**PCS 2215**

**Fundamentos de Engenharia de Computação II**

**Aulas 6-11**

**Árvores**

***Edson Satoshi Gomi***

***Professor Responsável***

*versão: 1.2 (ago 2002)*



## Conteúdo

1. Terminologia e caracterização das árvores.
2. "Spanning trees".
3. Árvores binárias.
4. Métodos de percurso de árvores.
5. Árvores de decisão.



## Introdução

- Árvores formam uma das subclasses de grafos mais utilizadas.
- Árvores são utilizadas, por exemplo, na organização e relacionamento de dados em Banco de Dados.



## Definição : árvore

Definição : uma árvore (livre) *T* é um grafo simples que satisfaz a seguinte condição:

"se *v* e *w* são vértices em *T*, então existe um único caminho simples de *v* a *w*."

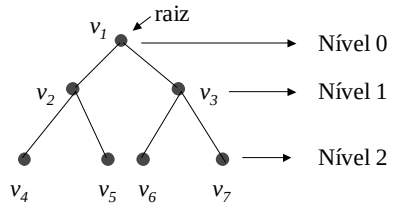
Uma árvore com raiz é uma árvore na qual um vértice particular foi designado como raiz.

## Definições : nível de um vértice e altura de uma árvore

- O nível de um vértice *v* é o comprimento do caminho simples desde a raiz até o vértice *v*.
- O nível da raiz é igual a 0 (zero).
- A altura de uma árvore é igual ao número correspondente ao maior nível que ela possui.



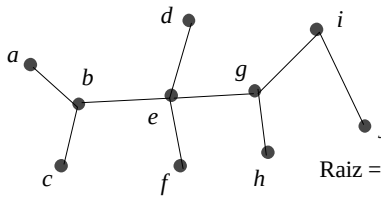
## Exemplo de árvore






## Exercício

Determinar os níveis dos vértices e a altura da árvore a seguir:




Raiz = vértice *e*



## Exemplo de utilização de árvores : Código de Huffman

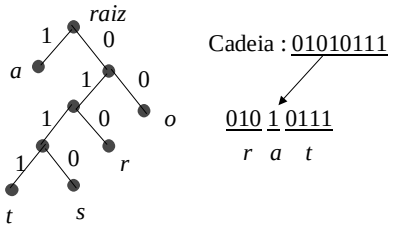
- Geralmente caracteres são representados por códigos formados por um número fixo de bits (por exemplo, código ASCII).
- Códigos de Huffman permitem representar caracteres através de um número variável de bits.

## Código de Huffman - motivação

- A idéia é utilizar menos bits para os caracteres mais utilizados e mais bits para os caracteres menos utilizados.
- Assim, em geral é possível representar cadeias de caracteres (strings), tais como textos e programas, utilizando-se menos bits que um código de comprimento fixo.



## Código de Huffman - exemplo






## Código de Huffman - algoritmo

- Huffman desenvolveu um algoritmo para construir um código de Huffman a partir de uma tabela contendo a frequência de ocorrências dos caracteres a serem representados, tal que o código construído permite representar cadeias de caracteres em espaço mínimo, desde que as frequências dos caracteres de tais cadeias sejam idênticas às da tabela utilizada na construção do código. A demonstração de que o código construído é otimizado pode ser encontrada em [2].



## Algoritmo para construção de um código de Huffman otimizado

**Input:** a sequence of $n$ frequencies ($N \geq 2$).
**Output**: a rooted tree that defines an optimal Huffman code.
**procedure** *huffman(f,n)*
  **if** $n = 2$ **then**
    **begin**
      let $f_1$ and $f_2$ denote the frequencies;
      let $T$ be as in figure 7.1.9;
    **end**
  **else**
      let $f_i$ and $f_j$ denote the smallest frequencies;
      replace $f_i$ and $f_j$ in the list by $f_i + f_j$;
      $T'$ := *huffman(f, n-1);*
      replace vertex in $T'$ labeled $f_i + f_j$ by the tree
        shown in figure 7.1.10 to obtain tree $T$;
  **end;**
  **return** $T$;
**end** *huffman;*

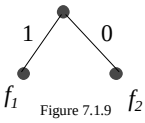


Figure 7.1.9

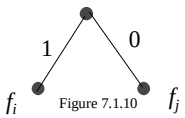


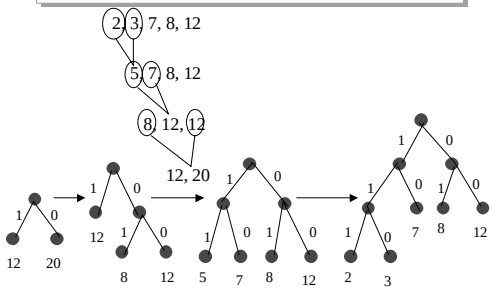
Figure 7.1.10

## Exemplos de caracteres e respectivas frequências

| Caracter | Frequência |
|---|---|
| ! | 2 |
| @ | 3 |
| # | 7 |
| $ | 8 |
| % | 12 |

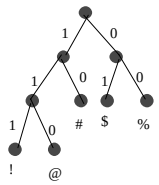


## Exemplo de execução do algoritmo






## Árvore resultante






## Terminologia de árvores (1)

Considere uma árvore $T$ com raiz $v_0$ . Suponha que $x$, $y$ e $z$ sejam vértices em $T$ e que $(v_0 , v_1 , ... , v_n )$ seja um caminho simples em $T$. Então:

- $v_{n-1}$ é o pai de $v_n$ .
- $v_0 , v_1 , ... , v_{n-1}$ são os ancestrais de $v_n$ .
- $v_n$ é um filho de $v_{n-1}$ .
- Se $x$ é um ancestral de $y$, então $y$ é descendente de $x$.

## Terminologia de árvores (2)

- Se *x* e *y* são filhos de *z*, então *x* e *y* são irmãos.
- Se *x* não tem filho, então *x* é um vértice terminal (ou uma folha).
- Se *x* não é um vértice terminal, então *x* é vértice interno.



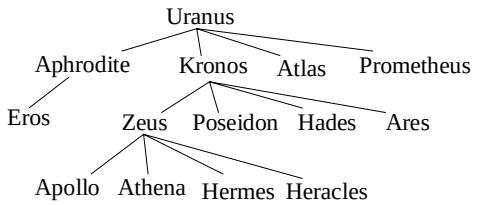
## Terminologia de árvores (3)

- A sub-árvore de *T* com raiz em *x* é o grafo com conjunto de vértices *V* e conjunto de arestas *E*, onde *V* é composto por *x* e seus descentes e

  *E = { e | e* é uma aresta pertencente a um caminho simples de *x* a um vértice em *V }*.



## Exemplo - Família dos Deuses Gregos

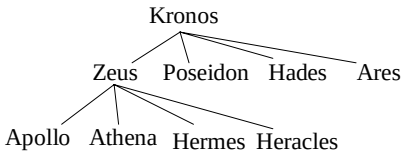





## Exercício : aplicando a terminologia ao exemplo

- O pai de Zeus é Kronos.
- Os ancestrais de Hermes são Zeus, Kronos e Uranus.
- Os filhos de Zeus são Apollo, Athena, Hermes e Heracles.
- Os descendentes de Kronos são Zeus, Poseidon, Hades, Ares, Apollo, Athena, Hermes e Heracles.
- Aphrodite e Prometheus são irmãos.
- Os vértices terminais são Eros, Apollo, Athena, Hermes, Heracles, Poseidon, Hades, Ares, Atlas e Prometheus.
- Os vértices internos são Uranus, Aphrodite, Kronos e Zeus.

## Sub-árvore do exemplo anterior, com raiz em Kronos






## Teorema

Seja *T* um grafo com *n* vértices.

As afirmações seguintes são equivalentes:

- *T* é uma árvore.
- *T* é conectado e acíclico.
- *T* é conectado e tem *n - 1* arestas.
- *T* é acíclico e tem *n - 1* arestas.



## Spanning Trees

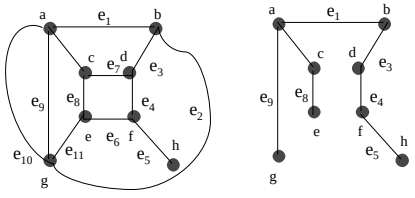
Aqui será discutido o problema de encontrar um sub-grafo *T* de um grafo *G* tal que *T é uma árvore que contém todos os vértices de G.*

A árvore *T* resultante é denominada de "spanning tree".

Em geral, um grafo pode conter várias "spanning trees".



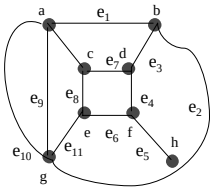
## Exemplo de "spanning tree" (1)



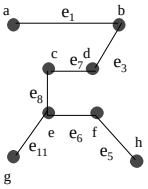

Grafo

Spanning Tree

## Exemplo de “spanning tree” (2)




Grafo




Spanning Tree



## Teorema

Um grafo *G* tem uma “spanning tree” se e somente se *G* é conectado.



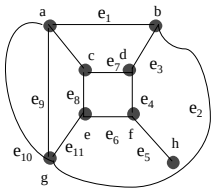
## Procurando uma “spanning tree” : busca em largura

**Input :** a connected graph *G* with vertices ordered $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$
**Output :** a spanning tree *T*.
**procedure** *bfs(V, E)*
// *V'* := vertices of spanning tree *T* ; *E'* := edges of spanning tree *T* ;
// $v_1$ is the root of the spanning tree ; *S* is an ordered list ;
*S* := $(v_1)$;
*V'* = $\{v_1\}$;
*E'* = $\varnothing$ ;
**while** *true* **do**
**begin**
**for** each $x \in S$, in order, **do**
**for** each $y \in V - V'$, in order, **do**
**if** *(x, y)* is an edge **then**
add edge *(x, y)* to *E'* and *y* to *V'*;
**if** no edges were added **then**
**return** *T* ;
*S* := children of *S* ordered consistently, with the original vertex ordering;
**end**;
**end** *bfs*.



## Exercício - “breadth-first search”

Encontre uma “spanning tree” para o grafo *G* abaixo, utilizando o vértice *a* como raiz:



## Solução (1)

- Inicialmente escolha uma ordem para os vértices de *G* : por exemplo, *abcdefgh*.
- Configuração inicial das principais variáveis:
  *E' = ∅  V' = {a}  S= {a}*
- Iteração 1 :
  *E' = { (a,b), (a,c), (a,g) }*
  *V' = { a, b, c, g }  S = {b, c, g}*
- Iteração 2 :
  *E' = { (a,b), (a,c), (a,g), (b,d), (c,e) }*
  *V' = { a, b, c, d, e, g }  S = {d, e}*

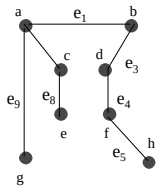


## Solução (2)

- Iteração 3 :
  *E' = { (a,b), (a,c), (a,g), (b,d), (c,e), (d,f) }*
  *V' = { a, b, c, d, e, f, g }  S = { f }*
- Iteração 4 :
  *E' = { (a,b), (a,c), (a,g), (b,d), (c,e), (d,f), (f,h) }*
  *V' = { a, b, c, d, e, f, g, h }  S = { h }*
- Iteração 5 :
  *E' = { (a,b), (a,c), (a,g), (b,d), (c,e), (d,f), (f,h) }*
  *V' = { a, b, c, d, e, f, g, h }  S = ∅*



## Árvore resultante



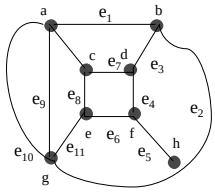



## Procurando uma "spanning tree" : busca em profundidade

**Input :** a connected graph *G* with vertices ordered $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$
**Output :** a spanning tree *T*.
**procedure** *dfs(V, E)*
// *V'* := vertices of spanning tree *T* ; *E'* := edges of spanning tree *T* ;
// $v_1$ is the root of the spanning tree ;
$V' := \{v_1\}$; $E' := \emptyset$ ; $w := v_1$ ;
**while** *true* **do**
**begin**
  **while** there is an edge *(w, v)* that when added to *T* does not create a cycle in *T* **do**
    **begin**
      choose the edge $(w, v_k)$ with minimum *k* that when added to *T* does not create a cycle in *T* ;
      add $(w, v_k)$ to *E'* ; add $v_k$ to *V'*;
      w := $v_k$ ;
    **end**;
  **if** w = $v_1$ **then**
    **return** *T* ;
  *w* := parent of *w* in *T* ; // Backtrack.
**end**;
**end** *dfs*.

## Exercício - “depth-first search”

Encontre uma “spanning tree” para o grafo *G* abaixo, utilizando o vértice *a* como raiz:






## Solução (1)

- Inicialmente escolha uma ordem para os vértices de *G* : por exemplo, *abcdefgh*.
- Configuração inicial das principais variáveis:
  *E’ = ∅ V’ = {a} w = a*
- Passo 1 :
  *E’ = { (a,b) }*
  *V’ = { a, b } w = b*
- Passo 2 :
  *E’ = { (a,b), (b,d) }*
  *V’ = { a, b, d } w = d*



## Solução (2)

- Passo 3 :
  *E’ = { (a,b), (b,d), (d,c)}*
  *V’ = { a, b, c, d } w = c*
- Passo 4 :
  *E’ = { (a,b), (b,d),(d,c),(c,e) }*
  *V’ = { a, b, c, d, e } w = e*



## Solução (3)

- Passo 5 :
  *E’ = { (a,b), (b,d), (d,c), (c,e), (e,f)}*
  *V’ = { a, b, c, d, e, f } w = f*
- Passo 6 :
  *E’ = { (a,b), (b,d),(d,c),(c,e), (e,f), (f,h) }*
  *V’ = { a, b, c, d, e, f, h } w = h // backtrack*

## Solução (4)

- Passo 7 :
  *E' = { (a,b), (b,d), (d,c), (c,e), (e,f), (f,h) }*
  *V' = { a, b, c, d, e, f, h }  w = f  // backtrack*
- Passo 8 :
  *E' = { (a,b), (b,d), (d,c), (c,e), (e,f), (f,h) }*
  *V' = { a, b, c, d, e, f, h }  w = e*



## Solução (5)

- Passo 9 :
  *E' = { (a,b), (b,d), (d,c), (c,e), (e,f), (f,h), (e,g) }*
  *V' = { a, b, c, d, e, f, h, g }  w = e  // backtrack*
- Passo 10 :
  *E' = { (a,b), (b,d), (d,c), (c,e), (e,f), (f,h), (e,g) }*
  *V' = { a, b, c, d, e, f, h, g }  w = c  // backtrack*

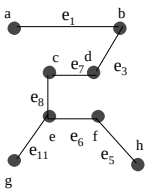


## Solução (6)

- Passo 11 :
  *E' = { (a,b), (b,d), (d,c), (c,e), (e,f), (f,h), (e,g) }*
  *V' = { a, b, c, d, e, f, h, g }  w = d  // backtrack*
- Passo 12 :
  *E' = { (a,b), (b,d), (d,c), (c,e), (e,f), (f,h), (e,g) }*
  *V' = { a, b, c, d, e, f, h, g }  w = b  // backtrack*
- Passo 13 :
  *E' = { (a,b), (b,d), (d,c), (c,e), (e,f), (f,h), (e,g) }*
  *V' = { a, b, c, d, e, f, h, g }  w = a*



## Árvore resultante



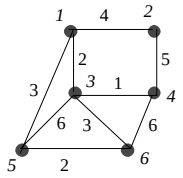
## Comentário

- Ambos os métodos (busca em largura e busca em profundidade) podem ser utilizados para testar se um grafo *G* arbitrário é conectado.



## Minimal Spanning Tree

O grafo ponderado *G* representa 6 cidades e os custos de construção de estradas que interligam duas cidades. Deseja-se construir um sistema de estradas que interligue todas as cidades e que seja o mais barato.






## Esboço da solução

- A solução pode ser representada por um sub-grafo.
- O sub-grafo deve conter todos os vértices (cidades), deve ser conectado (qualquer cidade deve ser atingível a partir de uma determinada cidade) e deve ter um único caminho simples entre cada par de vértices (grafos contendo múltiplos caminhos simples não podem representar um sistema de custo mínimo).
- Assim, o sub-grafo deve ser uma "spanning tree", cuja soma dos pesos de suas arestas é minima. Esse tipo de árvore é denominado de "spanning tree" mínima.

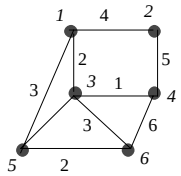


## Definição - Spanning Tree Mínima

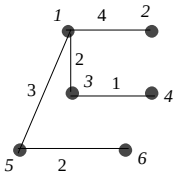
Seja *G* um grafo ponderado.

Uma "spanning tree" mínima de *G* é uma "spanning tree" de *G* com peso (somatória dos pesos das arestas de G) mínimo.

## Exemplo - Spanning Tree Mínima




Grafo




Spanning tree mínima



## Algoritmo de Prim

- Este algoritmo constrói uma árvore adicionando arestas iterativamente, até que uma "spanning tree" mínima seja gerada. A cada iteração é adicionada uma aresta de menor peso que não completa um ciclo para a árvore corrente.
- Entrada do algoritmo : um grafo ponderado conectado, com vértices 1, ..., *n* e vértice inicial *s*. Se *(i,j)* é uma aresta, *w(i,j)* é igual ao peso de *(i,j)*. Se *(i,j)* não é uma aresta, *w(i,j)* é igual a ∞ (um valor maior que qualquer peso existente).
- Saída do algoritmo : o conjunto de arestas *E* de uma "spanning tree" mínima.



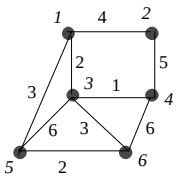
## Algoritmo de Prim

```
procedure prim(w, n, s)
// v(i) = 1 if vertex i has been added to minimal spanning tree (mst). v(i) = 0 otherwise.
for i := 1 to n do
  v(i) := 0 ;
v(s) := 1 ;  // add start vertex to mst.
E := ∅ ;  // begin with an empty edge set.
for i := 1 to n - 1 do  // put n - 1 edges in the minimal spanning tree.
  begin
    min := ∞ ;  // add edge of minimum weigth with one vertex in mst and one vertice not in mst.
    for j := 1 to n do
      if v(j) = 1 then  // j is a vertex in mst.
      for k := 1 to n do
        if v(k) = 0 and w(j,k) < min then
        begin
          add_vertex := k ;   e := (j,k) ;   min := w(j,k) ;
        end;
    v(add_vertex) := 1 ;  // put vertex and edge in mst.
    E := E ∪ {e} ;
  end ;
return E ;
end prim.
```



## Exercício - algoritmo de Prim

Mostre como o algoritmo de Prim encontra uma "spanning tree" mínima para o grafo apresentado abaixo. Assuma que o vértice inicial é o vértice *1*.



## Iteração 1

| Aresta | Peso |
|---|---|
| (1,2) | 4 |
| (1,3) | 2 |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *v(i)* | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *v(i)* | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

*E* = { (1,3) }



## Iteração 2

| Aresta | Peso |
|---|---|
| (1,2) | 4 |
| (1,5) | 3 |
| (3,4) | 1 |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *v(i)* | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *v(i)* | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |

*E* = { (1,3), (3,4) }



## Iteração 3

| Aresta | Peso |
|---|---|
| (1,2) | 4 |
| (1,5) | 3 |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *v(i)* | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *v(i)* | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |

*E* = { (1,3), (3,4), (1,5) }



## Iteração 4

| Aresta | Peso |
|---|---|
| (1,2) | 4 |
| (3,6) | 3 |
| (5,6) | 2 |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *v(i)* | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *v(i)* | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

*E* = { (1,3), (3,4), (1,5), (5,6) }

## Iteração 5

| Aresta | Peso |
|---|---|
| (1,2) | 4 |

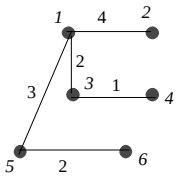
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *v(i)* | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *v(i)* | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

*E* = { (1,3), (3,4), (1,5), (5,6), (1,2) }



## Árvore resultante






## Teorema

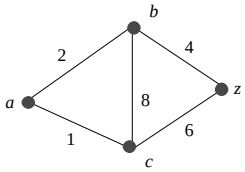
O algoritmo de Prim é correto, isto é, ao término da execução do algoritmo, *T* é uma "spanning tree" mínima.

O algoritmo de Prim é um exemplo de um algoritmo "greedy", ou seja, um algoritmo que otimiza a escolha a cada iteração sem levar em consideração as escolhas prévias.



## Algoritmo Greedy

A figura abaixo mostra o fato de que a seleção de uma aresta incidente sobre o vértice adicionado mais recentemente e que tenha peso mínimo não necessariamente produz o caminho mínimo.



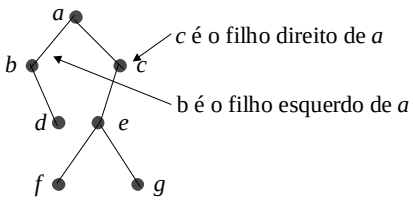

Começando a partir do vértice *a*, obtém-se (*a*, *c*, *z*), mas o caminho mínimo de *a* a *z* é (*a*, *b*, *z*).

## Definição : árvores binárias

Uma árvore binária é uma árvore com raiz na qual cada vértice possui um filho, dois filhos ou nenhum filho. Além disso, cada filho é denominado filho direito (right child) ou filho esquerdo (left child). Quando um vértice possui dois filhos, um deles é denominado de filho direito e o outro recebe o nome de filho esquerdo.



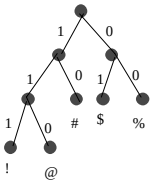
## Exemplo de árvore binária (1)






## Exemplo de árvore binária (2)

Uma árvore que define um código de Huffman é uma árvore binária.






## Teorema

Uma árvore binária completa é uma árvore binária cujos vértices possuem dois filhos ou nenhum filho. O teorema a seguir apresenta um resultado fundamental sobre árvores binárias completas.

Se *T* é uma árvore binária completa, com *i* vértices internos, então *T* possui *i+1* vértices terminais e um total de *2i+1* vértices.

## Teorema

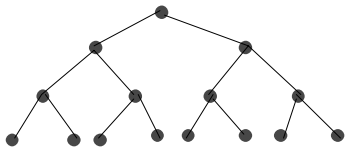
Se uma árvore binária de altura $h$ possui $t$ vértices terminais, então

$$\log_2 t \leq h$$



## Exemplo

Árvore binária de altura $h = 3$ e quantidade de vértices terminais $t = 8$. Para esta árvore binária $\log_2 t = h$ .





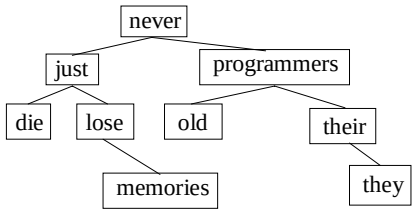
## Definição : árvore de busca binária

Uma árvore de busca binária é uma árvore $T$ na qual dados são associados aos vértices. Os dados são arranjados de tal forma que, para cada vértice $v$ em $T$, cada item de dado na sub-árvore à esquerda de $v$ é menor que o item de dado em $v$ e cada item de dado na sub-árvore à direita de $v$ é maior do que o item de dado em $v$.



## Exemplo : árvore de busca binária

As palavras "old, programmers, never, die, they, just, lose, their, memories" podem ser colocadas numa árvore de busca binária da seguinte forma:



## Algoritmo para construção de uma árvore de busca binária (1)

**Entrada:** uma sequência $w_1$ , ... , $w_n$ , de palavras distintas e o comprimento
*n* da sequência.
**Saída:** uma árvore de busca binária *T*.
**procedure** *make_bin_search_tree(w, n)*
let *T* be the tree with one vertex, *root* ;
store $w_1$ in *root* ;
**for** *i := 2* **to** *n* **do**
**begin**
*v := root* ;
*search := true* ; // find spot for $w_i$
**while** *search* **do**
create binary search tree (see next slide) ;
**end** ;
**end;**
**return** *T* ;
**end** *make_bin_search_tree.*



## Algoritmo para construção de uma árvore de busca binária (2)

```
begin
  s := word in v ;
  if w_i < s then
    if v has no left child then
    begin
      add a left child l to v ;
      store w_i in l ;
      search := false ;   // end search
    end
    else
      v := left child of v ;
else
    if v has no right child then
    begin
      add a right child r to v ;
      store w_i in r ;
      search := false ;   // end search
    end
    else
      v := right child of v ;
end;
```

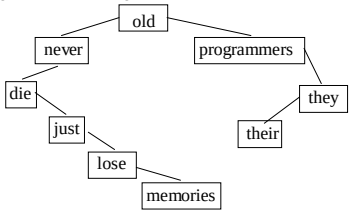


## Exemplo de execução do algoritmo

Considere a seguinte sequência de palavras:

old programmers never die they just lose their memories

O algoritmo constrói a seguinte árvore de busca binária:






## Comentários : árvores de busca binária

- Em geral existem várias maneiras de se inserir dados numa árvore de busca binária. Por exemplo, foram apresentadas nos exemplos anteriores, duas árvores de busca binária distintas para a mesma sequência de palavras.
- Árvore de busca binária são úteis para localizar dados.
- O tempo gasto na busca por um item de dado é maior quando o item não está contido na árvore de busca binária. Nesse caso, o procedimento de busca percorre o caminho mais longo, iniciando-se pela raiz. Assim o tempo máximo de busca por um item de dado é aproximadamente proporcional à altura da árvore. Assim, se a altura de uma árvore de busca binária é pequena, a pesquisa pela árvore sempre será rápida.

## Métodos de percurso de árvores

- A busca em largura e a busca em profundidade proporcionam métodos para "caminhar" numa árvore, isto é, percorrer a árvore sistematicamente de forma que cada vértice é visitado exatamente uma vez.
- A seguir serão considerados três métodos de percurso para árvores binárias: "preorder", "inorder" e "postorder".



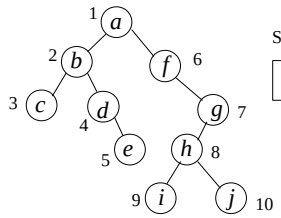
## Percurso "preorder"

**Input :** *PT*, the root of a binary tree
**Output :** dependent on how process command is interpreted.
If process is equivalent to print, then the output is the vertex visiting sequence.

```
procedure preorder(PT)
  if PT is empty then
     return ;
  process PT ;
  l := left child of PT ;
  preorder(l) ;
  r := right child of PT ;
  preorder(r) ;
end preorder.
```



## Exemplo de percurso "preorder"




Sequência a ser impressa:

*a b c d e f g h i j*

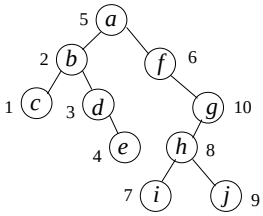


## Percurso "inorder"

**Input :** *PT*, the root of a binary tree
**Output :** dependent on how process command is interpreted.
If process is equivalent to print, then the output is the vertex visiting sequence.

```
procedure inorder(PT)
  if PT is empty then
     return ;
  l := left child of PT ;
  inorder(l) ;
  process PT ;
  r := right child of PT ;
  inorder(r) ;
end inorder.
```

## Exemplo de percurso “inorder”




Sequência a ser impressa:

*c b d e a f i h j g*



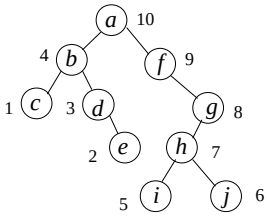
## Percurso “postorder”

**Input :** *PT*, the root of a binary tree
**Output :** dependent on how process command is interpreted.
If process is equivalent to print, then the output is the vertex visiting sequence.

```
procedure postorder(PT)
  if PT is empty then
     return ;
  l := left child of PT ;
  postorder(l) ;
  r := right child of PT ;
  postorder(r) ;
  process PT ;
end postorder.
```



## Exemplo de percurso “postorder”




Sequência a ser impressa:

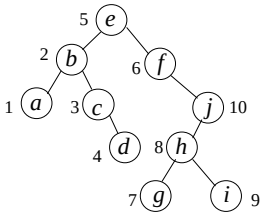
*c e d b i j h g f a*



## Comentário - percurso de árvore

- Se os dados são armazenados numa árvore de busca binária, o percurso “inorder” irá processar os dados “em ordem”, uma vez que a sequência filho esquerdo/raiz/filho direito coincide com a ordenação dos dados na árvore.

## Exemplo - percurso “inorder” numa árvore de busca binária



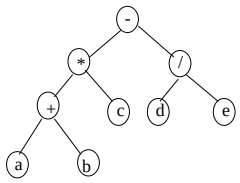

Sequência a ser impressa:

*a b c d e f g h i j*



## Exemplo - representação de expressões aritméticas (1)

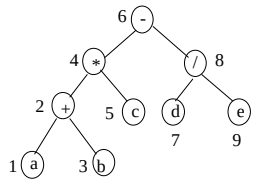
Uma expressão do tipo *(a + b) * c - d / e* pode ser representada na forma de árvore binária. Os vértices terminais correspondem aos operandos e os vértices internos correspondem aos operadores.






## Exemplo - representação de expressões aritméticas (2)

Se for feito o percurso “inorder” da árvore binária e inserido um par de parênteses para cada operação, obtém-se a chamada notação infixa:



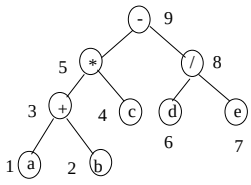

Sequência a ser impressa:

( ( (a+b) * c ) - (d / e ) )



## Exemplo - representação de expressões aritméticas (3)

Se for feito o percurso “postorder” da árvore binária, obtém-se a chamada expressão em notação polonesa reversa, ou notação pósfixa :

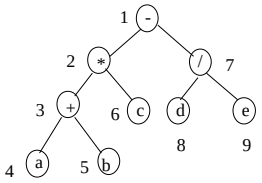



Sequência a ser impressa:

a b + c * d e / -

## Exemplo - representação de expressões aritméticas (4)

Se for feito o percurso “preorder” da árvore binária, obtém-se a chamada expressão em notação polonesa, ou notação prefixa :



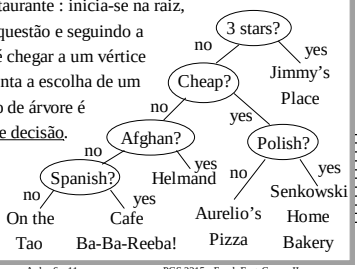

Sequência a ser impressa:

- * + a b c / d e



## Árvores de decisão

A árvore binária ao lado fornece um procedimento para escolher um restaurante : inicia-se na raiz, respondendo a cada questão e seguindo a aresta apropriada, até chegar a um vértice terminal, que representa a escolha de um restaurante. Esse tipo de árvore é chamada de árvore de decisão.





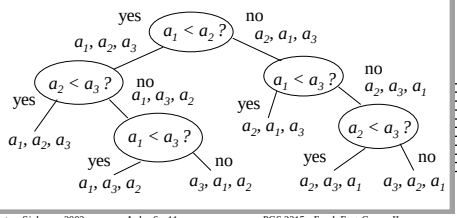

## Tempo mínimo para ordenação (1)

- Pode-se utilizar árvores de decisão para estimar o caso de pior tempo (worst-case time) para ordenação.
- Problema de ordenação : dado $n$ itens $x_1$ , ..., $x_n$ , colocá-los em ordem crescente (ou decrescente).
- A análise será restrita aos algoritmos de ordenação que comparam repetidamente dois elementos e que, com base no resultado da comparação, modificam a lista original.



## Tempo mínimo para ordenação (2)

Um algoritmo para ordenar $a_1$, $a_2$, $a_3$, é dado pela árvore de decisão abaixo. Cada aresta é rotulada com o arranjo da lista com base na resposta da pergunta do vértice interno. Os vértices terminais apresentam a lista ordenada.



## Tempo mínimo para ordenação (3)

Definindo o tempo de pior caso para ordenação como sendo o número de comparações no pior caso, segue que a altura da árvore de decisão que resolve o problema de ordenação é igual ao tempo de pior caso.

Demonstra-se que esse algoritmo é o caso ótimo, ou seja, nenhum algoritmo que ordena três itens tem uma performance melhor que 3 comparações.



## Teorema

Se *f(n)* é o número de comparações necessárias para ordenar *n* itens no pior caso por um algoritmo de ordenação, então

$$f(n) = \Omega ( n \log_2 n )$$



## Bibliografia

[1] Johnsonbaugh, R. Discrete Mathematics. Prentice Hall International, London, UK, 4th. Ed. 1997. Cap. 7.
[2] Cormem, T. H., Leiserson, C. E., and Rivest, R. L. Introduction to Algorithms, MIT Press, Cambridge, Mass., 1990.