requer tempo linear, no caso médio.

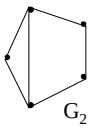
Como mostrar que dois grafos simples G1 e G2 não são isomorfos:

encontrar uma propriedade de G1 que G2 não tem, mas que G2 deveria ter se G1 e G2 fossem isomorfos. Tal propriedade é chamada de invariante.

4.2. Grafos Isomorfos

Se os grafos G1 e G2 são isomorfos então, G1 e G2 têm o mesmo número de arestas e o mesmo número de vértices. Portanto, se *e* e *n* são inteiros não negativos, as propriedades *tem e arestas* e *tem n vértices* são invariantes.





Os grafos G1 e G2 não são isomorfos, pois *G1 tem 7 arestas* e *G2 tem 6 arestas*, e *tem 7 arestas* é um invariante.

Fig. 4.2: grafos não isomorfos

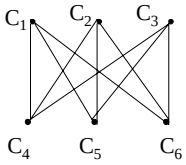
4.2. Grafos Isomorfos

Note que com a verificação de invariantes, como a utilizada no exemplo, podemos dizer que um par de grafos **não são isomorfos**.

Seria fácil testar se um par de grafos são isomorfos, se pudéssemos encontrar um número pequeno de invariantes que fossem facilmente verificadas, as quais grafos isomorfos e somente eles compartilham. Infelizmente, ninguém teve sucesso em encontrar tal conjunto de invariantes.

4.3 Grafos Planares

Três cidades C1, C2 e C3 estão diretamente conectadas por vias expressas para cada três outras cidades C4, C5 e C6. Este sistema rodoviário pode ser projetado tal que as vias não se cruzem?



Grafo $K_{3,3}$

Fig. 4.3: cidades conectadas por vias expressas

4.3 Grafos Planares

Um grafo é **planar** se ele pode ser desenhado no plano sem que haja cruzamento de arestas.

Se um grafo conectado planar é desenhado no plano, o plano é dividido em regiões contíguas chamadas **faces**. Uma face é caracterizada pelo ciclo que forma seu limite.

Por exemplo:

face A: é limitada por (5,2,3,4,5)

face D: é limitada por (1,2,3,4,6,1)

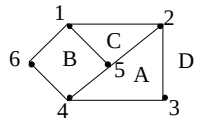


Fig. 4.4: Grafo conectado planar

4.3 Grafos Planares

Fórmula de Euler para grafos

Se *G* é um grafo conectado planar, com *e* arestas, *v* vértices e *f* faces então,

$$f=e-v+2$$

No grafo da figura 4.4, tem-se:

f=4 , e=8 , v=6 . Nota-se que satisfaz a equação.

Esta equação pode ser usada para mostrar que certos grafos não são planares.

4.3 Grafos Planares

Consideremos o grafo $K_{3,3}$ da figura 4.3.

Suponhamos que o grafo $K_{3,3}$ é planar. Desde que cada ciclo tem no mínimo *4* arestas, cada face é delimitada por no mínimo *4* arestas. Portanto o número de arestas que delimitam faces é no mínimo *4f*.

Em um grafo planar, cada aresta pertence no máximo a dois ciclos. Portanto,

$$2e \geq 4f$$

Aplicando a fórmula de Euler para grafos,

$$2e \geq 4(e-v+2)$$

e=9, v=6

$18 = 2 \times 9 \geq 4(9-6+2)=20$

Que é uma contradição. Portanto $K_{3,3}$ não é planar.

4.3 Grafos Planares

O grafo K_5, apresentado na figura 4.5 não é um grafo planar.

Podemos provar, usando os mesmos argumentos utilizados para provar que $K_{3,3}$ não é planar.

Obviamente, se um grafo contem $K_{3,3}$ ou K_5 como um subgrafo, não pode ser planar.

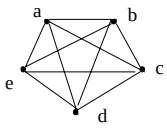


Fig. 4.6: grafo não planar K_5

4.3 Grafos Planares

Para apresentarmos o teorema de Kuratowski, que mostra que um grafo é planar, precisamos apresentar o conceito de grafos homeomorfos, e antes precisamos apresentar o que são subgrafos.

Um subgrafo G' de um grafo G é obtido, selecionando algumas arestas e vértices, sujeito à restrição que se nós selecionamos uma aresta *e* em *G*, que é incidente sobre os vértices *v* e *w*, devemos incluir *v* e *w* em *G'*. A restrição é para garantir que G'é realmente um grafo.

4.3 Grafos Planares

Definição 6.2.8

Seja um grafo G=(V,E). Chamamos (V'E') um subgrafo de G se:

a) V' C V e E'C E

b) Para cada aresta *e'*ε *E'*, se *e'*é incidente sobre *v'*e *w'*, então *v'*, *w'* ε*V'*.

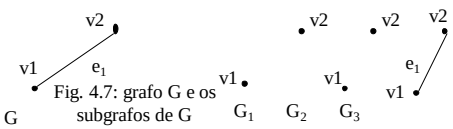


Fig. 4.7: grafo G e os subgrafos de G

4.3 Grafos Planares

Definição 6.7.3

Se um grafo G tem um vértice v de grau 2 e arestas (v,v_1) e (v,v_2), com $v_1 \neq v_2$, dizemos que as arestas (v,v_1) e (v,v_2) estão em série. Uma redução de série consiste em retirar o vértice v do grafo G e substituir as arestas (v,v_1) e (v,v_2) pela aresta (v_1,v_2). O grafo resultante G' é dito ser obtido de G por uma redução de série .

4.3 Grafos Planares

Exemplo:

No grafo da figura 4.8, as arestas *(v,v1)* e *(v,v2)* estão em série. O grafo G' é obtido de G por uma redução de série.

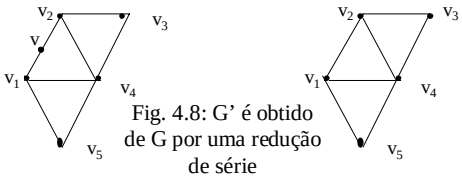


Fig. 4.8: G' é obtido de G por uma redução de série

4.3 Grafos Planares

Definição 6.7.5

Grafos G1 e G2 são homeomorfos se G1 e G2 podem ser reduzidos para grafos isomorfos, realizando reduções de série.

Teorema de Kuratowsky

Um grafo G é planar se e somente se G não contem um subgrafo homeomorfo a K5 ou K3,3

4.3 Grafos Planares

Mostre que o grafo da figura 4.8 não é planar usando o teorema de Kuratowski.

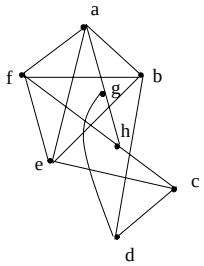


Fig. 4.9: exemplo

4.3 Grafos Planares

Primeiro podemos notar que os vértices *a, b, f,* e *e,* têm grau 4. No $K_{3,3}$, cada vértice tem grau 3. Vamos então eliminar as arestas *(a,b)* e *(f,e)*. Assim todos os vértices passam a ter grau 3.

Segundo, o $K_{3,3}$ tem 9 arestas e 6 vértices, e o grafo da figura 4.9 tem 12 arestas e 8 vértices. Se eliminarmos uma aresta incidente em um vértice(v) com $\delta(v)=3$, tem-se, $\delta(v)=2$, podendo-se aplicar redução de série, pois queremos ter 9 arestas e 6 vértices.

Usando tentativa e erro, vemos que se eliminarmos a aresta *(g,h)* e aplicando a redução de série, obteremos uma cópia isomorfa do $K_{3,3}$. Portanto, o grafo da figura 4.8 não é planar, desde que contem um subgrafo homeomorfo a $K_{3,3}$.

4.3 Grafos Planares

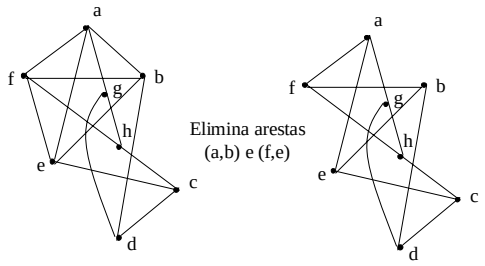
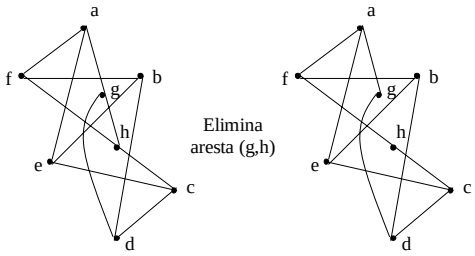
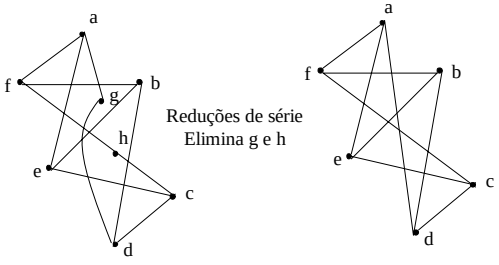


Fig. 4.10: eliminando arestas para obter um subgrafo

4.3 Grafos Planares



4.3 Grafos Planares



Bibliografia

[1] Johnsonbaugh, R. Discrete Mathematics. Prentice Hall International, London, UK, 4th. Ed. 1997. Cap. 6.