

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Utilização de técnicas de identificação de sistemas
aplicadas a veículos aéreos não tripulados (VANTs)

Thomas David Serafini de Oliveira

São Paulo

2007

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

**Utilização de técnicas de identificação de sistemas
aplicadas a veículos aéreos não tripulados (VANTs)**

Trabalho de formatura apresentado à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo para
obtenção do título de Graduação em Engenharia

Thomas David Serafini de Oliveira

Orientador: Ettore Apolonio de Barros

Área de Concentração:
Engenharia Mecânica

São Paulo

2007

FICHA CATALOGRÁFICA

Oliveira, Thomas David Serafini de

Utilização de técnicas de identificação de sistemas aplicadas a veículos aéreos não tripulados (VANTs) / T.D.S. de Oliveira - São Paulo, 2007.

144p.

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1. Aeronaves (Identificação; Sistemas) 2. Identificação (Teoria de sistemas e controle) I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II. t.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a meus pais, Mercedes Serafini e Adilson Carlos de Oliveira, pelo suporte que sempre me deram e criarem um ambiente propício a meu desenvolvimento.

A Camila Freitas Salgueiredo, minha namorada e estudante desta Escola, pela companhia nos últimos quatro anos de Universidade e também pelo auxílio em questões técnicas.

Ao LVNT - Laboratório de Veículos Não Tripulados do Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos da USP, coordenado por meu orientador, e a seu aluno em iniciação científica Marcus Vinícius Silveira Almendo.

À XMobots, empresa de veículos não tripulados desenvolvedora do VANT Apoená I (em parceria com o LVNT), que deu grande suporte a esta pesquisa. Em especial a seus membros Giovani Amianti e João Lucas Dozzi Dantas, que também me orientaram neste trabalho. Desejo-lhes que a sorte de seu empreendimento seja à altura dos esforços e competências investidos, porque assim terão sucesso.

A todos amigos e familiares que não terão seus nomes aqui relacionados, mas que foram de importância tão grande quanto os demais citados. Espero conseguir no dia-a-dia mostrar-lhes meu grande carinho e consideração.

RESUMO

O controle e simulação de veículos não tripulados exigem uma modelagem matemática da sua dinâmica, na qual intervêm parâmetros determinados experimentalmente. Os dados experimentais apresentam imprecisões devido a incertezas dos equipamentos de medição e perturbações aleatórias do ambiente. Este trabalho busca estudar e aplicar técnicas que permitam um melhor aproveitamento das informações disponibilizadas pelos experimentos para a determinação dos parâmetros do sistema e aperfeiçoamento da modelagem dinâmica. Inicia-se pela dedução das equações do movimento e a linearização da dinâmica do veículo. Expõem-se o significado físico das derivadas de estabilidade. São analisados os modos próprios do movimento da aeronave (fugóide, de período curto, espiral, rolamento e “Dutch roll”). O problema da identificação de sistemas é abordado com a definição de uma função custo pelo Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) e pelo Método da Máxima Verossimilhança (ML). Técnicas de minimização são revistas. Apresenta-se uma breve revisão bibliográfica de manobras de entrada utilizadas. As técnicas estudadas são aplicadas a um simulador em MATLAB do veículo VANT Apoená I, da empresa XMobots Sistemas Robóticos LTDA, desenvolvido em parceria com o Laboratório de Veículos Não Tripulados do Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos da EPUSP. Analisam-se os fenômenos que dificultam a correta identificação das derivadas de estabilidade (erros de modelagem e ruídos de medida), acrescentando-os um a um nos experimentos. Por fim, os resultados obtidos são apresentados, comparados e discutidos.

Palavras-chave: Identificação de sistemas. Dinâmica do Voo. Veículos não tripulados. Derivadas de estabilidade.

ABSTRACT

Unmanned vehicles control and simulation require its dynamic mathematical modeling, in which experimentally determined parameters participate. Experimental data present deviations due to equipment precision limitations, random measurement and environment noises. This report covers and applies techniques that allow a more profitable usage of experimentally obtained data to the determination of the system parameters and to the dynamic modeling improvement. It starts by the derivation of the movement equations. The vehicle dynamics are linearized. The physical meaning of stability derivatives is exposed. The phugoid, short period, spiral, roll and Dutch roll motions are analyzed. The identification problem is approached by the definition of a cost function by the Least Square (LSM) and the Maximum Likelihood Method (ML). Minimization techniques are reviewed. Input maneuvers taken from literature are presented. The studied techniques are applied to a MATLAB Simulator of the UAV Apoena I, developed by XMobots Sistemas Robóticos LTDA in partnership with the Laboratório de Veículos Não Tripulados (Unmanned Vehicles Laboratory), Department of Mechatronics and Mechanical Systems Engineering, Universidade de São Paulo. The phenomena that obstruct the proper identification of stability derivatives (modeling error and measurement noise) are added on by one to the experiments. Finally, the results are presented, compared and discussed.

Keywords: System Identification. Flight Dynamics. Unmanned Vehicles. Stability derivatives.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura - 1	Referenciais fixo e móvel	3
Figura - 2	Ângulos da asa e da cauda horizontal	4
Figura - 3	Ângulos de Euler	10
Figura - 4	Efeito do Diedro	43
Figura - 5	Escoamento ao redor de um cilindro	44
Figura - 6	Efeito do Enflechamento	44
Figura - 7	Posicionamento do leme e ângulo de incidência na cauda vertical, para cauda em $z < 0$ - Definição de δ_r	46
Figura - 8	Forças que agem na cauda vertical	47
Figura - 9	Mudança do ângulo de incidência devido ao rolamento	48
Figura - 10	Mudança de velocidades devido à guinada	52
Figura - 11	Definição de δ_e	55
Figura - 12	Definição de δ_a	56
Figura - 13	Identificação de um sistema em laço fechado	74
Figura - 14	Exemplo de Output error method	74
Figura - 15	Exemplo de Input error method	75
Figura - 16	Exemplo de Generalized error method	75
Figura - 17	Comando de profundor utilizado para identificação de uma ae- ronave T-37B[1]	83
Figura - 18	Comando de profundor utilizado para identificação de uma ae- ronave Xavante[2]	83
Figura - 19	Comando de profundor utilizado para identificação de um veículo submarino[3]	83
Figura - 20	Comando utilizado para identificação de uma aeronave F-8[4]	84
Figura - 21	Manobra de Dutch Roll para a identificação de derivadas de uma	

aeronave de transporte regional[5]	84
Figura - 22 Comandos consecutivos de aileron e leme para identificação[6]	85
Figura - 23 Comando de leme para a identificação do navio <i>Sea Scout</i> [7]	85
Figura - 24 Comando utilizado para a identificação de um helicóptero[8]	86
Figura - 25 Utilização de dois pulsos para identificação de um sistema[9]	86
Figura - 26 Entrada utilizada para identificação de um modelo ARX[10]	87
Figura - 27 Vista dimétrica em vôo da Aeronave Apoena I_PP7 (Fonte: XMobots)	89
Figura - 28 Modelo: Longitudinal Linear - Manobra: dois pulsos opostos de profundor	100
Figura - 29 Modelo: Lateral Linear - Manobra: dois pulsos opostos de aileron e dois de leme	101
Figura - 30 Deflexão do profundor/Efeito das não-linearidades	102
Figura - 31 Deflexão do profundor: $A = 2^\circ$ $D = 2$ s	102
Figura - 32 Verde: Medição; Azul: Modelo Linear Valores Corretos; Vermelho: Modelo Linear Valores Identificados. Deflexão do profundor $A = 1^\circ$ $D = 1$ s	104
Figura - 33 Detalhe da evolução de u	105
Figura - 34 Forças X previstas e medida	106
Figura - 35 Termo rw e diferença entre X prevista e medida	107
Figura - 36 Comparação de $\dot{u} + qw$ e \dot{u}	108
Figura - 37 Comparação de $\dot{w} - qu$ e $\dot{w} - qu_0$	108
Figura - 38 Experimento com ruído de medida	109
Figura - 39 Manobra de Validação - Entradas	112
Figura - 40 Manobra de Validação - Saídas (Verde: Medida; Vermelho: Prevista)	112
Figura - 41 Manobra de Validação - Detalhe da trajetória - Vista Superior	113

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1	Grandezas envolvidas na adimensionalização	27
Tabela 5.1	Freqüências e períodos do modos longitudinais - Apoena I	60
Tabela 5.2	Freqüências e períodos do modos longitudinais - Aviação geral	61
Tabela 5.3	Freqüências e períodos do modos laterais - Apoena I	64
Tabela 5.4	Freqüências e períodos do modos laterais - Aviação geral	65
Tabela 5.5	Resultados das aproximações - Movimento Lateral	68
Tabela 5.6	Magnitude relativa dos componentes dos autovetores - Movimento Lateral	68
Tabela 7.1	Especificações físicas da plataforma Apoena I	89
Tabela 7.2	Especificações de desempenho da plataforma Apoena I	89
Tabela 7.3	Características de massa	91
Tabela 7.4	Geometria de referência	91
Tabela 7.5	Condição de vôo de referência	91
Tabela 7.6	Valores para as derivadas de estabilidade e adimensionais do Apoena I	92
Tabela 7.7	Incerteza dos sensores	92
Tabela 7.8	Evolução da estimativa de θ a cada iteração sem o uso do reescalonamento	97
Tabela 7.9	Evolução da estimativa de θ a cada iteração com o uso do reescalonamento	98
Tabela 7.10	Identificação por MMQ do sistema linear sem ruídos - Longitudinal	99
Tabela 7.11	Identificação por MMQ do sistema linear sem ruídos - Lateral	101
Tabela 7.12	MMQ - Simulador Simplificado - Movimento Longitudinal - Dois Pulsos (Figura 30)	103

Tabela 7.13 Identificação por MMQ com ruído de medida - Lateral	109
Tabela 7.14 Identificação por ML com ruído de medida - Lateral	110
Tabela 7.15 Comparação - MMQ e ML com ruído de medida - Lateral	110

SUMÁRIO

1	Introdução	1
2	Visão geral	2
2.1	Superfícies de Controle da aeronave	2
2.2	Descrição da posição e velocidade da aeronave - Jargão aeronáutico	2
2.3	Posição do referencial móvel em relação ao referencial fixo	4
3	Equações de Euler do movimento	5
3.1	Dedução das equações de movimento para um corpo rígido	5
3.1.1	Cálculo de \mathbf{H}	7
3.2	Orientação e posição da aeronave - Ângulos de Euler	9
3.3	Forças e Momentos que agem sobre a aeronave	12
4	Derivadas de estabilidade	14
4.1	Aproximação de primeira ordem	14
4.2	Derivadas de estabilidade	19
4.2.1	Conceito básico.....	19
4.2.2	Notação das derivadas de estabilidade	20
4.3	Separação Lateral - Longitudinal	24
4.4	Adimensionalização	26
4.5	Expressões para C_x e C_z	30
4.6	Expressão para C_m	30
4.6.1	Contribuição da asa para M	30

4.6.2	Contribuição da fuselagem e naceles para M	31
4.6.3	Contribuição da cauda para M	32
4.6.4	Contribuição do sistema de propulsão para M	32
4.7	Derivadas em α	33
4.7.1	Derivadas C_{x_α} e C_{z_α}	35
4.7.2	Derivada C_{L_α}	36
4.7.3	Derivada C_{m_α}	36
4.8	Derivadas em u	36
4.8.1	A derivada C_{x_u} (C_{D_u} e C_{T_u})	37
4.8.2	A derivada C_{z_u}	38
4.8.3	A derivada C_{m_u}	39
4.9	Derivadas em q	40
4.9.1	A derivada C_{z_q}	40
4.9.2	A derivada C_{m_q}	41
4.10	Derivadas em β - Estabilidade e Controle do Rolamento	41
4.10.1	A derivada C_{l_β}	43
4.10.1.1	Influência da Fuselagem em C_{l_β}	43
4.10.1.2	Influência do Enflechamento em C_{l_β}	43
4.10.1.3	Contribuição da cauda vertical para C_{l_β}	45
4.11	Derivadas em p	47
4.11.1	A derivada C_{l_p}	48
4.11.2	A derivada C_{y_p}	49
4.11.3	A derivada C_{n_p}	50
4.11.3.1	Contribuição da asa para N	50
4.11.3.2	Contribuição da cauda vertical para N	51
4.12	Derivadas em r	51

4.12.1	A derivada C_{y_r}	53
4.12.2	A derivada C_{l_r}	53
4.12.3	A derivada C_{n_r}	53
4.13	Derivadas em δ_e	54
4.13.1	A derivada $C_{z_{\delta_e}}$	54
4.13.2	A derivada $C_{m_{\delta_e}}$	55
4.14	Derivadas em δ_a	55
4.14.1	A derivada $C_{l_{\delta_a}}$	56
4.14.2	A derivada $C_{n_{\delta_a}}$	56
4.15	Derivadas em δ_r	56
4.15.1	A derivada $C_{y_{\delta_r}}$	57
4.15.2	A derivada $C_{l_{\delta_r}}$	57
4.15.3	A derivada $C_{n_{\delta_r}}$	57
5	Fenômenos dinâmicos básicos	58
5.1	Movimento Longitudinal	59
5.1.1	Modo Fugóide	61
5.1.2	Modo de Período Curto	63
5.2	Movimento Lateral	64
5.2.1	Modo Espiral	65
5.2.2	Modo de Rolamento	66
5.2.3	Modo “Dutch Roll”	67
5.2.4	Resumo das aproximações - modos laterais	68
6	Técnicas de identificação de sistemas	69
6.1	Classificação dos métodos de identificação de sistemas	70
6.1.1	Classes de modelos	71

6.1.2	Classes de sinais de entrada e ruídos	72
6.1.3	Cálculo do erro[10]	74
6.1.4	Função custo	75
6.1.4.1	Método dos mínimos quadrados (MMQ)	75
6.1.4.2	Método da máxima verossimilhança (ML)	76
6.2	Filtro de Kalman	78
6.3	Métodos de minimização da função custo	80
6.4	Sinais de entrada	82
6.4.1	Movimento Longitudinal	82
6.4.2	Movimento Lateral	83
6.4.3	Outras dinâmicas	85
6.4.4	Resumo dos exemplos	87
7	Aplicação ao VANT Apoena I	88
7.1	Plataforma	89
7.2	Atuadores	90
7.3	Simulador	90
7.4	Erros de modelagem	92
7.5	Detalhes do algoritmo de minimização	94
7.5.1	Definição de uma nova escala	95
7.5.1.1	Exemplo	96
7.6	Estimativa Inicial	97
7.7	Validação da função custo e sua minimização	97
7.7.1	Identificação do movimento longitudinal	98
7.7.2	Identificação do movimento lateral	100
7.8	Efeito de não-linearidades	100
7.8.1	Não-linearidades no modo longitudinal	102

7.9	Efeito dos ruídos de medida	107
7.10	Validação da identificação	111
8	Conclusão e Perspectivas.....	114
	Lista de Referências	115

1 INTRODUÇÃO

O controle de veículos aéreos não tripulados (VANT) e veículos submarinos autônomos (AUV) exigem uma modelagem matemática da sua dinâmica. O conhecimento preciso dessa dinâmica é útil também para o próprio projeto desses veículos.

Nessa modelagem, intervêm parâmetros determinados experimentalmente, observando-se a resposta dos veículos a comandos de entrada (manobras) conhecidos. A experimentação permite também avaliar a validade dos modelos e aperfeiçoá-los. Os dados resultantes de experimentos apresentam, no entanto, imprecisões devido a incertezas dos equipamentos de medição e perturbações aleatórias no ambiente em que o experimento é feito. Além disso, simplificações feitas na modelagem do sistema trazem imprecisões adicionais. A presença desses ruídos dificulta a determinação dos parâmetros do sistema.

O presente projeto busca estudar e aplicar técnicas que permitam um melhor aproveitamento das informações disponibilizadas pelos experimentos para a determinação dos parâmetros do sistema e aperfeiçoamento da modelagem dinâmica.

Dentre as técnicas que serão estudadas estão: método dos mínimos quadrados, método da máxima verossimilhança e filtros de Kalman.

A aplicação desses métodos foi realizada em um simulador em MATLAB do VANT Apoena I, da empresa XMobots Sistemas Robóticos LTDA, desenvolvido em parceria com o Laboratório de Veículos Não Tripulados do Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos da EPUSP.

Como a física envolvida no deslocamento de um veículo submarino é semelhante àquela envolvida no deslocamento de um veículo aéreo, muitas idéias e desenvolvimentos aqui expostos para VANTs podem ser transpostos para AUVs.

2 VISÃO GERAL

2.1 Superfícies de Controle da aeronave

O controle da aeronave é feito por variações nas forças de propulsão e nas forças aerodinâmicas. Variações no sistema de propulsão são utilizadas para que a nave como um todo tenha mais ou menos energia mecânica. O controle de trajetória fica a cargo de variações nas forças aerodinâmicas, que são obtidas com a variação da forma da aeronave. Basicamente, uma aeronave possui três tipos de superfícies móveis, utilizadas para o controle da trajetória e por isso denominadas superfícies de controle. São elas: profundor (ver parágrafo 4.13), aileron e leme.

2.2 Descrição da posição e velocidade da aeronave - Jargão aeronáutico

Para se descrever a posição da aeronave no espaço, dois referenciais serão utilizados: um referencial fixo à Terra e um referencial solidário ao corpo, chamado de *referencial móvel*. O uso de um referencial solidário ao corpo permite que a descrição geométrica da aeronave nesse referencial não varie com o tempo. A figura 1 ilustra os conceitos que serão apresentados a seguir.

O referencial fixo à Terra será considerado inercial, ou seja, os movimentos de rotação (e, *a fortiori*, de translação) da Terra serão desprezados diante o movimento da aeronave. Essa consideração não pode ser feita para casos de vôo extra-atmosférico, por exemplo. O referencial móvel será localizado no centro de massa da aeronave e, para o uso de um sistema retangular de coordenadas, ele será orientado da seguinte forma:

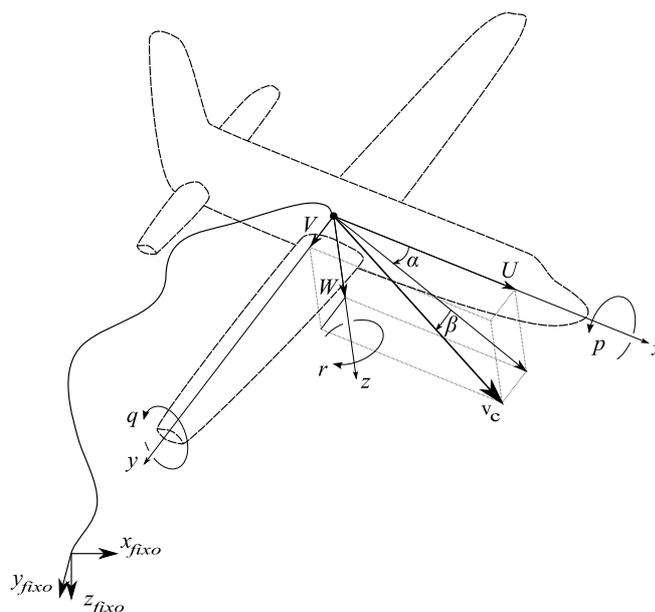


Figura 1 – Referenciais fixo e móvel

- o plano xz é o plano de simetria da aeronave;
- para um vôo nivelado, o eixo z é orientado verticalmente para baixo;
- os versores dos eixos x, y, z constituem uma base ortonormal positiva.

O eixo x é chamado de linha de referência da fuselagem (LRF).

A velocidade \mathbf{v}_c do centro de massa pode ser decomposta no referencial móvel em três componentes u, v e w , ao longo de x, y e z respectivamente. Da mesma forma, as forças aerodinâmicas que agem sobre o centro de massa são decompostas em X, Y e Z . As forças aerodinâmicas também são por vezes decompostas em direções relativas à velocidade \mathbf{V}_∞ do vento visto pela aeronave: a componente ortogonal a \mathbf{V}_∞ é a força de sustentação \mathbf{L} e a componente paralela, mas de sentido oposto a \mathbf{V}_∞ é chamada de força de arrasto \mathbf{D} .

A velocidade angular e o momento aplicado ao avião também são decompostos no referencial móvel. As taxas rotações em torno de x, y e z , são designadas por p, q e r , respectivamente, e a resultante dos momentos no centro de massa por L, M, N . No jargão aeronáutico, p é o *rolamento*, q é a *arfagem*, e r é a *guinada*. Diz-se “*cabrar*” (“*picar*”) para um movimento em que p é positivo (negativo).

O ângulo de ataque α é definido por:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{w}{u}\right) \quad (1)$$

Ou seja, é o ângulo entre o eixo x e a projeção de \mathbf{v}_c no plano xz , medido a partir do eixo x . É medido, portanto, em relação à LRF. Vale frisar que não se trata necessariamente do ângulo de ataque dos perfis aerodinâmicos, que podem ser montados com suas linhas médias inclinadas em relação à LRF.

O ângulo de deriva β é definido por:

$$\beta = \arcsin\left(\frac{v}{v_C}\right) \quad (2)$$

Ou seja, é o ângulo entre o eixo x e \mathbf{v}_c , medido a partir do eixo x .

2.3 Posição do referencial móvel em relação ao referencial fixo

Vimos como a posição e o movimento da aeronave são descritos no referencial móvel. Vejamos agora como a posição do referencial móvel é descrita em relação ao referencial fixo. Assim, poderemos, através de considerações trigonométricas, descrever a posição e o movimento da aeronave no referencial fixo.

Os ângulos formados entre os perfis aerodinâmicos (asas e cauda) e a LRF recebem o nome de ângulos de incidência i_w (para asa) e i_t (para a cauda), e são positivos no sentido indicado na figura 2.

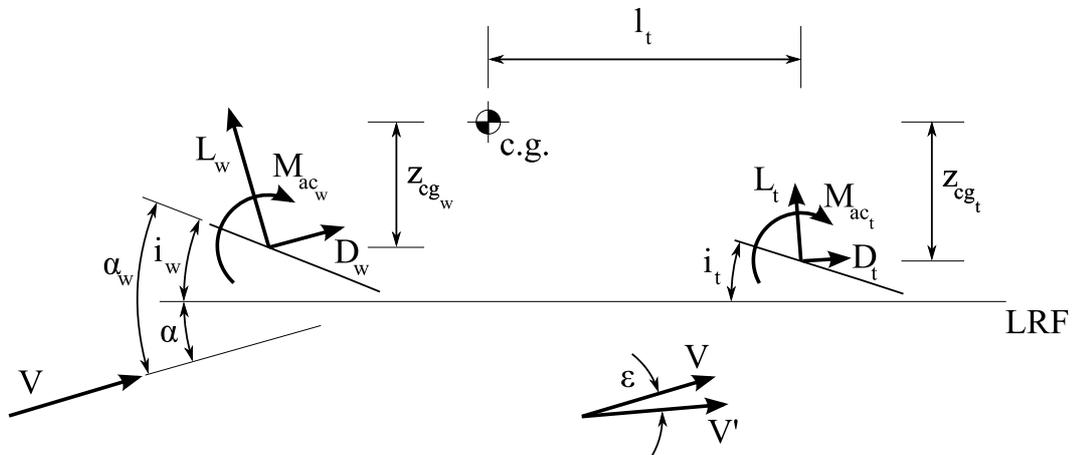


Figura 2 – Ângulos da asa e da cauda horizontal. Figura baseada em [11]

3 EQUAÇÕES DE EULER DO MOVIMENTO

Deduziremos as equações de movimento da aeronave para explicitar a passo a passo as hipóteses simplificadoras adotadas.

Não serão consideradas nesse trabalho as deformações que a aeronave sofre quando submetida a esforços aerodinâmicos. O estudo dessas variações de forma e suas conseqüências para a dinâmica do vôo leva o nome de *aeroelasticidade*. A geometria que será tomada como referência é a da aeronave em vôo nivelado a uma velocidade constante típica.

Além disso, a aeronave, com exceção das superfícies de controle (ver parágrafo 2.1), que são móveis, será considerada como um corpo rígido.

3.1 Dedução das equações de movimento para um corpo rígido

Temos da segunda lei de Newton, as seguintes equações para a quantidade de movimento linear e angular em relação a um referencial inercial:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \quad (3)$$

$$\mathbf{M} = \frac{d}{dt}\mathbf{H} \quad (4)$$

As componentes de \mathbf{F} , \mathbf{M} , \mathbf{v} e \mathbf{H} ao longo dos eixos x , y , z são tais que:

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \quad (5)$$

$$\mathbf{M} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k} \quad (6)$$

$$\mathbf{v} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k} \quad (7)$$

$$\mathbf{H} = H_x\mathbf{i} + H_y\mathbf{j} + H_z\mathbf{k} \quad (8)$$

De forma que:

$$F_x = \frac{d}{dt}(mu) \quad F_y = \frac{d}{dt}(mv) \quad F_z = \frac{d}{dt}(mw) \quad (9)$$

$$L = \frac{d}{dt} H_x \quad M = \frac{d}{dt} H_y \quad N = \frac{d}{dt} H_z \quad (10)$$

Para uma massa elementar δm do avião, movendo-se a uma velocidade \mathbf{v} , e submetida a uma força elementar $\delta \mathbf{F}$, temos:

$$\delta \mathbf{F} = \frac{d}{dt}(\mathbf{v} \delta m) \quad (11)$$

A velocidade da massa elementar δm é

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_c + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (12)$$

onde \mathbf{v}_c é a velocidade do centro de massa da aeronave e \mathbf{r} é o vetor posição de δm em relação ao centro de massa.

Substituindo as eq.11 e eq.12 em eq.3, tem-se

$$\mathbf{F} = \sum \delta \mathbf{F} = \sum \frac{d}{dt} \left(\left(\mathbf{v}_c + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \delta m \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum \mathbf{v}_c \delta m + \frac{d}{dt} \sum \mathbf{r} \delta m \right) \quad (13)$$

Como \mathbf{r} é medido a partir do centro de massa

$$\sum \mathbf{r} \delta m = \mathbf{0} \quad (14)$$

Assumindo ainda que a massa da aeronave é constante,

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \sum \mathbf{v}_c \delta m = \frac{d}{dt} \left(\mathbf{v}_c \sum \delta m \right) = \frac{d}{dt} (\mathbf{v}_c m) = m \frac{d\mathbf{v}_c}{dt} \quad (15)$$

Para a equação da quantidade de movimento angular eq.4, procederemos de maneira semelhante. Para uma massa elementar δm ,

$$\delta \mathbf{H} = (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \delta m \quad (16)$$

$$\frac{d}{dt} \delta \mathbf{H} = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \delta m = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{v} \delta m + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \delta m \quad (17)$$

Mas $(d\mathbf{v}/dt) \delta m = \delta \mathbf{F}$, e $\mathbf{r} \times \delta \mathbf{F} = \delta \mathbf{M}$. Além disso, $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v} - \mathbf{v}_c$ e $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$ (o produto vetorial de dois vetores paralelos é nulo). Assim;

$$\frac{d}{dt} \delta \mathbf{H} = -\mathbf{v}_c \times \mathbf{v} \delta m + \delta \mathbf{M} \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
\sum \frac{d}{dt} \delta \mathbf{H} &= \frac{d}{dt} \sum \delta \mathbf{H} = \frac{d\mathbf{H}}{dt} = \sum -\mathbf{v}_c \times \mathbf{v} \delta m + \sum \delta \mathbf{M} \\
&= -\mathbf{v}_c \times \sum \mathbf{v} \delta m + \mathbf{M} \\
&= -\mathbf{v}_c \times \mathbf{v}_c + \mathbf{M} \\
&= \mathbf{M}
\end{aligned} \tag{19}$$

3.1.1 Cálculo de \mathbf{H}

Da definição de \mathbf{H} ,

$$\mathbf{H} = \sum \delta \mathbf{H} = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \delta m \tag{20}$$

Vimos que $\mathbf{v} = \mathbf{v}_c + d\mathbf{r}/dt$. Mas ainda, $d\mathbf{r}/dt = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, assim

$$\mathbf{H} = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \delta m = \sum (\mathbf{r} \times (\mathbf{v}_c + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})) \delta m = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{v}_c \delta m + \sum \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \delta m \tag{21}$$

Na parcela da esquerda, \mathbf{v}_c é constante no somatório e como $\sum \mathbf{r} \delta m = 0$, $\sum (\mathbf{r} \times \mathbf{v}_c) \delta m = 0$. Assim

$$\mathbf{H} = \sum \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \delta m \tag{22}$$

Decompondo \mathbf{r} e $\boldsymbol{\omega}$ em suas componentes, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $\boldsymbol{\omega} = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k}$, pode-se expandir a equação acima, obtendo como resultado:

$$\mathbf{H} = (p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k}) \sum (x^2 + y^2 + z^2) \delta m - \sum (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})(px + qy + rz) \delta m \tag{23}$$

ou em suas componentes escalares

$$H_x = p \sum (y^2 + z^2) \delta m - q \sum xy \delta m - r \sum xz \delta m \tag{24}$$

$$H_y = -p \sum xy \delta m + q \sum (x^2 + z^2) \delta m - r \sum xy \delta m \tag{25}$$

$$H_z = -p \sum xz \delta m - q \sum yz \delta m + r \sum (x^2 + y^2) \delta m \tag{26}$$

Os somatórios que figuram nas três equações acima podem ser expressos

em termos de integrais e são denominados como se segue:

$$I_x = \iiint (y^2 + z^2) dm \quad (27)$$

$$I_y = \iiint (x^2 + z^2) dm \quad (28)$$

$$I_z = \iiint (x^2 + y^2) dm \quad (29)$$

$$I_{xy} = \iiint xy dm \quad (30)$$

$$I_{xz} = \iiint xz dm \quad (31)$$

$$I_{yz} = \iiint yz dm \quad (32)$$

Os termos I_x , I_y , I_z são denominados momentos de inércia em relação aos eixos x , y e z respectivamente e os termos I_{xy} , I_{xz} e I_{yz} são os produtos de inércia. Se o sistema de eixo for tal que Oxz seja um plano de simetria, os produtos de inércia I_{xy} e I_{yz} se anulam, e eq.24, eq.25 e eq.26 ficam simplesmente:

$$H_x = pI_x - rI_{xz} \quad (33)$$

$$H_y = qI_y \quad (34)$$

$$H_z = -pI_{xz} + rI_z \quad (35)$$

As eq.24, eq.25, eq.26 podem ser reescritas como

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{pmatrix} \boldsymbol{\omega} \quad (36)$$

A matriz acima que relaciona $\boldsymbol{\omega}$ e \mathbf{H} é denominada matriz de inércia do corpo. Os termos dessa matriz refletem características da geometria do corpo e a distribuição de massa ao longo desta.

A variação com o tempo da matriz de inércia ofereceria dificuldades suplementares para o equacionamento do movimento do corpo. É interessante, portanto, calcular-se a matriz de inércia em relação a um referencial solidário ao corpo, de forma que ela seja constante. No entanto, as eq.15 e eq.20 para as quantidades de movimento linear e angular foram deduzidas para um referencial inercial. Devemos então achar seus equivalentes para um referencial rotativo.

Para isso utilizaremos a identidade vetorial

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\delta\mathbf{A}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} \quad (37)$$

O termo $d\mathbf{A}/dt$ representa a derivada temporal de \mathbf{A} no referencial inercial. O termo $\delta\mathbf{A}/\delta t$ representa a derivada temporal de \mathbf{A} no referencial solidário ao corpo. $\boldsymbol{\omega}$ é a velocidade angular do corpo.

Aplicando-se essa identidade a eq.15 e eq.20, temos

$$\mathbf{F} = m \frac{\delta\mathbf{v}_c}{\delta t} + m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_c) \quad (38)$$

$$\mathbf{M} = \frac{\delta\mathbf{H}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} \quad (39)$$

ou, em componentes escalares

$$F_x = m(\dot{u} + qw - rv) \quad (40)$$

$$F_y = m(\dot{v} + ru - pw) \quad (41)$$

$$F_z = m(\dot{w} + pv - qu) \quad (42)$$

$$L = \dot{H}_x + qH_z - rH_y \quad (43)$$

$$M = \dot{H}_y + rH_x - pH_z \quad (44)$$

$$N = \dot{H}_z + pH_y - qH_x \quad (45)$$

Essas equações de movimento em que se adota um sistema de referência fixo ao corpo são conhecidas como *Equações de movimento de Euler*.

3.2 Orientação e posição da aeronave - Ângulos de Euler

Como o referencial é fixo à aeronave, conhecer a posição e orientação da aeronave equivale a conhecer a posição e orientação deste referencial móvel em relação a um referencial inercial, fixo à Terra.

Sejam $O_f x_f y_f z_f$ o referencial fixo à Terra, com Ox_f horizontal e Oz_f no sentido vertical para baixo, e $Oxyz$ o referencial móvel, fixo à aeronave. No instante $t = 0$, $O_f x_f y_f z_f$ e $Oxyz$ coincidem. Para $t > 0$, a origem de $Oxyz$ é descrita por suas coordenadas no referencial $O_f x_f y_f z_f$, e a orientação de $Oxyz$ é

descrita através dos *ângulos de Euler*, da seguinte maneira.

Imagine inicialmente que o referencial $Oxyz$ do avião seja paralelo a $O_f x_f y_f z_f$, e aplique a $Oxyz$, na ordem, as seguintes rotações:

- uma rotação de Ψ em torno de Oz_f , definindo $Ox_1y_1z_1$ (e o ângulo final de guinada)
- uma rotação de Θ em torno de Oy_1 , definindo $Ox_2y_2z_2$ (e o ângulo final de arfagem)
- uma rotação de Φ em torno de Ox_2 , definindo $Oxyz$ (e o ângulo final de rolamento)

Os ângulos Ψ , Θ e Φ são os ângulos de Euler, ilustrados na figura 3.

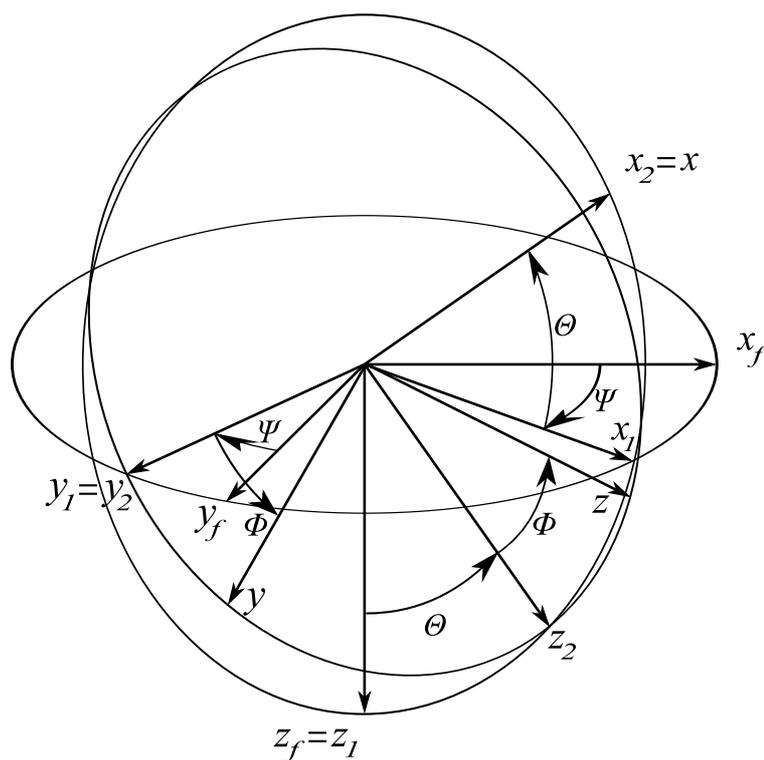


Figura 3 – Ângulos de Euler

A posição da aeronave no referencial fixo pode ser obtida a partir da história das velocidades da aeronave em relação a esse referencial. A relação entre as velocidades no referencial solidário à aeronave e no referencial fixo podem ser

obtidas utilizando-se relações trigonométricas, a partir da figura 3:

$$\begin{bmatrix} u_f \\ v_f \\ w_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Psi & -\sin \Psi & 0 \\ \sin \Psi & \cos \Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Theta & 0 & \sin \Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \Theta & 0 & \cos \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Phi & -\sin \Phi \\ 0 & \sin \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (48)$$

Ou, multiplicando-se as três matrizes de rotação, e notando $S_x = \sin x$, $C_x = \cos x$:

$$\begin{bmatrix} u_f \\ v_f \\ w_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\Psi C_\Theta & C_\Psi S_\Theta S_\Phi - S_\Psi C_\Phi & C_\Psi S_\Theta C_\Phi + S_\Psi S_\Phi \\ S_\Psi C_\Theta & S_\Psi S_\Theta S_\Phi + C_\Psi C_\Phi & S_\Psi S_\Theta C_\Phi - C_\Psi S_\Phi \\ -S_\Theta & C_\Theta S_\Phi & C_\Theta C_\Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (49)$$

Integrando-se (u_f, v_f, w_f) , tem-se a posição (X_f, Y_f, Z_f) da aeronave.

Para a orientação da aeronave, procede-se de forma similar, escrevendo-se (p, q, r) em função de $(\dot{\Psi}, \dot{\Theta}, \dot{\Phi})$.

O versor de rotação em torno de Ψ escreve-se na base $Ox_f y_f z_f$ $(0, 0, 1)_f$. Resolvendo para a base $Oxyz$, utilizando a eq.49, $(0, 0, 1)_f = (-\sin \Theta, \cos \Theta \sin \Phi, \cos \Theta \cos \Phi)$. Da mesma forma, o versor de rotação em torno de Θ pode ser escrito $(0, 1, 0)_1 = (0, \cos \Phi, -\sin \Phi)$. E o versor de rotação em torno de Φ pode ser escrito $(1, 0, 0)_2 = (1, 0, 0)$. Assim, pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \Theta & 0 & 1 \\ \cos \Theta \sin \Phi & \cos \Phi & 0 \\ \cos \Theta \cos \Phi & -\sin \Phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\Psi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Phi} \end{bmatrix} \quad (50)$$

Ou, invertendo-se, a matriz,

$$\begin{bmatrix} \dot{\Psi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sin \Phi}{\cos \Theta} & \frac{\cos \Phi}{\cos \Theta} \\ 0 & \cos \Phi & -\sin \Phi \\ 1 & \sin \Phi \tan \Theta & \cos \Phi \tan \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (51)$$

Integrando-se a eq.51, determina-se a orientação da aeronave.

3.3 Forças e Momentos que agem sobre a aeronave

Todas as forças e momentos aplicados à aeronave podem ser reduzidos a uma força e um momento aplicado em seu centro de massa.

Para um vôo simétrico, temos que \mathbf{M} é paralelo a y , e \mathbf{F} está no plano xz . \mathbf{F} é formada por contribuições da força gravitacional \mathbf{W} (*weight*, peso), força propulsiva \mathbf{T} (*thrust*, propulsão) e força aerodinâmica \mathbf{A} . Esta última é geralmente expressa em termos de duas componentes ortogonais. A decomposição costuma ser feita em relação ao referencial Oxyz, obtendo-se $\mathbf{X}_A \parallel \hat{\mathbf{x}}$ e $\mathbf{Y}_A \parallel \hat{\mathbf{y}}$ ou em relação à velocidade \mathbf{v}_c , obtendo-se $\mathbf{D} \parallel \mathbf{v}_c$ e $\mathbf{L} \perp \mathbf{v}_c$. \mathbf{L} é a sustentação (*lift*) e \mathbf{D} é o arrasto (*drag*). Atenção ao sinal na definição do arrasto: ele é sempre positivo.

Decompondo \mathbf{W} no referencial solidário à aeronave, tem-se

$$X_g = -W \sin \Theta \quad (52)$$

$$Y_g = W \cos \Theta \sin \Phi \quad (53)$$

$$Z_g = W \cos \Theta \cos \Phi \quad (54)$$

onde $W = mg$.

Chamando as componentes de $\mathbf{T} + \mathbf{A}$ segundo x, y, z de X, Y, Z , respectivamente, as forças aplicadas à aeronave têm como resultante

$$F_x = X + X_g \quad (55)$$

$$F_y = Y + Y_g \quad (56)$$

$$F_z = Z + Z_g \quad (57)$$

Por estarmos considerando as forças aplicadas no centro de massa, \mathbf{W} não gera momento. O momento gerado por $\mathbf{T} + \mathbf{A}$, decomposto em x, y, z será

notado L , M , N , respectivamente.

Agora já podemos escrever as equações de movimento da aeronave. De eq.40 a eq.45, eq.51 e eq.49 a eq.57 temos:

$$X - mg \sin \Theta = m(\dot{u} + qw - rv) \quad (58)$$

$$Y + mg \cos \Theta \sin \Phi = m(\dot{v} + ru - pw) \quad (59)$$

$$Z + mg \cos \Theta \cos \Phi = m(\dot{w} + pv - qu) \quad (60)$$

$$L = \dot{H}_x + qH_z - rH_y \quad (61)$$

$$M = \dot{H}_y + rH_x - pH_z \quad (62)$$

$$N = \dot{H}_z + pH_y - qH_x \quad (63)$$

$$\begin{bmatrix} u_f \\ v_f \\ w_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\Psi C_\Theta & C_\Psi S_\Theta S_\Phi - S_\Psi C_\Phi & C_\Psi S_\Theta C_\Phi + S_\Psi S_\Phi \\ S_\Psi C_\Theta & S_\Psi S_\Theta S_\Phi + C_\Psi C_\Phi & S_\Psi S_\Theta C_\Phi - C_\Psi S_\Phi \\ -S_\Theta & C_\Theta S_\Phi & C_\Theta C_\Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\Psi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sin \Phi}{\cos \Theta} & \frac{\cos \Phi}{\cos \Theta} \\ 0 & \cos \Phi & -\sin \Phi \\ 1 & \sin \Phi \tan \Theta & \cos \Phi \tan \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (65)$$

4 DERIVADAS DE ESTABILIDADE

4.1 Aproximação de primeira ordem

Modelar um sistema pode ser visto como conhecer as equações que regem a evolução das variáveis de estado. Essas equações podem, de modo geral, ser escritas como as variações de variáveis de estado em função delas mesmas e de comando externos. Ou seja,

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (66)$$

Tal função f pode ser bastante complicada. No entanto, em inúmeros casos práticos pode-se utilizar uma aproximação de primeira ordem. Em outras palavras, f pode ser representada por sua série de Taylor:

$$\dot{x} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{1}{n!} \frac{\partial^{m+n} f(x_0, u_0)}{\partial x^m \partial u^n} (x - x_0)^m (u - u_0)^n \quad (67)$$

Se essa série de Taylor for truncada e considerarmos somente as parcelas para $m, n < 2, mn = 0$, teremos uma aproximação de primeira ordem, de forma que

$$f(x, u) \approx f(x_0, u_0) + \frac{\partial f(x_0, u_0)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, u_0)}{\partial u} (u - u_0) \quad (68)$$

A aproximação de primeira ordem fornece bons resultados para trajetórias em que (x, u) não se distanciem muito de (x_0, u_0) . O que é um “bom resultado” e o que é “não se distanciam muito” dependem da aplicação em que se visa a utilizar essa técnica, e fica a cargo do engenheiro julgar, apoiado em validações experimentais.

As equações de movimento eq.58 a eq.60 não são lineares. Fazendo-se uma aproximação de primeira ordem, pode-se linearizá-las, o que torna o tratamento matemático mais fácil, além de permitir um separação do sistema em dois sistemas independentes, como veremos mais adiante.

Vamos linearizá-las em torno de um estado de equilíbrio (x_0, u_0) , chamado estado de referência. Por ser um estado de equilíbrio, $\dot{x} = 0$. O estado de referência é escolhido tal que

- a aeronave realize um vôo simétrico $\Rightarrow \Phi_0 = 0, v_0 = 0$
- avance na direção do eixo $x \Rightarrow w_0 = 0$
- sem acelerações $\Rightarrow [\dot{u} \ \dot{v} \ \dot{w}]' = [0 \ 0 \ 0]'$
- sem velocidades angulares $\Rightarrow [p \ q \ r]' = [0 \ 0 \ 0]'$

Os ângulos Ψ e Θ que descrevem a orientação da aeronave não são necessariamente pequenos e valem Ψ_0 e Θ_0 .

Para que a linearização seja válida, as grandezas que descrevem o estado da aeronave não devem variar muito em torno do estado de referência. O valor de uma grandeza não nula no estado de referência é indicado pelo índice $_0$, e uma pequena variação em torno desse valor é representada pelo prefixo Δ . As grandezas que são nulas no estado de referência manterão a mesma notação.

$$X = X_0 + \Delta X \quad Z = Z_0 + \Delta Z \quad (69)$$

$$u = u_0 + \Delta u \quad \Psi = \Psi_0 + \Delta\Psi \quad \Theta = \Theta_0 + \Delta\Theta \quad (70)$$

Como veremos, Y , L , M e N são nulos no estado de referência. No entanto, utilizaremos provisoriamente nesta seção a seguinte notação:

$$Y = Y_0 + \Delta Y \quad L = L_0 + \Delta L \quad (71)$$

$$M = M_0 + \Delta M \quad N = N_0 + \Delta N \quad (72)$$

As relações trigonométricas são também aproximadas:

$$\begin{aligned}\sin(\Psi_0 + \Delta\Psi) &= \sin \Psi_0 \cos \Delta\Psi + \cos \Psi_0 \sin \Delta\Psi \\ &\approx \sin \Psi_0 + \Delta\Psi \cos \Psi_0\end{aligned}\quad (73)$$

$$\begin{aligned}\cos(\Psi_0 + \Delta\Psi) &= \cos \Psi_0 \cos \Delta\Psi - \sin \Psi_0 \sin \Delta\Psi \\ &\approx \cos \Psi_0 - \Delta\Psi \sin \Psi_0\end{aligned}\quad (74)$$

$$\begin{aligned}\sin(\Theta_0 + \Delta\Theta) &= \sin \Theta_0 \cos \Delta\Theta + \cos \Theta_0 \sin \Delta\Theta \\ &\approx \sin \Theta_0 + \Delta\Theta \cos \Theta_0\end{aligned}\quad (75)$$

$$\begin{aligned}\cos(\Theta_0 + \Delta\Theta) &= \cos \Theta_0 \cos \Delta\Theta - \sin \Theta_0 \sin \Delta\Theta \\ &\approx \cos \Theta_0 - \Delta\Theta \sin \Theta_0\end{aligned}\quad (76)$$

$$\sin \Phi \approx \Phi \quad (77)$$

$$\cos \Phi \approx 1 \quad (78)$$

O produto de duas pequenas variações é considerado um termo de segundo ordem e suposto desprezável em comparação aos termos de primeira ordem.

Ex.: $qw \approx 0$, $rv \approx 0$, $qH_z = -qpI_{xz} + qrI_z \approx 0$

O momento de inércia de partes girantes, como um rotor, é desprezável e a massa da aeronave e sua distribuição são supostas constantes.

Podemos agora reescrever as equações de eq.58 a eq.65 utilizando eq.33 a eq.35 e as hipóteses de linearização:

$$X_0 + \Delta X - mg(\sin \Theta_0 + \Delta\Theta \cos \Theta_0) = m\dot{u} \quad (79)$$

$$Y_0 + \Delta Y + mg\Phi \cos \Theta_0 = m(\dot{v} + ru_0) \quad (80)$$

$$Z_0 + \Delta Z + mg(\cos \Theta_0 - \Delta\Theta \sin \Theta_0) = m(\dot{w} - qu_0) \quad (81)$$

$$L_0 + \Delta L = \dot{p}I_x - \dot{r}I_{xz} \quad (82)$$

$$M_0 + \Delta M = \dot{q}I_y \quad (83)$$

$$N_0 + \Delta N = -\dot{p}I_{xz} + \dot{r}I_z \quad (84)$$

$$\begin{bmatrix} u_f \\ v_f \\ w_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{\Psi_0}C_{\Theta_0} - \Delta\Psi S_{\Psi_0}C_{\Theta_0} - \Delta\Theta C_{\Psi_0}S_{\Theta_0} & C_{\Psi_0}C_{\Theta_0} & -S_{\Psi_0} & C_{\Psi_0}S_{\Theta_0} \\ S_{\Psi_0}C_{\Theta_0} + \Delta\Psi C_{\Psi_0}C_{\Theta_0} - \Delta\Theta S_{\Psi_0}S_{\Theta_0} & S_{\Psi_0}C_{\Theta_0} & C_{\Psi_0} & S_{\Psi_0}S_{\Theta_0} \\ -(S_{\Theta_0} + \Delta\Theta C_{\Theta_0}) & -S_{\Theta_0} & 0 & C_{\Theta_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ \Delta u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (85)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\Psi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\Phi}{\cos \Theta_0 - \Delta\Theta} & \frac{1}{\cos \Theta_0 - \Delta\Theta \sin \Theta_0} \\ 0 & 1 & -\sin \Phi \\ 1 & 0 & \frac{\sin \Theta_0 + \Delta\Theta \cos \Theta_0}{\cos \Theta_0 - \Delta\Theta \sin \Theta_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (86)$$

Alinhando-se o eixo Ox_f do referêcia inercial ao eixo Ox da aeronave no estado de referência, $\Psi_0 = 0$ e as equações eq.85 e eq.86 simplificam-se para:

$$\begin{bmatrix} u_f \\ v_f \\ w_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{\Theta_0} - \Delta\Theta S_{\Theta_0} & C_{\Theta_0} & 0 & S_{\Theta_0} \\ \Delta\Psi C_{\Theta_0} & 0 & 1 & 0 \\ -(S_{\Theta_0} + \Delta\Theta C_{\Theta_0}) & -S_{\Theta_0} & 0 & C_{\Theta_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ \Delta u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (87)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\Psi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\Phi}{\cos \Theta_0 - \Delta\Theta} & \frac{1}{\cos \Theta_0 - \Delta\Theta \sin \Theta_0} \\ 0 & 1 & \Phi \\ 1 & 0 & \frac{\sin \Theta_0 + \Delta\Theta \cos \Theta_0}{\cos \Theta_0 - \Delta\Theta \sin \Theta_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (88)$$

Finalmente, é desejável que a matriz de eq.88 seja constante, para que a equação de evolução do sistema (eq.111) seja linear em suas variáveis de estado. Para isso, aproxima-se eq.88 por:

$$\begin{bmatrix} \dot{\Psi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sec \Theta_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \tan \Theta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (89)$$

Para obter as equações no estado de referência, basta igualar a zero as

derivadas temporais e as pequenas variações nas equações acima:

$$X_0 - mg \sin \Theta_0 = 0 \quad (90)$$

$$Y_0 = 0 \quad (91)$$

$$Z_0 + mg \cos \Theta_0 = 0 \quad (92)$$

$$L_0 = 0 \quad (93)$$

$$M_0 = 0 \quad (94)$$

$$N_0 = 0 \quad (95)$$

$$(96)$$

$$\begin{bmatrix} u_f \\ v_f \\ w_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{\Psi_0} C_{\Theta_0} \\ S_{\Psi_0} C_{\Theta_0} \\ -S_{\Theta_0} \end{bmatrix} u_0 \quad (97)$$

ou, se $\Psi_0 = 0$:

$$\begin{bmatrix} u_f \\ v_f \\ w_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{\Theta_0} \\ 0 \\ -S_{\Theta_0} \end{bmatrix} u_0 \quad (98)$$

E as eq.79 a eq.84 podem ser reescritas utilizando-se os valores do estado de referência.

$$\begin{bmatrix} m \frac{d}{dt} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & mg \cos \Theta_0 & 0 \\ 0 & m \frac{d}{dt} & 0 & 0 & 0 & mu_0 & 0 & -mg \cos \Theta_0 \\ 0 & 0 & m \frac{d}{dt} & 0 & -mu_0 & 0 & mg \sin \Theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_x \frac{d}{dt} & 0 & -I_{xz} \frac{d}{dt} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_y \frac{d}{dt} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{xz} \frac{d}{dt} & 0 & I_z \frac{d}{dt} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ v \\ w \\ p \\ q \\ r \\ \Delta \Theta \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \\ \Delta L \\ \Delta M \\ \Delta N \end{bmatrix} = 0 \quad (99)$$

4.2 Derivadas de estabilidade

4.2.1 Conceito básico

O raciocínio a seguir será feito para x , mas pode ser aplicado para u igualmente.

Na equação (67), $(\partial^n f(x_0)/\partial x^n)$ é uma matriz. Cada elemento dela indica, para uma aproximação linear, como é a variação de uma componente do vetor de estado em função do desvio em relação ao estado de referência da mesma ou de outra componente do vetor de estado. A variação total de uma componente do vetor de estado é a soma de todas os desvios ponderados pelos termos da matriz $(\partial^n f(x_0)/\partial x^n)$ na linha correspondente. Ou seja:

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ \dot{x}_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{iM} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_M \end{pmatrix} \quad (100)$$

Utilizando o conhecimento que temos de uma sistema, podemos avaliar quais termos a_{ij} são relevantes e quais podem ser desconsiderados na modelagem.

Podemos deduzir uma expressão ou determinar experimentalmente o valor para os a_{ij} . Na determinação experimental, procura-se manter nulas todas as componentes de x que tenham uma contribuição para \dot{x}_a , salvo uma componente x_b de interesse. Conhecendo-se os valores de \dot{x}_a e x_b , pode-se inferir o valor de a_{ab} .

No estudo da dinâmica de veículos aquáticos e aéreos, cada um dos elementos a_{ij} é denominado uma derivada de estabilidade. Comparando a eq.67 e a eq.100 vê-se que $a_{ij} = (\partial \dot{x}_i / \partial x_j)(x_0)$. É daí que surge a denominação “derivada”. Por ser usada freqüentemente para o estudo do comportamento de estabilidade do veículo, consagrou-se o termo *derivada de estabilidade*.

No próximo parágrafo, vamos analisar quais derivadas de estabilidade a_{ij} não são nulas ou desprezáveis e conhecer as notações usuais para elas.

4.2.2 Notação das derivadas de estabilidade

Vimos que cada derivada de estabilidade relaciona uma componente de x ou de u com a variação de \dot{x} . Através de considerações físicas veremos quais são as derivadas de estabilidade que devem ser levadas em consideração. Para muitas delas, pode-se obter uma expressão em função de características da aeronave ou de outras derivadas de estabilidade, como veremos nas seções 4.7 a 4.13.

Cada força e momento aplicado à aeronave será aproximado por uma expressão linear, como em eq.68. Para a força Y , por exemplo, tem-se:

$$Y = Y_u \Delta u + Y_v v + Y_w w + \dots + Y_{\delta_a} \delta a + Y_{\delta_r} \delta r + Y_{\dot{w}} \dot{w} \quad (101)$$

onde

$$Y_u = \left(\frac{\partial Y}{\partial \Delta u} \right)_0, Y_v = \left(\frac{\partial Y}{\partial v} \right)_0, \text{ etc,}$$

Y_u, Y_v , etc. são derivadas de estabilidade. Tem-se agora as seguintes derivadas de estabilidade:

	Δu	w	q	δ_e	\dot{w}	v	p	r	δ_a	δ_r
ΔX	X_u	X_w	X_q	X_{δ_e}	$X_{\dot{w}}$	X_v	X_p	X_r	X_{δ_a}	X_{δ_r}
ΔZ	Z_u	Z_w	Z_q	Z_{δ_e}	$Z_{\dot{w}}$	Z_v	Z_p	Z_r	Z_{δ_a}	Z_{δ_r}
M	M_u	M_w	M_q	M_{δ_e}	$M_{\dot{w}}$	M_v	M_p	M_r	M_{δ_a}	M_{δ_r}
Y	Y_u	Y_w	Y_q	Y_{δ_e}	$Y_{\dot{w}}$	Y_v	Y_p	Y_r	Y_{δ_a}	Y_{δ_r}
L	L_u	L_w	L_q	L_{δ_e}	$L_{\dot{w}}$	L_v	L_p	L_r	L_{δ_a}	L_{δ_r}
N	N_u	N_w	N_q	N_{δ_e}	$N_{\dot{w}}$	N_v	N_p	N_r	N_{δ_a}	N_{δ_r}

No quadro, as forças, variáveis e momentos simétricos foram separados dos assimétricos, segundo o mesmo plano de simetria considerado para a geometria e distribuição de massa da aeronave.

Para uma aeronave perfeitamente simétrica, todas as forças e momentos assimétricos Y, L e N são nulos para um vôo simétrico. Suas derivadas em relação às variáveis simétricas $\Delta u, w, q, \delta_e, \dot{w}$ são portanto nulas. Além dessa, vamos fazer as seguintes hipóteses:

1. Serão desprezadas as reações simétricas para as perturbações assimétricas $v, p, r, \delta_a, \delta_r$
2. São desprezáveis as derivadas em relação a acelerações, com exceção de

$M_{\dot{w}}$ e $Z_{\dot{w}}$

3. As seguintes derivadas são muito pequenas: $X_q, X_{\delta_e}, Y_{\delta_a}$

As reações linearizadas tornam-se portanto:

$$\Delta X = X_u \Delta u + X_w w \quad (102)$$

$$\Delta Z = Z_u \Delta u + Z_w w + Z_q q + Z_{\delta_e} \delta_e + Z_{\dot{w}} \dot{w} \quad (103)$$

$$M = M_u \Delta u + M_w w + M_q q + M_{\delta_e} \delta_e + M_{\dot{w}} \dot{w} \quad (104)$$

$$Y = Y_v v + Y_p p + Y_r r + Y_{\delta_r} \delta_r \quad (105)$$

$$L = L_v v + L_p p + L_r r + L_{\delta_a} \delta_a + L_{\delta_r} \delta_r \quad (106)$$

$$N = N_v v + N_p p + N_r r + N_{\delta_a} \delta_a + N_{\delta_r} \delta_r \quad (107)$$

Em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} X_u & 0 & X_w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_v & 0 & Y_p & 0 & Y_r & 0 & 0 & Y_{\delta_r} \\ Z_u & 0 & Z_{\dot{w}} \frac{d}{dt} + Z_w & 0 & Z_q & 0 & Z_{\delta_e} & 0 & 0 \\ 0 & L_v & 0 & L_p & 0 & L_r & 0 & L_{\delta_a} & L_{\delta_r} \\ M_u & 0 & M_{\dot{w}} \frac{d}{dt} + M_w & 0 & M_q & 0 & M_{\delta_e} & 0 & 0 \\ 0 & N_v & 0 & N_p & 0 & N_r & 0 & N_{\delta_a} & N_{\delta_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ v \\ w \\ p \\ q \\ r \\ \delta_e \\ \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta X \\ Y \\ \Delta Z \\ L \\ M \\ N \end{bmatrix} \quad (108)$$

Os ângulos α e β também podem ser aproximados por uma expressão de primeira ordem:

$$\alpha = \arctan \left(\frac{w}{u_0 + \Delta u} \right) \approx \frac{w}{u_0} \quad (109)$$

$$\beta = \arcsin \left(\frac{v}{u_0 + \Delta u} \right) \approx \frac{v}{u_0} \quad (110)$$

Substitui-se eq.89 e eq.108 em eq.99 e obtém-se eq.111.

Note que, da eq.89,

$$q = \frac{d}{dt} \Delta \Theta$$

e q pode ser eliminado da eq.99 e eq.108.

Ψ não intervém em eq.99 e eq.108 e, portanto, não participa da eq.111.

Lembremos apenas que

$$\frac{d}{dt}\Delta\Psi = \sec\Theta_0 r$$

$$\begin{bmatrix}
m \frac{d}{dt} - X_u & 0 & -X_w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & m \frac{d}{dt} - Y_v & 0 & -Y_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-Z_u & 0 & (m - Z_{\dot{w}}) \frac{d}{dt} - Z_w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & L_v & 0 & I_v \frac{d}{dt} - L_p & 0 & -I_{xz} \frac{d}{dt} - L_r & 0 & -I_{\delta_a} & 0 & -I_{\delta_r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-M_u & 0 & -M_{\dot{w}} \frac{d}{dt} - M_w & 0 & 0 & -M_{\delta_e} & 0 & -M_{\delta_e} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -N_v & 0 & -I_{xz} \frac{d}{dt} - N_p & 0 & I_z \frac{d}{dt} - N_r & 0 & -N_{\delta_a} & 0 & -N_{\delta_r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \tan \Theta_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\Delta u \\
v \\
w \\
p \\
r \\
\delta_e \\
\delta_a \\
\delta_r \\
\Delta \Theta \\
\Phi
\end{bmatrix}
= 0$$

(111)

4.3 Separação Lateral - Longitudinal

É interessante e útil notar que a eq.108 pode ser reescrita agrupando-se os termos da matriz de outra maneira:

$$\begin{bmatrix} X_u & X_w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Z_u & Z_{\dot{w}} \frac{d}{dt} + Z_w & Z_q & Z_{\delta_e} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_u & M_{\dot{w}} \frac{d}{dt} + M_w & M_q & M_{\delta_e} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y_v & Y_p & Y_r & 0 & Y_{\delta_r} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_v & L_p & L_r & L_{\delta_a} & L_{\delta_r} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_v & N_p & N_r & \delta_a & N_{\delta_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ w \\ q \\ \delta_e \\ v \\ p \\ r \\ \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Z \\ M \\ Y \\ L \\ N \end{bmatrix} \quad (112)$$

O mesmo pode ser feito para a eq.111. Percebe-se, portanto, a existência de dois sistemas de equação lineares independentes:

- um dito *longitudinal*:

$$\begin{bmatrix} X_u & X_w & 0 & 0 \\ Z_u & Z_{\dot{w}} \frac{d}{dt} + Z_w & Z_q & Z_{\delta_e} & Z_{\dot{w}} \\ M_u & M_{\dot{w}} \frac{d}{dt} + M_w & M_q & M_{\delta_e} & M_{\dot{w}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ w \\ q \\ \delta_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Z \\ M \end{bmatrix} \quad (113)$$

$$\begin{bmatrix} m \frac{d}{dt} - X_u & -X_w & 0 & 0 & mg \cos \Theta_0 \\ -Z_u & (m - Z_{\dot{w}}) \frac{d}{dt} - Z_w & 0 & -Z_{\delta_e} & (-mu_0 - Z_q) \frac{d}{dt} + mg \sin \Theta_0 \\ -M_u & -M_{\dot{w}} \frac{d}{dt} - M_w & 0 & -M_{\delta_e} & I_y \frac{d^2}{dt^2} - M_q \frac{d}{dt} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{d}{dt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ w \\ q \\ \delta_e \\ \Delta \Theta \end{bmatrix} = 0 \quad (114)$$

- e outro dito *lateral*

$$\begin{bmatrix} Y_v & Y_p & Y_r & 0 & Y_{\delta_r} \\ L_v & L_p & L_r & L_{\delta_a} & L_{\delta_r} \\ N_v & N_p & N_r & N_{\delta_a} & N_{\delta_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ p \\ r \\ \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \\ L \\ N \end{bmatrix} \quad (115)$$

$$\begin{bmatrix} m\frac{d}{dt} - Y_v & -Y_p & mu_0 - Y_r & 0 & -Y_{\delta_r} & 0 & -mg \cos \Theta_0 \\ -L_v & I_x\frac{d}{dt} - L_p & -I_{xz}\frac{d}{dt} - L_r & -L_{\delta_a} & -L_{\delta_r} & 0 & 0 \\ -N_v & -I_{xz}\frac{d}{dt} - N_p & I_z\frac{d}{dt} - N_r & -N_{\delta_a} & -N_{\delta_r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sec \Theta_0 & 0 & 0 & -\frac{d}{dt} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \tan \Theta_0 & 0 & 0 & -\frac{d}{dt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ p \\ r \\ \delta_a \\ \delta_r \\ \Delta\Psi \\ \Phi \end{bmatrix} = 0 \quad (116)$$

O sistema de equações longitudinal descrevem o movimento da aeronave no plano Oxz , daí seu nome. O sistema lateral é assim chamado por descrever o movimento no plano Oxy . Essa separação é conseqüência das hipóteses adotadas. Se essas hipóteses não forem válidas, essa separação também não o será. É importante lembrar algumas das hipóteses adotadas e perceber como elas interferem na separação entre os modos laterais e longitudinais.

Uma revisão das hipóteses deste capítulo mostra que a existência de movimentos longitudinais que não excitem movimentos laterais depende apenas da inexistência de momentos de inércia de componentes rotativos e da validade das hipóteses de simetria. As expressões de eq.40 a eq.45 mostram que perturbações em F_x , F_z e L modificam apenas u , w e q .

No entanto, para que os movimentos laterais não provoquem respostas longitudinais, hipóteses mais restritivas devem ser satisfeitas: inexistência de momentos de inércia de componentes rotativos, ausência de reações simétricas para

perturbações assimétricas e a linearização das equações. Quanto a linearização das equações, mais especificamente, as seguintes aproximações devem ser validas para se garantir a separação: $rv = 0$, $pv = 0$ e $rH_x = rpI_x - r^2I_{xz} = 0$

Evidentemente, é mais fácil lidar com sistemas 5×5 e 5×7 do que com um sistema 9×12 . Além disso, ao se desacoplarem as equações, a percepção e interpretação dos fenômenos físicos envolvidos se tornam mais imediatas.

4.4 Adimensionalização

Expressam-se freqüentemente forças e momentos por coeficientes adimensionais. O uso de coeficientes tem as vantagens de generalizar um resultado para corpos geometricamente semelhantes ao corpo estudado e evitar o uso de unidades dimensionais. Um mesmo coeficiente apresentará o mesmo valor independentemente do sistema de unidades utilizados, desde que este seja um sistema de unidades coerente. Assim, com seu uso, reduz-se o risco de erros de conversão e os resultados de experimentos e campanhas de medições são facilmente generalizados.

A idéia por traz da adimensionalização é a mesma subjacente ao teorema Pi de Buckingham. Um estudo mais detalhado sobre esse teorema pode ser visto em Anderson[12, par. 1.7]. A demonstração do teorema pode ser encontrada em [13, p. 21-28].

Quando se adimensionaliza uma grandeza, tem-se que manter em mente quais parâmetros foram utilizados para isso. Considere um coeficiente que seja a adimensionalização de uma força aerodinâmica obtida a partir de certos parâmetros geométricos da aeronave. Não faz sentido somá-lo, sem o uso de um fator de conversão, a outro coeficiente que tenha sido obtido utilizando-se como parâmetros características geométricas distintas das utilizadas para o primeiro. Além disso, para recuperar o valor da força aerodinâmica, é preciso saber exatamente quais parâmetros foram utilizados.

Segundo Etkin[14], vários sistemas de adimensionalização podem ser encontrados na literatura. As principais diferenças são quanto à definição do tempo característico t^* e do comprimento característico l . Adotamos aqui, por sugestão de Etkin[14] e Nelson[11], a convenção utilizada pela NACA para as derivadas

de estabilidade, pela existência de grande quantidade de dados teóricos e experimentais publicados seguindo esta convenção.

Parâmetros utilizados:

ρ	massa específica do fluido em que se movimenta a aeronave
V_∞	velocidade relativa do vento em relação ao centro de massa da aeronave
q_∞	pressão dinâmica referente a V_∞
S	área projetada da asa
\bar{c}	corda média da asa
b	envergadura da aeronave
$l = \bar{c}/2$	comprimento característico para movimentos longitudinais
$l = b/2$	comprimento característico para movimentos laterais
$t^* = l/u_0$	tempo característico

A cada grandeza utilizada, podemos associar então uma grandeza adimensionalizada (Tabela 4.1).

Tabela 4.1 – Grandezas envolvidas na adimensionalização

Grandeza	Divisor	Adimensional
$X Y Z L D T$	$\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S$	$C_X C_Y C_Z C_L C_D C_T$
$L M N$	$\rho V_\infty^2 S l$	$C_L C_M C_N$
$\Delta u v w$	u_0	$\hat{u} \hat{v} \hat{w}$
t	$t^* = l/u_0$	\hat{t}
$p q r$	$1/t^*$	$\hat{p} \hat{q} \hat{r}$
\dot{w}	u_0/t^*	\hat{w}
m	$\rho S l$	μ
$I_x I_y I_z I_{xz}$	$\rho S l^3$	$i_x i_y i_z i_{xz}$

Cabe frisar que, como a definição de l varia para movimentos longitudinais e laterais, p , q e r são adimensionalizados de diferentes formas: $\hat{p} = pb/(2u_0)$, $\hat{q} = q\bar{c}/(2u_0)$ e $\hat{r} = rb/(2u_0)$.

Para uniformizar a notação, $\hat{\Psi} \equiv \Delta\Psi$, $\hat{\Theta} \equiv \Delta\Theta$, coerente com a mudança de Δu em \hat{u} .

De eq.109 e eq.110, vemos que $\hat{v} \approx \beta$ e $\hat{w} \approx \alpha$. Decorre disso: $C_{z_\alpha} \equiv C_{z_w}$, $C_{z_{\hat{\alpha}}} \equiv C_{z_{\hat{v}}}$, $C_{y_\beta} \equiv C_{y_v}$.

O operador de derivação temporal também tem seu equivalente adimensional: $d/d\hat{t} = (l/u_0)d/dt$.

O adimensional μ pode ser visto como análogo a uma densidade.

As derivadas de estabilidade também são escritas em função de adimensionais. Por exemplo, como

$$\left(\frac{\partial V_\infty^2}{\partial \Delta u}\right)_0 = \left(\frac{\partial}{\partial \Delta u} ((u_0 + \Delta u)^2 + v^2 + w^2)\right)_0 = (2(u_0 + \Delta u))_0 = 2u_0 \quad (117)$$

e

$$(V_\infty^2)_0 = u_0^2 \quad (118)$$

a derivada de estabilidade X_u , expressa-se por:

$$\begin{aligned} X_u &= \left(\frac{\partial X}{\partial \Delta u}\right)_0 = \left(\frac{\partial}{\partial \Delta u} \left(\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S C_x\right)\right)_0 = \frac{1}{2}\rho S \left(\frac{\partial (V_\infty^2 C_x)}{\partial \Delta u}\right)_0 \quad (119) \\ &= \frac{1}{2}\rho S \left(C_x \frac{\partial V_\infty^2}{\partial \Delta u} + V_\infty^2 \frac{\partial C_x}{\partial \Delta u}\right)_0 = \frac{1}{2}\rho S \left(2C_{x_0}u_0 + u_0 \left(\frac{\partial C_x}{\partial \Delta u}\right)_0 u_0\right) \end{aligned}$$

O termo $u_0 \left(\frac{\partial C_x}{\partial \Delta u}\right)_0 = C_{x_u}$ é uma outra derivada de estabilidade, adimensional. Para as outras derivadas de estabilidade, a dedução é semelhante.

Os sistemas eq.114 e eq.116 podem ser expressas de forma adimensional, utilizando-se as relações acima.

Dividindo-se os termos da primeira equação do sistema eq.114 por $\frac{1}{2}\rho u_0^2 S$ e lembrando que $X_0 = mg \sin \Theta_0 = mg \cos \Theta_0 \tan \Theta_0 = -Z_0 \tan \Theta_0$, e, tem-se:

$$\left(2\mu \frac{d}{d\hat{t}} + 2C_{z_0} \tan \Theta_0 - C_{x_u}\right) \hat{u} - C_{x_\alpha} \alpha - C_{z_0} \hat{\Theta} = 0 \quad (120)$$

Considerando que a força de propulsão \mathbf{T} seja perpendicular a Z , $Z_0 = -L_0$, eq.120 escreve-se

$$2\mu \frac{d}{d\hat{t}} \hat{u} - 2C_{L_0} \tan \Theta_0 \hat{u} - C_{x_u} \hat{u} - C_{x_\alpha} \alpha + C_{L_0} \hat{\Theta} = 0 \quad (121)$$

De forma similar, podemos prosseguir para todas as equações dos sistemas eq.114 e eq.116. Dessa maneira, obtemos as eq.122 e eq.123.

- Movimento *longitudinal*

$$\begin{bmatrix}
 2\mu \frac{d}{dt} - (2C_{L_0} \tan \Theta_0 + C_{x_u}) & -C_{x_\alpha} & 0 & 0 \\
 2C_{L_0} - C_{z_u} & (2\mu - C_{z_\alpha}) \frac{d}{dt} - C_{z_\alpha} & 0 & -C_{z_{\delta_e}} \\
 -C_{m_u} & -(C_{m_\alpha} \frac{d}{dt} + C_{m_\alpha}) & 0 & -C_{m_{\delta_e}} \\
 0 & 0 & 1 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 C_{L_0} \\
 -((2\mu + C_{z_q}) \frac{d}{dt} - C_{L_0} \tan \Theta_0) \\
 i_y \frac{d^2}{dt^2} - C_{m_q} \frac{d}{dt} \\
 -\frac{d}{dt}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \hat{u} \\
 \alpha \\
 \hat{q} \\
 \delta_e \\
 \hat{\Theta}
 \end{bmatrix}
 = 0 \quad (122)$$

- Movimento *lateral*

$$\begin{bmatrix}
 2\mu \frac{d}{dt} - C_{y_\beta} & -C_{y_p} & 2\mu - C_{y_r} & 0 & -C_{y_{\delta_r}} & 0 & -C_{L_0} \\
 -C_{l_\beta} & i_x \frac{d}{dt} - C_{l_p} & -(i_{xz} \frac{d}{dt} + C_{l_r}) & -C_{l_{\delta_a}} & -C_{l_{\delta_r}} & 0 & 0 \\
 -C_{n_\beta} & -(i_{xz} \frac{d}{dt} + C_{n_p}) & i_z \frac{d}{dt} - C_{n_r} & -C_{n_{\delta_a}} & -C_{n_{\delta_r}} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \sec \Theta_0 & 0 & 0 & -\frac{d}{dt} & 0 \\
 0 & 1 & \tan \Theta_0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{d}{dt}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \beta \\
 \hat{p} \\
 \hat{r} \\
 \delta_a \\
 \delta_r \\
 \hat{\Psi} \\
 \Phi
 \end{bmatrix}
 = 0 \quad (123)$$

4.5 Expressões para C_x e C_z

Para um vôo simétrico, se o ângulo entre a linha de ação da força propulsiva e o eixo x for pequeno e puder ser desprezado, tem-se:

$$C_x = C_T + C_L \sin(\alpha) - C_D \cos(\alpha) \quad (124)$$

$$C_z = -(C_L \cos(\alpha) + C_D \sin(\alpha)) \quad (125)$$

A força peso \mathbf{W} não foi levada em consideração pois C_x e C_z referem-se a forças aerodinâmicas, que não têm nenhuma componente de peso. \mathbf{W} será considerado separadamente na equações que descrevem a dinâmica do sistema.

4.6 Expressão para C_m

C_m é o adimensional de M , conforme a equação:

$$C_m = \frac{M}{q_\infty S \bar{c}} \quad (126)$$

M é o momento segundo y que age sobre a aeronave. Ele é formado por quatro principais contribuições, que são devidas à asa, à fuselagem e naceles, à cauda e ao sistema de propulsão. Veremos a seguir mais detalhes cada uma dessas contribuições. O resultado final será a aproximação:

$$C_m = C_{m_{wb}} + C_{m_t} + C_{m_{prop}} \quad (127)$$

$$C_m = C_{L_{wb}} l_{wb} + C_{m_{0_{wb}}} - V_H \eta [C_{L_t} + C_{D_t}(\alpha - \epsilon)] - \frac{z_{cg_t}}{l_t} V_H \eta [C_{D_t} - C_{L_t}(\alpha - \epsilon)] + \frac{\bar{c}_t}{l_t} V_H \eta C_{m_{act}} + z_{cg_{prop}} C_T \quad (128)$$

em que l_t é a distância entre o centro aerodinâmico médio da cauda e o centro de massa da aeronave.

4.6.1 Contribuição da asa para M

As forças aerodinâmicas que agem sobre uma superfícies sustentadora podem ser decompostas em uma componente de sustentação, uma de arrasto e um momento. Se as componentes de sustentação e de arrasto forem aplicadas no centro aerodinâmico, a magnitude do momento deixa de depender do ângulo de ataque. Essa independência é conveniente para a simplificação dos cálculos.

Seja l_w a distância em x entre o centro aerodinâmico da asa e o centro de gravidade (CG) da aeronave e z_c a distância em z entre a linha da corda aerodinâmica média e o CG. Temos

$$M_w = (L_w \cos \alpha_w + D_w \sin \alpha_w)l_w \bar{c} + (L_w \sin \alpha_w - D_w \cos \alpha_w)z \bar{c} + M_{0_w} \quad (129)$$

Para $\alpha_w \ll 1$, é uma boa aproximação:

$$M_w = (L_w + D_w \alpha_w)l_w \bar{c} + (L_w \alpha_w - D_w)z \bar{c} + M_{0_w} \quad (130)$$

que adimensionalizado, fica

$$C_{m_w} = \frac{M_w}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S \bar{c}} = (C_{L_w} + C_{D_w} \alpha_w)l_w + (C_{L_w} \alpha_w - C_{D_w})z + C_{m_{0_w}} \quad (131)$$

Etkin relata que, embora por vezes todos os termos devam ser considerados, a experiência mostra que na maioria das vezes o termo $(C_{L_w} \alpha_w - C_{D_w})z$ é desprezável comparada aos outros e que $C_{D_w} \alpha_w$ é desprezável em relação a C_{L_w} , de forma a se ter a seguinte aproximação:

$$C_{m_w} = C_{L_w} l_w + C_{m_{0_w}} \quad (132)$$

4.6.2 Contribuição da fuselagem e naceles para M

As forças que agem sobre a fuselagem e as naceles também podem ser decompostas em um momento independente do ângulo de ataque, e uma sustentação e um arrasto. No entanto, além de haver forças que agem sobre a fuselagem e as naceles, a presença destas modificam o escoamento ao seu redor e afeta o escoamento ao redor da asa. Assim, além da contribuição da fuselagem e naceles, há um acoplamento entre asa, fuselagem e naceles difícil de se analisar. Pode-se escrever uma fórmula análoga à eq.131 para o sistema asa-fuselagem-nacele, mas cujos coeficientes devem ser obtidos experimentalmente ou em simulações:

$$C_{m_{wb}} = \frac{M_{wb}}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S \bar{c}} = (C_{L_{wb}} + C_{D_{wb}} \alpha_{wb})l_{wb} + (C_{L_w} \alpha_w - C_{D_{wb}})z + C_{m_{0_{wb}}} \quad (133)$$

que é também é aproximada para

$$C_{m_{wb}} = C_{L_{wb}} l_{wb} + C_{m_{0_{wb}}} \quad (134)$$

De forma geral, o centro aerodinâmico médio é deslocado para trás, $C_{L_{wb}} > C_{L_w}$ e $C_{m_{0_{wb}}} < C_{m_{0_w}}$.

4.6.3 Contribuição da cauda para M

Separada da aeronave, a cauda comporta-se como uma asa. Montada na aeronave, no entanto, ocorrem interferências entre os escoamentos ao redor da cauda, da asa, da fuselagem e do sistema de propulsão. A cauda fica submetida ao downwash da asa, a fuselagem interfere no escoamento cobrindo parte da cauda, e a velocidade do escoamento incidente na cauda é reduzida se estiver na região de rotores produzida pela asa.

A partir da figura 2, pode-se escrever a contribuição da cauda ao momento de arfagem:

$$M_t = -l_t[L_t \cos(\alpha - \epsilon) + D_t \sin(\alpha - \epsilon)] - z_{cg_t}[D_t \cos(\alpha - \epsilon) - L_t \sin(\alpha - \epsilon)] + M_{act} \quad (135)$$

Aplicando a aproximação de pequenos ângulos,

$$M_t = -l_t[L_t + D_t(\alpha - \epsilon)] - z_{cg_t}[D_t - L_t(\alpha - \epsilon)] + M_{act} \quad (136)$$

Em geral, somente o termo $l_t L_t$ é relevante.

Dividindo-se ambos os lados da equação por $\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S\bar{c}$, temos

$$C_{m_t} = -\frac{l_t S_t}{S\bar{c}} \frac{V'^2}{V_\infty^2} [C_{L_t} + C_{D_t}(\alpha - \epsilon)] - \frac{z_{cg_t} S_t}{S\bar{c}} \frac{V'^2}{V_\infty^2} [C_{D_t} - C_{L_t}(\alpha - \epsilon)] + \frac{\bar{c}_t S_t}{S\bar{c}} \frac{V'^2}{V_\infty^2} C_{m_{act}} \quad (137)$$

ou com $\eta = V'/V_\infty$ e $V_H = (l_t S_t)/(S\bar{c})$

$$C_{m_t} = -V_H \eta [C_{L_t} + C_{D_t}(\alpha - \epsilon)] - \frac{z_{cg_t}}{l_t} V_H \eta [C_{D_t} - C_{L_t}(\alpha - \epsilon)] + \frac{\bar{c}_t}{l_t} V_H \eta C_{m_{act}} \quad (138)$$

4.6.4 Contribuição do sistema de propulsão para M

Em 4.5, foi feita a hipótese de que o ângulo entre a linha de ação da força propulsiva \mathbf{T} e o eixo x é pequeno e pode ser desprezado. Consideraremos, aqui, a mesma hipótese. Se a linha de ação da força \mathbf{T} distar z_{cg_p} do eixo x , então a contribuição do sistema de propulsão para M é:

$$M_{prop} = T z_{cg_{prop}} \quad (139)$$

Logo,

$$C_{m_{prop}} = z_{cg_{prop}} C_T \quad (140)$$

4.7 Derivadas em α

\mathbf{L} é formada essencialmente pela sustentação oferecida pela asa da aeronave, mas também pela cauda e pela fuselagem. Desprezaremos a parcela devida à fuselagem e deduziremos uma equação para \mathbf{L} .

Da aerodinâmica[12], sabemos que o coeficiente de sustentação de um perfil aerodinâmico é função do ângulo de ataque do mesmo em relação ao escoamento incidente. A relação entre eles é muito bem aproximada pela relação linear:

$$C_{L_p} = C_{L_{\alpha_p=0}} + C_{L_{\alpha_p}} \alpha_p \quad (141)$$

O índice p refere-se ao perfil. Não se deve confundir, portanto, α (da aeronave) com α_p (do perfil).

Para a asa, $\alpha_p = \alpha_w$. Admitindo-se que o escoamento incidente na asa não tenha sido perturbado por outros componentes da aeronave, pode-se escrever

$$\alpha_w = \alpha + i_w \quad (142)$$

onde i_w é o ângulo de montagem da asa no corpo da aeronave, em relação à linha de referência da fuselagem.

Para a cauda, não podemos considerar o escoamento incidente como não perturbado, devido ao downwash produzido pela asa[12, cap. 5]. O ângulo de downwash ϵ é definido como mostra a figura 2. \mathbf{V} é o vento relativo incidente na aeronave, \mathbf{V}' é o vento relativo incidente na cauda. ϵ pode ser aproximado linearmente por

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{d\epsilon}{d\alpha_w} \alpha_w \quad (143)$$

onde ϵ_0 é o ângulo de downwash para $\alpha_w = 0$.

Assim

$$\alpha_t = \alpha + i_t - \epsilon \quad (144)$$

Uma expressão simples para ϵ pode ser obtida para asas elípticas. Sua

dedução é feita em [12] e resulta em:

$$\epsilon = \frac{2C_{L_w}}{\pi AR_w} \quad (145)$$

onde $AR = S/b^2$ é a razão de aspecto da asa. Para asas não elípticas, o valor do ângulo de downwash será maior e geralmente deve ser obtido em túnel de vento ou simulação numérica. A expressão apresentada, no entanto, oferece uma boa estimativa para o valor real. Da eq.145, tem-se

$$\frac{d\epsilon}{d\alpha_w} = \frac{2}{\pi AR} \frac{dC_{L_{\alpha_w}}}{d\alpha_w} = \frac{2}{\pi AR} \frac{dC_{L_{\alpha_w}}}{d\alpha} = \frac{2C_{L_w\alpha}}{\pi AR} \quad (146)$$

pois de eq.142, $d\alpha_w = d\alpha$

As equações eq.143 e eq.145 não levam em conta o posicionamento vertical e horizontal da cauda em relação à asa. São portanto estimativas do valor real, que pode ser obtido experimentalmente.

As forças aerodinâmicas sobre a cauda estão decompostas em \mathbf{L}_t e \mathbf{D}_t , perpendicular e paralela a \mathbf{V}' , respectivamente.

A contribuição da cauda para a sustentação da aeronave, que é por definição perpendicular a \mathbf{V} é

$$L_t \cos \epsilon - D_t \sin \epsilon \quad (147)$$

Como, em geral, ϵ é pequeno e $D_t \epsilon \ll L_t$, a expressão acima reduz-se a L_t .

Pode-se definir C_{L_t} , coeficiente de sustentação da cauda, como

$$C_{L_t} = \frac{L_t}{\frac{1}{2}\rho V'^2 S_t} \quad (148)$$

onde S_t é a área de referência da cauda.

Similarmente, pode-se definir C_{D_t} , coeficiente de arrasto da cauda como

$$C_{D_t} = \frac{D_t}{\frac{1}{2}\rho V'^2 S_t} \quad (149)$$

Neste texto, optou-se por definir C_{L_t} e C_{D_t} com base na pressão dinâmica local da cauda. Outros autores os definem a partir da pressão dinâmica $\frac{1}{2}\rho V_\infty^2$. Deve-se portanto atentar qual a definição que é usada em cada fonte de referência. Para relacionarmos C_{L_w} e C_{L_t} , utilizaremos o coeficiente η chamado eficiência da

cauda.

$$\eta = \frac{\frac{1}{2}\rho V_t^2}{\frac{1}{2}\rho V_w^2} = \frac{q_t}{q_w} \quad (150)$$

Seu valor depende da posição da cauda e varia geralmente entre 0,8 e 1,2. Se estiver em uma região do escoamento perturbada pela asa, tem valores menores do que 1, devido à redução da energia cinética do fluido nessa região. Pode valer mais do que 1 quando a cauda estiver localizada, por exemplo, na esteira do escoamento do propulsor.

Assim,

$$\begin{aligned} L &= L_{w_t} + L_t \cos \epsilon - D_t \sin \epsilon \\ &\approx L_w + L_t \end{aligned} \quad (151)$$

para $\epsilon \ll 1$. Então

$$C_L = C_{L_w} + \eta \frac{S_t}{S} C_{L_t} \quad (152)$$

S_t/S intervém pois a adimensionalização de C_{L_w} e C_{L_t} não são feitas com base na mesma área de referência (ver 4.4).

4.7.1 Derivadas C_{x_α} e C_{z_α}

Conforme visto na seção 4.2.1, $C_{x_\alpha} = (\partial C_x / \partial \alpha)_0$. Na condição de vôo de referência, $\alpha = 0$.

$$\frac{\partial C_x}{\partial \alpha} = \frac{\partial C_T}{\partial \alpha} + \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \sin(\alpha) + C_L \cos(\alpha) - \frac{\partial C_D}{\partial \alpha} \cos(\alpha) + C_D \sin(\alpha) \quad (153)$$

$$\frac{\partial C_z}{\partial \alpha} = - \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \cos(\alpha) - C_L \sin(\alpha) + \frac{\partial C_D}{\partial \alpha} \sin(\alpha) + C_D \cos(\alpha) \right) \quad (154)$$

Com $\alpha = 0$, temos

$$C_{x_\alpha} = \left(\frac{\partial C_x}{\partial \alpha} \right)_0 = \left(\frac{\partial C_T}{\partial \alpha} \right)_0 + C_{L_0} - \left(\frac{\partial C_D}{\partial \alpha} \right)_0 \quad (155)$$

$$C_{z_\alpha} = \left(\frac{\partial C_z}{\partial \alpha} \right)_0 = - \left(\left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)_0 + C_{D_0} \right) \quad (156)$$

Pode-se frequentemente considerar que C_T é independente de α , ou seja,

$\partial C_T / \partial \alpha = 0$. Assim

$$C_{x_\alpha} = C_{L_0} - C_{D_\alpha} \quad (157)$$

$$C_{z_\alpha} = -(C_{L_\alpha} + C_{D_0}) \quad (158)$$

Para aeronaves, alguns autores, como Nelson[11], sugerem considerar $C_{D_0} \ll C_{L_\alpha}$, levando a $C_{z_\alpha} \approx -C_{L_\alpha}$.

4.7.2 Derivada C_{L_α}

A eq.152 mostra que

$$C_L = C_{L_w} + \eta \frac{S_t}{S} C_{L_t} \quad (159)$$

A partir dela, tem-se:

$$\begin{aligned} C_{L_\alpha} &= \left. \frac{dC_{L_\alpha}}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{dC_{L_w}}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} + \eta \frac{S_t}{S} \left. \frac{dC_{L_t}}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \\ &= \left. \frac{dC_{L_w}}{d\alpha_w} \right|_{\alpha_w=i_w} + \eta \frac{S_t}{S} \left. \frac{dC_{L_t}}{d\alpha_t} \right|_{\alpha_t=i_t+\epsilon} \approx \left. \frac{dC_{L_w}}{d\alpha_w} \right|_{\alpha_w=0} + \eta \frac{S_t}{S} \left. \frac{dC_{L_t}}{d\alpha_t} \right|_{\alpha=0} \end{aligned} \quad (160)$$

4.7.3 Derivada C_{m_α}

A derivada de estabilidade C_{m_α} é uma medida de quanto varia C_m para uma variação de α . É definido como:

$$C_{m_\alpha} = \left(\frac{\partial C_m}{\partial \alpha} \right)_0 \quad (161)$$

4.8 Derivadas em u

As derivadas em u relacionam as variações de u com as variações dos adimensionais das forças e momentos aplicados à aeronave. Para que essas derivadas continuem sendo coeficientes adimensionais, com toda a vantagem de uso que lhes é inerente, não podemos fazer simplesmente

$$\left(\frac{\partial C_X}{\partial u} \right)_0 \quad (162)$$

onde C_X é um adimensional qualquer. A equação acima tem a mesma dimensão do inverso da velocidade.

Para resolver essa questão costuma-se diferenciar C_X em relação a uma variação adimensionalizada da velocidade. Assim, em torno da condição de referencial, $u = u_0 + \Delta u$, a variação adimensionalizada é $\Delta u/u_0$, que se nota \hat{u} . Assim,

$$C_{X_u} = \left(\frac{\partial C_X}{\partial \hat{u}} \right)_0 = u_0 \left(\frac{\partial C_X}{\partial \Delta u} \right)_0 = u_0 \left(\frac{\partial C_X}{\partial u} \right)_0 \quad (163)$$

$$\hat{u} = \frac{\Delta u}{u_0} \quad (164)$$

$$u = u_0 + \Delta u \quad (165)$$

4.8.1 A derivada C_{x_u} (C_{D_u} e C_{T_u})

C_{x_u} relaciona uma variação de C_x com uma variação em u , todos os outros parâmetros mantidos constantes. É chamada de derivada "speed damping", pois indica como a resistência à aceleração aumenta conforme se acelera a aeronave.

Por definição, $C_{x_u} = (\partial C_x / \partial \hat{u})_0 = u_0 (\partial C_x / \partial u)_0$. De eq.124, para $\alpha = 0$, temos

$$C_{x_u} = u_0 \left(\frac{\partial C_T}{\partial u} \right)_0 - u_0 \left(\frac{\partial C_D}{\partial u} \right)_0 = C_{T_u} - C_{D_u} \quad (166)$$

Desprezando os efeitos de aeroelasticidade e a variação de C_D com o número de Reynolds, C_D é função apenas de α e de M . Assim, pela regra da cadeia, e sendo α independente de u :

$$\frac{\partial C_D}{\partial u} = \frac{\partial M}{\partial u} \frac{\partial C_D}{\partial M} \quad (167)$$

Lembrando que $M = u/c$, $\partial M / \partial u = 1/c$. Então,

$$\frac{\partial C_D}{\partial u} = \frac{1}{c} \frac{\partial C_D}{\partial M} \implies C_{D_u} = u_0 \left(\frac{\partial C_D}{\partial u} \right)_0 = M_0 \left(\frac{\partial C_D}{\partial M} \right)_0 \quad (168)$$

$\partial C_D / \partial M$ pode ser obtido a partir de gráficos.

C_{T_u} relaciona uma variação na velocidade em x com a variação respectiva da força de propulsão. Depende, portanto do tipo de propulsor utilizado.

$C_T = T / (\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S)$ e nas condições de vôo não-perturbado, $V_\infty = u_0$.

Assim,

$$C_{T_u} = u_0 \left(\frac{\partial C_T}{\partial u} \right)_0 = u_0 \frac{(\partial T / \partial u)_0}{\frac{1}{2} \rho u_0^2 S} - u_0 \frac{2T_0}{\frac{1}{2} \rho u_0^3 S} = u_0 \frac{(\partial T / \partial u)_0}{\frac{1}{2} \rho u_0^2 S} - 2C_{T_0} \quad (169)$$

Para um vôo em planeio, sem propulsão, $T = 0$ e assim

$$\frac{\partial T}{\partial u} = 0, C_{T_0} = 0 \implies C_{T_u} = 0 \quad (170)$$

Para propulsão a jato ou foguete, a variação na força propulsiva é pequena e pode-se considerar

$$\frac{\partial T}{\partial u} = 0 \implies C_{T_u} = -2C_{T_0} \quad (171)$$

Para hélices de ângulo variável com motores a pistão, pode-se considerar que a potência fornecida é constante. Assim $Tu = cte$.

$$T + \frac{\partial T}{\partial u} u = 0 \implies \left(\frac{\partial T}{\partial u} \right)_0 = -\frac{T_0}{u_0} \implies C_{T_u} = -3C_{T_0} \quad (172)$$

Lembrando que $X_0 = mg \sin \Theta_0 = mg \cos \Theta_0 \tan \Theta_0 = -Z_0 \tan \Theta_0 = L_0 \tan \Theta_0$, vale notar que, de eq.124:

$$C_{T_0} = C_{D_0} + C_{L_0} \tan \theta_0 \quad (173)$$

pois $\alpha_0 = 0$.

4.8.2 A derivada C_{z_u}

C_{z_u} relaciona uma variação de C_z com uma variação em u , todos os outros parâmetros mantidos constantes. Por definição, $C_{z_u} = (\partial C_z / \partial \hat{u})_0 = u_0 (\partial C_z / \partial u)_0$.

De eq.125, para $\alpha = 0$, temos

$$C_{z_u} = u_0 \left(\frac{\partial C_z}{\partial u} \right)_0 = -u_0 \left(\frac{\partial C_L}{\partial u} \right)_0 = -C_{L_u} \quad (174)$$

Como feito para C_{x_u} , desprezando os efeitos de aeroelasticidade e a variação de C_L com o número de Reynolds, $C_L = f(\alpha, M)$. Assim, pela regra da cadeia:

$$\frac{\partial C_L}{\partial u} = \frac{\partial M}{\partial u} \frac{\partial C_L}{\partial M} \implies C_{L_u} = u_0 \left(\frac{\partial C_L}{\partial u} \right)_0 = M_0 \left(\frac{\partial C_L}{\partial M} \right)_0 \quad (175)$$

A teoria de escoamento potencial aplicada a perfis aerodinâmicos mostra que, para escoamentos subsônicos[12, p. 545]:

$$C_L = \frac{C_L^*}{\sqrt{1 - M^2}} \quad (176)$$

e para escoamentos supersônicos [12, p. 576]:

$$C_L = \frac{4\alpha}{\sqrt{1 - M^2}} \quad (177)$$

A relação válida para escoamentos subsônicos é conhecida como *regra de Prandtl-Glauert*, e nela C_L^* é o coeficiente de sustentação que se obteria caso não houvesse os efeitos de compressibilidade. Melhores estimativas para o valor de C_L em escoamentos compressíveis podem ser obtidas a partir da distribuição de C_p com valores corrigidos pela *regra de Karman-Tsien*[12] ou pela *regra de Laitone*[12], citadas aqui somente como orientação ao leitor.

Para ambos os casos (escoamento subsônico e supersônico), tem-se:

$$\frac{\partial C_L}{\partial M} = C_L \frac{M}{1 - M^2} \quad (178)$$

Fazendo-se as substituições, chega-se a:

$$C_{z_u} = \frac{M_0^2}{M_0^2 - 1} C_L \quad (179)$$

Vale frisar que, para um vôo nivelado e para um peso constante da aeronave, $V^2 C_L = cte$ e então $M^2 C_L$ também o é. Assim,

$$C_{z_u} \propto \frac{1}{M_0^2 - 1} \quad (180)$$

Esse resultado foi obtido para um perfil aerodinâmico. Para uma asa enflechada e com razão de aspecto pequena, C_{z_u} é menos sensível a variações de M [14, p. 151].

4.8.3 A derivada C_{m_u}

A derivada C_{m_u} representa a variação do momento de arfagem em relação a uma variação da velocidade na direção x , a partir de um estado de referência.

C_{m_u} é definido por:

$$C_{m_u} = \left(\frac{\partial C_m}{\partial \hat{u}} \right)_0 = \left(\frac{\partial C_m}{\partial u/u_0} \right)_0 = u_0 \left(\frac{\partial C_m}{\partial u} \right)_0 = u_0 \left(\frac{\partial M}{\partial u} \frac{\partial C_m}{\partial M} \right)_0 \quad (181)$$

Como $M = u/c$, e $\partial M/\partial u = 1/c$,

$$C_{m_u} = M_0 \left(\frac{\partial C_m}{\partial M} \right)_0 \quad (182)$$

expressão semelhante à obtida para C_{D_u}

C_{m_u} depende do número de Mach e também de propriedades de aerelasticidade do avião, que podem influenciar muito em seu valor.

A variação do momento de arfagem é, portanto:

$$\Delta M = \frac{\partial M}{\partial u} \Delta u = \frac{1}{2} \rho u_0 \frac{\bar{c}}{2} C_{m_u} \Delta u \quad (183)$$

4.9 Derivadas em q

As derivadas em q representam a variação de forças e momentos devida a uma movimento de rotação em y . A principal consequência dessa rotação é a mudança do ângulo de ataque da fuselagem, asa e cauda. Para aeronaves com cauda, as contribuições da fuselagem e da asa são pequenas em comparação às da cauda. Costuma-se considerar somente a contribuição da cauda e aumentá-la em 10% para dar conta das outras contribuições[14, p. 153]. veremos aqui apenas contribuição da cauda. Um estudo sobre a contribuição da asa pode ser encontrado em [14].

A mudança do ângulo de ataque da cauda pode ser obtida considerando que a cauda fica dotada de uma velocidade em z igual a ql_t . Assim, $\Delta\alpha_t = \tan(ql_t/u_0) \approx ql_t/u_0$ (em radianos).

4.9.1 A derivada C_{z_q}

Por definição,

$$C_{z_q} = \frac{\partial C_Z}{\partial \hat{q}} = \frac{\partial C_Z}{\partial (qt^*)} = \frac{\partial C_Z}{\partial (q\bar{c}/2u_0)} = \frac{2u_0}{\bar{c}} \frac{\partial C_Z}{\partial q} \quad (184)$$

Um incremento em Z é ocasionado por um decréscimo de L_t :

$$\Delta Z = -\Delta L_t = -\frac{1}{2}\rho V'^2 S_t C_{L\alpha_t} \Delta\alpha_t \quad (185)$$

$$\Delta Z = -\frac{1}{2}\rho V'^2 S_t C_{L\alpha_t} \frac{ql_t}{u_0} \quad (186)$$

Assim,

$$\frac{\partial C_Z}{\partial q} = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S} \frac{\partial Z}{\partial q} = -\eta V_H \frac{\bar{c}}{u_0} C_{l\alpha_t} \quad (187)$$

e

$$C_{z_q} = -2\eta V_H C_{l\alpha_t} \quad (188)$$

4.9.2 A derivada C_{m_q}

Por definição,

$$C_{m_q} = \frac{\partial C_m}{\partial \hat{q}} = \frac{\partial C_m}{\partial(qt^*)} = \frac{\partial C_m}{\partial(q\bar{c}/2u_0)} = \frac{2u_0}{\bar{c}} \frac{\partial C_m}{\partial q} \quad (189)$$

Um acréscimo em M é ocasionado por um acréscimo em M_t :

$$\Delta M = \Delta M_t = -\Delta L_t l_t = \frac{1}{2}\rho V'^2 S_t C_{L\alpha_t} \Delta\alpha_t l_t \quad (190)$$

$$\Delta M_t = -\frac{1}{2}\rho V'^2 S_t C_{L\alpha_t} \frac{ql_t}{u_0} l_t \quad (191)$$

Assim,

$$\frac{\partial C_m}{\partial q} = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S \bar{c}} \frac{\partial M}{\partial q} = -\eta V_H \frac{l_t}{u_0} C_{l\alpha_t} \quad (192)$$

e

$$C_{m_q} = -2\eta V_H \frac{l_t}{\bar{c}} C_{l\alpha_t} \quad (193)$$

4.10 Derivadas em β - Estabilidade e Controle do Rolamento

Vimos em 4.11 o que ocorre quando a aeronave é submetida a um rolamento. Veremos agora o que ocorre quando, após um rolamento, a aeronave não retorna à sua posição original, ou seja, quando o plano xy não está horizontal ($\phi \neq 0$) mas $p = 0$.

Com $\phi \neq 0$, $p = 0$ e $\beta = 0$, a simetria do escoamento ao redor da aeronave

não é quebrada. Não surge portanto nenhum momento de restauração para que a aeronave volte à posição horizontal. No entanto, a sustentação mantém-se paralela a z , mas o peso da aeronave passa a apresentar uma componente em y , de magnitude $W \sin \phi$.

Essa componente de força em y anima a aeronave de uma velocidade lateral v e começa esta começa derrapar ($\beta \neq 0$).

Nesse momento o diedro da asa passa a influenciar a estabilidade da aeronave.

O diedro da asa de uma aeronave é o ângulo γ formado entre o plano da corda da asa e a horizontal, conforme mostrado na figura 4. Quando a aeronave tem uma componente de velocidade em y , ou seja, quando $\beta \neq 0$, o ângulo de ataque nas asas direita e esquerda são modificados de forma assimétrica, gerando um momento de rolamento.

O ângulo de ataque da asa foi definido como $\alpha = \arctan(V_n/V_t) \approx \arctan(V_n/v_c) \approx V_n/v_c$, onde V_n e V_t são as velocidades do escoamento normal e tangencial à asa. Para a asa da esquerda ($y < 0$), vemos que a componente da velocidade normal à asa é diminuída quando $v > 0$, enquanto que a componente tangencial aumenta. O ângulo de ataque da asa esquerda diminui, portanto. A magnitude dessa alteração pode ser obtida expressando-se V_n como $n \cdot v_c$, onde n é o versor normal à asa, ou explicitando suas componentes para a asa direita:

$$n \cdot v_c = (0, \sin \gamma, \cos \gamma) \cdot (u, v, w) = \sin \gamma v + w \cos \gamma \approx v \gamma + w \quad (194)$$

$$\alpha \approx v \gamma / v_c + w / v_c \approx \beta \gamma + w / v_c \quad (195)$$

Para um asa em que $\gamma = 0$, $\alpha \approx w / v_c$. A diferença $\Delta \alpha$ do ângulo de ataque de uma asa com diedro diferente de zero e uma com diedro igual a zero é, portanto $\Delta \alpha = \beta \gamma$. Há portanto um aumento do ângulo de ataque da asa direita para $\beta > 0$. Um diminuição do ângulo de ataque, de mesma magnitude, ocorre para a asa esquerda. Cada asa produz uma força de sustentação diferente, o que gera um momento que tende a restituir a posição horizontal da aeronave. O ângulo γ está portanto relacionado de alguma maneira com o a derivada C_{l_β} . Métodos para se estimar C_{l_β} pode ser encontrados em [15] ou resumidamente em [14, Apêndice B]. Uma primeira aproximação consiste em considerar a diferença

de sustentação entre uma asa e outra:

$$\Delta L = -C_{l_\alpha}(2\Delta\alpha)\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 \quad (196)$$

O momento de rolamento é então ΔL vezes metade da distância entre os centros de pressão de cada asa.

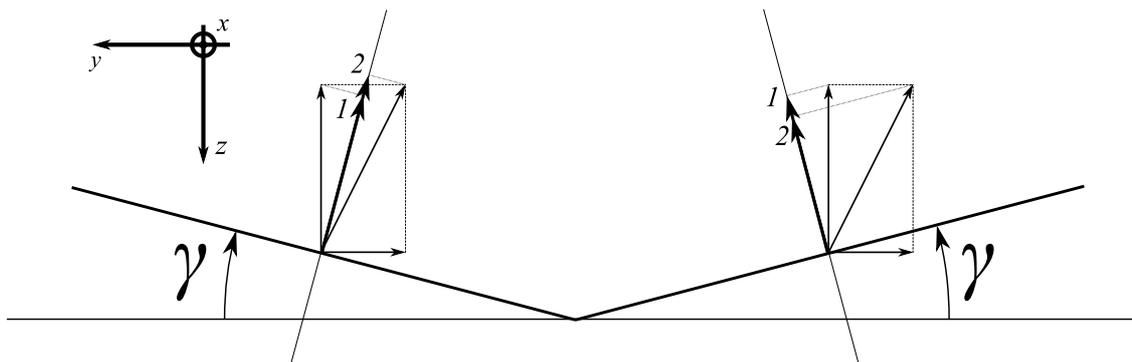


Figura 4 – Efeito do Diedro

4.10.1 A derivada C_{l_β}

4.10.1.1 Influência da Fuselagem em C_{l_β}

A fuselagem altera o campo de escoamento ao redor da asa de forma a modificar C_{l_β} . Na figura 5 está representado o escoamento ao redor de um cilindro, que representa a fuselagem da aeronave. A velocidade do escoamento representa a velocidade lateral da aeronave. Pode-se notar a partir da figura que, para aeronaves de asa alta, o ângulo de ataque é aumentado na asa direita, e reduzido para a asa esquerda. Contribui com o efeito do diedro, aumentando C_{l_β} . Para aeronaves de asa baixa, o efeito é o contrário. De forma geral, é por isso que aviões de asa alta tem pouco diedro e aviões de asa baixa tem diedro de até 10° [14].

4.10.1.2 Influência do Enflechamento em C_{l_β}

Tão importante quanto o ângulo γ de diedro para C_{l_β} . Devido ao enflechamento, se $\beta \neq 0$, a componente da velocidade do escoamento normal à linha de centros aerodinâmicos é diferente de uma asa para outra. As velocidades

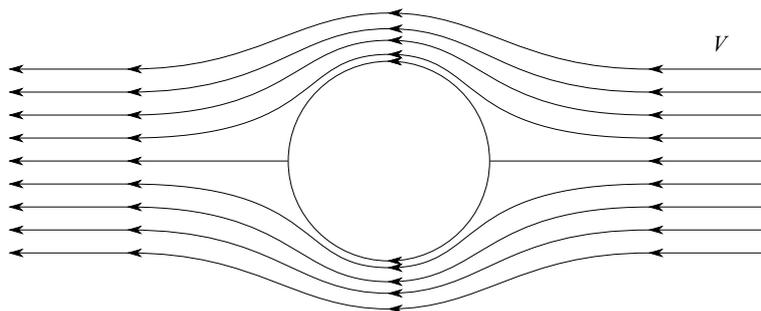


Figura 5 – Escoamento ao redor de um cilindro

de incidência para a asa esquerda e direita são respectivamente $v_c \cos(\beta + \Lambda)$ e $v_c \cos(\beta - \Lambda)$. Assim, forças de sustentação diferentes são aplicadas em cada asa, gerando um momento de rolamento.

$$\Delta L = C_L \frac{1}{2} \rho S V_\infty^2 (\cos^2(\beta + \Lambda) - \cos^2(\beta - \Lambda)) \quad (197)$$

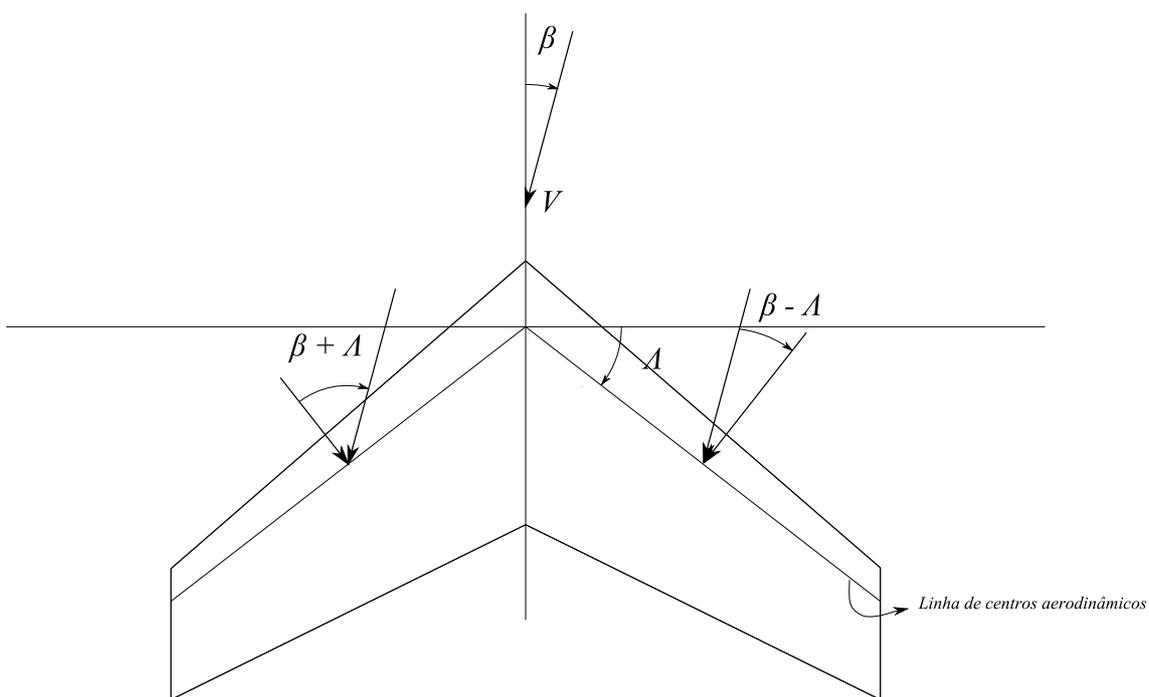


Figura 6 – Efeito do Enflechamento

Fazendo

$$\cos(\beta + \Lambda) = \cos \beta \cos \Lambda + \sin \beta \sin \Lambda \approx \cos \Lambda + \beta \sin \Lambda \quad (198)$$

e

$$\cos(\beta - \Lambda) \approx \cos \Lambda - \beta \sin \Lambda \quad (199)$$

temos

$$\Delta L = C_L \frac{1}{2} S V^2 2\beta \sin(2\Lambda) \quad (200)$$

O momento de rolamento L fica portanto

$$L = \Delta L d/2 \quad (201)$$

onde d é a distância entre os centros de pressão de cada asa.

Note que pela definição utilizada para ΔL , para Λ positivo e β pequeno, ΔL e L são negativos. Assim, o momento de rolamento tende a restaurar a aeronave ao vôo nivelado.

Em forma adimensional,

$$C_l = C_L \beta \sin(2\Lambda) \frac{d}{b} \quad (202)$$

A contribuição do enflechamento para C_{l_β} é, portanto

$$C_{l_{\beta flech}} = \frac{\partial C_{l_{\beta flech}}}{\partial \beta} = \frac{d}{b} C_L \sin(2\Lambda) \quad (203)$$

também negativo nas condições mencionadas.

Em geral, d/b é da ordem de 0.2[14].

4.10.1.3 Contribuição da cauda vertical para C_{l_β}

A cauda vertical comporta-se como um aerofólio. A sustentação desse aerofólio é paralela ao plano xy e gera um momento importante em torno do eixo z . Se o centro de pressão da cauda vertical estiver muito distanciado do plano xy , o momento gerado em torno do eixo x também deve ser considerado.

Analisemos primeiramente a sustentação da cauda vertical.

A deflexão δ_r do leme é tomada como positiva se é uma rotação positiva em torno de z . O ângulo α_f é positivo se contribui para a sustentação da mesma forma que δ_r positivo. Assim, para um ângulo de deriva β , não fosse a influência da fuselagem e da asa, α_f seria $-\beta$. Devido ao vórtice de ponta de asa, a direção

em que o escoamento incide na cauda vertical é defletido de um ângulo σ , denominado de *ângulo de sidewash*. Esse efeito é análogo ao efeito de downwash. Se a asa estiver na região $z < 0$, o sidewash faz com que a componente do escoamento perpendicular à cauda seja aumentada, conforme ilustra a figura 7. Caso a cauda

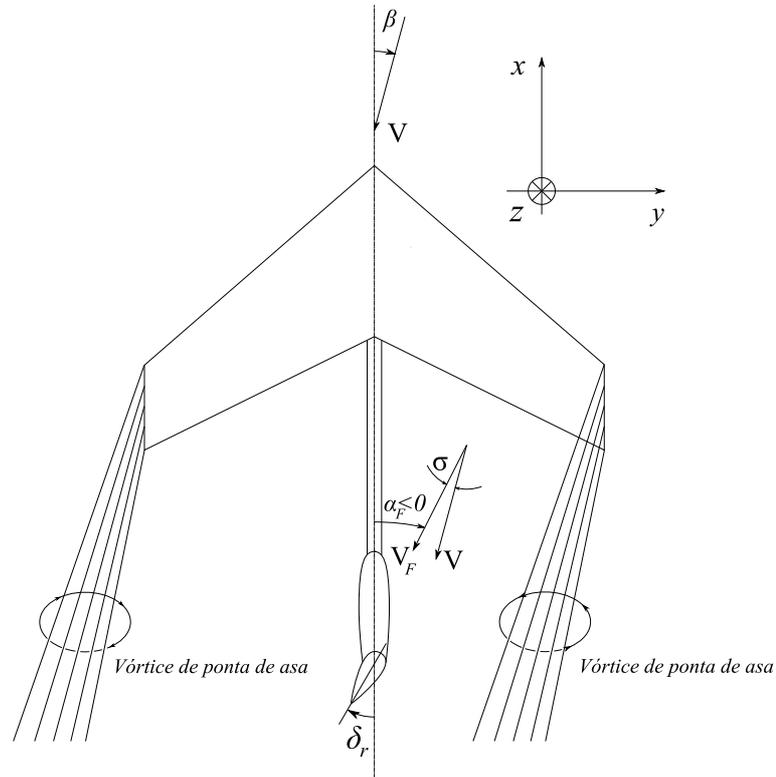


Figura 7 – Posicionamento do leme e ângulo de incidência na cauda vertical, para cauda em $z < 0$ - Definição de δ_r

esteja na região $z > 0$, o efeito é o oposto, e $\sigma < 0$. Podemos então escrever

$$\alpha_F = -\beta + \sigma \quad (204)$$

O cálculo de C_{l_β} se dá nas condições nominais de vôo, em que $\delta_r = 0$. A sustentação e o arrasto da cauda (figura 8), são portanto:

$$L_F = C_{L_{\alpha_F}} \alpha_F \frac{1}{2} \rho \left(\frac{V_F}{V_\infty} \right)^2 S_f \quad (205)$$

$$D_F = C_{D_{\alpha_F}} \alpha_F \frac{1}{2} \rho \left(\frac{V_F}{V_\infty} \right)^2 S_f \quad (206)$$

Projetando-se essas forças na direção y , admitindo-se α_F pequeno,

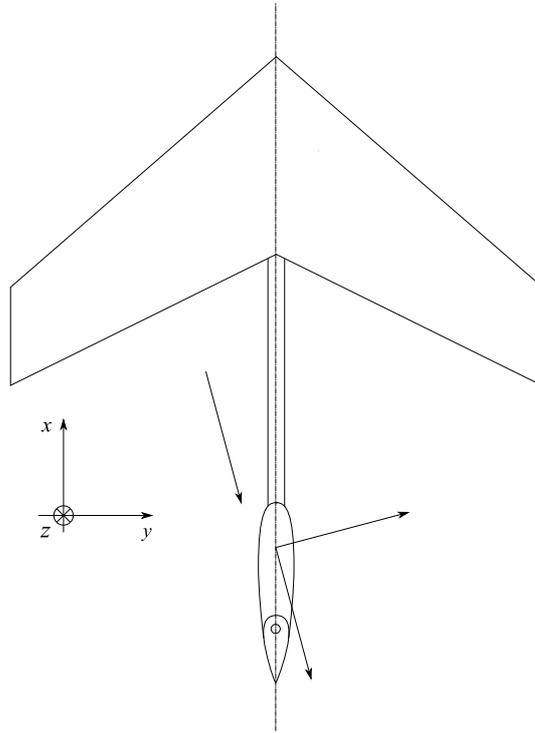


Figura 8 – Forças que agem na cauda vertical

$C_{L\alpha_F} \gg C_{D\alpha_F} \alpha_F$, e multiplicando pela distância z_F ao longo do eixo z que separa o plano xy do centro de pressão da cauda vertical, tem-se

$$\begin{aligned} \Delta l &= \frac{1}{2} \rho V_F^2 S_F \alpha_F z_F (C_{L\alpha_F} \cos \alpha_F + C_{D\alpha_F} \sin \alpha_F) \\ &\approx \frac{1}{2} \rho V_F^2 S_F \alpha_F z_F (C_{L\alpha_F} + C_{D\alpha_F} \alpha_F) \approx \frac{1}{2} \rho V_F^2 S_F z_F C_{L\alpha_F} \alpha_F \end{aligned} \quad (207)$$

Ou de forma adimensional

$$\begin{aligned} \Delta C_l &\approx C_{L\alpha_F} \alpha_F \frac{S_F z_F}{Sb} \left(\frac{V_F}{V_\infty} \right)^2 \quad (208) \\ \Delta C_{l\beta} &= \frac{\partial C_l}{\partial \beta} = C_{L\alpha_F} \frac{\partial \alpha_F}{\partial \beta} \frac{S_F z_F}{Sb} \left(\frac{V_F}{V_\infty} \right)^2 = -C_{L\alpha^2} \left(1 - \frac{\partial \sigma}{\partial \beta} \right) \frac{S_F z_F}{Sb} \left(\frac{V_F}{V_\infty} \right)^2 \end{aligned} \quad (209)$$

4.11 Derivadas em p

p indica a taxa de rolamento da aeronave, ou seja, um movimento de rotação em torno do eixo x (ver figura 1). Quando a aeronave gira em torno de x , o ângulo de ataque do escoamento em cada seção da asa é alterado, como pode

ser visto na figura 9.

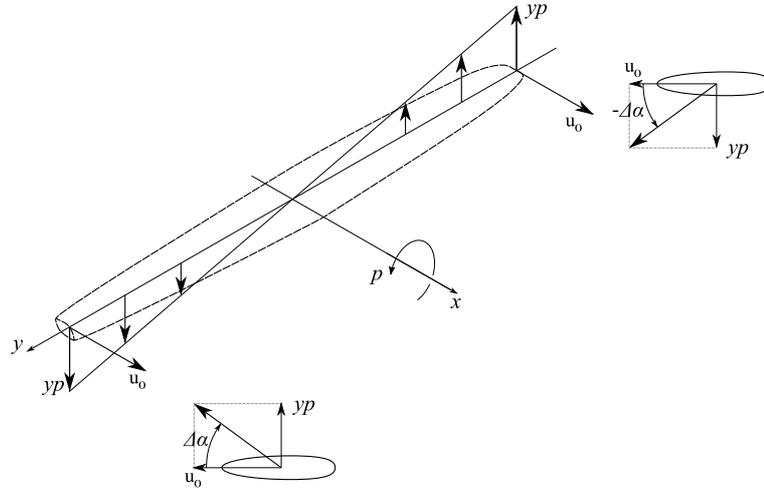


Figura 9 – Mudança do ângulo de incidência devido ao rolamento

A mudança do ângulo de ataque tem influência nos coeficientes C_l , C_n e C_y , como veremos.

4.11.1 A derivada C_{l_p}

Para cada seção da asa, a variação da força de sustentação devido à variação do ângulo de ataque é:

$$dL = c_{l_\alpha} \Delta\alpha \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 c dy \quad (210)$$

onde c_{l_α} refere-se ao perfil da seção considerada. Da figura 9, temos que $\Delta\alpha = yp/u_0$. Assim, a variação do momento de rolamento é:

$$dL = -c_{l_\alpha} \left(\frac{yp}{u_0} \right) \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 c dy y \quad (211)$$

Integrando ao longo de toda a asa,

$$L = \int_{-b/2}^{b/2} dL = -2 \int_0^{b/2} c_{l_\alpha} \left(\frac{y^2 p}{u_0} \right) \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 c dy \quad (212)$$

Dividindo-se ambos os lados por $\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S b$,

$$C_L = -2 \frac{p}{u_0 S b} \int_0^{b/2} c_{l_\alpha} y^2 c dy \quad (213)$$

C_{L_p} é definido como

$$C_{L_p} = \frac{\partial C_L}{\partial \hat{p}} = \frac{\partial C_L}{\partial (pb/2u_0)} \quad (214)$$

e representa o amortecimento da rotação em x .

Assim,

$$C_{L_p} = -4 \frac{1}{Sb^2} \int_0^{b/2} c_{l_\alpha} y^2 c \, dy \approx -4 \frac{C_{l_\alpha}}{Sb^2} \int_0^{b/2} y^2 c \, dy \quad (215)$$

se aproximarmos c_{l_α} por C_{l_α} . A equação anterior mostra que o módulo de C_{L_p} é tanto maior quanto maior for a envergadura ou a razão de aspecto. C_{L_p} tem ainda contribuições da cauda horizontal e vertical. Para aeronaves com asas de grande razão de aspecto, a contribuição da asa costuma ser a mais importante.

4.11.2 A derivada C_{y_p}

Da mesma forma como a asa tem seu ângulo de ataque modificado pelo rolamento, a cauda vertical sofre esse efeito. Com isso, além de contribuir com C_{l_p} , gera uma força lateral, na direção de y .

A mudança do ângulo de ataque para uma dada seção da cauda vertical é dada por $\Delta\alpha = zp/u_0$. A força lateral nesta seção é então

$$dY_F = -c_{l_\alpha} \left(\frac{zp}{u_0} \right) \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 c \, dz \quad (216)$$

onde c_{l_α} e c referem-se ao perfil da cauda vertical na seção considerada.

Integrando-se ao longo de toda cauda vertical, tem-se

$$Y_F = \int_{z_{inf}}^{z_{sup}} dY_F = -\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \frac{p}{u_0} \int_{z_{inf}}^{z_{sup}} c_{l_\alpha} z c \, dz \quad (217)$$

Dividindo-se ambos os lados por $1/2\rho V_\infty^2 S$,

$$C_{y_F} = -\frac{p}{Su_0} \int_{z_{inf}}^{z_{sup}} c_{l_\alpha} z c \, dz \quad (218)$$

$C_{y_{pF}}$ é definido como

$$C_{y_p} = \frac{\partial C_{y_F}}{\partial \hat{p}} = \frac{\partial C_{y_F}}{\partial \left(\frac{pb}{2u_0} \right)} \quad (219)$$

Então

$$C_{y_{p_F}} = -\frac{2}{Sb} \int_{z_{inf}}^{z_{sup}} c_{l_\alpha} z c dz \approx -2C_{l_{\alpha_F}} \frac{S_F}{S} \frac{z_F}{b} \quad (220)$$

se utilizarmos uma altura média z_F para a cauda vertical.

4.11.3 A derivada C_{n_p}

A derivada C_{n_p} relaciona o movimento de rolamento com o momento de guinada. É uma das derivadas cruzadas, cuja presença torna os movimentos de rolamento e guinada muito ligados um ao outro. A influência da fuselagem é desprezável, visto que se trata de uma rotação em x . Para C_{n_p} contribuem, portanto, a cauda vertical, a asa e a cauda horizontal.

4.11.3.1 Contribuição da asa para N

Como visto na seção 4.11.1, um dos efeitos do rolamento é a mudança do ângulo de ataque em cada seção da asa. Essa mudança altera não somente a força de sustentação, como visto, mas também a força de arrasto.

Para cada seção da asa, a variação da força de arrasto devido à variação do ângulo de ataque é:

$$dD = c_{d_\alpha} \Delta\alpha \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 c dy \quad (221)$$

onde c_{d_α} refere-se ao perfil da seção considerada. Novamente da figura 9, temos que $\Delta\alpha = yp/u_0$. Assim, a variação do momento de guinada para essa contribuição em específico é:

$$dN = c_{d_\alpha} \left(\frac{yp}{u_0} \right) \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 c dy y \quad (222)$$

que integrada ao longo da asa produz um momento de guinada positivo.

A asa, no entanto, sofre um outro efeito. A mudança do ângulo de ataque local leva à mudança de direção da força de sustentação local, definida como sendo perpendicular ao escoamento local. Assim, para uma variação de $\Delta\alpha$ do ângulo de ataque local, a força de sustentação adiciona uma parcela de $-dL \sin \alpha$ a dD . Essa parcela é análoga pode ser vista como um arrasto induzido, e contribui para um momento de guinada negativo. Temos, então, devido à asa:

$$dN_w = (c_{d_\alpha} - c_{l_\alpha} \alpha) \Delta\alpha \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 c dy y \quad (223)$$

que integrado ao longo da envergadura e adimensionalizado por $\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S b$, resulta

$$C_{n_w} = 2 \frac{p}{u_0 S b} \int_0^{b/2} (c_{d_\alpha} - c_{l_\alpha} \alpha) y^2 c dy \quad (224)$$

geralmente positivo.

4.11.3.2 Contribuição da cauda vertical para N

A contribuição da cauda vertical para N tem a magnitude da variação da força na cauda vertical devido ao rolamento (obtida na eq.218) multiplicada pelo braço l_F (distância entre a cauda vertical e o centro de massa da aeronave), mas com sinal invertido, para ser coerente com a convenção de sinais adotada. Assim, sua forma adimensionalizada, é:

$$C_{n_F} = -C_{y_F} \frac{l_F}{b} = \frac{S_F l_F}{S b} C_{l_{\alpha_F}} \frac{z_{FP}}{u_0} = V_V C_{l_{\alpha_F}} \frac{z_{FP}}{u_0} \quad (225)$$

$V_V = (S_F l_F)/(S b)$ recebe o nome de razão de volume da cauda vertical.

Finalmente, C_n vale,

$$C_n = C_{n_w} + C_{n_F} \quad (226)$$

C_{n_p} é definido como

$$C_{n_p} = \frac{\partial C_n}{\partial \hat{p}} = \frac{\partial C_n}{\partial (\frac{pb}{2u_0})} \quad (227)$$

que resulta em

$$C_{n_p} = 2V_V C_{l_{\alpha_F}} \frac{z_F}{b} + \frac{4}{S b^2} \int_0^{b/2} (c_{d_\alpha} - c_{l_\alpha} \alpha) y^2 c dy \quad (228)$$

4.12 Derivadas em r

Analisaremos agora como as forças aerodinâmicas se alteram quando a aeronave apresenta uma taxa de guinada r .

Observando-se a figura 10, percebe-se que a guinada tem como efeito principal alterar o campo de velocidades nas asas e na empenagem.

Para a asa e empenagem horizontal, com a convenção de sinais adotada para r , tem-se que as velocidades percebidas pelos perfis do lado esquerdo da

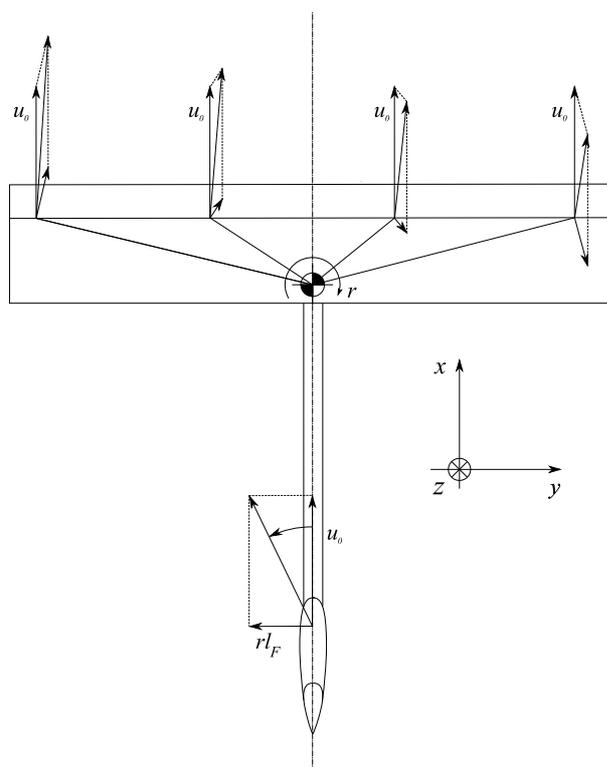


Figura 10 – Mudança de velocidades devido à guinada

aeronave são aumentadas, e as velocidades do lado direito, diminuídas. Assim, as forças aerodinâmicas do lado esquerdo, como sustentação, arrasto e momento de arfagem são aumentadas, assim como o vórtice de ponta de asa. Do lado direito, ocorre o oposto.

A empenagem vertical tem uma variação de ângulo de ataque, devido à velocidade de rotação e ao sidewash. Para uma empenagem com o centro aerodinâmico em $z < 0$, o efeito da velocidade de rotação e do sidewash agem em sentidos opostos, como ilustrado na figura 10. A mudança do ângulo de ataque é, então:

$$\Delta\alpha_F = \frac{rl_F}{u_0} + r \frac{\partial\sigma}{\partial r} = \hat{r} \left(2\frac{l_F}{b} + \frac{\partial\sigma}{\partial\hat{r}} \right) \quad (229)$$

Como comentado, $\partial\sigma/\partial r$ é geralmente negativo quando a empenagem vertical se encontra em $z < 0$.

Há ainda influências sobre a fuselagem e a empenagem horizontal. Esta, além de sofrer efeitos análogos aos da asa, ainda é submetida a um downwash assimétrico.

4.12.1 A derivada C_{y_r}

Somente a contribuição da empenagem vertical é importante para C_{y_r} [14]. A partir da eq.229, tem-se:

$$C_{y_t} = C_{L_F} \frac{S_F}{S} \hat{r} \left(2 \frac{l_F}{b} + \frac{\partial \sigma}{\partial \hat{r}} \right) \quad (230)$$

Ou de forma adimensional:

$$C_{y_{r_t}} = C_{L_F} \frac{S_F}{S} \left(2 \frac{l_F}{b} + \frac{\partial \sigma}{\partial \hat{r}} \right) \quad (231)$$

4.12.2 A derivada C_{l_r}

Relaciona a taxa de guinada com o momento de rolamento. As contribuições mais importantes vêm da asa e da empenagem vertical.

Não se dispõe de uma formula fechada para a contribuição da asa para C_{l_r} . Como para r positivo, há um aumento da sustentação à esquerda da aeronave (e uma diminuição à direita), surge um momento de rolamento positivo. Assim $C_{l_{r_w}}$ é positivo, proporcional a C_L . O alongamento, o enflechamento e “taper ratio” são parâmetros importantes para C_{l_r} [14].

A contribuição da empenagem vertical para C_{l_r} vem diretamente do resultado para C_{y_r} e é:

$$C_{l_{r_t}} = -C_{L_F} \frac{S_F}{S} \frac{z_F}{b} \left(2 \frac{l_F}{b} + \frac{\partial \sigma}{\partial \hat{r}} \right) \quad (232)$$

4.12.3 A derivada C_{n_r}

Essa derivada é o amortecimento da guinada. Para garantir-se estabilidade, deve ser negativa. Em aeronaves, a contribuição da fuselagem é desprezável[14].

A contribuição da asa é negativa, pois, como discutido no inicio desta seção, o arrasto e o arrasto induzido são aumentados à esquerda da aeronave e reduzidos à direita.

A contribuição da empenagem vertical vem também de C_{y_r} e é dada por

$$C_{n_{rt}} = -C_{L_F} \frac{S_F l_F}{S b} \left(2 \frac{l_F}{b} + \frac{\partial \sigma}{\partial \hat{r}} \right) = -C_{L_F} V_F \left(2 \frac{l_F}{b} + \frac{\partial \sigma}{\partial \hat{r}} \right) \quad (233)$$

4.13 Derivadas em δ_e

As derivadas em δ_e refletem como são alteradas as forças e momentos aerodinâmicos com o acionamento do profundor.

4.13.1 A derivada $C_{z_{\delta_e}}$

O profundor localiza-se normalmente na região posterior da cauda. Em aeronaves sem cauda, se localizam na porção posterior da asa. Descreveremos o profundor instalado numa cauda. Para profundos situados na asa, o raciocínio é semelhante.

O profundor tem como principal função modificar o momento aplicado à aeronave de forma a fazê-la cabrar, picar ou atingir uma posição de equilíbrio entre esses dois movimentos. Para tanto, age modificando o perfil aerodinâmico da cauda, que passa a contar com uma sustentação L_t diferente. O ponto de aplicação da sustentação da cauda dista l_t do centro de massa, de forma a produzir um momento sobre a aeronave.

Seja L_{t_0} a sustentação da cauda, com o profundor não acionado. A L_{t_0} associa-se o coeficiente de sustentação C_{L_t} , que é o coeficiente tridimensional de sustentação da cauda. Com o profundor defletido de δ_e , a sustentação da cauda passa a ser L_t . À diferença de sustentação $L_t - L_{t_0}$, associa-se o coeficiente C_e . A relação entre C_e e δ_e $\partial C_e / \partial \delta_e = C_{L_e}$ indica como varia C_e com a deflexão do profundor. Deve-se frisar que C_{L_t} , C_e e C_{L_e} são adimensionalizados utilizando-se as dimensões geométricas da empenagem horizontal.

Para movimentar o profundor, um binário deve ser aplicado na articulação entre a cauda e o profundor. A magnitude desse binário é importante para o projeto do acionamento do profundor e seu equacionamento permite também estudar o que ocorre quando o profundor é liberado (bastando igualar o momento a zero). Apesar de o momento aplicado ao profundor sofrer uma reação que em última instância é aplicada em toda a aeronave, sua magnitude é pequena se

comparada ao momento $L_t l_t$ (sustentação da cauda vezes braço entre a cauda e o centro de massa da aeronave).

A deflexão do profundor é notada δ_e e tomada como positiva no sentido indicado na figura 11.

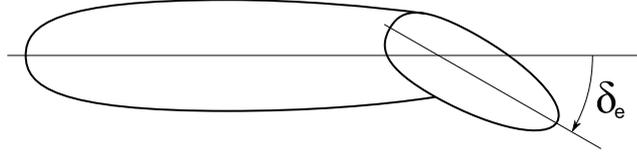


Figura 11 – Definição de δ_e

O acionamento do profundor altera a sustentação oferecida pela empennagem horizontal.

$$\Delta Z = -\Delta L = -\frac{1}{2}\rho u_0^2 S_t C_e = -\frac{1}{2}\rho u_0^2 S_t C_{L_e} \delta_e \quad (234)$$

ou, em forma adimensional:

$$\Delta C_z = -\frac{S_t}{S} C_{L_e} \delta_e \quad (235)$$

e

$$C_{z\delta_e} = -\frac{S_t}{S} C_{L_e} \quad (236)$$

4.13.2 A derivada $C_{m\delta_e}$

A partir de $C_{z\delta_e}$, tem-se $C_{m\delta_e}$, multiplicando-o pelo braço l_t adimensionalizado:

$$C_{m\delta_e} = C_{z\delta_e} \frac{l_t}{b} = -\frac{S_t l_t}{S b} C_{L_e} = -V_H C_{L_e} \quad (237)$$

4.14 Derivadas em δ_a

As derivadas em δ_a relacionam o comando de aileron com a alteração nos momentos L e N . A deflexão do aileron é notada δ_a e tomada como positiva no sentido indicado na figura 12.

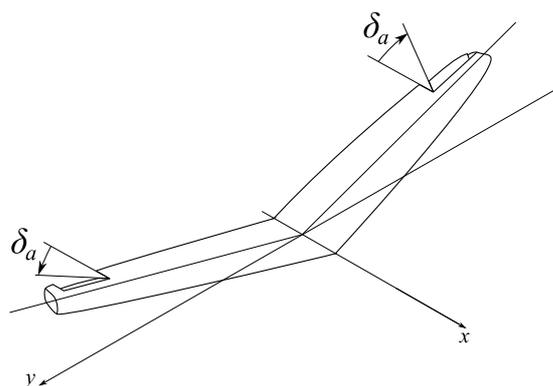


Figura 12 – Definição de δ_a

4.14.1 A derivada $C_{l_{\delta_a}}$

Com o aumento da sustentação do lado direito da aeronave e redução do lado esquerdo, produz-se um momento em x negativo. Assim, normalmente,

$$C_{l_{\delta_a}} < 0 \quad (238)$$

4.14.2 A derivada $C_{n_{\delta_a}}$

A função principal do aileron é produzir um momento de rolamento. No entanto, também podem produzir um momento de guinada. O aumento de sustentação do lado direito e a redução do lado esquerdo produzem um diferencial de arrasto, resultando em um momento de guinada positivo. Assim, em geral,

$$C_{n_{\delta_a}} > 0 \quad (239)$$

4.15 Derivadas em δ_r

As derivadas em δ_r relacionam o comando de leme com a alteração nos momentos L e N e na força Y . A deflexão do leme é notada δ_r e tomada como positiva no sentido indicado na figura 7.

Com a deflexão do leme, há uma mudança no perfil aerodinâmico do conjunto empenagem vertical-leme, que passa a apresentar uma sustentação diferente daquela presente com o leme não-defletido. Essa variação na sustentação ΔL pode ser relacionada às derivadas $C_{l_{\delta_r}}$, $C_{n_{\delta_r}}$ e $C_{y_{\delta_r}}$

4.15.1 A derivada $C_{y\delta_r}$

Sendo $\Delta Y = \Delta L$, $C_{y\delta_r}$ é em geral positivo.

4.15.2 A derivada $C_{l\delta_r}$

A partir de $C_{y\delta_r}$, obtém-se $C_{l\delta_r}$ multiplicando o primeiro pela distância (medida em z) entre o centro aerodinâmico da empenagem vertical e o centro de massa da aeronave. Essa distância é notada z_F e adimensionalizada dividindo-se z_F pela metade da envergadura. Em uma aeronave convencional, a empenagem vertical situa-se acima do centro de massa ($z < 0, z_F > 0$), e o acionamento do leme para $\delta_r > 0$ gera um momento L positivo. Assim,

$$C_{l\delta_r} = \frac{2z_F}{b} C_{y\delta_r} \quad (240)$$

4.15.3 A derivada $C_{n\delta_r}$

De maneira semelhante feita para $C_{n\delta_r}$, multiplica-se $C_{y\delta_r}$ pelo braço l_F adimensionalizado, invertendo-se o sinal para adequar-se à convenção adotada para os eixos xyz .

$$C_{n\delta_r} = -\frac{2l_F}{b} C_{y\delta_r} \quad (241)$$

5 FENÔMENOS DINÂMICOS BÁSICOS

A teoria de controle linear, explorada em livros como [16], oferece ferramentas e resultados que podem ser aplicados à dinâmica da aeronave. Geralmente, essa teoria trabalha com sistemas do tipo:

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (242)$$

onde x é o vetor de estados e u é o vetor de controle. Um sistema linear escrito dessa forma é a representação do sistema no **espaço de estados**.

Buscaremos representar as equações obtidas para os movimentos longitudinal e lateral na forma de espaço de estados, e estudemos algumas propriedades dos sistemas obtidos.

Inicialmente, vejamos como se comporta a aeronave para diferentes condições iniciais de x , fazendo $u = 0$:

$$\dot{x} = Ax \quad (243)$$

Uma solução x dessa equação é da forma:

$$x = x_0 e^{i\omega t} e^{nt} = x_0 e^{(n+i\omega)t} \quad (244)$$

x_0 é uma amplitude inicial, o fator $e^{i\omega t}$ corresponde a uma oscilação senoidal de frequência ω , período $T = 2\pi/\omega$ e o fator e^{nt} corresponde a um aumento ou redução exponencial da amplitude de oscilação. Substituindo a eq.244

na eq.243, temos:

$$\dot{x} = (n + i\omega)x \quad (245)$$

$$(n + i\omega)x = Ax \quad (246)$$

$$((n + i\omega)I - A)x = 0 \quad (247)$$

$$(\lambda I - A)x = 0 \quad (248)$$

Reconhece-se prontamente da eq.248 que os vários λ e x que a satisfazem são os autovalores e os autovetores de A .

A exemplo de

$$x = x_0 e^{\lambda t} = x_0 e^{(n \pm i\omega)t} = x_0 e^{(-\omega_0 \zeta \pm i\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2})t} \quad (249)$$

que é solução de

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (250)$$

a solução x tem uma razão de amortecimento $\zeta = n/\sqrt{n^2 + \omega^2}$. Associado a essa razão de amortecimento, tem-se o tempo característico $T_{1/2} = \ln(2)/|n|$ para que a amplitude seja aumentada ou reduzida de um fator 2.

Qualquer solução x da eq.243 pode ser representada, portanto, como uma combinação linear dos autovetores de A . Temos, então, que cada autovetor é um modo independente de a aeronave se movimentar. Cada modo, pelo menos em teoria, pode ser excitado independentemente.

Ilustraremos cada um desses modos utilizando os dados da aeronave Apoená [capítulo 7], com a condição inicial de vôo horizontal ($\Theta_0 = 0$).

5.1 Movimento Longitudinal

Foram deduzidas a eq.122 que rege o movimento longitudinal da aeronave. Rearranjando-se os termos dessa equação, pode-se reescrevê-las na forma

de espaço de estados, com:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\hat{u}} \\ \dot{\hat{\alpha}} \\ \dot{\hat{q}} \\ \dot{\hat{\Theta}} \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \begin{bmatrix} \frac{2C_{L_0} \tan \Theta_0 + C_{x_u}}{2\mu} & \frac{C_{x_\alpha}}{2\mu} \\ -\frac{2C_{L_0} - C_{z_u}}{2\mu - C_{z_\alpha}} & \frac{C_{z_\alpha}}{2\mu - C_{z_\alpha}} \\ \frac{1}{i_y} \left(C_{m_u} - \frac{C_{m_\alpha} (2C_{L_0} - C_{z_u})}{2\mu - C_{z_\alpha}} \right) & \frac{1}{i_y} \left(C_{m_\alpha} + \frac{C_{m_\alpha} C_{z_\alpha}}{2\mu - C_{z_\alpha}} \right) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \alpha \\ \hat{q} \\ \hat{\Theta} \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{C_{L_0}}{2\mu} \\ \frac{2\mu + C_{z_q}}{2\mu - C_{z_\alpha}} & -\frac{C_{L_0} \tan \Theta_0}{2\mu - C_{z_\alpha}} \\ \frac{1}{i_y} \left(C_{m_q} + \frac{C_{m_\alpha} (2\mu + C_{z_q})}{2\mu - C_{z_\alpha}} \right) & \frac{1}{i_y} \left(-\frac{C_{m_\alpha} C_{L_0} \tan \Theta_0}{2\mu - C_{z_\alpha}} \right) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{C_{z_{\delta_e}}}{2\mu - C_{z_\alpha}} \\ \frac{1}{i_y} \left(C_{m_{\delta_e}} + \frac{C_{m_\alpha} C_{z_{\delta_e}}}{2\mu - C_{z_\alpha}} \right) \\ 0 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\delta_e}_u \quad (251)$$

Para o movimento longitudinal, utilizando-se os dados do capítulo 7, com $\Theta_0 = 0$, temos a partir dos autovalores de A , redimensionalizados por t^* , os valores da tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Freqüências e períodos do modos longitudinais - Apoená I

	Autovalores (Apoena)	Período (s)	$T_{1/2}$ (s)	Modo
λ_1	$-0,075101 \pm 0,54895i$	11,446	9,2295	fugóide
λ_2	$-4,8135 \pm 8,2577i$	0,76089	0,14400	período curto

A redimensionalização é necessária para se poder extrair as informações sobre o período e o tempo de decaimento exponencial. A matriz A , assim como os autovalores λ , tem unidade de $1/\text{tempo}$ na forma dimensional e não tem unidade quando as equações são adimensionalizadas.

Para outras aeronaves, em geral, temos também dois pares de autovalores conjugados. A título de comparação, reproduzimos na tabela 5.2 os resultados de um exemplo de uma aeronave de aviação geral extraído de [11].

Tabela 5.2 – Freqüências e períodos do modos longitudinais - Aviação geral

	Autovalores	Período (s)	$T_{1/2}$ (s)	Modo
λ_1	$-0,0165 \pm 0,2144i$	29,3	41,83	fugóide
λ_2	$-2,436 \pm 2,521i$	2,49	0,283	período curto

Extraída de Nelson[11]

Os valores de cada modo de movimento dependem das características da aeronave. No entanto, podem-se distinguir dois modos bastante diferenciados, chamados **Fugóide** e **Período Curto**.

5.1.1 Modo Fugóide

O modo fugóide caracteriza-se por ser, entre os dois modos longitudinais, o de maior período e menor amortecimento. O comportamento da aeronave nesse modo pode ser analisado pelos autovetores da matriz A .

$$x_1 = \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \alpha \\ \hat{q} \\ \hat{\Theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,08515 \pm 0,4609i \\ 0,007724 \mp 0,03437i \\ -0,0003605 \pm 0,002635i \\ 0,8826 \end{bmatrix} \quad (252)$$

O valor absoluto de cada componente não apresenta nenhum significado, pois um mesmo modo de movimento pode ter diferentes amplitudes. É de interesse verificar quanto cada componente é perturbada em relação às outras. Normalizando pelo valor de $\hat{\Theta}$, temos:

$$\hat{u}/\hat{\Theta} = 0,5311 \angle 100^\circ \quad (253)$$

$$\alpha/\hat{\Theta} = 0,03991 \angle 283^\circ \quad (254)$$

$$\hat{q}/\hat{\Theta} = 0,003013 \angle 98^\circ \quad (255)$$

O módulo destas razões representam as amplitudes relativas das oscilações. Os ângulos representam as diferenças de fases entre a oscilação de cada componente e a oscilação de $\hat{\Theta}$.

Pode-se perceber que o modo fugóide é caracterizado por uma variação significativa da velocidade da aeronave, com pequenas variações do ângulo de

ataque α . Para a manutenção da energia total da aeronave, como há uma variação significativa da velocidade, há também uma variação significativa de sua altitude.

Uma aproximação[17] do modo fugóide é obtida fazendo-se $\dot{\alpha} = 0$ e $\dot{\hat{q}} = 0$ na eq.243. Com $\Theta_0 = 0$, pode-se escrever α e \hat{q} em função de \hat{u} :

$$\begin{bmatrix} C_{z\alpha} & 2\mu + C_{zq} \\ C_{m\alpha} + \frac{C_{m\dot{\alpha}}C_{z\alpha}}{2\mu - C_{z\dot{\alpha}}} & C_{mq} + \frac{C_{m\dot{\alpha}}(2\mu + C_{zq})}{2\mu - C_{z\dot{\alpha}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \hat{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2C_{L_0} - C_{zu}) \\ - \left(C_{mu} - \frac{C_{m\dot{\alpha}}(2C_{L_0} - C_{zu})}{2\mu - C_{z\dot{\alpha}}} \right) \end{bmatrix} \hat{u} \quad (256)$$

Com $C_{zq} \ll 2\mu$ e $C_{z\dot{\alpha}} \ll 2\mu$:

$$\begin{bmatrix} C_{z\alpha} & 2\mu \\ C_{m\alpha} + \frac{C_{m\dot{\alpha}}C_{z\alpha}}{2\mu} & C_{mq} + C_{m\dot{\alpha}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \hat{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2C_{L_0} - C_{zu}) \\ - \left(C_{mu} - \frac{C_{m\dot{\alpha}}(2C_{L_0} - C_{zu})}{2\mu} \right) \end{bmatrix} \hat{u} \quad (257)$$

Isolando-se $[\alpha \ \hat{q}]^T$:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \hat{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2\mu C_{mu} + (2C_{L_0} - C_{zu})C_{mq}}{C_{z\alpha}C_{mq} - 2\mu C_{m\alpha}} \\ - \frac{(2C_{L_0} - C_{zu})C_{m\alpha} + C_{z\alpha}C_{mu}}{C_{z\alpha}C_{mq} - 2\mu C_{m\alpha}} \end{bmatrix} \hat{u} \quad (258)$$

E substituindo:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{u}} \\ \dot{\Theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{C_{xu}}{2\mu} + \frac{C_{x\alpha}}{2\mu} \left(\frac{2\mu C_{mu} + (2C_{L_0} - C_{zu})C_{mq}}{C_{z\alpha}C_{mq} - 2\mu C_{m\alpha}} \right) - \frac{C_{L_0}}{2\mu} \\ - \frac{(2C_{L_0} - C_{zu})C_{m\alpha} + C_{z\alpha}C_{mu}}{C_{z\alpha}C_{mq} - 2\mu C_{m\alpha}} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \Theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{C_{x\alpha}}{2\mu} \left(\frac{2\mu C_{m\delta_e} - C_{z\delta_e}C_{mq}}{C_{z\alpha}C_{mq} - 2\mu C_{m\alpha}} \right) \\ \frac{C_{z\delta_e}C_{m\alpha} - C_{z\alpha}C_{m\delta_e}}{C_{z\alpha}C_{mq} - 2\mu C_{m\alpha}} \end{bmatrix} \delta_e \quad (259)$$

Pode-se ainda simplificar a expressão com as seguintes hipóteses: $|C_{z\alpha}C_{mq}| \ll |2\mu C_{m\alpha}|$, $|C_{z\alpha}C_{mu}| \ll |(2C_{L_0} - C_{zu})C_{m\alpha}|$, $|C_{x\alpha}C_{mu}/C_{m\alpha}| \ll |C_{xu}|$, o que resulta em:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{u}} \\ \dot{\Theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{C_{xu}}{2\mu} & -\frac{C_{L_0}}{2\mu} \\ \frac{2C_{L_0} - C_{zu}}{2\mu} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \Theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{C_{x\alpha}C_{m\delta_e}}{2\mu C_{m\alpha}} \\ -\frac{1}{2\mu} \left(C_{z\delta_e} - \frac{C_{z\alpha}C_{m\delta_e}}{C_{m\alpha}} \right) \end{bmatrix} \delta_e \quad (260)$$

Calculando-se os autovalores, tem-se a frequência natural não-amortecida

do sistema e seu coeficiente de amortecimento:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{4\mu^2} (2C_{L_0} - C_{z_u}) C_{L_0}} \quad (261)$$

$$\zeta = -\frac{C_{x_u}}{4\mu\omega_0} \quad (262)$$

5.1.2 Modo de Período Curto

Seguindo o mesmo raciocínio para o modo de Período Curto, temos, a partir dos autovetores da matriz A:

$$\hat{u}/\hat{\Theta} = 0,01352\angle 42^\circ \quad (263)$$

$$\alpha/\hat{\Theta} = 1,083\angle 13^\circ \quad (264)$$

$$\hat{q}/\hat{\Theta} = 0,05198\angle 120^\circ \quad (265)$$

A seguinte simplificação pode ser feita[17]. Vemos que α e Θ estão quase na mesma fase, e a magnitude de \hat{u} e \hat{q} são pequenas. Como \hat{u} e \hat{q} são aproximadamente nulos, podemos eliminar a equação para \hat{u} e os termos que multiplicam \hat{u} . Além disso, em geral, $C_{z_\alpha} \ll 2\mu$ e $C_{z_q} \ll 2\mu$. Assim

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \\ \dot{\Theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{C_{z_\alpha}}{2\mu} & 1 & -\frac{C_{L_0} \tan \Theta_0}{2\mu} \\ \frac{1}{i_y} \left(C_{m_\alpha} + \frac{C_{m_\alpha} C_{z_\alpha}}{2\mu} \right) & \frac{1}{i_y} (C_{m_q} + C_{m_\alpha}) & \frac{1}{i_y} \left(-\frac{C_{m_\alpha} C_{L_0} \tan \Theta_0}{2\mu} \right) \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{C_{z_{\delta_e}}}{2\mu} \\ \frac{1}{i_y} \left(C_{m_{\delta_e}} + \frac{C_{m_\alpha} C_{z_{\delta_e}}}{2\mu} \right) \\ 0 \end{bmatrix} \delta_e \quad (266)$$

Fazendo $\Theta_0 = 0$, Θ pode ser obtido a partir de \hat{q} . Eliminando sua equação do modelo, temos:

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{C_{z_\alpha}}{2\mu} & 1 \\ \frac{1}{i_y} \left(C_{m_\alpha} + \frac{C_{m_\alpha} C_{z_\alpha}}{2\mu} \right) & \frac{1}{i_y} (C_{m_q} + C_{m_\alpha}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{C_{z_{\delta_e}}}{2\mu} \\ \frac{1}{i_y} \left(C_{m_{\delta_e}} + \frac{C_{m_\alpha} C_{z_{\delta_e}}}{2\mu} \right) \end{bmatrix} \delta_e \quad (267)$$

com o que pode-se calcular a frequência de oscilação e o amortecimento do modo.

5.2 Movimento Lateral

Para o movimento lateral, a partir da eq.123, as matrizes e vetores para a representação do sistema no espaço de estados são:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\hat{p}} \\ \dot{\hat{r}} \\ \dot{\hat{\Psi}} \\ \dot{\hat{\Phi}} \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{C_{y\beta}}{2\mu} & \frac{C_{yp}}{2\mu} & \frac{C_{yr}}{2\mu} - 1 & 0 & \frac{C_{L0}}{2\mu} \\ \frac{C_{l\beta}i_z+i_{xz}C_{n\beta}}{i_xi_z-i_{xz}^2} & \frac{C_{lp}i_z+i_{xz}C_{np}}{i_xi_z-i_{xz}^2} & \frac{C_{lr}i_z+i_{xz}C_{nr}}{i_xi_z-i_{xz}^2} & 0 & 0 \\ \frac{C_{l\beta}i_{xz}+i_xC_{n\beta}}{i_xi_z-i_{xz}^2} & \frac{C_{lp}i_{xz}+i_xC_{np}}{i_xi_z-i_{xz}^2} & \frac{C_{lr}i_{xz}+i_xC_{nr}}{i_xi_z-i_{xz}^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sec \Theta_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \tan \Theta_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \beta \\ \hat{p} \\ \hat{r} \\ \hat{\Psi} \\ \hat{\Phi} \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{C_{y\delta_r}}{2\mu} \\ \frac{C_{l\delta_a}i_z+i_{xz}C_{n\delta_a}}{i_xi_z-i_{xz}^2} & \frac{C_{l\delta_r}i_z+i_{xz}C_{n\delta_r}}{i_xi_z-i_{xz}^2} \\ \frac{C_{l\delta_a}i_{xz}+i_xC_{n\delta_a}}{i_xi_z-i_{xz}^2} & \frac{C_{l\delta_r}i_{xz}+i_xC_{n\delta_r}}{i_xi_z-i_{xz}^2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix}}_u \quad (268)$$

Para o movimento lateral, utilizando-se novamente os dados do capítulo 7, temos a partir dos autovalores redimensionalizados de A (excluídas as quartas linha e coluna), com $\Theta_0 = 0$, os resultados da tabela 5.3

Tabela 5.3 – Freqüências e períodos do modos laterais - Apoena I

Autovalores (Apoena)	Período (s)	$T_{1/2}$ (s)	Modo
λ_1 $-0,030085$	—	23,040	espiral
λ_2 $-45,091$	—	0,015372	rolamento
λ_3 $-1,9888 \pm 5,3950i$	1,1646	0,34853	“Dutch Roll”

De forma geral, para todas as aeronaves têm-se também um par de autovalores conjugados e dois autovalores reais. A título de comparação, reproduzimos na tabela 5.4 os resultados da mesma aeronave de aviação geral utilizada para ilustrar o Movimento Longitudinal.

Os valores de cada modo de movimento dependem das características da aeronave. Podem-se distinguir, no entanto, três modos bastante diferenciados, chamados **Espiral**, **Rolamento** e **“Dutch Roll”**.

Tabela 5.4 – Frequências e períodos do modos laterais - Aviação geral

	Autovalores	Período (s)	$T_{1/2}$ (s)	Modo
λ_1	-0,00877	—	78,7	espiral
λ_2	-8,435	—	0,082	rolamento
λ_3	$-0,487 \pm 2,335$	2,69	1,42	“Dutch Roll”

Extraída de Nelson[11]

5.2.1 Modo Espiral

O autovetor associado ao autovalor referente ao modo espiral é:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0,03350 \\ -0,001139 \\ 0,01094 \\ 0,9994 \end{bmatrix} \quad (269)$$

e as magnitudes relativas entre as componentes são:

$$|\beta/\Phi| = 0,03352 \quad (270)$$

$$|\hat{p}/\Phi| = -0,001140 \quad (271)$$

$$|\hat{r}/\Phi| = 0,01094 \quad (272)$$

O modo espiral é caracterizado por ter um pólo muito lento, que em algumas aeronaves pode ser inclusive positivo, levemente instável, portanto.

Entende-se sua dinâmica aplicando-se uma pequena variação no ângulo de rolamento a partir do vôo nivelado. Com $\Phi > 0$, a componente vertical da sustentação diminui e o avião desce pela força da gravidade. Como $\Phi > 0$, a velocidade de descida tem uma componente em v e o ângulo β se torna positivo. A sustentação da empenagem vertical aumenta, e gera um momento de guinada e \hat{r} se torna positivo. O aumento de \hat{r} cria um momento de rolamento positivo (vinculados por C_{lr}), fazendo Φ aumentar ainda mais, e assim se fecha o ciclo.

No modo espiral, $\dot{\hat{p}}$ é praticamente nulo, β e \hat{r} são da mesma ordem de grandeza e bem maiores que \hat{p} , o que determina β em função de \hat{r} . Ignorando as equações para $\dot{\hat{\beta}}$ e $\dot{\Phi}$, temos a aproximação para o modo espiral:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\hat{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{C_{l\beta}i_z + i_{xz}C_{n\beta}}{i_x i_z - i_{xz}^2} & \frac{C_{l_r}i_z + i_{xz}C_{n_r}}{i_x i_z - i_{xz}^2} \\ \frac{C_{l\beta}i_{xz} + i_x C_{n\beta}}{i_x i_z - i_{xz}^2} & \frac{C_{l_r}i_{xz} + i_x C_{n_r}}{i_x i_z - i_{xz}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \hat{r} \end{bmatrix} \quad (273)$$

que se escreve também:

$$\dot{\hat{r}} + \frac{1}{i_x i_z - i_{xz}^2} \left(\frac{(C_{l_r}i_z + i_{xz}C_{n_r})(C_{l\beta}i_{xz} + i_x C_{n\beta}) - (C_{l\beta}i_z + i_{xz}C_{n\beta})(C_{l_r}i_{xz} + i_x C_{n_r})}{C_{l\beta}i_z + i_{xz}C_{n\beta}} \right) \hat{r} = 0 \quad (274)$$

cuja raiz característica λ é o oposto do termo que multiplica \hat{r} e deve ser negativa para um modo espiral estável.

5.2.2 Modo de Rolamento

O autovetor associado ao autovalor referente ao modo de rolamento é:

$$x_2 = \begin{bmatrix} 0,01998 \\ -0,8622 \\ 0,04106 \\ 0,5045 \end{bmatrix} \quad (275)$$

e as magnitudes relativas entre as componentes são:

$$|\beta/\Phi| = 0,03960 \quad (276)$$

$$|\hat{p}/\Phi| = -1,709 \quad (277)$$

$$|\hat{r}/\Phi| = 0,08139 \quad (278)$$

O modo de rolamento é caracterizado apenas pela variação significativa do ângulo de rolamento. A dinâmica do movimento segue basicamente o explicado para a derivada C_{l_p} . A equação característica do movimento é

$$\dot{\hat{p}} - \frac{C_{l_p}i_z + i_{xz}C_{n_p}}{i_x i_z - i_{xz}^2} \hat{p} = 0 \quad (279)$$

Como em geral $i_z \gg i_{xz}$, aproxima-se por

$$\dot{\hat{p}} - \frac{C_{l_p}}{i_x} \hat{p} = 0 \quad (280)$$

Com $\frac{C_{l_p}}{i_x} < 0$, tem-se estabilidade neste movimento.

5.2.3 Modo “Dutch Roll”

Os autovetores associados aos autovalores referente ao modo de “Dutch Roll” são:

$$x_3 = \begin{bmatrix} 0,8350 \\ -0,1040 \mp 0,03927i \\ 0,05577 \mp 0,1640i \\ -0,003956 \pm 0,5102i \end{bmatrix} \quad (281)$$

e as magnitudes e fases relativas entre as componentes são:

$$\beta/\Phi = 1,637 \angle 269,6^\circ \quad (282)$$

$$\hat{p}/\Phi = 0,2179 \angle 110,2^\circ \quad (283)$$

$$\hat{r}/\Phi = 0,3396 \angle 198,3^\circ \quad (284)$$

O modo “Dutch Roll” (rolamento holandês), assim nomeado pela semelhança entre o movimento da aeronave e o manobra de um esquiador (holandês) na neve, pode-se iniciar a partir do voo nivelado com um movimento de guinada. A asa que se move para a frente gera maior sustentação e maior arrasto (ver seção 4.12) e assim o avião tende a restaurar sua posição inicial. A oscilação de rolamento e de guinada estão em defasagem de cerca de 90° , como se pode ver também pelos autovetores. Quando se atinge o maior ângulo de guinada, a aeronave ainda está rolando. Devido ao ângulo de rolamento, surge uma velocidade lateral, que ocasiona um momento de guinada no sentido contrario ao inicial, e assim o ciclo se repete.

Se considerarmos que o Dutch Roll é constituído basicamente por variações em β e em \hat{r} , temos a seguinte aproximação:

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\hat{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{C_{y\beta}}{2\mu} & \frac{C_{y_r} - 1}{2\mu} \\ \frac{C_{l_\beta} i_{xz} + i_x C_{n_\beta}}{i_x i_z - i_{xz}^2} & \frac{C_{l_r} i_{xz} + i_x C_{n_r}}{i_x i_z - i_{xz}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \hat{r} \end{bmatrix} \quad (285)$$

cuja equação característica conduz a

$$\omega_0^2 = \frac{C_{y\beta} (C_{l_r} i_{xz} + i_x C_{n_r}) - (C_{y_r} - 1) (C_{l_\beta} i_{xz} + i_x C_{n_\beta})}{2\mu (i_x i_z - i_{xz}^2)} \quad (286)$$

$$\zeta = -\frac{1}{2\omega_0} \left(\frac{C_{y\beta}}{2\mu} + \frac{C_{l_r} i_{xz} + i_x C_{n_r}}{i_x i_z - i_{xz}^2} \right) \quad (287)$$

5.2.4 Resumo das aproximações - modos laterais

A tabela 5.5 resume os resultados das aproximações e os compara aos valores exatos. Para esse aeronave, têm-se bons resultados, exceto para o modo espiral. Na tabela 5.6, foram reunidos os resultados das comparações entre as magnitudes dos autovetores para cada um dos modos laterais.

Tabela 5.5 – Resultados das aproximações - Movimento Lateral

	Exato		Aproximação	
	Período (s)	$T_{1/2}$ (s)	Período (s)	$T_{1/2}$ (s)
espiral	-	23,040	-	0,72131
rolamento	-	0,015372	-	0,01577
“Dutch Roll”	1,1646	0,34853	0,52093	0,72131

Tabela 5.6 – Magnitude relativa dos componentes dos autovetores - Movimento Lateral

		Espiral		Rolamento		“Dutch Roll”	
$ \dot{\beta}/\Phi $	β/Φ	-0,001	0,03	-1,8	0,04	9,41	$1,6\angle 270^\circ$
$ \dot{\hat{p}}/\Phi $	\hat{p}/Φ	$3 \cdot 10^{-5}$	-0,001	77,1	-1,7	1,25	$0,22\angle 110^\circ$
$ \dot{\hat{r}}/\Phi $	\hat{r}/Φ	$-3 \cdot 10^{-4}$	0,01	-3,7	0,08	1,95	$0,34\angle 198^\circ$
$ \dot{\Phi}/\Phi $		-0,03		-45		5,75	

6 TÉCNICAS DE IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS

Várias técnicas de identificação de sistemas podem ser encontradas na literatura. Elas se distinguem por sua capacidade em poderem ou não ser aplicadas em modelos:

- lineares ou não-lineares
- com ruído de processo e/ou de medida
- discretos ou contínuos
- com ou sem conhecimento prévio das características de alguns parâmetros
- com ou sem conhecimento prévio das equações que o regem

Åström e Eykhoff notam no começo da década de 1970 que uma grande quantidade de novas técnicas surgem rapidamente, e que, aparentemente, têm-se à disposição uma caixa de ferramentas variadas que não formam um tema de pesquisa unificado. Utilizam a definição proposta por Zadeh[18] para um problema de identificação de sistema como ponto de partida para a construção de um panorama geral e unificado das várias técnicas disponíveis e publicam um estudo sobre o estado-da-arte [10]. A formulação de um problema de identificação dada por Zadeh [18] é a seguinte:

"Identificação é a determinação, com base em entradas e saídas, de um sistema dentre uma classe de sistemas, equivalente ao sistema em estudo".

Chamemos *processo* o sistema em estudo e *modelos* os sistemas da classe de sistemas considerada. Pela formulação acima, é necessário especificar uma classe de modelos, uma classe de sinais de entrada e um critério de equivalência.

A equivalência costuma ser definida em função de uma *função custo*, que é um funcional V das saídas do processo y e as saídas do modelo y_m :

$$V = V(y, y_m) \quad (288)$$

Dois modelos m_1 e m_2 são equivalentes se o valor da função custo for o mesmo para ambos:

$$V(y, y_{m_1}) = V(y, y_{m_2}) \quad (289)$$

A função custo depende fortemente do conhecimento prévio que se tem do processo e do objetivo de sua identificação. Quando a equivalência é definida dessa forma, o problema de identificação torna-se um problema de minimização do funcional V . Busca-se encontrar o modelo que minimiza o valor de V para um certo processo, e esse modelo é considerado como sua melhor aproximação. Se o mínimo global for único, a classe de modelos é chamada de identificável.[10]

Algumas vezes, o mínimo é obtido com um modelo que não é fisicamente válido. Nesses casos, deve-se aplicar restrições no domínio em que se busca o mínimo.

Pode-se abordar a identificação de sistemas de maneira probabilística. Escolhe-se uma classe paramétrica dependente de um parâmetro θ (que pode ter várias componentes) e estuda-se a probabilidade de cada valor de θ ser o correto. Muitas vezes, nessa abordagem, também pode-se escrever uma função custo, deduzida a partir de hipóteses de probabilidade. As hipóteses comumente feitas são ligadas a distribuições normais, que simplificam e tornam possíveis alguns desenvolvimentos analíticos. É importante manter sempre em mente quais hipóteses foram feitas no emprego de certa solução, para verificar-se a validade de seu uso em cada caso.

6.1 Classificação dos métodos de identificação de sistemas

Os métodos de identificação de sistemas podem ser classificados de acordo com o tipo de cada um de seus componentes básicos: classe de modelos, classe de sinais de entrada e ruídos, método de cálculo do erro e método de cálculo da função custo em função do erro.

O método numérico de minimização da função custo é de importância secundária e não define o método de identificação.

6.1.1 Classes de modelos

Os modelos podem ser classificados como *caixa preta*, *caixa branca* e o intermediário *caixa cinza*.

Um exemplo de modelo caixa preta é uma função de transferência $G(s) = f(s, \theta)$. Através dela, é possível conhecer a resposta para entradas dadas, sem se conhecer a física envolvida no processo. Pode-se arbitrar uma função de transferência dependente de parâmetros θ que são obtidos por algum método de identificação. A escolha correta do grau da função de transferência (maior expoente de s) é fundamental para que o modelo consiga ser uma boa aproximação do processo.

Outro exemplo de modelo caixa preta é um modelo linear no espaço de estados

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (290)$$

$$y = Cx + Du \quad (291)$$

em que os termos das matrizes A , B , C e D são os próprios parâmetros θ .

Um modelo caixa branca é formado pelas equações que regem o processo, com os parâmetros físicos determinados analítica ou numericamente.

Um modelo caixa cinza procura combinar o conhecimento físico que se tem do processo com parâmetros determinados por métodos de identificação. Um exemplo de modelo caixa cinza é a eq.111 com as derivadas de estabilidade substituídas por parâmetros desconhecidos $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n$, componentes de um vetor θ , que pode ser estimado utilizando-se métodos de identificação. É sobre modelos caixa cinza que iremos trabalhar neste relatório.

Modelos caixa branca e caixa cinza costumam ser representados por modelos de espaço de estados do tipo

$$\dot{x} = f(x, u, \theta, \eta) \quad (292)$$

$$y = g(x, u, \theta, \nu) \quad (293)$$

onde x é o vetor de estados, u o vetor de entradas, y o vetor de saídas, θ os parâmetros, η o ruído de processo e ν o ruído de medida, como as equações desenvolvidas para a dinâmica da aeronave.

Como se vê, o ruído de processo é uma perturbação que altera os estados do sistema. No exemplo de uma aeronave, a turbulência atmosférica e rajadas de vento podem ser vistas como ruídos de processo. Já o ruído de medida, corrompe apenas o dado medido, não causando alterações no sistema. Imprecisões dos sensores podem ser representados por esse tipo de ruído.

O modelo é sempre uma idealização do sistema que se pretende identificar. Para sua construção, normalmente são necessárias varias simplificações e hipóteses, e, em processos físicos, diversos fatores que alteram o sistema são desconsiderados. Há, portanto, diferenças entre o sistema real e o modelo, conhecidas por *erros de modelagem*. Embora algumas vezes os erros de modelagem possam ser representados por ruídos de processo, esses dois conceitos são diferentes.

Um erro de modelagem pode surgir de uma linearização ou da desconsideração de, por exemplo, o momento angular de algum componente móvel. A desconsideração de perturbações atmosféricas aleatórias, embora seja uma simplificação adotada no modelo, deve ser vista como um erro de processo, justamente por seu caráter estatístico.

6.1.2 Classes de sinais de entrada e ruídos

Os sinais de entrada e ruídos podem ser classificados, por exemplo, em:

- funções impulso
- funções degrau
- sinais senoidais
- ruído branco
- ruído colorido
- PRBS (*pseudo-random binary signal*, sinal binário pseudo-aleatório)

Para a generalização de uma aplicação, é interessante utilizarem-se técnicas que não se limitem a um tipo de entrada ou ruído. No entanto, simplificações

úteis para o desenvolvimento de técnicas podem ser feitas quando se admite a hipótese de que a entrada ou o ruído são de um tipo específico.

Certos sinais de entrada podem fazer com que o método de identificação não seja capaz de identificar o método ou não resulte em estimativas consistentes. Um critério citado por Åström;Eykhoff[10] e desenvolvido por Åström;Bohlin[19], Åström[20] e Aoki;Staley[21], é descrito a seguir.

Para se obterem estimativas consistentes pelo método dos mínimos quadrados e máxima verossimilhança é suficiente que existam os limites

$$\bar{u} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u(k) \quad (294)$$

$$R_u(i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [u(k) - \bar{u}][u(k+i) - \bar{u}] \quad (295)$$

e que a matriz A_n definida por

$$A_{n_{ij}} = R_u(i-j), i, j = 1, \dots, n \quad (296)$$

seja definida positiva.

Note que, se

$$f_u(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N [u(k) - \bar{u}] e^{i\omega k} \quad (297)$$

existe, então

$$R_u(\tau) = \int |f_u(\omega)|^2 e^{i\omega\tau} d\omega \quad (298)$$

e a matriz A_n da eq.296 é definida não-negativa. Para que A_n seja também positiva, basta que $f_u(\omega) > 0$.

Em muitos métodos de identificação, é necessário que o sinal de entrada seja independente do sinal de saída e seus ruídos. Na figura 13 temos um sistema de controle em laço fechado[10]. Uma tentativa de identificação da função de transferência G a partir de u e y resultaria em $G = 1/H$. Fischer[22], mostra que alguns processos em laço fechado podem ser identificados se H é tomado não-linear.

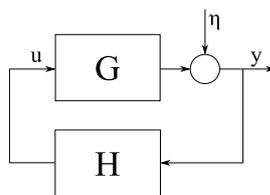


Figura 13 – Identificação de um sistema em laço fechado

6.1.3 Cálculo do erro[10]

Como explicado no início do capítulo, os critérios envolvem normalmente uma função custo que deve ser minimizada. Tal função custo é função de erros,

$$V = V(e_i) \quad (299)$$

definidos como a diferença entre uma grandeza esperada do modelo e a efetivamente medida, ou entre transformações dessas grandezas. Uma importante diferenciação entre os métodos de identificação é feita de acordo com a natureza das grandezas utilizadas para o cálculo do erro:

- *Output error*: o erro é definido como a diferença entre a saída medida (y_m) e a saída esperada pelo modelo ($M(u)$)

$$e = y - y_m \quad (300)$$

É indicado utilizar esse erro na eq.303 quando há ruído somente na medida e ele é branco.

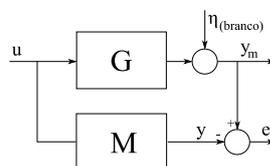


Figura 14 – Exemplo de Output error method

- *Input error* o erro é definido como a diferença entre a entrada aplicada ao processo (u) e a entrada que, de acordo com o modelo, daria origem à saída medida $M^{-1}(y_m)$.

$$e = u - M^{-1}(y_m) \quad (301)$$

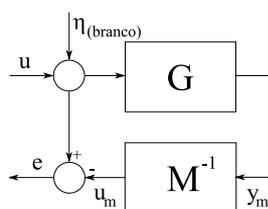


Figura 15 – Exemplo de Input error method

Supõe-se para isso que o modelo seja inversível, ou seja, que para cada saída haja uma e somente uma entrada que lhe possa da origem. A utilização desse erro na eq.303 é indicada para processos em que haja somente ruído na entrada e ele é branco.

- Generalized Error

Uma generalização dos dois exemplos anteriores é:

$$e = M_2^{-1}(y_m) - M_1(u) \quad (302)$$

De acordo com o modelo, $y = M_2 M_1(u)$. Refere-se a $M_2 M_1$ como modelo generalizado. Um caso particular de generalized error é o equation error.

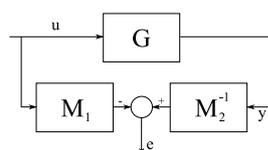


Figura 16 – Exemplo de Generalized error method

6.1.4 Função custo

6.1.4.1 Método dos mínimos quadrados (MMQ)

Para a aplicação do método dos mínimos quadrados, define-se a função custo como sendo a metade do somatório (ou da integral, no caso contínuo) do quadrado de um erro

$$V(\theta) = \frac{1}{2} \sum_k e_k(\theta)_k^T e_k(\theta) \quad (303)$$

e buscam-se os parâmetros θ que minimizam V .

Como visto na seção 6.1.3, o erro e pode ser definido de diferentes maneiras. Exemplificando para o caso de *output error*,

$$e = y - y_m \quad (304)$$

Como y é previsto por um modelo parametrizado por θ , V também é função de θ .

6.1.4.2 Método da máxima verossimilhança (ML)

Åström[9] explica o princípio subjacente ao método da máxima verossimilhança (*maximum likelihood*) e traz uma perspectiva histórica mostrando que as idéias fundamentais desse método remontam a Gauss. Em resumo, o método pode ser expresso por:

Seja Y uma variável aleatória com densidade de probabilidade $p(y, \Theta)$ dependente de Θ . A partir de observações y , determine Θ que maximiza a função de verossimilhança $L(y, \Theta) = p(y, \Theta)$. Em outras palavras, encontre Θ de forma que a probabilidade de se obterem as realizações y para Y seja máxima.

O próximo passo é, então, a determinação da função L .

Para o caso especial em que as observações são amostras aleatórias independentes da variável Y ,

$$L(\Theta, y) = L(\theta, y_1, y_2, \dots, y_n) = p(y_1, \Theta)p(y_2, \Theta)p(y_3, \Theta) \dots p(y_n, \Theta) \quad (305)$$

Especializando para o caso em que a densidade de probabilidade de Y é uma gaussiana de média m e desvio padrão σ :

$$p(y_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(y - m)^2}{2\sigma^2} \right\} \quad (306)$$

a função de verossimilhança se torna

$$L(\Theta, y) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^N} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N (y - m)^2 \right\} \quad (307)$$

onde $m = m(\Theta)$ e $\sigma = \sigma(\Theta)$.

Em geral, no entanto, observações sucessivas de uma mesma variável, como seu registro ao longo da evolução de um sistema, não são independentes

umas das outras. Nesses casos, devemos reescrever a eq. 305 como:

$$L(\Theta, y_n) = p(y(n)|y_{n-1}, \Theta) \dots p(y(3)|y_2, \Theta)p(y(2)|y(1), \Theta)p(y(1), \Theta) \quad (308)$$

onde:

- $y(n)$ é a medida de y no instante n
- y_n é o histórico de medidas até o instante n (n inclusive)
- $p(y(n)|y_{n-1}, \Theta)$ pode ser lido como a densidade de probabilidade (em função de Θ) de obtenção de y no instante n dado que as medidas anteriores foram y_{n-1} .

Especializando novamente para o caso em que as densidades condicionais $p(y(k)|y_{k-1})$ são gaussianas

$$p(y(k)|y_{k-1}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(y - \hat{y})^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (309)$$

com

- média condicional $\hat{y} = \hat{y}(k, y_{k-1}, \Theta) = E[y(k)|y_{k-1}, \Theta]$ (esperança de obtenção de $y(n)$ dados y_{n-1})
- covariância $\sigma^2 = \sigma^2(k, y_{k-1}, \Theta) = cov[y(k)|y_{k-1}, \Theta]$

obtém-se a função de verossimilhança

$$L(\Theta, y) = \frac{\prod_{k=1}^N \sigma^{-1}}{(\sqrt{2\pi})^N} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{(y - \hat{y})^2}{\sigma^2}\right\} \quad (310)$$

A maximização de L equivale à minimização de $V = -\ln L$.

$$V(\Theta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{(y - \hat{y})^2}{\sigma^2} + \sum_{k=1}^N \ln \sigma + N \ln(\sqrt{2\pi}) \quad (311)$$

Como o último termo é apenas uma constante, podemos redefinir:

$$V(\Theta) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=1}^N \frac{(y - \hat{y})^2}{\sigma^2} + \ln \sigma^2 \right\} \quad (312)$$

Caso $y(k)$ seja um vetor coluna de covariância S , V se escreve:

$$V(\Theta) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=1}^N (y - \hat{y})^T S^{-1} (y - \hat{y}) + \ln |S| \right\} \quad (313)$$

A covariância S de $y(k)$ é uma matriz tal que $S_{ij} = \text{var}[y_i(k), y_j(k)]$, lembrando que $\text{var}[y_i(k), y_i(k)] = \text{cov}(y_i(k))$.

Os valores esperados \hat{y} e a matriz de covariância podem ser diferentes para cada instante k e dependem de Θ . Seus valores podem ser determinados com a implementação de um filtro de Kalman.

6.2 Filtro de Kalman

O filtro de Kalman será aqui apresentado de forma sumária. Para um estudo de sua dedução e propriedades, aconselhamos a leitura de Welch;Bishop[23] e Brown;Hwang[24].

Outras formulações mais avançadas, como o filtro de Kalman estendido (EKF, *Extended Kalman Filter*) e o filtro de Kalman *Unscented* (UKF, “sem aroma”, numa tradução livre) podem ser aplicadas a sistemas não-lineares.

Aplicaremos neste trabalho o filtro de Kalman a um sistema dinâmico linear discreto, regido por equações como:

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_k + w_{k-1} \quad (314)$$

$$y_k = Hx_k + v_k \quad (315)$$

- $x_{n \times 1}$ é o vetor de estados dos sistema
- $y_{m \times 1}$ é o vetor de saídas (medições)
- $u_{l \times 1}$ é o vetor de entradas (comandos)
- $w_{n \times 1}$ e $v_{m \times 1}$ são vetores aleatórios de perturbações (ruídos de processo e de medida)

A matriz de mudança de estado $A_{n \times n}$ relaciona os estados no instante $k-1$ ao estados no instante k seguinte. A matriz $B_{n \times l}$ indica como as entradas afetam os estados. A matriz $H_{m \times n}$ oferece as saídas a partir dos estados do sistema. Os

vetores w e v serão considerados independentes um do outro, brancos (contêm todas as frequências, em igual potência) e gaussianos (suas amplitudes seguem uma distribuição normal), de médias nulas e covariâncias Q e R respectivamente.

As matrizes A , B , H , Q e R podem variar no tempo, mas admitiremos aqui que são constantes. As matrizes A , B e H podem ser parametrizadas por valores Θ que desejemos descobrir.

O filtro de Kalman busca estimar os estados x_k a partir de medidas ruidosas y_k . Em seu desenvolvimento encontramos duas estimativas

- \hat{x}_k^- estimativa *a priori*: é a estimativa do vetor x_k antes de serem levadas em conta as medidas y_k do instante k .
- \hat{x}_k estimativa *a posteriori*: é a estimativa do vetor x_k após serem computadas as medidas y_k

e a elas podemos associar dois erros, que são a diferença entre o estado real x_k (que não se pode conhecer diretamente) e as estimativas.

$$e_k^- = x_k - \hat{x}_k^- \quad (316)$$

$$e_k = x_k - \hat{x}_k \quad (317)$$

O erro de estimativa *a priori* e_k^- tem covariância $P_k^- = E[e_k^- e_k^{-T}]$ e o erro de estimativa *a posteriori* e_k tem covariância $P_k = E[e_k e_k^T]$

O filtro de Kalman busca calcular x_k por

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K(y_k - H\hat{x}_k^-) \quad (318)$$

A matriz K é chamada de ganho de Kalman, e pondera a diferença entre a medida esperada $H\hat{x}_k^-$ e obtida y_k . Essa diferença é denominada *inovação*.

Na dedução do filtro de Kalman, busca-se K que minimiza P_k . Uma das formas de se escrever a matriz K que satisfaz esse objetivo é

$$K_k = \frac{P_k^- H^T}{H P_k^- H^T + R} \quad (319)$$

Como interpretado por Welch;Bishop[23], se a covariância do erro de medida é próxima de zero, confere-se maior peso à medida (que é então confiável).

Por outro lado, se o erro de estimativa *a priori* é próximo de zero, confere-se maior peso à estimativa (que é então de boa qualidade) e menos à medida y_k .

O filtro de Kalman divide-se em duas fases que se alternam: uma de predição e outra de correção.

Na fase de predição, a partir do estado estimado para $k-1$ e conhecendo-se as entradas u_k , faz-se uma estimativa para x_k . Calcula-se também a covariância do erro desta estimativa.

$$\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1} + Bu_k \quad (320)$$

$$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q \quad (321)$$

Na fase de correção, calcula-se o ganho de Kalman, lê-se a medida y_k , com ela estima-se novamente o estado x_k , e calcula-se a covariância do erro desta estimativa.

$$K_k = P_k^- H^T (HP_k^- H^T + R)^{-1} \quad (322)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K(y_k - H\hat{x}_k^-) \quad (323)$$

$$P_k = (I - K_k H)P_k^- \quad (324)$$

No caso de as medidas y_k serem menos freqüentes que os sinais de entrada, ou se eventualmente algumas delas não forem obtidas, por falha em sensores por exemplo, pode-se repetir várias vezes a fase de predição passando para a fase de correção somente quando a nova medida estiver disponível.

O termo $HP_k^- H^T + R$ é a matriz de covariância S da inovação, utilizada no método da máxima verossimilhança, juntamente com $\hat{y} = H\hat{x}$.

6.3 Métodos de minimização da função custo

O método numérico para o encontro do mínimo da função custo V é, em geral, independente do modelo e função custo utilizados. A minimização pode ser feita em um passo (*one-shot*), resolvendo-se as relações que devem ser satisfeitas no ponto de mínimo de V , ou por métodos iterativos. Os métodos iterativos são os mais usados pois dependem do conhecimento do valor de V (e de funcionais de V) somente nos pontos que se atingem a cada passo da iteração. No que se segue,

V_θ indica o vetor gradiente de V em relação a θ : $V_\theta \equiv \nabla_\theta V \equiv \left[\frac{\partial V}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial \theta_n} \right]$.

Muitos dos métodos utilizados são baseados na iteração

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \Gamma V_\theta(\theta_k) \quad (325)$$

Essa iteração pode ser entendida da seguinte maneira:

- 1) parte-se de um ponto $(\theta_k, V(\theta_k))$ sobre a curva $V \times \theta$;
- 2) neste ponto, determina-se a projeção no domínio de θ do sentido da descida mais acentuada $(-V_\theta(\theta_k))$;
- 3) caminha-se no sentido de $\Gamma(-V_\theta(\theta_k))$, onde Γ é um fator multiplicativo;
- 4) repete-se o processo até a convergência, caracterizada por $-V_\theta(\theta_k) \approx 0$.

No caso geral, Γ pode ser uma matriz ou um escalar.

Para sua aplicação, é necessário o cálculo do jacobiano $\nabla_\theta V$. Cada termo do jacobiano nada mais é do que a derivada parcial de V em relação a cada componente de θ . Uma das formas de calculá-lo é fazer a razão entre a variação de V para um pequeno acréscimo em um componente de θ , mantendo as outras constantes. Computacionalmente, no entanto, para funções V como a definida na seção 6.1.4.2 é menos custoso fazer:

$$\nabla_\theta V = \left[\frac{\partial e}{\partial \theta} \right]^T S^{-1} e \quad (326)$$

Mesmo para casos em que S seja função de θ , esse cálculo tem sido feito, ignorando-se a variação de S com θ .

- método do gradiente é o caso particular para $\Gamma = \lambda$ escalar ou λI .

No caso geral, Γ pode ser uma matriz, mas normalmente é escolhido como um escalar positivo, para que se avance no domínio de θ na mesma direção e sentido de $-V_\theta(\theta_k)$.

- método de Newton-Raphson

O método de Newton é o caso particular do método do gradiente com $\Gamma = \nabla_\theta^2 V$. Ou seja, Γ é a matriz hessiana de V em relação a θ :

$$\nabla_\theta^2 V_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$$

$$\theta_{k+1} = \theta_k - (\nabla_\theta^2 V)^{-1} \nabla_\theta V \quad (327)$$

- aproximação de Gauss-Newton

O método de Newton-Raphson pode ser aplicado utilizando-se a aproximação de Gauss-Newton para $\nabla_{\theta}^2 V$, o que evita o cálculo de derivadas de segunda ordem

$$\nabla V_{\Theta}^2 = \frac{\partial e}{\partial \theta} S^{-1} \frac{\partial e}{\partial \theta} + e S^{-1} \frac{\partial^2 e}{\partial \theta^2} \approx \frac{\partial e}{\partial \theta} S^{-1} \frac{\partial e}{\partial \theta} \quad (328)$$

- algoritmo de Levenberg-Marquardt

é uma modificação do método de Newton-Raphson, normalmente aplicada com a aproximação de Gauss-Newton, que modifica a matriz hessiana $\nabla_{\Theta}^2 V$ por $\nabla_{\Theta}^2 V + \lambda I$. Evitam-se assim problemas numéricos de mau condicionamento da matriz hessiana. Para pequenos valores de λ , esse algoritmo se comporta como o método de Newton-Raphson enquanto que, para grandes valores de λ , ele se comporta como o método do gradiente.[5]

Encontram-se na literatura muitos outros métodos, incluindo buscas heurísticas do mínimo por métodos como algoritmos genéticos e enxame de partículas.[2]

6.4 Sinais de entrada

Apresentamos aqui um breve levantamento dos sinais de entrada utilizados nos artigos consultados para este trabalho.

6.4.1 Movimento Longitudinal

Iliff;Maine[1] utilizam um pulso no comando do profundor para a identificação da dinâmica longitudinal de uma aeronave T-37B, como o da figura 17.

Maciel;Góes[2] identificam as derivadas de estabilidade longitudinais da aeronave militar Xavante (AT-26 FAB 4516) com a utilização de um comando de profundor de aspecto mostrado na figura 18.

Sandman;Kelly[3] utilizam o comando mostrado na figura 19 para a identificação da dinâmica longitudinal de um veículo submarino.

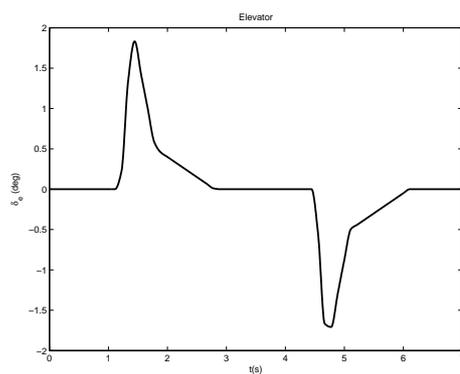


Figura 17 – Comando de profundor utilizado para identificação de uma aeronave T-37B[1]

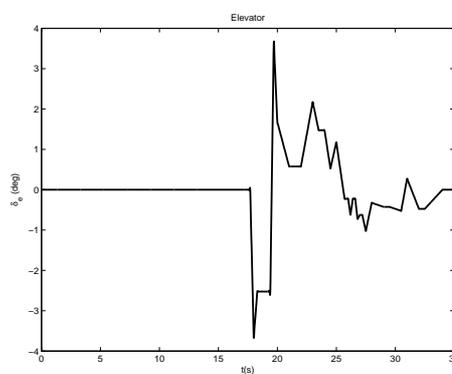


Figura 18 – Comando de profundor utilizado para identificação de uma aeronave Xavante[2]

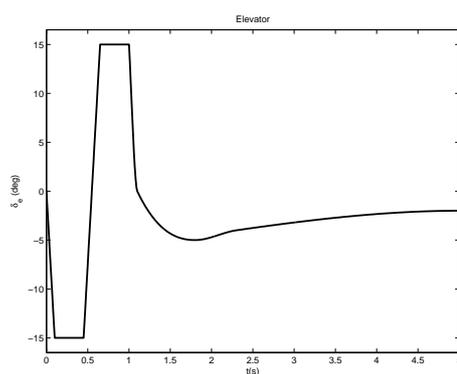


Figura 19 – Comando de profundor utilizado para identificação de um veículo submarino[3]

6.4.2 Movimento Lateral

Para a identificação da dinâmica lateral de aeronaves, encontramos os seguintes exemplos.

Ilf;Maine[4] utilizam para a identificação das derivadas de estabilidade de uma aeronave F-8 a entrada da figura 20.

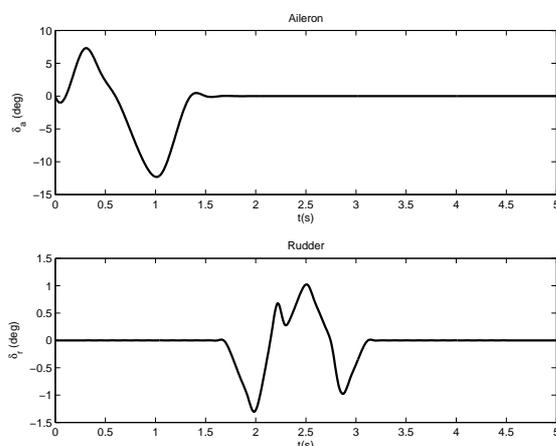


Figura 20 – Comando utilizado para identificação de uma aeronave F-8[4]

No mesmo artigo, oferece-se também um exemplo semelhante, em que a curva de acionamento do aileron tem o aspecto daquela mostrada para o leme, e vice-versa.

Maciel et al.[5] e Góes et al.[25] utilizam uma manobra de Dutch roll para a identificação de derivadas de uma aeronave de transporte regional, como na figura 21.

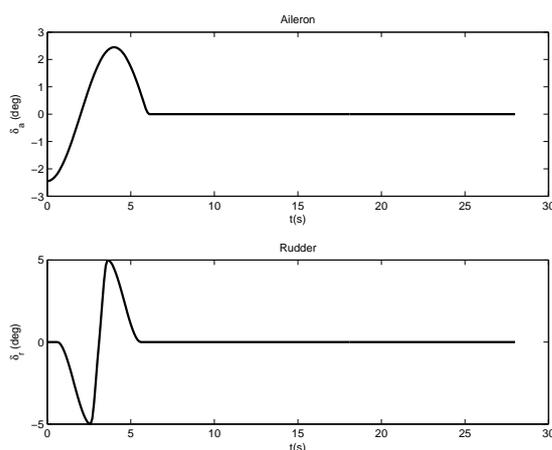


Figura 21 – Manobra de Dutch Roll para a identificação de derivadas de uma aeronave de transporte regional[5]

Um Dutch roll também é empregado por Hoff;Cook[26].

Murphy[6] faz uso de comandos consecutivos de aileron e leme (figura 22).

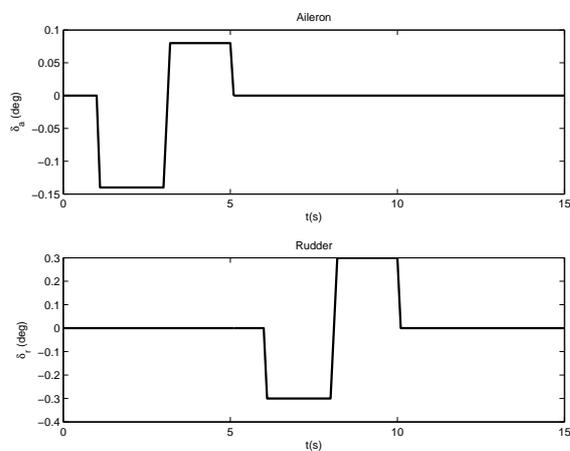


Figura 22 – Comandos consecutivos de aileron e leme para identificação[6]

6.4.3 Outras dinâmicas

Källström; Åström[7], para a identificação da dinâmica do navio *Sea Scout*, utilizam-se do comando de leme mostrado na figura 23

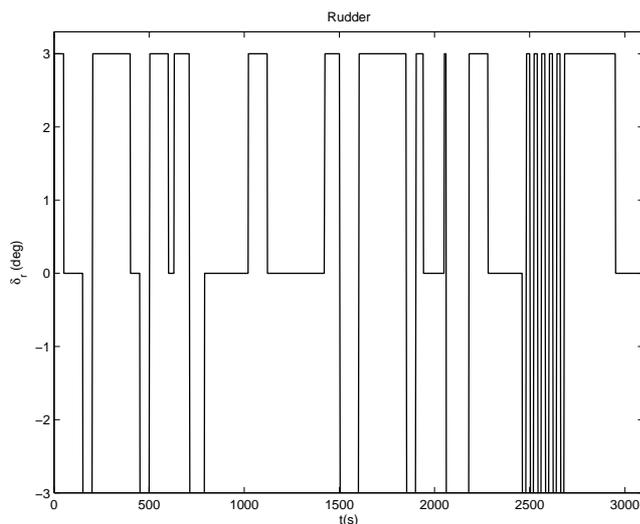


Figura 23 – Comando de leme para a identificação do navio *Sea Scout*[7]

Milne[8], para a identificação de um modelo no espaço de estados de

um helicóptero, com duas entradas, quatro variáveis de estado, ruídos de processo independentes, brancos e gaussianos, quatro saídas com ruídos de medida também independentes, brancos e gaussianos, sugere como entrada u dois pulsos consecutivos (figura 24)

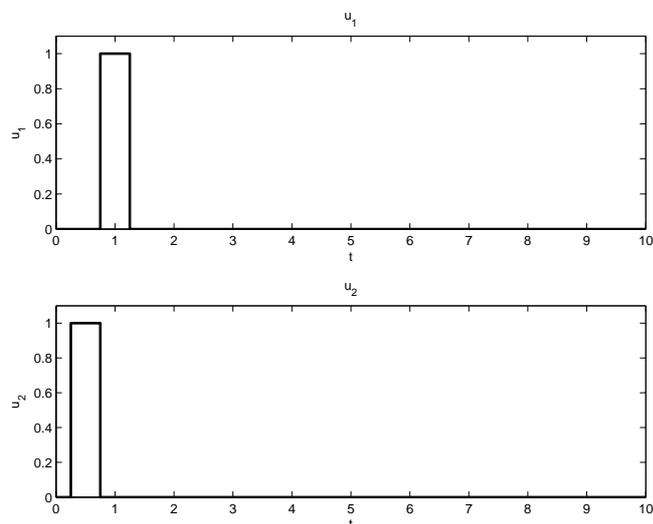


Figura 24 – Comando utilizado para a identificação de um helicóptero[8]

Åström[9] exemplifica-se a identificação de um sistema com entrada u formada por uma série de pulsos (figura 25).

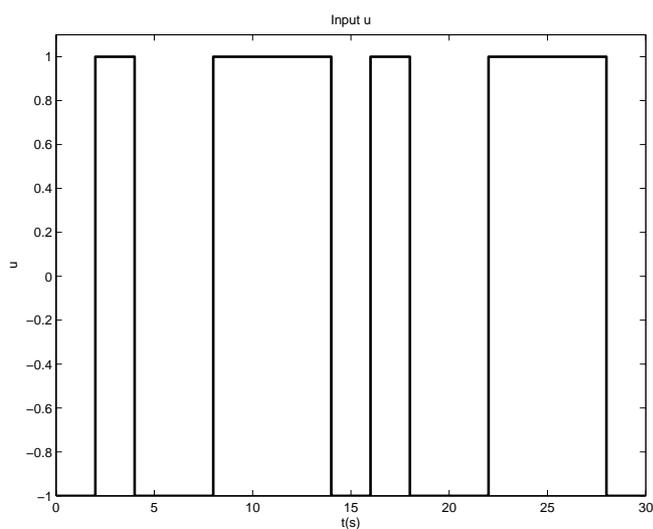


Figura 25 – Utilização de dois pulsos para identificação de um sistema[9]

Åström;Eykhoff[10] propõem a entrada da figura 26 para a identificação de um modelo ARX (eq. 329) com A e B de ordem 2 e $n = 1$.

$$A(q)y(k) = B(q)u(k - n) + e(t) \quad (329)$$

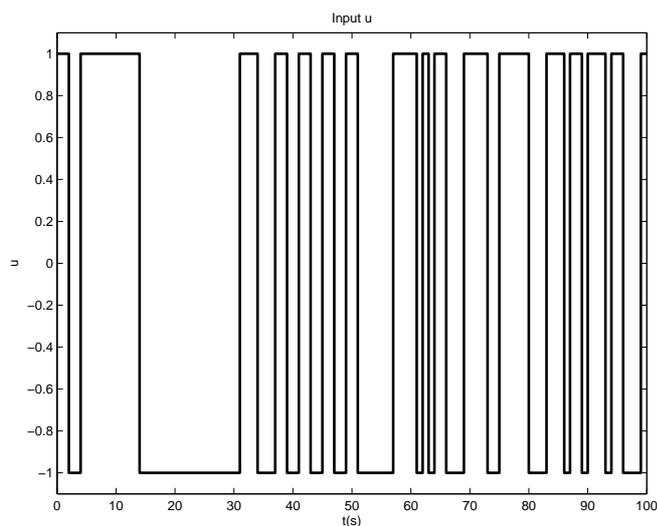


Figura 26 – Entrada utilizada para identificação de um modelo ARX[10]

6.4.4 Resumo dos exemplos

Nos exemplos utilizados, vemos que, para sistemas de uma entrada, são utilizados: um pulso, dois pulsos consecutivos de amplitudes opostas, uma série de pulsos semelhante a um PRBS, e um sinal como o PRBS, mas com a possibilidade de um estado neutro intermediário.

Para sistemas de duas entradas, utilizam-se: dois pulsos consecutivos de amplitudes opostas em uma das entradas seguido por outros dois pulsos na outra entrada, e a manobra de Dutch roll, em que as duas entradas são estimuladas simultaneamente.

Esses exemplos servirão de inspiração para os testes realizados.

7 APLICAÇÃO AO VANT APOENA I

O veículo objeto da aplicação dos métodos estudados foi o VANT Apoena I. Este veículo faz parte do projeto BR-UAV, uma parceria entre a empresa XRobots Sistemas Robóticos LTDA e LVNT - Laboratório de Veículos Não Tripulados do Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos da Universidade de São Paulo.

O projeto visa a atender a necessidade de inserção desta tecnologia no Brasil. Para isso, desenvolvem-se a Plataforma, Aviônica e Sistema Autônomo para aplicação de monitoramento Rural, Preditivo, Ambiental e Urbano a partir dos seguintes métodos de monitoramento: Espectro visível (Fotografia e Filmagem) e Espectro infravermelho (Fotografia e Filmagem).

A identificação do sistema trata-se aqui de estimar, para o movimento longitudinal, o vetor $\theta \in \mathfrak{R}^{13}$

$$\theta = \left[C_{L_0} \quad C_{x_u} \quad C_{x_\alpha} \quad C_{z_u} \quad C_{z_\alpha} \quad C_{z_{\dot{\alpha}}} \quad C_{z_q} \quad C_{z_{\delta_e}} \quad C_{m_u} \quad C_{m_\alpha} \quad C_{m_{\dot{\alpha}}} \quad C_{m_q} \quad C_{m_{\delta_e}} \right]^T \quad (330)$$

e para o movimento lateral, o vetor $\theta \in \mathfrak{R}^{15}$

$$\theta = \left[C_{L_0} \quad C_{y_\beta} \quad C_{y_p} \quad C_{y_r} \quad C_{y_{\delta_r}} \quad C_{l_\beta} \quad C_{l_p} \quad C_{l_r} \quad C_{l_{\delta_a}} \quad C_{l_{\delta_r}} \quad C_{n_\beta} \quad C_{n_p} \quad C_{n_r} \quad C_{n_{\delta_a}} \quad C_{n_{\delta_r}} \right]^T \quad (331)$$

O estudo da dinâmica lateral, por ser mais complexa do que a dinâmica longitudinal, foi feito em maior profundidade, sendo que os resultados obtidos em uma podem ser aplicados na outra.

Tabela 7.1 – Especificações físicas da plataforma Apoena I

Peso total	32 kg
Carga paga (<i>payload</i>)	6 kg
Combustível	Gasolina
Volume de combustível	10 l
Envergadura	2,5 m
Comprimento	2,3 m
Diâmetro	0,4 m

Tabela 7.2 – Especificações de desempenho da plataforma Apoena I

Velocidade de stall (flap 100%)	16 m/s
Velocidade de stall (flap 0%)	19 m/s
Velocidade cruzeiro	32 m/s
Velocidade máxima	45 m/s
Autonomia	8 h
Raio de alcance de link de dados	30 km
Distância de decolagem/pouso	80 m/ 160 m
Largura da pista de decolagem	5 m
Potência do motor	5 hp (2 tempos)

7.1 Plataforma

Apoena, que em tupi-guarani significa “aquele que enxerga longe”, é o nome da plataforma em desenvolvimento pela empresa XMobots. Esse nome advém do tipo de missão a ser realizada pelo VANT. As principais especificações físicas e de desempenho da plataforma podem ser observadas nas tabelas Tabela 7.1 e Tabela 7.2, respectivamente.



Figura 27 – Vista dimétrica em vôo da Aeronave Apoena I_PP7 (Fonte: XMobots)

7.2 Atuadores

Como todo sistema mecânico, os servomecanismos que permitem a deflexão dos ailerons, profundores e leme respondem com um pequeno atraso ao comando que lhes é aplicado. Modelamos a resposta dos servomecanismos pela função de transferência do tipo

$$G(s) = \frac{1}{1 + Ts} \quad (332)$$

com T tal que o tempo de assentamento de 5% seja igual a 0,2 s, ou seja, $T = \frac{1}{15}$ s.

7.3 Simulador

Como a plataforma ainda está em desenvolvimento, os métodos de identificação estudados foram aplicados a um simulador da aeronave Apoená I, implementado no programa MATLAB. Além disso, a utilização de um simulador permitiu que vários experimentos fossem realizados, sem a necessidade de se realmente operar vôos com o aparelho, reduzindo custos e evitando expô-lo a riscos.

O simulador é, ele mesmo, uma modelagem matemática do vôo do Apoená I. No entanto, por se tratar de um simulador bastante detalhado, será utilizado como referência e fonte dos dados "experimentais", como se fosse a aeronave real.

O simulador trabalha com equações dinâmicas não-lineares. Os esforços (forças e momentos) são funções lineares de velocidades angulares e lineares e se inter-relacionam pelas já estudadas derivadas de estabilidade.

O simulador inclui ainda uma modelagem da atmosfera, com turbulência e rajadas de vento, e ruído de medida para os sensores. Os dados utilizados no simulador foram os mostrados nas Tabelas 7.3, 7.4, 7.5 e 7.6.

Os valores de C_{D_0} , C_{L_0} e C_{m_0} encontram-se já modificados de forma a englobarem o valor de δ_e necessário para a trimagem da aeronave. Assim, no estado de referência, ainda se tem $\delta_{e_0} = 0$. Em detalhes: se no estado de referência

Tabela 7.3 – Características de massa

m (kg)	32,000
I_x (kg.m ²)	0,56808
I_y (kg.m ²)	3,9435
I_z (kg.m ²)	4,1906
I_{xy} (kg.m ²)	-0,0017729
I_{yz} (kg.m ²)	-0,0016378
I_{xz} (kg.m ²)	-0,18593

Tabela 7.4 – Geometria de referência

S (m ²)	0,84
b (m)	2,50
\bar{c} (m)	0,35876

Tabela 7.5 – Condição de vôo de referência

u_0 (m/s)	32,982
h (m)	700
ρ (kg/m ³)	1,14477
g (m/s ²)	9,78638

$\delta_e \neq 0$, pode-se fazer:

$$\begin{aligned}
 -C_{L_0} + C_{z\delta_e} \delta_e &= -C_{L_0} + C_{z\delta_e} (\delta'_e + \delta_{e0}) \\
 &= -C_{L_0} + C_{z\delta_e} \delta_{e0} + C_{z\delta_e} \delta'_e \\
 &= -(C_{L_0} - C_{z\delta_e} \delta_{e0}) + C_{z\delta_e} \delta'_e \\
 &= -C'_{L_0} + C_{z\delta_e} \delta'_e
 \end{aligned} \tag{333}$$

e obter-se um novo C_{L_0} que permita $\delta_e = 0$ no estado de referência.

O simulador aceita variações na velocidade de rotação do motor, que é vista como uma entrada de controle. Nesse trabalho, foi escolhida uma certa rotação, mantida constante.

Os sensores e suas incertezas são mostradas na tabela 7.7.

Tabela 7.6 – Valores para as derivadas de estabilidade e adimensionais do Apoena I

Movimento Longitudinal		Movimento Lateral	
t^* (s)	0,0054387	t^* (s)	0,037899
μ_{long}	185,52	μ_{lat}	26,622
\dot{i}_y	710,51	\dot{i}_x	0,30247
C_{D_u}	0,077689	\dot{i}_z	2,2312
C_{L_0}	0,59875	\dot{i}_{xz}	-0,098999
C_{L_u}	1,2029	C_{L_0}	0,59875
C_{x_u}	-0,33110	C_{y_β}	-0,44797
C_{x_α}	0,33648	C_{y_p}	-0,10126
C_{z_u}	-1,2775	C_{y_r}	-0,28851
C_{z_α}	-4,6644	$C_{y_{\delta_r}}$	0,16991
$C_{z_{\dot{\alpha}}}$	-1,4451	C_{l_β}	-0,062859
C_{z_q}	-6,7586	C_{l_p}	-0,50363
$C_{z_{\delta_e}}$	-0,24908	C_{l_r}	0,13997
C_{m_u}	-0,00012940	$C_{l_{\delta_a}}$	-0,15740
C_{m_α}	-1,6767	$C_{l_{\delta_r}}$	$-6,3426 \cdot 10^{-5}$
$C_{m_{\dot{\alpha}}}$	-6,0405	C_{n_β}	0,10111
C_{m_q}	-22,343	C_{n_p}	$-1,0770 \cdot 10^{-4}$
$C_{m_{\delta_e}}$	-1,0412	C_{n_r}	-0,31220
C_{T_0}	0,038845	$C_{n_{\delta_a}}$	-0,0052754
C_{T_u}	-0,25341	$C_{n_{\delta_r}}$	-0,089640
$C_{x_{\dot{\alpha}}}$	-0,0033029		
C_{x_q}	-0,010576		
$C_{x_{\delta_e}}$	0,010883		

Tabela 7.7 – Incerteza dos sensores

Grandeza	Desvio padrão	Adimensional	Desvio padrão
v (m/s)	0,03	β	$9,0958 \cdot 10^{-4}$
p (rad/s)	0,0012	\hat{p}	$4,5479 \cdot 10^{-5}$
r (rad/s)	0,0012	\hat{r}	$4,5479 \cdot 10^{-5}$
$\hat{\Psi}$ (°)	1,5	$\hat{\Psi}$	0,026180
$\hat{\Phi}$ (°)	1,5	$\hat{\Phi}$	0,026180

7.4 Erros de modelagem

Como se pode ver na tabela 7.6, as derivadas $C_{x_{\dot{\alpha}}}$, C_{x_q} e $C_{x_{\delta_e}}$ estão presentes no simulador. No entanto, elas não foram consideradas no modelo linear utilizado na identificação do sistema. A ausência destas derivadas no modelo

constitui, portanto, um primeiro erro de modelagem.

Outro erro de modelagem presente é relacionado à força propulsiva. Enquanto o modelo linear supõe que $C_T = C_{T_0} + C_{T_u}\hat{u}$, o simulador utiliza $T(u) = k_3 + k_4u + k_5u^2$, que resulta em outra expressão para $C_T(\hat{u})$.

Uma terceira divergência entre o simulador e o modelo linear é em relação à matriz de inércia da aeronave. No simulador, os produtos de inércia I_{xy} e I_{yz} não são nulos, diferentemente do que foi suposto na construção do modelo.

Além dessas diferenças, no simulador, a massa específica do ar e a aceleração da gravidade são dependentes da altitude. O modelo não prevê essa variação e, para ele, foram escolhidos os valores locais na altitude de referência (700 m em relação ao nível do mar).

As quatro diferenças acima levantadas representam erros de modelagem. Para uma melhor compreensão dos métodos de identificação de sistema e suas características, é interessante poder isolar estes erros de outros, como os de processo ou de medida. Assim, além do simulador do Apoena I, foi também utilizado um simulador modificado, no qual as derivadas $C_{x_{\dot{\alpha}}}$, C_{x_q} e $C_{x_{\delta_e}}$ e os produtos de inércia I_{xy} e I_{yz} são nulos, a equação da força propulsiva seja tal que incorra em C_T linear em \hat{u} , e cujas propriedades do ar e da gravidade não se alterem com a altitude. Esse simulador será referido como “simulador simplificado” e analisaremos se entre o simulador completo e o simplificado, há grandes diferenças de comportamento dinâmico.

Erros de modelagem ainda estão presentes entre o simulador simplificado e o modelo linear. Surgem das linearizações realizadas, como na seção 4.1. Lembremos também que nas equações eq.40 a eq.45, referentes ao movimento de um corpo rígido, foram desconsiderados alguns termos como os produtos qw e qH_z .

O ausência dos termos rv , pv e rH_x , além de ser uma linearização, é necessária para a separação entre os movimentos laterais e longitudinais. Conforme veremos, nos simuladores essa separação não é total, pois nele tais termos não foram desconsiderados.

7.5 Detalhes do algoritmo de minimização

Em 6.3 vimos uma apresentação do método de minimização utilizado (método de Newton-Raphson com a aproximação de Gauss-Newton. Nesta seção, apresentamos o detalhamento da implementação utilizada com o método dos mínimos quadrados.

O algoritmo utilizado é iterativo e envolve a simulação da evolução do sistema linear para os comandos de entrada conhecidos. Segue os seguintes passos:

1. Simulação da evolução do modelo linear para a atual estimativa de θ , resultando nos valores preditos y_k (vetor coluna)
2. Cálculo da função custo J a partir de y e das medidas y_m

$$e_k = y_k - y_{m_k} \quad (334)$$

$$J = \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^N e_k^T e_k \quad (335)$$

3. Cálculo do jacobiano $\nabla_{\theta} J$ (vetor coluna de componentes $\nabla_{\theta_i} J$):
 - (a) para cada parâmetro estimado θ_i componente de θ , calcula-se

$$\Delta\theta_i = \max(\theta_i \cdot 10^{-6}; 10^{-7}) \quad (336)$$

$$\frac{\partial y_k}{\partial \theta_i} \approx \frac{y_k(\theta_i + \Delta\theta_i/2) - y_k(\theta_i - \Delta\theta_i/2)}{\Delta\theta_i} \quad (337)$$

$$\nabla_{\theta_i} J = -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial y_k}{\partial \theta_i} \right)^T e_k \quad (338)$$

4. Cálculo da hessiana $\nabla_{\theta}^2 J$ (matriz de componentes $\nabla_{\theta_{ij}}^2 J$), utilizando-se a aproximação de Gauss-Newton:

$$\nabla_{\theta_{ij}}^2 J = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial y_k}{\partial \theta_i} \right)^T \frac{\partial y_k}{\partial \theta_j} \quad (339)$$

5. Cálculo da direção de Newton $\Delta\theta$

$$\Delta\theta = -(\nabla_{\theta}^2 J)^{-1} \nabla_{\theta} J \quad (340)$$

6. Definição de $p = 1$

7. Sendo θ a estimativa atual e θ_n a nova estimativa, repetir no máximo 20 vezes o laço:
- (a) $\theta_n = \theta + p \cdot \Delta\theta$
 - (b) simulação da evolução do modelo linear para a nova estimativa θ_n (como em 1)
 - (c) cálculo da nova função custo $J(\theta_n)$ (como em 2)
 - (d) se $J(\theta_n) < J(\theta)$, $\theta \leftarrow \theta_n$, interrupção do laço e retorno para o passo 1
 - (e) redução de p à sua metade ($p \leftarrow p/2$)
8. Fim do programa, θ realiza um mínimo de J

7.5.1 Definição de uma nova escala

Durante a busca de um mínimo, as derivadas de estabilidade podem assumir valores que tornem a matriz $\nabla_{\theta}^2 J$ mal-condicionada para inversão. Algumas vezes, a magnitude da direção de Newton $\Delta\theta$ torna-se muito grande e a simulação do passo 7b (seção 7.5) não pode ser calculada pois a matriz A gerada por θ_n apresenta pólos reais positivos de grande módulo. Geralmente, esses dois fenômenos ocorrem na mesma iteração.

O mau-condicionamento da matriz $\nabla_{\theta}^2 J$ ocorre quando ela apresenta autovalores de ordens de grandeza muito diferentes. Em um computador de escritório rodando o sistema operacional MS-Windows, utilizando-se o método de inversão padrão do software MATLAB, sem que nenhuma medida especial para o tratamento numérico tenha sido tomada, isto ocorre quando a razão entre o maior e o menor autovalor é de cerca de 10^{17} .

Uma solução encontrada para esse problema foi a definição de uma nova escala para as variáveis de estado e de comando do modelo utilizado. Ilustraremos para a dinâmica do movimento lateral.

Primeiramente, observemos a ordem de grandeza típica de algumas variáveis:

$$\mathcal{O}(\beta) = 10^{-2} \quad \mathcal{O}(\Phi) = 10^{-3} \quad \mathcal{O}(\delta_a) = 10^{-4} \quad \mathcal{O}(\sigma_{angVel}) = 10^{-4} \quad (341)$$

$$\mathcal{O}(p) = 10^{-3} \quad \mathcal{O}(\Psi) = 10^{-3} \quad \mathcal{O}(\delta_r) = 10^{-4} \quad \mathcal{O}(\sigma_{atitude}) = 10^{-3} \quad (342)$$

$$\mathcal{O}(r) = 10^{-4} \quad \mathcal{O}(\sigma_{linVel}) = 10^{-2} \quad (343)$$

Vemos que variam entre 10^{-4} e 10^{-2} . Podemos torná-las de ordens de grandeza mais próximas uma a outra, ou todas próximas da unidade, definindo:

$$\beta' = 10^2\beta \quad \Psi' = 10^3\Psi \quad \delta'_a = 10^4\delta_a \quad (344)$$

$$p' = 10^4p \quad \Phi' = 10^3\Phi \quad \delta'_r = 10^4\delta_r \quad (345)$$

$$r' = 10^4r \quad (346)$$

Deve-se então modificar os termos das matrizes da representação no espaço estados, os desvios-padrão dos sensores e os termos das matrizes de covariância coerentemente, para não se alterar o modelo.

Exemplificando para as matrizes A e B da eq.268: estas devem ter seus termos multiplicados pelos valores indicados em 347, em que o fator multiplicativo ocupa a posição do termo que o fator multiplica.

$$A : \begin{bmatrix} 1 & 10^{-2} & 10^{-2} & 10^{-1} & 10^{-1} \\ 10^2 & 1 & 1 & 10^1 & 10^1 \\ 10^2 & 1 & 1 & 10^1 & 10^1 \\ 10^1 & 10^{-1} & 10^{-1} & 1 & 1 \\ 10^1 & 10^{-1} & 10^{-1} & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B : \begin{bmatrix} 10^{-2} & 10^{-2} \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 10^{-1} & 10^{-1} \\ 10^{-1} & 10^{-1} \end{bmatrix} \quad (347)$$

Uma solução para o segundo fenômeno apontado no início desta seção seria definir um passo p inicial dependente do módulo da direção $\Delta\theta$ que evitaria que as derivadas de estabilidade tomassem valores exageradamente elevados e espúrios. A adoção da escala sugerida, no entanto, também diminuiu a incidência deste acontecimento.

7.5.1.1 Exemplo

Na identificação realizada em 7.7.2, sem a utilização da mudança de escala, obtiveram-se para θ , a cada iteração do algoritmo de minimização, os valores mostrados na tabela 7.8 (os valores indicados na tabela são os valores de θ utilizados no primeiro passo da iteração (ver item 1, seção 7.5)).

O primeiro aviso de mau-condicionamento ocorreu após θ_6 . Após θ_7 , houve mais um aviso de mau-condicionamento, seguido de um erro e interrupção da execução do programa devido à geração de um sistema instável parametrizado pelo θ_n que o segue.

Tabela 7.8 – Evolução da estimativa de θ a cada iteração sem o uso do reescalonamento

	θ_0	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7
C_{L_0}	0,041	0,83	0,76	0,71	0,7	0,69	0,68	0,68
C_{y_β}	-0,036	0,15	0,27	0,37	0,39	0,41	0,41	0,42
C_{y_p}	-0,053	17	13	10	9,9	9,4	9,2	9,2
C_{y_r}	-0,45	-14	-13	-13	-13	-12	-12	-12
$C_{y_{\delta_r}}$	0,011	-3,5	-2,9	-2,4	-2,3	-2,2	-2,2	-2,2
C_{l_β}	-0,0071	-0,032	-0,078	-0,24	-0,44	-1,1	-3,6	-12
C_{l_p}	-0,98	-1,4	-2,5	-6,1	-11	-24	-81	-258
C_{l_r}	0,11	0,59	1,3	3,8	7,0	16	55	177
$C_{l_{\delta_a}}$	-0,15	-0,36	-0,64	-1,5	-2,7	-6,1	-20	-65
$C_{l_{\delta_r}}$	$-6,7 \cdot 10^{-5}$	0,042	0,1	0,31	0,58	1,4	4,7	15
C_{n_β}	0,031	0,055	0,11	0,29	0,54	1,3	4,3	14
C_{n_p}	$-6,4 \cdot 10^{-5}$	0,49	1,8	6,1	12	28	95	305
C_{n_r}	-0,51	-0,93	-1,8	-4,6	-8,4	-20	-66	-210
$C_{n_{\delta_a}}$	-0,004	0,064	0,4	1,5	2,8	7,0	24	76
$C_{n_{\delta_r}}$	-0,16	-0,16	-0,22	-0,46	-0,78	-1,7	-5,6	-18

Com a utilização do escalonamento, com as mesmas condições iniciais, a estimativa não apresentou problemas de mau-condicionamento ou de instabilidade no sistema, tendo como resultado o apresentado na tabela 7.9. O algoritmo convergiu para o resultado apresentado em 7.7.2 na iteração θ_{17} .

7.6 Estimativa Inicial

O algoritmo de minimização da função custo parte de um ponto no espaço de busca dos parâmetros. Esse ponto é a estimativa inicial, que é um dado de entrada fornecido pelo usuário. Uma boa estimativa inicial diminui o número de iterações necessárias para a convergência, e pode ser decisiva entre a obtenção do resultado correto ou de um resultado espúrio.

7.7 Validação da função custo e sua minimização

Para a validação do correto cálculo da função custo e sua minimização, o algoritmo de identificação foi alimentado com os resultados fornecidos pelo modelo linear parametrizado com os valores corretos do Apoena I.

Tabela 7.9 – Evolução da estimativa de θ a cada iteração com o uso do reescalonamento

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7
C_{L_0}	0,43	0,51	0,50	0,61	0,59	0,59	0,60
C_{y_β}	0,14	-0,69	-1,5	-1,3	0,25	-0,46	-0,45
C_{y_p}	13	12	8,7	-1,5	-0,76	0,10	-0,093
C_{y_r}	-9,8	20	24	1,5	-8,4	-0,97	-0,30
$C_{y_{\delta_r}}$	-2,2	4,0	4,0	0,76	-0,62	0,14	0,17
C_{l_β}	-0,011	-0,02	-0,026	-0,044	-0,061	-0,064	-0,063
C_{l_p}	-0,35	-0,19	-0,24	-0,35	-0,49	-0,51	-0,50
C_{l_r}	0,23	0,22	0,24	0,24	0,17	0,15	0,14
$C_{l_{\delta_a}}$	-0,13	-0,081	-0,090	-0,12	-0,15	-0,16	-0,16
$C_{l_{\delta_r}}$	0,008	-0,00059	$-3,1 \cdot 10^{-5}$	0,0039	0,00061	0,0016	$-1,6 \cdot 10^{-6}$
C_{n_β}	0,034	0,063	0,062	0,083	0,094	0,094	0,10
C_{n_p}	-0,65	-0,28	-0,24	-0,13	-0,0057	-0,040	-0,0017
C_{n_r}	-0,57	-1,0	-0,63	-0,45	-0,27	-0,29	-0,31
$C_{n_{\delta_a}}$	-0,098	-0,035	-0,057	-0,041	-0,0090	-0,017	-0,0057
$C_{n_{\delta_r}}$	-0,14	-0,16	-0,11	-0,091	-0,082	-0,087	-0,090

Efeitos dos sensores ainda não foram incluídos. Para isso, além de não se adicionarem ruídos de medida, foi utilizada uma frequência de amostragem muito elevada (500 Hz) para que não houvesse interferência da frequência de amostragem na qualidade dos resultados. Seu efeito será analisado posteriormente.

Como estimativa inicial, multiplicou-se o valor correto de cada derivada de estabilidade por um número aleatório equiprovável entre 0 e 2 (ou seja, um erro inicial de -100% a +100%).

7.7.1 Identificação do movimento longitudinal

Nesta primeira identificação do movimento longitudinal, cabe ressaltar que no caso particular de se ter $\Theta_0 = 0$ na dinâmica longitudinal, uma mesma matriz A pode ser obtida a partir um conjunto infinito de solução para os parâmetros, sendo que somente C_{L_0} , C_{x_u} e C_{x_α} ficam unicamente definidas.

Para esse modelo linearizado, com $\Theta_0 = 0$, é, portanto, impossível se obterem simultaneamente as treze derivadas de estabilidade do vetor θ (eq.330), mas apenas uma relação entre elas. Matematicamente, se duas derivadas forem fixadas, podem-se obter as outras onze derivadas. Um estudo mais detalhado

dos coeficientes da matriz A permite verificar que ao se fixarem os valores de duas derivadas, é inútil fazê-lo simultaneamente para duas derivadas do conjunto $\{C_{z_u}, C_{z_\alpha}, C_{z_{\dot{\alpha}}}, C_{z_q}, C_{z_{\delta_e}}\}$.

Na prática, verifica-se que a escolha de quais derivadas serão fixadas é fundamental para a convergência do algoritmo de minimização. Por exemplo, a fixação de $C_{z_{\delta_e}}$ quando o comando de profundor é de curta duração e pobre em variedade de frequências, não oferece bons resultados.

O programa escrito permite que somente alguns parâmetros sejam estimados em uma identificação, sendo que os outros podem ser mantidos fixos no valor fornecido pelo usuário. Assim, a função custo é minimizada somente em função dos parâmetros deixados livres.

Neste exemplo, foram fixadas C_{m_u} e C_{z_u} em seus valores corretos.

Na figura 28, mostra-se a manobra utilizada para a identificação do movimento longitudinal e a evolução do vôo. Na tabela 7.10, pode-se ver que a identificação do sistema linear pelo modelo linear, utilizando-se o MMQ, oferece excelentes resultados.

Tabela 7.10 – Identificação por MMQ do sistema linear sem ruídos - Longitudinal

	Est. Inicial	Resultado	Valor correto	erro(%)
C_{L_0}	0,13771	0,59875	0,59875	$6 \cdot 10^{-14}$
C_{x_u}	-0,6286	-0,33110	-0,331010	$2 \cdot 10^{-11}$
C_{x_α}	0,48654	0,33648	0,33648	$-2 \cdot 10^{-12}$
C_{z_u}	-1,2029	Fixo	-1,2029	Fixo
C_{z_α}	-3,3673	-4,6644	-4,6644	$1 \cdot 10^{-12}$
$C_{z_{\dot{\alpha}}}$	-1,2643	-1,4451	-1,4451	$3 \cdot 10^{-11}$
C_{z_q}	-2,2823	-6,7586	-6,7586	$-4 \cdot 10^{-12}$
$C_{z_{\delta_e}}$	-0,31195	-0,24908	-0,24908	$-7 \cdot 10^{-12}$
C_{m_u}	-0,0001294	Fixo	-0,0001294	Fixo
C_{m_α}	-1,719	-1,6767	-1,6767	$2 \cdot 10^{-13}$
$C_{m_{\dot{\alpha}}}$	-5,1584	-6,0405	-6,0405	$2 \cdot 10^{-12}$
C_{m_q}	-12,446	-22,343	-22,343	$-8 \cdot 10^{-13}$
$C_{m_{\delta_e}}$	-2,0625	-1,0412	-1,0412	$2 \cdot 10^{-14}$

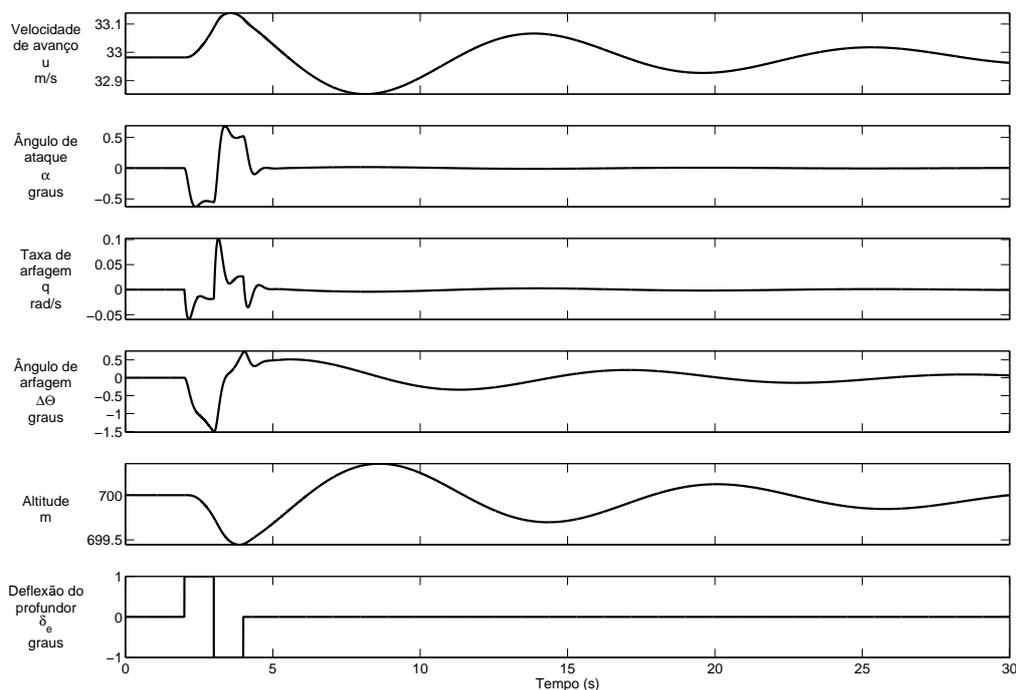


Figura 28 – Modelo: Longitudinal Linear - Manobra: dois pulsos opostos de profundor

7.7.2 Identificação do movimento lateral

Na figura 29, mostra-se a manobra utilizada para a identificação do movimento lateral e a evolução do voo. Na tabela 7.11, pode-se ver que a identificação do sistema linear pelo modelo linear, utilizando-se o MMQ, oferece excelentes resultados também para o movimento lateral.

7.8 Efeito de não-linearidades

As já citadas não-linearidades dificultam a correta identificação dos parâmetros da aeronave. Seu efeito é tornar a resposta da aeronave ligeiramente diferente da resposta prevista pelo modelo linear. O algoritmo de identificação, ao buscar os valores corretos para as derivadas de estabilidade, pode julgar que valores distintos dos verdadeiros oferecem melhores resultados, por compensarem em parte o aumento da função custo que decorre da resposta alterada pelos efeitos não-lineares.

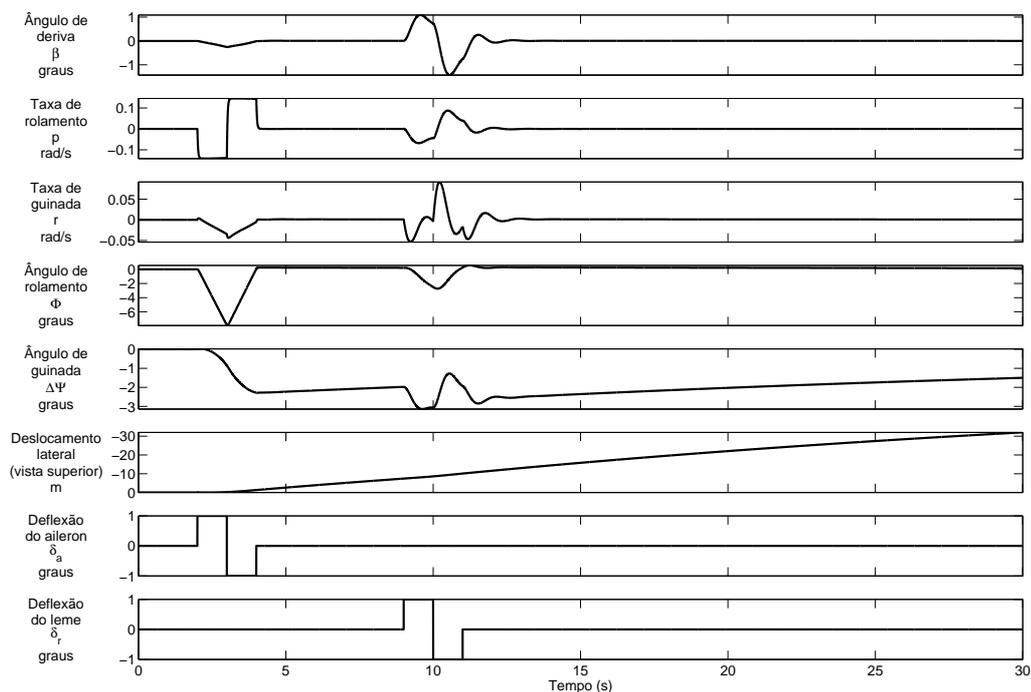


Figura 29 – Modelo: Lateral Linear - Manobra: dois pulsos opostos de aileron e dois de leme

Tabela 7.11 – Identificação por MMQ do sistema linear sem ruídos - Lateral

	Est. Inicial	Resultado	Valor correto	erro (%)
C_{L_0}	0,040947	0,59875	0,59875	$-6 \cdot 10^{-13}$
$C_{y\beta}$	-0,035973	-0,44798	-0,44798	$3 \cdot 10^{-11}$
C_{y_p}	-0,052665	-0,10126	-0,10126	$-7 \cdot 10^{-11}$
C_{y_r}	-0,45125	-0,28851	-0,28851	$-6 \cdot 10^{-11}$
$C_{y_{\delta_r}}$	0,010647	0,16991	0,16991	$4 \cdot 10^{-11}$
C_{l_β}	-0,0071246	-0,062859	-0,062859	$-5 \cdot 10^{-13}$
C_{l_p}	-0,98244	-0,50363	-0,50363	$-6 \cdot 10^{-13}$
C_{l_r}	0,10508	0,13997	0,13997	$-3 \cdot 10^{-12}$
$C_{l_{\delta_a}}$	-0,14761	-0,15740	-0,157340	$-1 \cdot 10^{-13}$
$C_{l_{\delta_r}}$	$-6,7164 \cdot 10^{-5}$	$-6,3426 \cdot 10^{-5}$	$-6,3426 \cdot 10^{-5}$	$-1 \cdot 10^{-10}$
C_{n_β}	0,030852	0,10111	0,10111	$-5 \cdot 10^{-13}$
C_{n_p}	$-6,3785 \cdot 10^{-5}$	-0,00010770	-0,00010770	$4 \cdot 10^{-9}$
C_{n_r}	-0,50853	-0,31220	-0,31220	$3 \cdot 10^{-13}$
$C_{n_{\delta_a}}$	-0,00396086	-0,0052754	-0,0052754	$2 \cdot 10^{-11}$
$C_{n_{\delta_r}}$	-0,16148	-0,089640	-0,089640	$-2 \cdot 10^{-13}$

7.8.1 Não-linearidades no modo longitudinal

Nos exemplos abaixo, a aeronave foi excitada com comandos de profundor como o mostrado na figura 30. Variaram-se a amplitude A e a duração D em alguns experimentos. Foi utilizado o simulador simplificado, sem adição de ruídos de medida ou de processo, com taxa de amostragem de 500 Hz.

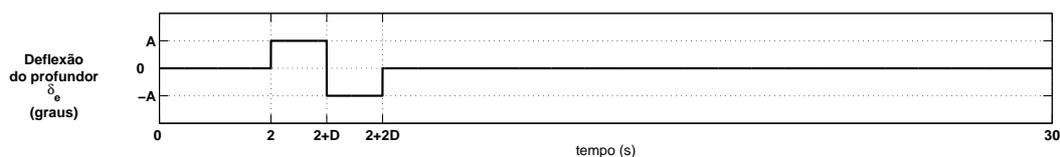


Figura 30 – Deflexão do profundor/Efeito das não-linearidades

A figura 31 mostra a evolução do vôo para a entrada mostrada na figura 30, exemplificando para $A = 2^\circ$ e $D = 2$ s.

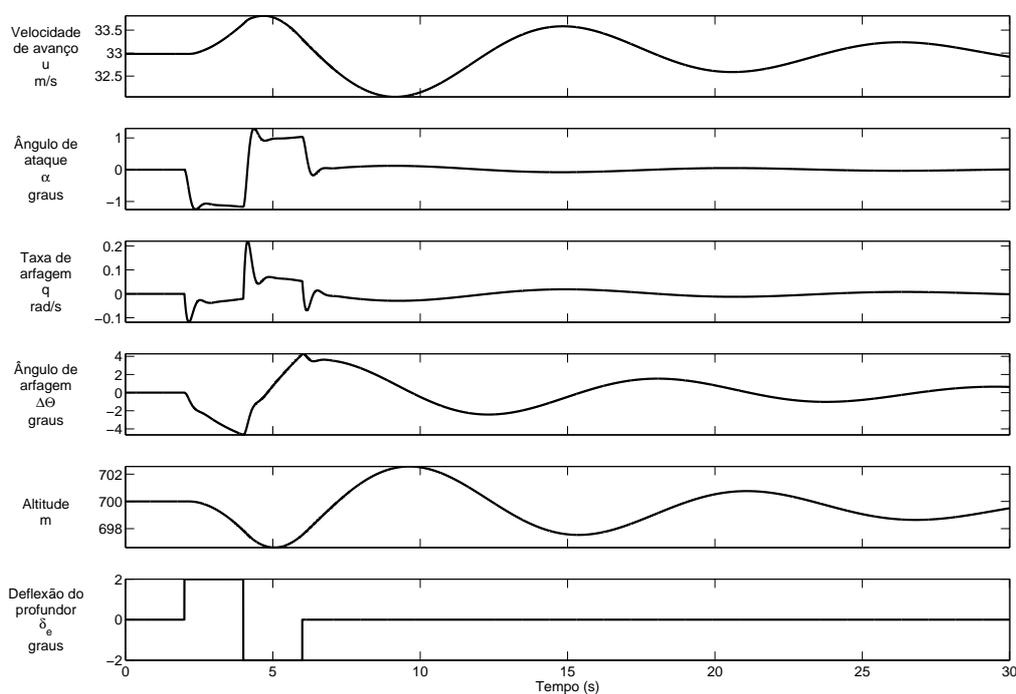


Figura 31 – Deflexão do profundor: $A = 2^\circ$ $D = 2$ s

O resultado da identificação por MMQ para esse vôo e para outros valores de A e D estão na tabela 7.12.

Tabela 7.12 – MMQ - Simulador Simplificado - Movimento Longitudinal - Dois Pulsos (Figura 30)

		erro (%)					
		$D = 1$ s		$D = 2$ s		$D = 3$ s	
		$A = 1^\circ$	$A = 2^\circ$	$A = 1^\circ$	$A = 2^\circ$	$A = 1^\circ$	$A = 2^\circ$
	Correto						
C_{L_0}	0,59875	-1,3	-2,5	-0,22	-0,44	-0,067	-0,16
C_{x_u}	-0,33110	3,4	6,9	1,3	2,7	0,60	1,2
C_{x_α}	0,33648	3,7	7,8	-2,0	-3,5	-6,7	-13
C_{z_u}	-1,2029	fixo					
C_{z_α}	-4,6644	3,7	7,2	10	21	9,0	18
$C_{z_{\dot{\alpha}}}$	-1,4451	-447	-884	-205	-361	-794	-1510
C_{z_q}	-6,7586	211	420	148	296	104	204
$C_{z_{\delta_e}}$	-0,24908	100	199	139	281	107	211
C_{m_u}	$-1,2940 \cdot 10^{-4}$	fixo					
C_{m_α}	-1,6767	-0,53	-1,3	-0,37	-0,95	-1,8	-3,7
$C_{m_{\dot{\alpha}}}$	-6,0406	-7,0	-14	-8,1	-16	-11	-20
C_{m_q}	-22,343	1,9	3,7	0,86	1,5	-1,3	-2,8
$C_{m_{\delta_e}}$	-1,0412	-0,36	-0,94	-0,34	-0,88	-1,9	-3,9

Percebe-se na tabela que: (1) as derivadas C_{z_α} , C_{z_q} e $C_{z_{\delta_e}}$ não puderam ser identificadas; (2) as demais derivadas apresentam desvios apesar da ausência de ruídos; (3) estes desvios foram maiores para a deflexão de 2° do profundor.

Isso ocorre pois o algoritmo busca parâmetros que façam com que as curvas preditas de u , w , q e Θ aproximem-se das medições. No entanto, para que o modelo linear se aproxime do não-linear, os valores de algumas derivadas tiveram que ser alterados pelo método de identificação, resultando em desvios em relação aos valores corretos.

A figura 32 mostra a variação de u , α , q e $\Delta\Theta$ para $A = 1^\circ$ $D = 1$ s. Nela encontram-se três curvas praticamente sobrepostas. Uma refere-se aos dados medidos no experimento (simulador não-linear simplificado). Outra, aos dados que seriam medidos se a aeronave pudesse ser representada, sem aproximações, por um modelo linear parametrizado com os valores corretos das derivadas de estabilidade. A terceira mostra o resultado do modelo linear com os valores identificados para a aeronave.

Nota-se que, apesar de algumas derivadas apresentarem erros elevados, as três curvas seguem um comportamento semelhante. No caso apresentado, as derivadas não identificadas não provocam erros significativos na saída do sistema.

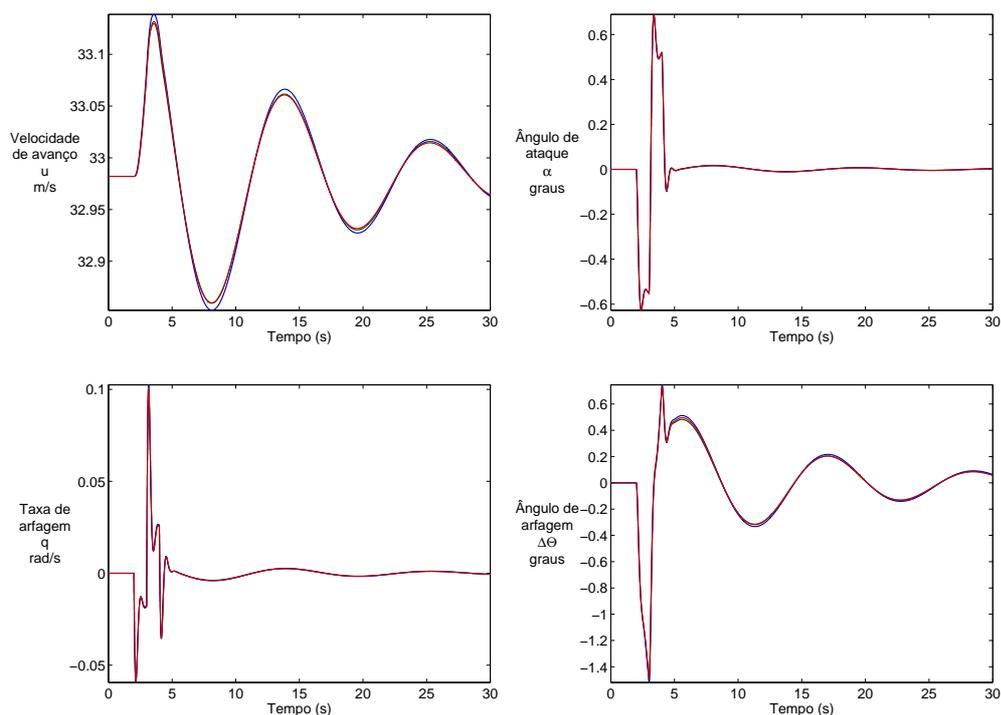


Figura 32 – Verde: Medição; Azul: Modelo Linear Valores Corretos; Vermelho: Modelo Linear Valores Identificados. Deflexão do profundor $A = 1^\circ$ $D = 1$ s

Isso não é necessariamente válido se os valores aqui obtidos forem utilizados com outra manobra de entrada. No entanto, se essa segunda entrada fosse utilizada para a identificação dos sistema, obter-se-iam valores que não alterariam significativamente o comportamento do sistema em relação à sua saída. Conclui-se que devem ser utilizar como manobras de excitação do sistema todas as que podem ocorrer para os casos em que se deseja aplicar os valores identificados das derivadas.

A figura 33 mostra um detalhe da variação de u . Nela, as três curvas podem ser distinguidas. Verifica-se que o resultado do modelo linear com os valores identificados busca aproximar-se dos dados medidos.

Quais linearizações realizadas tem maior influência ao prejudicar a identificação das derivadas de estabilidade? Vejamos como as quatro curvas de resposta medidas e do modelo linear parametrizado com os valores corretos diferem, em particular para a entrada $A = 2^\circ$ $D = 1$ s.

O ângulo de arfagem é simplesmente a integração temporal da taxa de

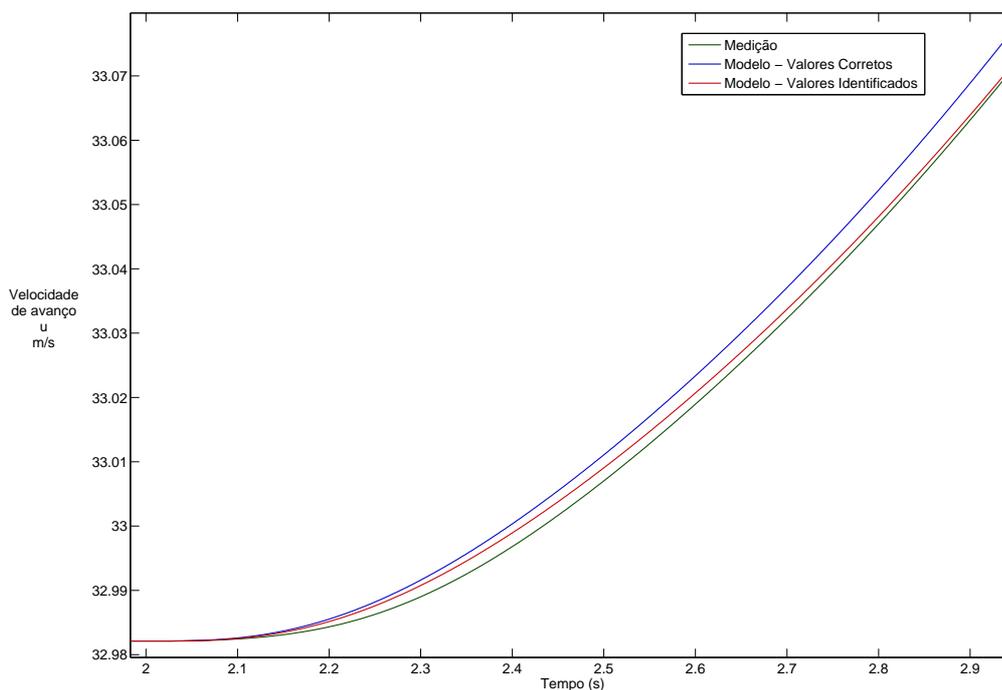


Figura 33 – Detalhe da evolução de u

arfagem. Foi verificado que a integração da taxa de arfagem medida coincide com o ângulo de arfagem medido, o mesmo ocorrendo para o modelo linear.

No simulador, é possível medir as forças e momentos aplicados à aeronave. Chamemos este conjunto de dados de **Esforços medidos**. Podemos compará-los às forças e momentos previstos pelo modelo linear. Como estes esforços dependem do estado do sistema, para separar o efeito de desvios no cálculo dos esforços dos efeitos de desvios no cálculo da evolução do sistema, podemos aplicar o modelo da eq.251 aos estados **medidos** e calcular, a partir das derivadas previstas para os estados e as eq.79 a eq.84, o esforço que o modelo prevê a cada instante para o sistema no estado **medido**. Chamemos este conjunto de **Esforço previstos pelos estados**. Além disso, podemos utilizar, em vez das derivadas previstas, as derivadas efetivamente obtidas a partir das medições, aproximando-as pela razão entre a diferença de duas medidas consecutivas e o intervalo de tempo que as separam. A partir destas derivadas, utilizando novamente as eq.79 a eq.84, podemos saber quais são os esforços necessários, segundo o modelo linear, para que o sistema evolua conforme medido. Chamemos estes dados de **Esforços**

previstos pelas derivadas.

Comparando pois o momento M (responsável por \dot{q}) dos esforços medidos com momento M dos esforços previstos pelos estados, constatamos que são significativamente iguais. Além disso, a comparação de ambos com o momento previsto pelas derivadas também mostra boa concordância. De fato, na linearização que levou a equação para M de eq.62 a eq.83, foram desprezados termos multiplicados por p e r , que são nulos na manobra realizada. O movimento longitudinal não excita o movimento lateral. Portanto, as diferenças entre a taxa de arfagem medida no simulador e a prevista pelo modelo deve-se a previsões com desvios dos estados.

Aplicando o mesmo raciocínio feito para M para a força X (responsável por \dot{u}), vemos que a força medida e a força prevista pelos estados coincide. No entanto, são diferentes da força X prevista pelas derivadas (figura 34).

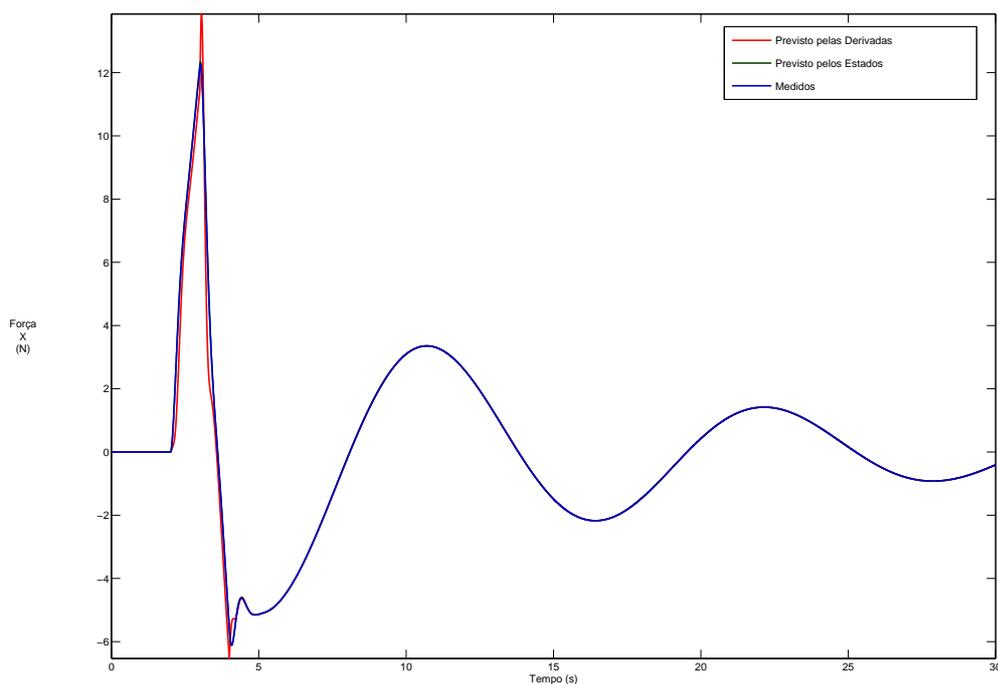


Figura 34 – Forças X previstas e medida

A origem desta diferença está no termo qw , desprezado na eq.58 (sendo o termo rv nulo). Isto pode ser verificado na figura 35, que compara a diferença entre a força medida e a prevista pelas derivadas com o termo qw multiplicado

pela massa da aeronave.

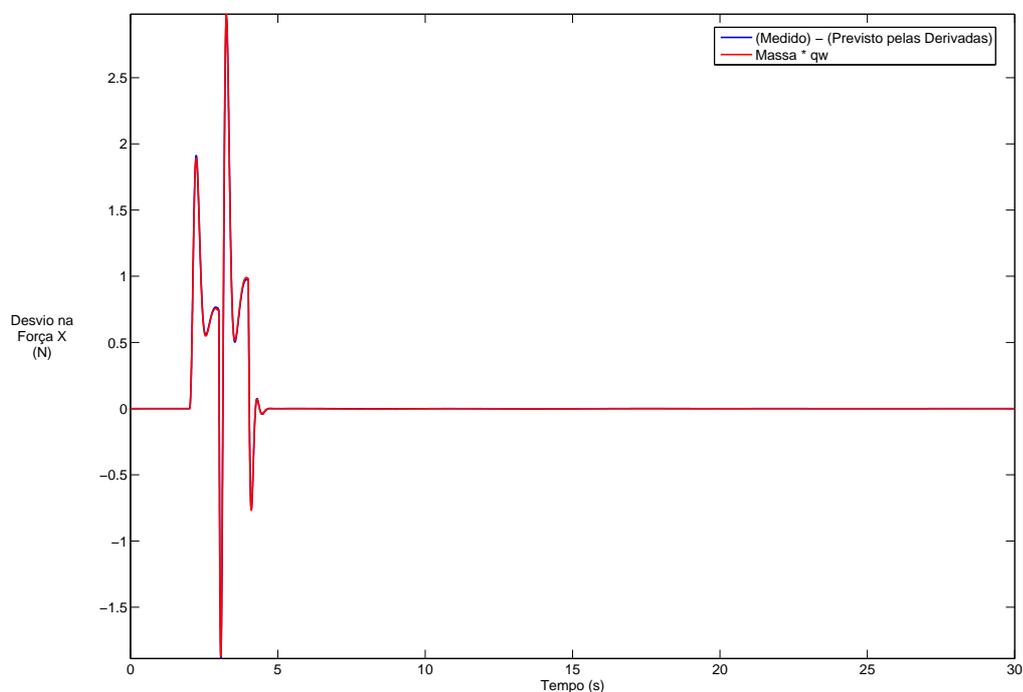


Figura 35 – Termo rw e diferença entre X prevista e medida

Outra forma de se analisar este fato é comparar o termo $\dot{u} + qw$ da eq.58 com \dot{u} (figura 36). Percebe-se que durante a ação do profundor, o erro cometido não é desprezável.

Para a força em Z , a aproximação feita para $\dot{w} + pv - qu$ prejudica pouco a identificação. Mesmo onde a diferença é mais pronunciada, o erro cometido é pequeno (figura 37).

Com base no exposto, é de se esperar que a identificação seja melhor se a manobra utilizada evitar que o termo qw tenha grande magnitude.

7.9 Efeito dos ruídos de medida

Antes da adição de ruídos de medida, verificou-se a influência da taxa de amostragem na qualidade da estimativa. Percebeu-se que taxas de até 30 Hz não prejudicavam os resultados. Passou-se a utilizar uma taxa de amostragem

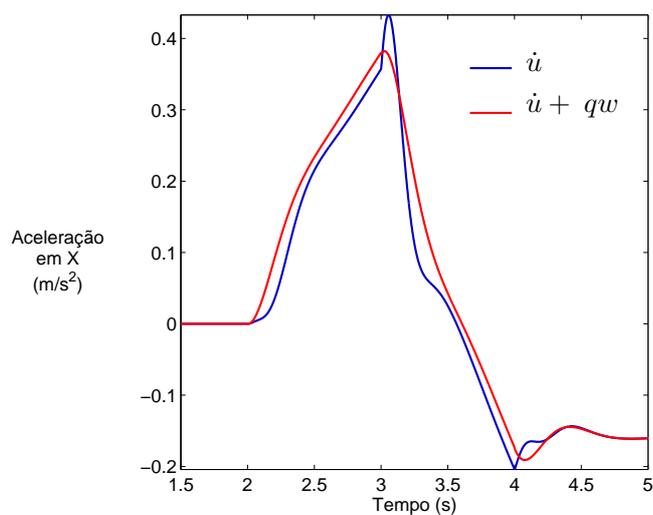


Figura 36 – Comparação de $\dot{u} + qw$ e \dot{u}

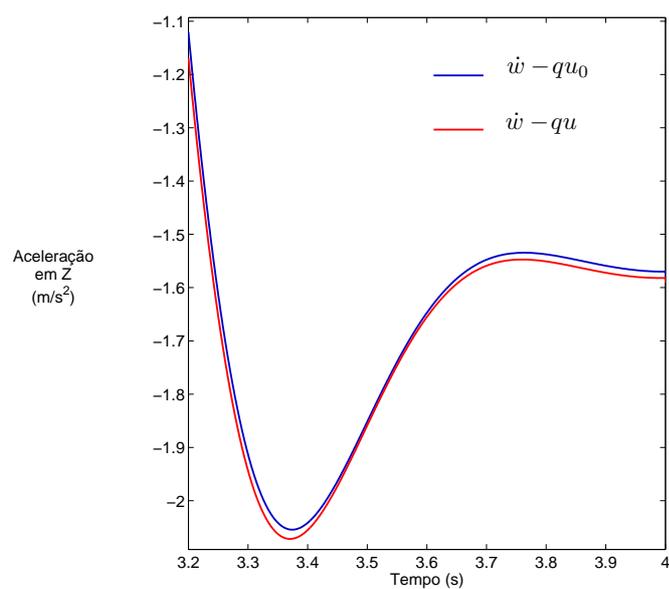


Figura 37 – Comparação de $\dot{w} - qu$ e $\dot{w} - qu_0$

de 60 Hz. Com menos dados, diminui-se o tempo de cálculo necessário para a resolução do problema.

Com a adição de ruídos de medida, pode-se perceber a diferença no desempenho dos dois métodos de identificação estudados. O experimento realizado pode ser visto na figura 38. O resultado da identificação por MMQ e por ML, encontra-se na tabela 7.13 e tabela 7.14, respectivamente.

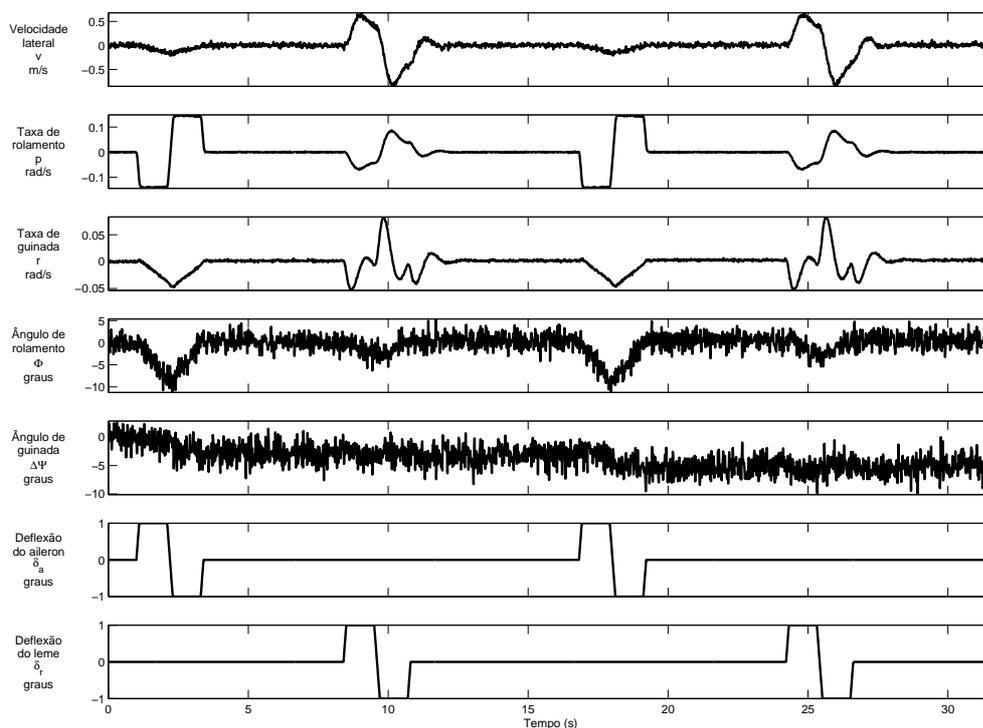


Figura 38 – Experimento com ruído de medida

Tabela 7.13 – Identificação por MMQ com ruído de medida - Lateral

	Est. Inicial	Resultado	Valor correto	erro (%)
C_{L_0}	0,28139	0,66759	0,59875	11,5
C_{y_β}	-0,35497	0,447746	-0,44797	-206
C_{y_p}	-0,10459	0,69997	-0,10126	-791
C_{y_r}	-0,065294	-10,768	-0,28851	3632
$C_{y_{\delta_r}}$	0,25938	-0,63335	0,16991	-472
C_{l_β}	0,068619	0,096336	-0,062859	53,3
C_{l_p}	-0,98871	-0,77162	-0,50363	53,2
C_{l_r}	0,23019	0,252	0,13997	80,0
$C_{l_{\delta_a}}$	-0,1755	-0,23856	-0,15740	51,6
$C_{l_{\delta_r}}$	$-4,9173 \cdot 10^{-5}$	-0,0015784	$-6,3 \cdot 10^{-5}$	2388,5
C_{n_β}	0,16035	0,10111	0,10777	6,6
C_{n_p}	$-1,7834 \cdot 10^{-5}$	0,094627	$-1,0770 \cdot 10^{-4}$	-87965
C_{n_r}	-0,16577	-0,36201	-0,31220	16,0
$C_{n_{\delta_a}}$	-0,0087003	0,021502	-0,0052754	-507
$C_{n_{\delta_r}}$	-0,10691	-0,084965	-0,089640	-5,2

Tabela 7.14 – Identificação por ML com ruído de medida - Lateral

	Est. Inicial	Resultado	Valor correto	erro (%)
C_{L_0}	0,28139	0,61058	0,59875	2,0
$C_{y\beta}$	-0,35497	-0,095693	-0,44797	-79
C_{y_p}	-0,10459	-0,58719	-0,10126	480
C_{y_r}	-0,065294	-2,0636	-0,28851	615
$C_{y_{\delta_r}}$	0,25938	-0,27003	0,16991	-259
C_{l_β}	0,068619	0,3712	-0,062859	-691
C_{l_p}	-0,98871	3,0465	-0,50363	-705
C_{l_r}	0,23019	-0,93867	0,13997	-771
$C_{l_{\delta_a}}$	-0,1755	0,93803	-0,15740	-696
$C_{l_{\delta_r}}$	$-4,9173 \cdot 10^{-5}$	-0,00077407	$-6,3 \cdot 10^{-5}$	1120
C_{n_β}	0,16035	0,096229	0,10777	-4,8
C_{n_p}	$-1,7834 \cdot 10^{-5}$	-0,036098	$-1,0770 \cdot 10^{-4}$	33418
C_{n_r}	-0,16577	-0,3063	-0,31220	-1,9
$C_{n_{\delta_a}}$	-0,0087003	-0,01407	-0,0052754	167
$C_{n_{\delta_r}}$	-0,10691	-0,088573	-0,089640	-1,2

Tabela 7.15 – Comparação - MMQ e ML com ruído de medida - Lateral

	erro MMQ (%)	erro ML (%)
C_{L_0}	11,5	2,0
$C_{y\beta}$	-206	-79
C_{y_p}	-791	480
C_{y_r}	3632	615
$C_{y_{\delta_r}}$	-472	-259
C_{l_β}	53,3	-691
C_{l_p}	53,2	-705
C_{l_r}	80,0	-771
$C_{l_{\delta_a}}$	51,6	-696
$C_{l_{\delta_r}}$	2388,5	1120
C_{n_β}	6,6	-4,8
C_{n_p}	-87965	33418
C_{n_r}	16,0	-1,9
$C_{n_{\delta_a}}$	-507	167
$C_{n_{\delta_r}}$	-5,2	-1,2

Na tabela 7.15, pode ser feita a comparação entre os erros obtidos em cada método. O método da máxima verossimilhança oferece, em geral, valores melhores do que o método dos mínimos quadrados. As exceções neste exemplo ficam por conta das derivadas C_{l_β} , C_{l_p} , C_{l_r} , $C_{l_{\delta_a}}$. Todavia, cabe ressaltar que essas quatro derivadas, nos testes realizados, apresentavam erros de valores semelhantes

umas às outras. Esse comportamento se repetiu em testes com outras manobras que lhes conferia um menor erro e também quando sua estimativa pelo ML oferecia melhores resultados que pelo MMQ.

Com essa ressalva feita, sugere-se a investigação do comportamento particular dessas quatro derivadas, que pode estar relacionado, em alguns experimentos, com uma perda de precisão quando estimadas por ML.

7.10 Validação da identificação

Uma prática comum na identificação de sistemas é a validação dos resultados obtidos pela comparação entre a resposta real do sistema e aquela prevista pelo modelo identificado. No entanto, diferentemente do realizado até este ponto, esta comparação não é feita usando-se a mesma manobra utilizada para a identificação, mas uma outra manobra. A idéia por trás dessa prática é que os parâmetros identificados com uma certa manobra são, pelo próprio método de identificação, determinados tais que tornam o erro entre a saída medida e esperada pequeno. Todavia, na utilização futura dos valores identificados, o sistema será excitado por outras entradas que, combinadas aos valores identificados, não produzirão necessariamente saídas medida e prevista próximas uma à outra. Espera-se que os valores identificados modelem o sistema com fidelidade para todas as manobras (dentro dos limites de aplicação do modelo), e não apenas a algumas em especial, que foram utilizadas na identificação.

Procedeu-se a validação dos valores identificados por ML no experimento com ruído de medida descrito na seção 7.9. As entradas utilizadas na identificação são aquelas da figura 38, e os valores identificados estão na tabela 7.14. A entrada utilizada na validação está indicada na figura 39 e é composta de duas oscilações senoidais.

As saídas previstas e medidas são mostradas na figura 40 e as trajetórias real e prevista na figura 41. Nota-se que a distância entre a posição prevista e a real da aeronave aumenta com o tempo. Efetivamente, os erros cometidos na identificação referem-se a valores de derivadas temporais. Um desvio constante nas derivadas, quando integrado no tempo, resulta em previsões de posição com desvios crescentes. Neste exemplo, após 10 s, a distância entre as posições real e prevista chegam a 0,153 m

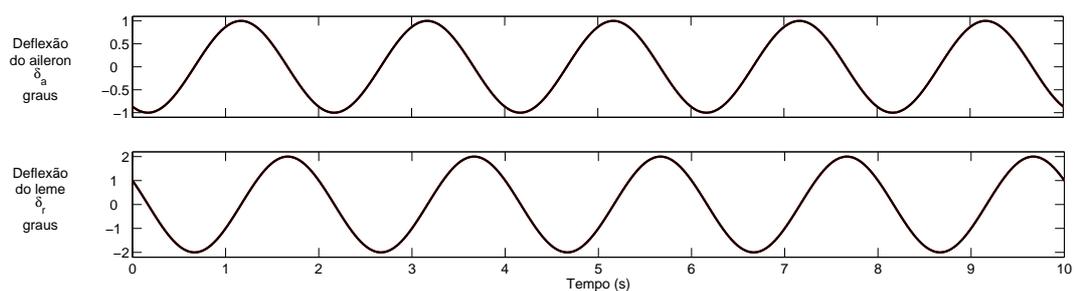


Figura 39 – Manobra de Validação - Entradas

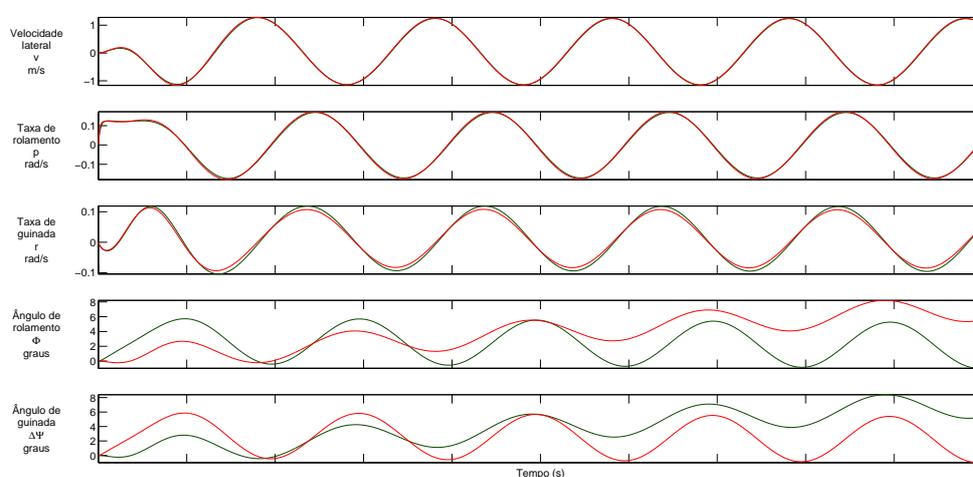


Figura 40 – Manobra de Validação - Saídas (Verde: Medida; Vermelho: Prevista)

Verifica-se a partir dos resultados que o algoritmo de identificação estima valores para as derivadas de estabilidade que prevêm razoavelmente bem a dinâmica da aeronave. Apesar de erros muito grandes serem cometidos, a previsão da evolução do voo é em feita.

Se por um lado, os resultados obtidos em (tabela 7.14) não permitem dizer que a maior parte das derivadas de estabilidade foi efetivamente identificada, por outro lado, a figura 41 mostra que a trajetória prevista não se afasta muito da real.

Esta figura e demais resultados já comparados no decorrer do relatório mostram que o desvio entre as medidas e as grandezas (posições, ângulos e velocidades) previstas pelo modelo linear é basicamente o mesmo, seja o modelo parametrizado com os valores corretos ou identificados das derivadas de estabilidade.

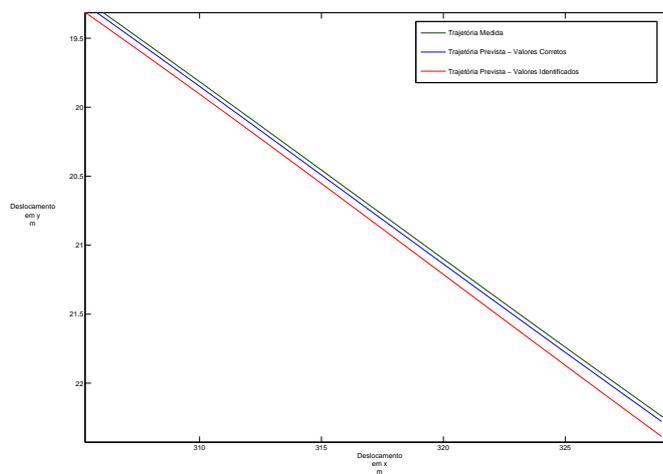


Figura 41 – Manobra de Validação - Detalhe da trajetória - Vista Superior

Conclui-se que, para o veículo estudado, o efeito na dinâmica do sistema de grandes desvios em certas derivadas de estabilidade é muito sutil, tão sutil a ponto de a aproximação linear da dinâmica, apesar de realizar boas previsões, impede a correta identificação dos parâmetros investigados.

8 CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS

Os métodos dos mínimos quadrados (MMQ) e da máxima verossimilhança (ML) foram implementados com sucesso, sendo que os resultados obtidos por ML são em geral superiores aos obtidos pelo MMQ.

As manobras utilizadas na identificação oferecem valores para os parâmetros do sistema que reproduzem razoavelmente bem a dinâmica observada. No entanto, não são suficientes para a correta identificação de todas as derivadas de estabilidade.

Para o veículo estudado, o efeito na dinâmica do sistema de grandes desvios em certas derivadas de estabilidade é muito sutil, tão sutil a ponto de a aproximação linear da dinâmica, apesar de realizar boas previsões, impede a correta identificação dos parâmetros investigados.

Como sugestão para trabalhos futuros, indicaria:

- adoção de um modelo não-linear: a identificação da aeronave é realizada “off-line”, no laboratório, com dados registrados de vôos. Não há exigências de processamento em tempo real para o método de identificação. O custo computacional com a utilização de um modelo não-linear não é muito mais elevado do que com o modelo linear, nesse contexto.
- inclusão do ruído de processo: a maior dificuldade trazida pelo inclusão de ruídos de processo deverá ser uma maior excursão para estados afastados do estado em torno do qual foi feita a linearização. Como visto, esse afastamento altera significativamente os resultados.
- investigação da variação conjunta das estimativas de $C_{l\beta}$, C_{lp} , C_{lr} e $C_{l\delta_a}$
- estudo da variância dos erros, como o limite de Cramér-Rao

LISTA DE REFERÊNCIAS

- [1] MAINE, R. E.; ILIFF, K. W. Formulation and implementation of a practical algorithm for parameter estimation with process and measurement noise. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, SIAM, v. 41, n. 3, p. 558–579, Dec. 1981.
- [2] MACIEL, B. C. O.; GÓES, L. C. S. Methodologies for aircraft parameter estimation from flight test data with process and measurement noise. In: *6^o Brazilian Conference on Dynamics, Control and their Applications - Dincon'2007*. São José do Rio Preto, Brasil: [s.n.], 2007.
- [3] SANDMAN, B. E.; KELLY, J. G. System identification: Application to underwater vehicle dynamics. *J. Hydronautics*, v. 8, n. 3, p. 96–99, July 1974.
- [4] ILIFF, K. W.; MAINE, R. E. *More than you may want to know about maximum likelihood estimation*. Edwards, California.
- [5] MACIEL, L. C. S. G. Benedito Carlos de O.; HEMERLY, E. M.; NETO, N. S. B. Flight path reconstruction and parameter estimation using output-error methods. *Shock and Vibration*, IOS Press, n. 13, p. 379–392, 2006.
- [6] MURPHY, P. C. *A Methodology for airplane Parameter estimation and Confidence Interval Determination in Nonlinear Estimation Problems*. Hampton, Virginia, 1986.
- [7] KÄLLSTRÖM, C. G.; ÅSTRÖM, K. J. Experiences of system identification applied to ship steering. *Automatica*, Pergamon Press, v. 17, p. 187–198, 1981.
- [8] MILNE, G. *State-Space Identification Tool User's Guide*. [S.l.], Mar. 1988.
- [9] ÅSTRÖM, K. J. Maximum likelihood and prediction error methods. *Automatica*, Pergamon Press, v. 16, p. 551–574, 1980.
- [10] ÅSTRÖM, K. J.; EYKHOFF, P. System identification - a survey. *Automatica*, Pergamon Press, v. 7, p. 123–162, 1971.
- [11] NELSON, R. C. *Flight Stability and Automatic Control*. Second edition. [S.l.]: McGraw-Hill, 1998.
- [12] ANDERSON, J. J. D. *Fundamentals of Aerodynamics*. Second edition. [S.l.]: McGraw-Hill, Inc., 1991. (Aeronautical and Aerospace Engineering).
- [13] DURAND, W. F. (Ed.). *Aerodynamic Theory*. Berlin: Springer, 1934.
- [14] ETKIN, B. *Dynamics of Flight Stability and Control*. Sixth printing. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1967.

- [15] CAMPBELL, J. P.; MCKINNEY, M. O. *Summary of Methods for Calculating Dynamic Lateral Stability and Response and for Estimating Lateral Stability Derivatives*. [S.l.], 1952.
- [16] OGATA, K. *Modern Control Engineering*. 4a edição. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 2002.
- [17] HOW, J. P. *16.333 Aircraft Stability and Control*. Fall 2004. Notas de aula. Disponível em <<http://ocw.mit.edu/>>. Acesso em: jan. 2008.
- [18] ZADEH, L. A. From circuit theory to system theory. *Proceedings IRE*, n. 50, p. 856–865, 1962.
- [19] ÅSTRÖM, K. J.; BOHLIN, T. *Numerical identification of linear dynamic systems from normal operating records*. [S.l.]: Instrument Society of America, 1966.
- [20] ÅSTRÖM, K. J. *Lectures on the identification problem. The least square method*. Lund, Sweden, 1968.
- [21] AOKI, M.; STALEY, R. M. On input signal synthesis in parameter identification. *Automatica*, Pergamon Press, v. 6, p. 431–440, 1969.
- [22] FISCHER, E. E. Identification of linear systems. *JACC*, p. 473–475, 1965.
- [23] WELCH, G.; BISHOP, G. *An Introduction to the Kalman Filter*. [S.l.], 2001. Disponível em <http://www.cs.unc.edu/~tracker/media/pdf/SIGGRAPH2001_CoursePack_08.pdf>. Acesso em: ago. 2007.
- [24] BROWN, R. G.; HWANG, P. Y. C. *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering*. Second edition. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 1992.
- [25] GÓES, L. C. S. et al. Aircraft parameter estimation using output-error methods. In: *Inverse Problems, Design and Optimization Symposium*. Rio de Janeiro, Brasil: [s.n.], 2004.
- [26] HOFF, J. C.; COOK, M. V. Aircraft parameter identification using an estimation-before-modelling technique. *The Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society*, The Royal Aeronautical Society, p. 259–268, Aug./Sept. 1996.