

VALTER UNTERBERGER FILHO

**PROJETO DE REFORÇAMENTO DE PLACAS E
CHAPAS UTILIZANDO MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO
TOPOLÓGICA**

Trabalho de Formatura apresentado à
Escola Politécnica da Universidade de
São Paulo

**São Paulo
2007**

VALTER UNTERBERGER FILHO

**PROJETO DE REFORÇAMENTO DE PLACAS E
CHAPAS UTILIZANDO MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO
TOPOLÓGICA**

Trabalho de Formatura apresentado à
Escola Politécnica da Universidade de
São Paulo

Área de Concentração:
Engenharia Mecânica

Orientador:
Professor Doutor
Emílio Carlos Nelli Silva

**São Paulo
2007**

FICHA CATALOGRÁFICA

Unterberger Filho, Valter

Projeto de reforçamento de placas e chapas utilizando o método de otimização topológica / V. Unterberger Filho. -- São Paulo, 2007.

p. 87

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1.Otimização topológica 2.Restrições de manufatura I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II.t.

Resumo

Uma constante em todos os projetos de Engenharia é a contínua busca por melhorias. Por aperfeiçoamento entende-se não somente melhorar a qualidade do projeto, mas também, tratando-se de estruturas, reduzir custos ou peso sem que seu desempenho seja prejudicado. Para tanto o engenheiro precisa de ferramentas capazes de auxiliar o desenvolvimento de seus projetos com qualidade e de forma rápida e pouco onerosa.

Neste trabalho é apresentado um estudo do reforçamento de placas e chapas utilizando o **Método de Otimização Topológica (MOT)**, com o objetivo de maximizar a rigidez da estrutura e minimizar seu peso. O MOT é uma ferramenta computacional capaz de sintetizar estruturas mecânicas através da distribuição de material em uma região do domínio determinado pelo usuário, respeitando as restrições impostas; para isto faz uso da combinação de métodos de otimização com **Métodos de Elementos Finitos (MEF)**. Para a solução do MEF é utilizado o software comercial ANSYS, cujo emprego na indústria é bastante amplo dado seu excelente desempenho e disponibilidade de recursos.

Para escrever o algoritmo de otimização foi escolhida a linguagem do próprio ANSYS, denominada APDL (“*Ansys Parametric Design Language*”). Além de ser de fácil aprendizagem, com o uso desta linguagem não é necessário escrever um algoritmo para a solução do MEF, já que o software já dispõe deste recurso.

O MOT é aplicado ao reforçamento de estrutura. Para isto é criada uma estrutura com duas camadas, mais conhecida como *multilayer* (duas placas “coladas” uma na outra), sendo que uma representa a estrutura, e a outra, o reforçamento. O MOT é aplicado somente ao reforçamento. À mesma placa descrita acima é aplicado o reforçamento. Verifica-se que a distribuição de massa é completamente diferente daquela apresentada pela otimização da estrutura.

Por fim são implementadas restrições de manufatura, que são restrições no algoritmo de otimização que garantem que as estruturas obtidas sejam manufaturáveis. Como exemplo é analisado o projeto do reforçamento de um vaso de pressão.

Abstract

One of the major challenges in Engineering is the constant improvement. As improvement we understood not only to obtain designs with better quality, but also, considering the field of structural design, to try to reduce its costs and weight without any lost in performance. Therefore, the engineer needs tools able to help him quickly, efficiently and with low cost in the design development.

This work presents a plate and shell reinforcement study using the Topology Optimization Method (TOM), with the purpose to maximize the structure stiffness and reduce its weight. The TOM is a computational tool able to find the optimal material distribution in a design domain respecting the constraints imposed by the user. For that, the TOM uses a combination of the **Finite Element Method (FEM)** and optimization methods. To solve the FEM problem is used the commercial software ANSYS, which is very common in the industry due to its excellent performance and available resources.

For the optimization algorithm is chosen the ANSYS own programming language, called APDL (“*ANSYS Parametric Design Language*”). Using APDL it is not necessary to develop the FEM algorithm, once the software already is able to solve this problem.

The TOM is used to determine the reinforcement optimal geometry. For that a multi-layered structure (two layers) is created, where one of them represents the structure and the second one, the reinforcement. To the same plate described above is applied the reinforcement (in the second layer). It is verified that mass distribution is completely different from that one obtained by the structure’s optimization.

At last, manufacturing constraints are implemented in order to get structures designs that can be manufactured. As an example these manufacturing constraints are applied to the reinforcement design of a multi-layered square plate and to the design of a pressure vessel reinforcement.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CONVENÇÕES E LISTA DE SÍMBOLOS

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Objetivo e Justificativa.....	2
2	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	3
2.1	Introdução	3
2.2	Elementos Bidimensionais	6
2.3	Elementos de Casca.....	13
3	OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL	16
3.1	Introdução	16
3.2	Conceitos Gerais	16
3.2.1	Formulação do problema de otimização	16
3.2.2	Problemas de otimização estrutural	17
3.3	Otimização Topológica	19
3.3.1	Conceituação	20
3.3.2	Modelo de material	23
3.3.3	Aspectos Numéricos da Otimização Topológica	28
4	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA.....	36
4.1	Minimização da Flexibilidade Média.....	36
4.2	Critério da Otimalidade.....	39
5	IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA.....	45
5.1	Introdução	45
5.1.1	Inicialização das Variáveis.....	46
5.1.2	Análise Estrutural.....	47
5.1.3	Cálculo da Função Objetivo.....	48
5.1.4	Rotina de Otimização.....	48
5.1.5	Análise da Convergência.....	48
5.1.6	Pós-Processamento.....	48
5.2	Exemplo de Aplicação	49
5.2.1	Resultados: Placa Submetida a uma Força.....	51

5.2.2	Resultados: Placa Submetida a duas Forças.....	55
6	REFORÇAMENTO DE ESTRUTURAS.....	58
7	RESTRICÇÕES DE MANUFATURA.....	68
7.1	Restrições de Manufatura na Placa Plana.....	70
7.2	Caso Prático: “Caixa de Pressão”.....	78
8	CONCLUSÃO E COMENTÁRIOS.....	84
9	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	86

ANEXO A – Códigos APDL para Placa Plana

ANEXO B – Códigos APDL para Placa Plana com Reforçamento

Lista de Figuras

Figura 1: Domínio a ser otimizado.....	3
Figura 2: Numeração local dos nós de um elemento quadrado.	8
Figura 3: Geometria do elemento bidimensional e as coordenadas local e global. ...	10
Figura 4: Geometria do elemento PLANE82 de 8 nós.	13
Figura 5: Elemento SHELL63 utilizado no ANSYS.	14
Figura 6: Domínio admissível em um problema de otimização bidimensional.....	17
Figura 7: Diferentes tipos de otimização estrutural.	18
Figura 8: Exemplo de DFE (esquerda) e a forma otimizada obtida (direita).....	21
Figura 9: Fluxograma de um processo de otimização típico.....	22
Figura 10: Configuração da Microestrutura – Método da Homogeneização.	25
Figura 11: Exemplo de solução com instabilidade de tabuleiro (em destaque).....	29
Figura 12: Dependência de malha no problema de Otimização Topológica.	31
Figura 13: Barra sob tração uniaxial.	32
Figura 14: Exemplo de como furos menores podem aumentar o perímetro para um dado volume. V é o volume e P é o perímetro interno dos furos.	33
Figura 15: Domínio a ser otimizado.....	36
Figura 16: Fluxograma do Algoritmo de Otimização.	46
Figura 17: Representação da placa plana sujeita a uma força.....	49
Figura 18: Representação da placa plana sujeita a duas forças.....	50
Figura 19: Modelo da placa plana discretizada.....	50
Figura 20: Distribuição de massa após 5 iterações.	51
Figura 21: Distribuição de massa após a 10 ^a iteração.	52
Figura 22: Distribuição de massa após a 15 ^a iteração.	52
Figura 23: Distribuição de massa após a 20 ^a iteração.	53
Figura 24: Distribuição de massa após a 25 ^a iteração.	53
Figura 25: Estrutura final obtida.	54
Figura 26: Curva de convergência da função objetivo.....	54
Figura 27: Duas forças aplicadas. Restrição volumétrica de 30%.	55
Figura 28: Duas forças aplicadas. Restrição volumétrica de 40%.	56
Figura 29: Duas forças aplicadas. Restrição volumétrica de 50%.	56

Figura 30: Curva de convergência da função objetivo para a restrição volumétrica de 30%.	57
Figura 31: Curva de convergência da função objetivo para a restrição volumétrica de 50%.	57
Figura 32: Elemento SHELL91. Em destaque a representação das camadas do elemento.	58
Figura 33: Distribuição de massa após a 15ª iteração para $\frac{w_1}{w_2} = \frac{1}{2}$	59
Figura 34: Distribuição de massa após a 30ª iteração para $\frac{w_1}{w_2} = \frac{1}{2}$	60
Figura 35: Distribuição de massa após a 45ª iteração para $\frac{w_1}{w_2} = \frac{1}{2}$	61
Figura 36: Distribuição de massa após a 60ª iteração para $\frac{w_1}{w_2} = \frac{1}{2}$	61
Figura 37: Distribuição de massa após a 75ª iteração para $\frac{w_1}{w_2} = \frac{1}{2}$	62
Figura 38: Convergência da função objetivo para a placa com reforçamento.	62
Figura 39: Distribuição de massa após a 45ª iteração para $\frac{w_1}{w_2} = \frac{1}{3}$	63
Figura 40: Distribuição de massa após a 60ª iteração para $\frac{w_1}{w_2} = \frac{1}{3}$	64
Figura 41: Distribuição de massa após a 75ª iteração para $\frac{w_1}{w_2} = \frac{1}{3}$	64
Figura 42: Convergência para placa com reforçamento. Relação de espessuras de $\frac{w_1}{w_2} = \frac{1}{3}$	65
Figura 43: Distribuição de massa após a 45ª iteração para $\frac{w_1}{w_2} = \frac{2}{3}$	66
Figura 44: Distribuição de massa após a 75ª iteração para $\frac{w_1}{w_2} = \frac{2}{3}$	67
Figura 45: Convergência da função objetivo para a placa com relação $\frac{w_1}{w_2} = \frac{2}{3}$	67

Figura 46: Fluxograma das etapas do processo de OT com restrições de manufatura.	70
Figura 47: Representação da restrição de manufatura de tira vertical: sem (esquerda) e com (direita).	71
Figura 48: Otimização com restrição de tiras horizontais.....	71
Figura 49: Otimização com restrição de tiras verticais.....	72
Figura 50: Convergência da função objetivo para a otimização com restrições de tiras horizontais.....	73
Figura 51: Convergência da função objetivo para a otimização com restrições de tiras verticais.	73
Figura 52: Representação da aplicação de restrição de simetria.....	74
Figura 53: Otimização com restrição de simetria horizontal.	75
Figura 54: Otimização com restrição de simetria vertical.	75
Figura 55: Restrição de repetição de padrão (LIPPI, 2007).....	76
Figura 56: Otimização com restrição de repetição de padrão.	76
Figura 57: Convergência da função objetivo para a otimização com restrições de repetição de padrão.	77
Figura 58: Modelo da caixa de pressão utilizado na simulação em ANSYS.....	79
Figura 59: Método de otimização topológica aplicado ao reforçamento da caixa de pressão.....	79
Figura 60: Convergência da função objetivo para o reforçamento da caixa de pressão.	80
Figura 61: Otimização da caixa de pressão com restrição de tiras verticais.....	81
Figura 62: Otimização da caixa de pressão com restrição de tiras horizontais.....	81
Figura 63: Convergência da função objetivo para o reforçamento com restrição de tiras verticais.	82
Figura 64: Convergência da função objetivo para o reforçamento com restrição de tiras horizontais.	83

Lista de Tabelas

Tabela 1: Componentes E_1 e E_2 para EPT e EPD.....	7
---------------------------------------------------------	---

Lista de Abreviaturas e Siglas

2D	Bidimensional
3D	Tridimensional
APDL	<i>ANSYS Parametric Design Language</i>
CAD	<i>Computer Aided Design</i>
CAE	<i>Computer Aided Engineering</i>
CAM	<i>Computer Aided Manufacturing</i>
DFE	Domínio Fixo Estendido
EPD	Estado Plano de Deformação
EPT	Estado Plano de Tensão
MEF	Método dos Elementos Finitos
MOT	Método de Otimização Topológica
OT	Otimização Topológica
SIMP	<i>Simple Isotropic Material with Penalization</i>

Convenção e Lista de Símbolos

A	Altura da Caixa de Pressão
A^e	Área da superfície do elemento
\mathbf{B}	Matriz das derivadas das funções de interpolação
\mathbf{d}	Matriz de valores nodais
$\mathbf{E}(\mathbf{X})$	Tensor constitutivo ou matriz de rigidez
E	Módulo de Elasticidade
E_0	Tensor constitutivo do material isotrópico
\mathbf{f}	Vetor de forças concentradas
f_v	Fração volumétrica
$f(\mathbf{X})$	Função objetivo
$g(\mathbf{X})$	Restrições de desigualdade
\mathbf{H}	Matriz das funções de interpolação
$h(\mathbf{X})$	Restrições de igualdade
\mathbf{J}	Matriz Jacobiana
$ \mathbf{J} $	Determinante da matriz Jacobiana
\mathbf{K}^e	Matriz de rigidez do elemento
L	Lagrangeano
L_c	Largura da Caixa de Pressão
N	Função de interpolação
n_e	Número de elementos
P	Pressão Interna
p	Fator de penalização
\mathbf{t}	Vetor de forças distribuídas
U	Energia potencial
\mathbf{u}	Vetor deslocamento
u	Deslocamento na direção x
V_0	Volume inicial da estrutura
$V(\Omega)$	Volume do domínio discretizado
v^e	Volume do elemento
v	Deslocamento na direção y
w	Deslocamento na direção z
w_1	Espessura da estrutura
w_2	Espessura do reforçamento
\mathbf{X}	Vetor das variáveis do projeto
x	Direção x no sistema de coordenadas global
\mathbf{x}	Vetor posição
y	Direção y no sistema de coordenadas global
z	Direção z no sistema de coordenadas global
$\chi(\mathbf{X})$	Função discreta
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tensor das deformações

Γ_t	Contorno do domínio com forças distribuídas aplicadas
Γ_u	Contorno do domínio restrito
Ω	Domínio fixo estendido do projeto
Ω^{mat}	Região do domínio fixo onde há presença de material
Ω^e	Domínio fixo estendido de um elemento
λ	Vetor de multiplicadores de Lagrange
η	Direção η no sistema de coordenadas local
$\eta(\mathbf{X})$	Função pseudo-densidade contínua
κ	Fator de amortecimento
ν	Coefficiente de Poisson
Π	Funcional da energia potencial
ρ_0	Densidade do material isotrópico
$\rho(\mathbf{X})$	Densidade
σ	Tensor das tensões
ξ	Direção ξ no sistema de coordenadas local
ψ	Direção ψ no sistema de coordenadas local
ζ	Limite móvel

1 INTRODUÇÃO

Uma constante em todos os projetos de Engenharia é seu aperfeiçoamento, a constante busca por melhorias. Por aperfeiçoamento entende-se não somente melhorar a qualidade do projeto, mas também, tratando-se de estruturas, reduzir custos ou peso sem que esta sofra qualquer perda em termos de desempenho.

Desta forma, grande parte dos desenvolvimentos está baseada na experiência de um grupo de profissionais empenhados em, na maior parte das vezes, apenas melhorar os projetos já existentes. Neste sentido os métodos de otimização apresentam-se como uma ferramenta promissora para auxiliar o desenvolvimento de estruturas.

Neste trabalho visa o estudo do reforçamento de placas e chapas utilizando o Método de Otimização Topológica (MOT). Outros métodos de otimização, como otimização de forma e paramétrica serão apresentados, mas apenas superficialmente.

O Método de Otimização Topológica é uma ferramenta computacional capaz de sintetizar estruturas mecânicas através da distribuição de material em uma região do espaço, respeitando as restrições impostas; para isto faz uso da combinação de métodos de otimização com Métodos de Elementos Finitos (MEF).

A grande vantagem do método de otimização topológica frente aos outros métodos tradicionais de otimização é a capacidade de fornecer o leiaute ótimo para uma dada aplicação, não ficando restrito somente a alterações na forma ou mesmo nos parâmetros da estrutura, como espessura, comprimento, etc..

Inicialmente o MOT foi desenvolvido para a aplicação em estruturas visando a maximização de rigidez. Hoje é empregado também em projetos de mecanismos flexíveis, em projeto de materiais e de estruturas para a absorção de impacto, entre outras (BENDSØE, 2003).

Neste trabalho será apresentado o Método de Otimização Topológica aplicado a estruturas, utilizando como ferramenta auxiliar o método de elementos finitos, que será implementado através do uso de um software comercial.

1.1 Objetivo e Justificativa

Conforme apresentado na seção anterior, percebe-se que, cada vez mais, o engenheiro precisa de ferramentas capazes de auxiliar o desenvolvimento de seus projetos com qualidade e de forma rápida e pouco onerosa. Nas últimas décadas os métodos computacionais vêm ganhando espaço e têm se tornado cada vez mais responsáveis pelos bons resultados obtidos, entre os quais pode-se citar o MEF, os métodos de otimização e até mesmo ferramentas como o CAD, CAM e CAE.

Assim, o objetivo deste trabalho é compreender e implementar o Método de Otimização Topológica, inicialmente aplicando em estruturas bastante simples para validar a metodologia empregada, e posteriormente aplicar a mesma metodologia, porém mais desenvolvida, no projeto de reforçamento de estruturas. É importante ressaltar que o critério utilizado para determinar a estrutura ótima foca a sua rigidez, de forma que o uso do MOT busca a redução da deflexão dos elementos da estrutura, através da minimização de sua energia potencial total.

Por fim são implementadas restrições de manufatura, que são restrições no algoritmo de otimização de forma que se possa garantir que as estruturas obtidas sejam ótimas factíveis, ou seja, ótimas manufaturáveis. Vale ressaltar que, devido às restrições, podem existir outras estruturas teóricas ótimas, mas nada se pode afirmar com relação à possibilidade de sua fabricação.

É utilizado o método das densidades com penalização, ou SIMP (*“Simple Isotropic Material with Penalization”*), enquanto que o critério da otimalidade é escolhido como algoritmo de otimização. Filtros são utilizados para evitar soluções matemáticas indesejáveis, tais como a instabilidade de xadrez e dependência de malha.

Para a solução do MEF é utilizado o software comercial ANSYS, uma ferramenta computacional muito empregada, principalmente para cálculo estrutural. A programação é feita toda em APDL (*“ANSYS Parametric Design Language”*), uma linguagem do próprio ANSYS, que tem como grande vantagem não ser de difícil aprendizagem.

2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

2.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é apresentar de forma bastante direta e resumida os principais conceitos envolvidos no Método dos Elementos Finitos (MEF) utilizados neste trabalho. Tanto os conceitos como formulações aqui apresentados foram baseados basicamente em (BENDSØE, 2003), (MEYNEN, 2004) e (LOPES, 2005).

Considere um corpo tridimensional genérico ocupando um domínio Ω^{mat} que é parte de um grande domínio Ω em \mathcal{R}^2 ou \mathcal{R}^3 . Este é escolhido de tal forma que seja possível aplicar forças concentradas \mathbf{f} em qualquer região do corpo e forças distribuídas \mathbf{t} ao longo de sua superfície Γ_t . Na região determinada por Γ_u o corpo está restrito, como mostrado na Figura 1.

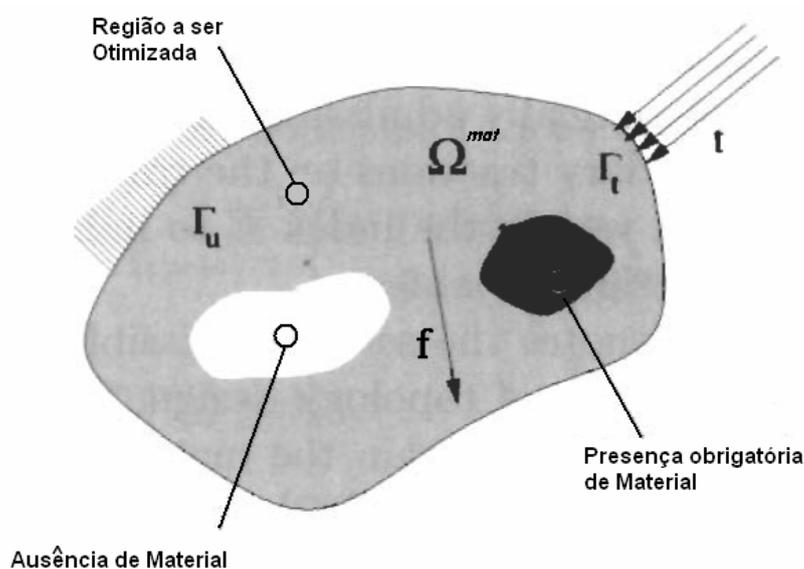


Figura 1: Domínio a ser otimizado.

A partir do Princípio da Mínima Energia Potencial Total pode-se escrever, de forma genérica, a equação contínua da energia:

$$\Pi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} U(\mathbf{u}, \mathbf{v}) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \mathbf{u} d\Gamma_t \quad (2.1)$$

onde $U(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ é a energia potencial em função dos deslocamento \mathbf{u} e \mathbf{v} . A primeira integral da equação 2.1 representa a energia de deformação, enquanto que a soma das duas últimas integrais refere-se ao trabalho das forças externas.

Tanto para o caso bidimensional como para o tridimensional a energia potencial é escrita da mesma forma, sendo que a diferença entre ambos os casos encontra-se no vetor deslocamento, que para o caso bidimensional é $\mathbf{u} = [u, v]$, enquanto que para o caso tridimensional é $\mathbf{u} = [u, v, w]$.

Com se trata de um problema de elementos finitos, as equações são trabalhadas na forma discreta. Assim, a energia potencial pode ser escrita como função do vetor deformação $\boldsymbol{\varepsilon}$, do tensor constitutivo ou matriz de rigidez \mathbf{E} , como mostrado na equação (2.2).

$$U(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \quad (2.2)$$

Utilizando as formulações do MEF, as deformações $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ podem ser escritas em função da matriz das derivadas das funções de interpolação \mathbf{B}^e e da matriz de valores nodais de deslocamento \mathbf{d}^e , que poderão ser melhor compreendidas no próximo tópico quando forem demonstradas para a aplicação em elementos bidimensionais. Para problemas planos isotrópicos as matrizes podem ser representadas de uma forma simplificada, com menos elementos, devido à sua simetria empregando-se, neste caso, o índice “e”. Isto também será mostrado adiante.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = (\mathbf{B}^e)^T \cdot \mathbf{d}^e \quad (2.3)$$

Interpolando os deslocamentos \mathbf{u} no interior de cada elemento, baseado nos valores nodais de deslocamento \mathbf{d}^e , tem-se:

$$\mathbf{u}^e = (\mathbf{N}^e)^T \cdot \mathbf{d}^e \quad (2.4)$$

Substituindo-se as equações (2.2), (2.3) e (2.4) na equação (2.1), obtém-se o funcional da energia potencial total.

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{B}^e)^T (\mathbf{d}^e)^T \mathbf{E} \cdot (\mathbf{B}^e) \cdot \mathbf{d}^e \cdot d\Omega - \int_{\Omega} (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{f} \cdot \mathbf{d}^e d\Omega \\ & - \int_{\Gamma} (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{t} \cdot \mathbf{d}^e d\Gamma \end{aligned} \quad (2.5)$$

Deve-se minimizar a funcional de energia em relação ao campo de deslocamentos e igualar a zero. Esta é a condição de energia de deformação mínima, condição necessária e suficiente para assegurar o equilíbrio em toda a estrutura, bem como qualquer uma de suas partes.

$$\frac{d\Pi}{d\mathbf{d}^e} = \int_{\Omega} (\mathbf{B}^e)^T \mathbf{E} \cdot (\mathbf{B}^e) \cdot \mathbf{d}^e \cdot d\Omega - \int_{\Omega} (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{f} d\Omega - \int_{\Gamma} (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{t} d\Gamma = 0 \quad (2.6)$$

Se tratando de MEF, deve-se discretizar o domínio Ω em n_e elementos, de tal forma que:

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n_e} \Omega_i^e \quad (2.7)$$

Aplicando-se a equação (2.7) em (2.6):

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}^e)^T \mathbf{E} \cdot (\mathbf{B}^e) \cdot \mathbf{d}^e \cdot d\Omega^e &= \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^e} (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{f} \cdot d\Omega^e \\ + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma^e} (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{t} \cdot d\Gamma^e &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

2.2 Elementos Bidimensionais

A seguir será apresentada a formulação matemática para a aplicação do MEF em um elemento plano, bidimensional com quatro nós. Para este tipo de elemento os carregamentos devem ser coplanares à sua superfície. Dessa forma pode-se ter o elemento em dois estados possíveis:

- Estado Plano de Tensão (EPT): onde as tensões são perpendiculares à superfície são nulas, ou seja, $\sigma_z = 0$, porém as deformações nesta direção não precisam ser obrigatoriamente nulas, $\varepsilon_z \neq 0$.
- Estado Plano de Deformação (EPD): onde as deformações na direção perpendicular ao plano são nulas, ou seja, $\varepsilon_z = 0$, porém as tensões atuantes nesta direção não precisam ser nulas, $\sigma_z \neq 0$.

Para elementos planos consideram-se duas variáveis deslocamento u e v nas direções x e y respectivamente. Neste caso pode-se utilizar uma notação compacta, numerando direções x e y , como exemplificado na equação (2.9):

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

Se forem consideradas somente deformações infinitesimais:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.10)$$

Ou simplesmente na forma compacta:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (i, j = 1, 2) \quad (2.11)$$

A Lei de Hooke descreve uma relação linear entre as tensões σ_{ij} e as deformações ε_{ij} através do tensor de elasticidade E_{ijkl} :

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (i, j, k, l = 1, 2) \quad (2.12)$$

Esta relação pode também ser escrita na forma clássica, em uma matriz quadrada onde os elementos principais se encontram na diagonal e os termos cruzados preenchem, de forma simétrica, o restante da matriz. Como se trata de um problema isotrópico, pode-se representar as matrizes quadradas utilizando-se apenas uma vez os elementos repetitivos na matriz, ou seja, ao invés de representarmos uma matriz 2x2, pode-se utilizar um vetor com três elementos. Para identificar esta formulação vetorial utiliza-se o índice “e”.

$$\sigma^e = \mathbf{E} \varepsilon^e \quad \longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 & 0 \\ E_2 & E_1 & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} \quad (2.13)$$

Com esta técnica de armazenagem diversas operações podem ser efetuadas dentro do programa de MEF através do produto de vetores, ou do produto matriz-vetor de forma bastante rápida e eficiente. Os valores de E_1 e de E_2 são diferentes para o caso da adoção do EPT ou EPD, e ambos são função do coeficiente de Poisson ν e do módulo de elasticidade E , como mostrado na Tabela 1. G é o modulo de elasticidade transversal ou de cisalhamento, e é igual para o EPT e o EPD.

Tabela 1: Componentes E_1 e E_2 para EPT e EPD

Estado	Condições	E_1	E_2	G
EPT	$\sigma_z = 0, \varepsilon_z \neq 0$	$\frac{E}{1-\nu^2}$	νE_1	$\frac{E}{2 \cdot (1+\nu)}$
EPD	$\sigma_z \neq 0, \varepsilon_z = 0$	$\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{\nu E_1}{(1-\nu)}$	

Para o elemento plano, isotrópico com 4 nós o sistema de coordenadas (local) será considerado, primeiramente, no centro do elemento, alinhado ao sistema de coordenadas global (x, y) , como mostrado na Figura 2.

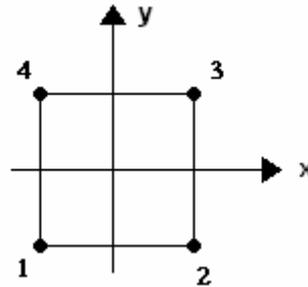


Figura 2: Numeração local dos nós de um elemento quadrado.

Os vetores posição e deslocamento do elemento também podem ser escritos de uma forma bastante compacta, vetorial, com a numeração fazendo referência a cada um dos nós:

$$\mathbf{x}^e = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{y}^e = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u}^e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{v}^e = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{d}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^e \\ \mathbf{v}^e \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

As funções de interpolação referenciadas ao centro do elemento, ou seja, a um sistema de coordenadas local (x, y) , é descrito por:

$$\mathbf{N}(x, y) = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} (1-x)(1-y) \\ (1+x)(1-y) \\ (1+x)(1+y) \\ (1-x)(1+y) \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

Assim, os deslocamentos de qualquer ponto do elemento podem ser expressos em termo da função de interpolação:

$$u(x, y) \approx \mathbf{N}^T(x, y) \cdot \mathbf{u}^e, \quad v(x, y) \approx \mathbf{N}^T(x, y) \cdot \mathbf{v}^e \quad (2.16)$$

Ou na forma vetorial considerando o vetor deslocamento $\mathbf{d} = [u, v]^T$:

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \mathbf{N}^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{N}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^e \\ \mathbf{v}^e \end{Bmatrix} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{d}^e \quad (2.17)$$

onde

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}^e = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4]$$

Através das derivadas das funções de interpolação em relação ao sistema de coordenadas pode-se determinar a matriz das derivadas das funções de interpolação \mathbf{B} . Vale notar que esta operação nada mais é do que derivar a equação (2.17) em relação ao sistema de coordenadas, de forma que a derivada do vetor deslocamento \mathbf{d}^e nos fornece o vetor das deformações $\boldsymbol{\varepsilon}^e$, enquanto que a derivada da matriz \mathbf{H} dá origem à matriz \mathbf{B} .

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^e \\ \mathbf{v}^e \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{d}^e \quad (2.18)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix}$$

No sistema de coordenadas locais o elemento é quadrado, com o eixo de coordenadas localizado no centro do elemento. Mas não necessariamente o elemento estará alinhado com a coordenada global e será perfeitamente quadrado, como mostrado na Figura 3. Estes elementos de diferentes tamanhos e formas são criados durante a discretização de uma estrutura e são denominados *isoparamétricos*. Cria-se, então, um sistema de coordenadas local para o elemento (ξ, η) , e uma mudança de variável, fazendo referência às coordenadas globais, é necessária para resolução correta do MEF.

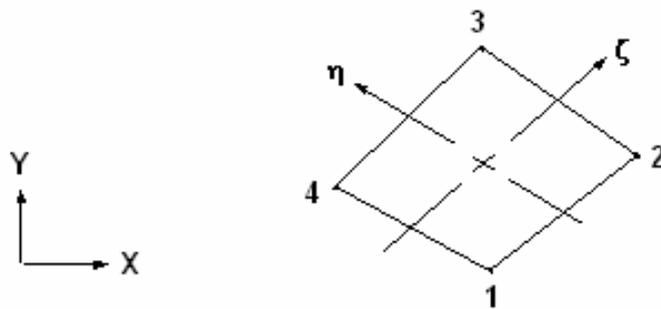


Figura 3: Geometria do elemento bidimensional e as coordenadas local e global.

As coordenadas de um ponto genérico (x, y) do elemento isoparamétrico são obtidas em função das coordenadas nodais do elemento, utilizando polinômios bilineares do elemento retangular. A aproximação para as componentes horizontal e vertical do deslocamento mecânico de cada ponto no domínio do elemento é dada pela equação (2.19). A equação (2.20) representa a função de interpolação no sistema de coordenadas local.

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) x_i = \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{x}^e, \quad y = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) y_i = \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{y}^e \quad (2.19)$$

$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} (1-\xi)(1-\eta) \\ (1+\xi)(1-\eta) \\ (1+\xi)(1+\eta) \\ (1-\xi)(1+\eta) \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

Com o uso da regra da cadeia pode-se derivar a função de interpolação em relação ao sistema de coordenadas global:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial \xi} &= \frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} &= \frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial \xi} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \frac{\partial N}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.21)$$

Ou escrito na forma matricial, onde \mathbf{J} é a matriz Jacobiana de transformação:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}}_{\text{Matriz-Jacobiana}} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

Desta forma ambos os sistemas podem ser relacionados através da seguinte equação:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^T \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

E de forma análoga pode-se escrever a relação entre as funções de interpolação:

$$\frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{J}^{-1} \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \quad (2.24)$$

Desta forma é possível obter a matriz de rigidez de um elemento, equação (2.25). O fator de integração dA^e refere-se à superfície do elemento, e pode-se aplicar o Jacobiano para transformar a equação escrita em sistema local (ξ, η) para o sistema de coordenadas globais (x, y) .

$$\mathbf{K}^e = \int_{A^e} (\mathbf{B}^e)^T \cdot \mathbf{E} \cdot (\mathbf{B}^e) \cdot dA^e \quad (2.25)$$

$$\int_{A^e} \dots dA^e = \int_{x^e} \int_{y^e} \dots dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \dots \det \mathbf{J} d\xi d\eta \quad (2.26)$$

Aplicando a equação (2.26) na (2.25) resulta:

$$\mathbf{K}^e = \int_{A^e} (\mathbf{B}^e)^T \mathbf{E} \cdot (\mathbf{B}^e) \cdot |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (2.27)$$

O elemento aqui utilizado para explicar o MEF pode não representar de forma satisfatória a deformação de flexão no seu plano. Isso se dá porque as funções de interpolação utilizadas são lineares, não permitindo que os lados do elemento se curvem, de forma que quando submetido a um carregamento de flexão no seu plano este pode responder de forma mais rígida que a real. Pode-se utilizar mais nós nas laterais do elemento afim de melhor aproximar o campo de deslocamentos do elemento. Isso, porém, requer equações maiores e, portanto, um gasto computacional mais elevado.

No software ANSYS o elemento isoparamétrico bilinear de quatro nós de elasticidade plana é denominado PLANE 42, enquanto que o PLANE 82 é o elemento plano de oito nós.

Pode-se estender as mesmas formulações matemáticas aqui mostradas para o elemento PLANE 82 sem grandes dificuldades. Deve-se atentar apenas para a função de interpolação deste elemento, que é bastante diferente, obviamente, por apresentar um número maior de nós. Este elemento está representado na Figura 4 e suas funções de interpolação se encontram na seqüência.

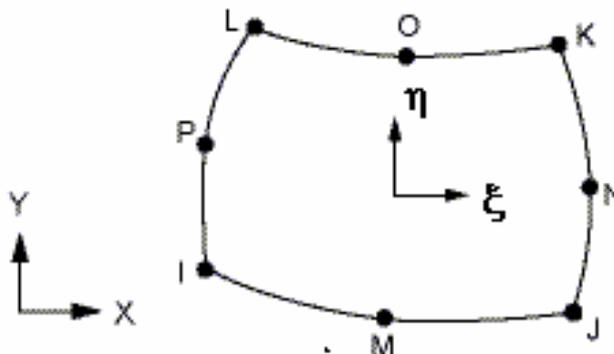


Figura 4: Geometria do elemento PLANE82 de 8 nós.

$$\begin{aligned}
 N_I &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1) \\
 N_J &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1) \\
 N_K &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1) \\
 N_L &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1) \\
 N_M &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) \\
 N_N &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2) \\
 N_O &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta) \\
 N_P &= \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

2.3 Elementos de Casca

Existem dois tipos de elementos tridimensionais utilizados pelo ANSYS. O primeiro, e mais conhecido, é o sólido. O segundo, e que será utilizado neste trabalho, chama-se casca, mas é comumente utilizado o seu nome em inglês: *shell*.

O elemento de casca é, na verdade, um elemento plano, mas classificado como 3-D por possuir espessura, que deve ser determinada pelo usuário e, não obrigatoriamente, constante ao longo do elemento. Estes elementos são “abstrações” da engenharia, uma vez que superfícies geométricas não possuem espessura, porém

são capazes de representar muito bem estruturas cujas dimensões são muito maiores que sua espessura. A grande diferença deste tipo de elemento em relação aos elementos planos é que ele apresenta flexão normal ao seu plano, e neles podem ser aplicadas forças perpendiculares ao plano. Desta forma cada nó apresenta seis graus de liberdade (3 translações e 3 rotações). O elemento SHELL63, apesar de ser o mais antigo dentro de sua categoria, é hoje ainda o mais difundido em análise de cascas. Ele é capaz de analisar grandes deflexões, mas não plasticidade.

Como alternativa ao SHELL63 poder-se utilizar o SHELL93, que nada mais é do que uma versão aprimorada do SHELL63, sendo capaz de analisar também plasticidade. Ele possui 8 nós e, desta forma, oferece resultados ainda mais realistas, mas também requer maior tempo de processamento. Já o elemento SHELL91 é uma das mais novas cascas implementadas no ANSYS. Além de considerar plasticidade e grandes deflexões também pode ser utilizado para modelos de compósitos laminados.

A Figura 5 traz uma representação gráfica do elemento SHELL63.

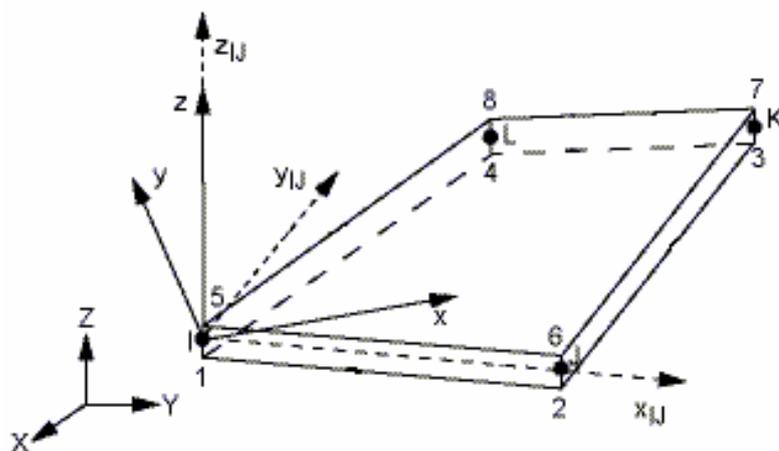


Figura 5: Elemento SHELL63 utilizado no ANSYS.

A mesma formulação matemática apresentada para os elemento isotrópico bidimensional de quatro nós também pode ser empregada nos elementos de casca, com a grande diferença de o elemento possuir, agora, deslocamento na direção Z . Desta forma, o vetor deslocamento adquire mais uma variável e é representado por $\mathbf{u} = [u, v, w]^T$.

Como conseqüência, o vetor deformação dobra de tamanho, ou seja, enquanto que no elemento bidimensional possui apenas três variáveis, se forem considerados

os deslocamentos também na direção Z o vetor passa a ter seis variáveis, como mostrado na equação (2.29):

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \left[\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} \quad \gamma_{xy} \right]^T \quad (2.29)$$

E de forma análoga aos elementos bidimensionais, a energia potencial e a matriz de rigidez de um elemento de casca podem ser determinadas pela equação (2.30) e (2.31) respectivamente (KIKUCHI, 1991). Porém a integração deve ser feita ao longo do volume do elemento, diferentemente do elemento plano, cuja integração deve ser na área, como mostram as equações abaixo:

$$\Pi = \int_{A^e} \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}^e \right\}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^e dz d\Omega \quad (2.30)$$

$$\mathbf{K}^e = \int_{A^e} \int_{-h_1/2}^{h_1/2} (\mathbf{B}^e)^T \cdot \mathbf{E} \cdot (\mathbf{B}^e) dz d\Omega \quad (2.31)$$

Com o uso da matriz de transformação de coordenadas, como mostrado na equação (2.32) pode-se facilmente obter a matriz de rigidez de um elemento no sistema global (equação 2.33). Esta demonstração pode ser facilmente encontrada em bibliografias e não será desenvolvida neste trabalho.

$$\int_{V^e} \dots dV^e = \int_{x^e} \int_{y^e} \int_{z^e} \dots dx dy dz = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \dots \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\psi \quad (2.32)$$

$$\mathbf{K}^e = \int_{A^e} \int_{-h_1/2}^{h_1/2} (\mathbf{B}^e)^T \cdot \mathbf{E} \cdot (\mathbf{B}^e) \cdot |\mathbf{J}| \cdot d\psi d\eta d\xi \quad (2.33)$$

Vale ressaltar que o método de otimização que será empregado neste trabalho considera que a espessura do elemento de casca é constante e definida pelo projeto, ou seja, o reforçamento da estrutura se dará pela otimização somente de sua topologia.

3 OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

3.1 Introdução

O problema de otimização tem como objetivo encontrar a melhor solução dentro de um espaço de soluções possíveis, ou seja, detectar o máximo ou o mínimo de uma dada função objetivo, sem violar as restrições do problema.

3.2 Conceitos Gerais

3.2.1 Formulação do problema de otimização

Como já dito anteriormente, o problema de otimização consiste em encontrar a melhor solução sem violar nenhuma das restrições impostas, ou seja, maximizar ou minimizar a função objetivo, dependendo do proposto.

A função objetivo, denominada $f(\mathbf{X})$, determina o desempenho do projeto. Como exemplo, ela pode determinar peso, deformação, custos, confiabilidade, etc.. Ela é dependente das variáveis de projeto, o vetor $X = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)^T \in \mathfrak{R}^n$, que podem ser alteradas ao longo do processo de otimização. Deseja-se justamente encontrar os valores das variáveis de projeto que conduzem a função objetivo ao valor mínimo.

As restrições podem ser de igualdade ou de desigualdade e definem o espaço viável do problema de otimização, ou seja, o domínio admissível onde as restrições são satisfeitas. Por exemplo, são as restrições que garantem que não se chegue a uma solução onde a seção transversal de uma viga é negativa, ou que as tensões em um vaso de pressão não excedam o limite admissível do material.

O problema de otimização pode ser formulado matematicamente, segundo (BECKER, 2005; LOPES, 2005), da seguinte maneira:

$$\min_{x \in \mathfrak{R}^n} \{f(\mathbf{X}) \mid h(\mathbf{X}) = 0, g(\mathbf{X}) \leq 0\} \quad (3.1)$$

tal que

$$\begin{array}{lll}
 g_i(\mathbf{X}) \leq 0 & i = 1, \dots, I & \text{Restrição de desigualdade} \\
 h_k(\mathbf{X}) = 0 & k = 1, \dots, K & \text{Restrição de igualdade} \\
 \mathbf{X}_{MIN_j} \leq \mathbf{X}_j \leq \mathbf{X}_{MAX_j} & & \text{Restrição lateral}
 \end{array}$$

A Figura 6 representa o domínio admissível (espaço viável) em um problema de otimização bidimensional, localizada na parte interna da área limitada pelas restrições. O ponto ótimo se dá no encontro de duas restrições, como na maioria dos casos.

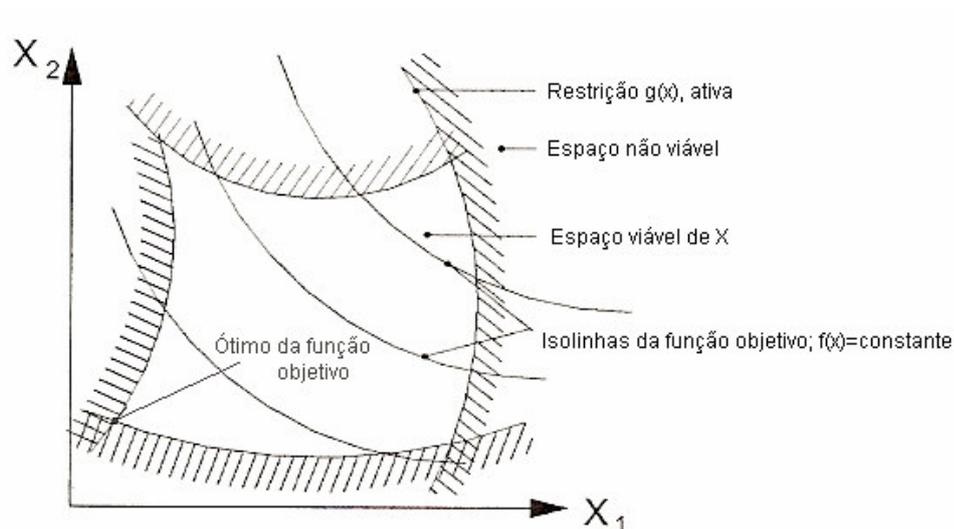


Figura 6: Domínio admissível em um problema de otimização bidimensional.

3.2.2 Problemas de otimização estrutural

Os problemas de otimização estrutural estão divididos em três categorias principais:

- Otimização Paramétrica (“*sizing optimization*”): define-se para uma dada estrutura uma forma física. Esta pode ser variada através de parâmetros, como seções transversal, espessuras, comprimentos, etc.. A otimização consiste na obtenção da combinação de parâmetros que consiga levar a sua função objetivo ao extremo (máximo ou mínimo), desde que todas as restrições estejam satisfeitas.

- Otimização de forma (“*shape optimization*”): objetiva otimizar uma forma pré-determinada de uma estrutura, também sem violar as restrições. Comumente este tipo de otimização é utilizado em problemas locais e é amplamente empregado principalmente na indústria automobilística e aeronáutica. Como exemplo pode-se citar seu uso para minimizar as tensões provocadas por rebaixos e/ou entalhes. Uma desvantagem deste método é que ele proporciona soluções com pequenas alterações em relação ao projeto original e deforma a malha ou exige a redefinição da malha do MEF durante o processo de otimização.
- Otimização topológica (“*topology optimization*”): concentra-se na melhor distribuição do material ao longo da estrutura, dentro de um determinado domínio, de forma que a função objetivo otimizada (maximizada ou minimizada).

A Figura 7 contribui para a compreensão dos tipos de otimização descritos. No primeiro caso (a) tenta-se otimizar a estrutura modificando as seções transversais das vigas, no (b) as variáveis são os parâmetros que descrevem a forma dos furos, enquanto em (c) é apresentado um típico caso de otimização topológica.

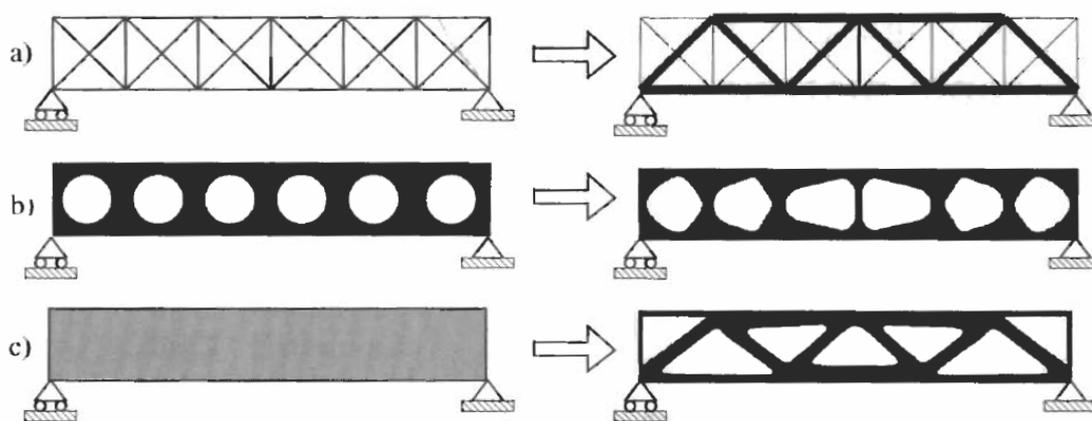


Figura 7: Diferentes tipos de otimização estrutural.

3.3 Otimização Topológica

A busca por melhorias, não somente de desempenho como também de esforços (custos), é uma constante nos projetos de estruturas mecânicas. Para atender tais requisitos, se faz uso, entre outras ferramentas, do Método de Otimização Topológica (MOT).

Os métodos de otimização, de uma forma geral, vêm se desenvolvendo desde antes da década de 60, quando a otimização era baseada na programação matemática e a análise de sensibilidade. Porém a formulação desenvolvida na época permitia a solução somente de problemas paramétricos de estruturas reticuladas, o que deu origem a otimização paramétrica. Na década de 70 foram desenvolvidos diversos métodos de otimização de forma que, analogamente aos métodos de otimização paramétrica, já eram baseados em métodos de elementos finitos, métodos numéricos baseados na programação matemática e análise de sensibilidade.

A grande desvantagem da otimização de forma é que a geometria da estrutura varia, sendo que a cada nova iteração do processo de otimização o modelo de elementos finitos deve ser também modificado.

Para suprir tal dificuldade Bendsøe e Kikuchi (BENDSØE; KIKUCHI, 1988) propuseram o MOT baseado em um método de otimização de distribuição de material em um domínio fixo, de forma que o modelo de elementos finitos (a discretização) não precisa ser modificado. A topologia da estrutura se dá pela presença ou ausência de material nos elementos da malha gerados no processo de discretização. Para isso o autor se baseia na parametrização das propriedades do material através do conceito de microestrutura.

Com a utilização do conceito de microestrutura Bendsøe e Kikuchi (BENDØE; KIKUCHI, 1988) estabeleceram um modelo de material que definia a mistura em microescala de dois ou mais materiais, permitindo que houvesse estágios intermediários entre as condições de ausência de material e sólido, já que o problema de otimização considerando-se elementos com densidade binária não tem solução (SIGMUND, PETERSSON, 1998).

Após a consolidação do método de otimização topológica surgiram várias linhas de desenvolvimento e aplicação deste, como sua integração aos sistemas de

CAD, aplicação em projetos de mecanismos flexíveis e de microestruturas piezelétricas, etc.. Sabe-se que este método é atualmente amplamente empregado principalmente na indústria automobilística, aeronáutica e espacial.

A grande vantagem do processo de otimização topológica é a capacidade de alteração da topologia da estrutura, não ficando somente limitado à sua forma. A forma da estrutura é o contorno externo, enquanto que o *layout* ou topologia, além da forma externa engloba também furos internos e conectividade.

3.3.1 Conceituação

O objetivo da **Otimização Topológica (OT)** é encontrar a distribuição de material ideal de uma estrutura em um determinado domínio, respeitando as condições de contorno, de modo que a função objetivo seja otimizada. A distribuição ótima de material é conseguida de forma iterativa com o uso de algoritmos de otimização, que geralmente combinam os métodos de otimização com um método numérico de análise, geralmente o MEF.

O domínio no qual a estrutura pode existir é denominado **Domínio Fixo Estendido (DFE)**, representado pela letra grega Ω . O DFE é uma região do espaço onde pode existir a estrutura, limitada pelas condições de contorno: um dado carregamento, as fixações às quais a estrutura é submetida, ou mesmo as restrições do domínio, como regiões que obrigatoriamente devem conter material ou regiões que devem apresentar ausência dele. Para não limitar possíveis soluções, deve-se sempre adotar o maior domínio Ω possível.

Na implementação numérica o DFE é discretizado em elementos finitos e as variáveis de projeto são associadas a cada elemento da malha. Desta forma, o modelo de elementos finitos do domínio fixo não é alterado ao longo do processo de otimização, sendo que apenas a distribuição de material nos elementos é modificada.

A Figura 8 ilustra, do lado esquerdo, o domínio fixo estendido: a região onde o carregamento é aplicado, as fixações da estrutura, as regiões que devem ser compostas, bem como as que devem apresentar ausência de material. A região cinza é a que deve ser otimizada. Do lado direito é apresentado o resultado da aplicação do MOT nesta estrutura. Vale notar que todas as restrições impostas são satisfeitas: o

quadrado branco, que determinava a região sem material, pode ser observado na estrutura otimizada, assim como a região retangular preta (região sólida), que caracterizava presença obrigatória de material.

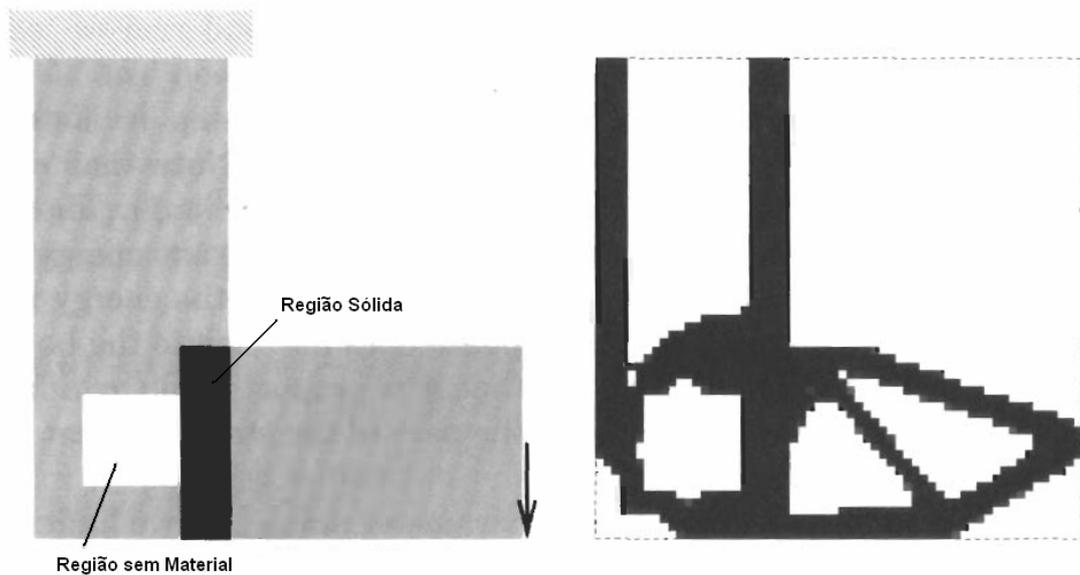


Figura 8: Exemplo de DFE (esquerda) e a forma otimizada obtida (direita).

Segundo Bendsøe (BENDSØE, 2003), o processo de otimização topológica pode ser dividido em três etapas:

Pré-processamento da geometria e dos carregamentos

- É determinado o DFE adequado ao problema, que inclui o espaço a ser otimizado, as restrições, as fixações e os carregamentos;
- Determinação das regiões fixas (sólidas) e das regiões que devem apresentar ausência de material;
- Construção da malha da estrutura inicial. Essa discretização deve ser refinada o suficiente para garantir uma boa resolução do resultado. Ela também deve possibilitar a descrição correta das regiões determinadas com e sem material.

Otimização

Calcula a distribuição ótima de material de forma iterativa no domínio determinado através da densidade dos elementos. A otimização faz uso do deslocamento calculado pelo MEF.

- Estabelece o projeto inicial, geralmente com distribuição homogênea das densidades. As etapas abaixo são executadas de forma iterativa.
- Para a dada distribuição de densidades são calculados utilizando o método dos elementos finitos os deslocamentos e tensões resultantes.
- Verifica-se se a estrutura satisfaz o critério da mínima energia potencial total. Se afirmativo, o processo iterativo é interrompido. Caso contrário, continua e realiza a próxima iteração.
- Atualiza as variáveis de projeto, ou seja, as densidades, baseado nas condições de otimalidade, que serão vistos mais adiante.
- Volta ao início do processo iterativo, ou seja, ao segundo tópico apresentado na otimização.

Pós-processamento dos resultados

- Interpreta a distribuição ótima das densidades do material e define a topologia da estrutura otimizada.

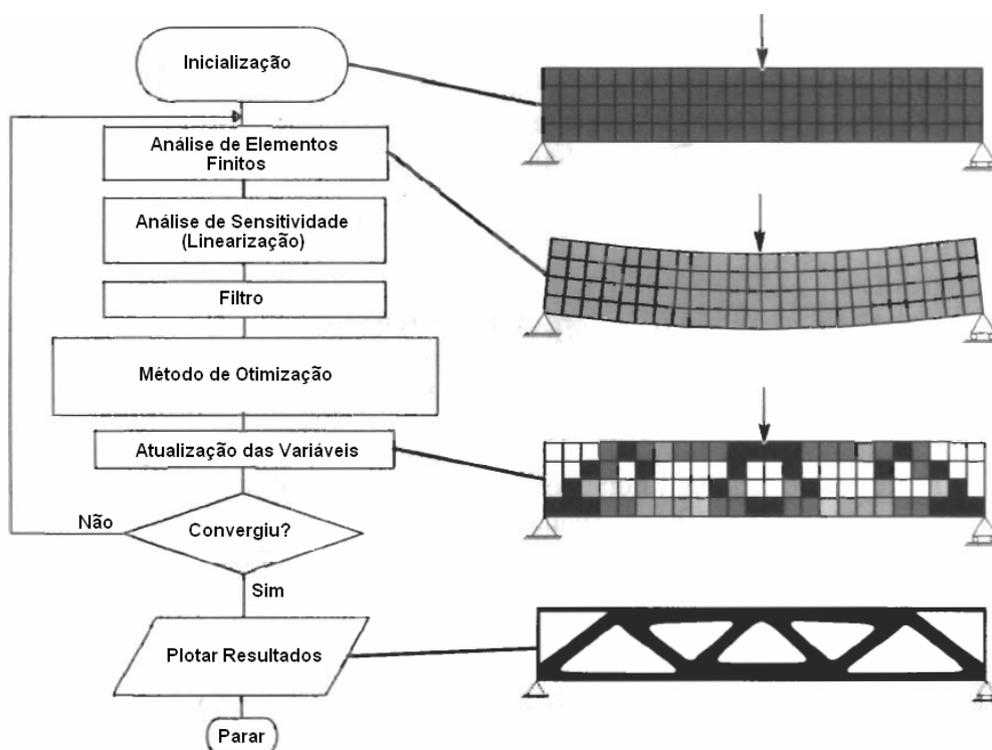


Figura 9: Fluxograma de um processo de otimização típico.

A Figura 9 apresenta um fluxograma das etapas de um processo de otimização topológica típico (neste exemplo foi utilizado o método das densidades,

onde as variáveis de projeto são as densidades dos elementos), mas representa muito bem as etapas do processo de otimização de forma global.

3.3.2 Modelo de material

Como já mencionado, para a aplicação do método de otimização topológica será utilizado o método dos elementos finitos, e, para isto, a estrutura deve ser discretizada. A princípio a densidade de cada um dos elementos da malha é igual, ou seja, a massa da estrutura é distribuída de forma uniforme nos elementos, e durante o processo de otimização deseja-se determinar quais elementos serão materiais e quais serão vazios.

Considerando o domínio Ω , procura-se determinar o domínio Ω^{mat} , caracterizado pela presença de material, que definirá a topologia ótima da estrutura. Esta estrutura pode ser definida por uma função discreta $\eta(x)$, definida em cada ponto (x) do domínio da seguinte forma:

$$\eta(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \Omega^{mat} \\ 0 & \text{se } x \in \Omega / \Omega^{mat} \end{cases} \quad (3.2)$$

Sendo o material isotrópico, pode-se escrever o tensor constitutivo de cada elemento (x) como função do tensor constitutivo do material base \mathbf{E}_0 e da função discreta mencionada:

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}) = \eta(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{E}_0 \quad (3.3)$$

Desta forma o elemento assume densidades equivalentes ao valor da função discreta $\eta(\mathbf{X})$ para cada elemento, ou seja, é caracterizada ou pela presença ou pela ausência de material, não havendo estágios intermediários. O problema assume um caráter essencialmente binário. Contudo, o problema de otimização discreto não tem solução e a tentativa de resolvê-lo resulta em uma solução que depende da discretização da malha (SIGMUND, PETERSSON, 1998).

A abordagem mais comum para resolver este problema é substituir a função discreta por uma função contínua, e, conseqüentemente, as variáveis do problema também assumem valores contínuos (BENDSØE, 2003), de forma que as variáveis possam assumir valores intermediários entre zero e um.

A consideração de variáveis com valores intermediários é equivalente a supor uma mistura em microescala de dois materiais distintos, de forma que o valor da variável gerada por esta mistura assuma valor intermediário ao dos dois materiais. Essa suposição não tem significado físico algum, é apenas um recurso matemático para a relaxação do problema.

Existem diversos modelos de materiais descritos na literatura, entre os quais, destacam-se o método das densidades e o método da homogeneização, que ainda serão apresentados. Neste trabalho será utilizado o método das densidades ou SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*).

3.3.2.1 Método da homogeneização

No método da homogeneização a função $\eta(x)$ é definida a partir da escolha de uma microestrutura composta por células unitárias de dimensões infinitesimais que se repetem indefinidamente ao longo da estrutura. Este material é interpretado como um material composto, já que sua célula unitária é composta por dois materiais (STUMP, 2006).

Os primeiros estudos utilizavam uma célula quadrada com um quadrado (ou retângulo) sem material no centro. Posteriormente surgiu a microestrutura composta por camadas laminadas alternadas (material / vazio). As microestruturas quadradas são determinadas pelas variáveis de projeto a , b e o ângulo θ , enquanto que as microestruturas com camadas alternadas são determinadas pelo parâmetro γ (BENDSØE; KIKUCHI, 1988, SUZIKI; KIKUCHI, 1991).

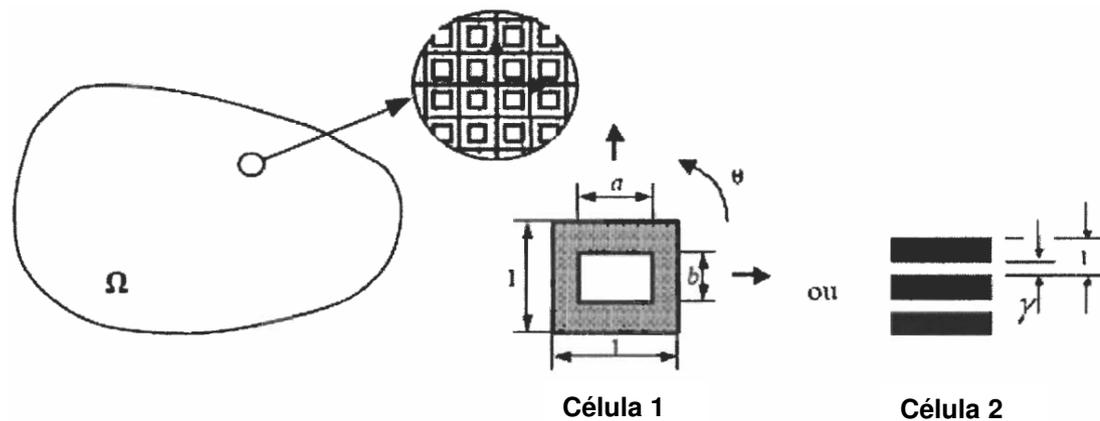


Figura 10: Configuração da Microestrutura – Método da Homogeneização.

Através da definição da célula unitária e de seus parâmetros, como mostrado na Figura 10, é possível definir as propriedades mecânicas do material, as chamadas propriedades homogeneizadas. Basta variar os valores de a , b , θ (ou γ na célula 2) ao longo do DFE durante a otimização para obter a distribuição de material nesse domínio.

Nota-se que a parametrização da microestrutura pode proporcionar densidades intermediárias na representação gráfica do MOT, ou seja, apresenta regiões brancas para $\eta(\mathbf{X}) = \eta(\mathbf{X})_{\min} \geq 0$ (quando $a = b = 1$ ou $\gamma = 1$ na célula 2), regiões pretas, com sólido, para $\eta(\mathbf{X}) = 1$ (quando $a = b = 0$ ou $\gamma = 0$ na célula 2) e também regiões cinzas para $\eta(\mathbf{X})_{\min} < \eta(\mathbf{X}) < 1$, com valores de a , b , θ (ou γ na célula 2) entre zero e um.

Este método é bastante robusto capaz de descrever as propriedades efetivas de um material homogeneizado, porém requer alto custo computacional e uma complexa implementação numérica, visto que utiliza métodos ortotrópicos e anisotrópicos, o que acarreta uma dificuldade adicional na implementação do MEF.

3.3.2.2 Método das densidades

O método das densidades consiste em uma equação matemática que define as propriedades em cada ponto do domínio Ω . Este modelo é classificado como artificial, já que se baseia na idéia de que a microestrutura não é conhecida, porém seu tensor constitutivo é. Esta parametrização é determinada por uma função

contínua $\eta(\mathbf{X})$, tal que $0 \leq \eta(\mathbf{X}) \leq 1$ e $\mathbf{X} \in \Omega$, denominada pseudo-densidade, que multiplica o tensor constitutivo do material base, fornecendo o tensor constitutivo de cada elemento.

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}) = \eta(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{E}_0 \quad (3.4)$$

Analogamente ao tensor constitutivo, a densidade efetiva da estrutura também pode ser definida pela pseudo-densidade, com ρ_0 sendo a densidade do material base:

$$\rho(\mathbf{X}) = \eta(\mathbf{X}) \cdot \rho_0 \quad (3.5)$$

A grande vantagem do método das densidades é que o modelo de material possui uma única variável por elemento (no caso do problema discretizado), o que representa grande eficiência computacional em termos de capacidade de armazenamento e tempo de processamento. Já no método da homogeneização o modelo de material é definido por mais parâmetros, no caso a , b e θ (ou γ na célula 2).

Do ponto de vista físico este modelo não é adequado, já que a equação (3.4) define como viável qualquer valor de propriedade efetiva entre zero (ou bastante próximo a zero) e \mathbf{E}_0 . Sabe-se que isto não é verdade, já que o valor da propriedade efetiva do tensor constitutivo é definido pela sua microestrutura, e nem todos os valores obtidos com a pseudo-densidade são compatíveis com os valores obtidos na microestrutura.

Do ponto de vista matemático a existência de densidades entre zero e um contribui para a relaxação do problema. Entretanto, a solução final apresentará regiões com densidades intermediárias, denominadas “escala de cinza” que, embora importantes para a resolução do problema, não são desejáveis do ponto de vista da Engenharia. Deseja-se uma solução em que o *layout* final (ótimo) seja composto praticamente por regiões vazias (ausência de material) ou regiões em que as propriedades do material base sejam possíveis de se construir.

Para tanto penaliza-se a pseudo-densidade para tentar reduzir o índice de elementos com densidade intermediária e retornar ao problema discreto. Este método é denominado SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*). Isto é realizado com a inserção de um fator de penalização p , como mostrado abaixo:

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}) = \eta(\mathbf{X})^p \cdot \mathbf{E}_0 \quad (3.6)$$

Como $0 \leq \eta(\mathbf{X}) \leq 1$, o fator de penalização tende sempre a levar o tensor constitutivo a zero (já que $p > 0$), reduzindo o número de densidades intermediárias. Infelizmente caso $\eta(\mathbf{X})$ seja próximo à unidade o fator de penalização não o eleva a um, mas também não o reduz a zero, e o elemento será considerado na iteração seguinte como um elemento cinza, ou seja, com densidade intermediária. Porém, a penalização não tem nenhum efeito quando $\eta(\mathbf{X}) = 1$ ou $\eta(\mathbf{X}) = 0$.

O valor atribuído à penalização é muito discutido em literaturas. Bendsøe (BENDSØE & SIGMUND, 1999) sugere os seguintes valores a p :

$$p \geq \max \left\{ \frac{2}{1-\nu^0}, \frac{4}{1+\nu^0} \right\} \quad (\text{no caso 2-D}) \quad (3.7)$$

$$p \geq \max \left\{ 15 \frac{1-\nu^0}{7-5\nu^0}, \frac{3}{2} \frac{1-\nu^0}{1-2\nu^0} \right\} \quad (\text{no caso 3-D}) \quad (3.8)$$

onde ν^0 é o coeficiente de Poisson do material.

Além da vantagem computacional deste método, citado anteriormente, ele é fácil de ser implementado. Sua grande desvantagem em relação ao modelo da homogeneização é que apresenta maior incidência de “escala de cinza”, além de ser um modelo heurístico, não representando uma microestrutura adequadamente.

Caso se aplique alguns métodos de filtragem no SIMP pode-se obter resultados tão expressivos quanto àquele gerados pelo método da homogeneização.

3.3.3 Aspectos Numéricos da Otimização Topológica

A utilização de modelos baseados em microestrutura ou baseados em modelos artificiais (como o método da homogeneização e o das densidades, respectivamente) permitiu obter soluções numéricas para os problemas de otimização. Porém, estes métodos, por si só, não asseguram uma boa qualidade nos resultados alcançados.

Para a aplicação na Engenharia, não é interessante a obtenção de soluções com grandes quantidades de elementos com grandes regiões de cinza, ou mesmo resultados que apresentem a estrutura preenchida por elementos alternados com e sem material, gerando uma imagem análoga a um tabuleiro de xadrez. Deseja-se um resultado bem definido, com os limites entre ausência e existência de material bastante claros.

Estes problemas dependem de diversos fatores, entre os quais: tipo de elemento utilizado, densidade da malha de elementos finitos, algoritmo de otimização e o modelo de material. A seguir serão apresentados os principais problemas encontrados na solução de problemas de otimização topológica: instabilidade de xadrez (ou tabuleiro), dependência de malha e escala de cinza.

3.3.3.1 Instabilidade de Xadrez

O problema da instabilidade de xadrez (“*Checkerboard*”) é caracterizado pelo surgimento de regiões onde elementos com e sem material (pretos e brancos) se alternam entre elementos vizinhos, formando uma topologia semelhante a um tabuleiro de xadrez, como mostrado na Figura 11.

Geralmente este é o primeiro problema que se depara ao implementar um algoritmo de otimização topológica, já que o surgimento da instabilidade de tabuleiro não é causado pela formulação do MOT. Sabe-se atualmente que o surgimento da instabilidade de xadrez está relacionado às ferramentas utilizadas nas aproximações do método dos elementos finitos, mais especificamente à implementação numérica que superestima a rigidez da estrutura composta pela malhas em forma de xadrez.

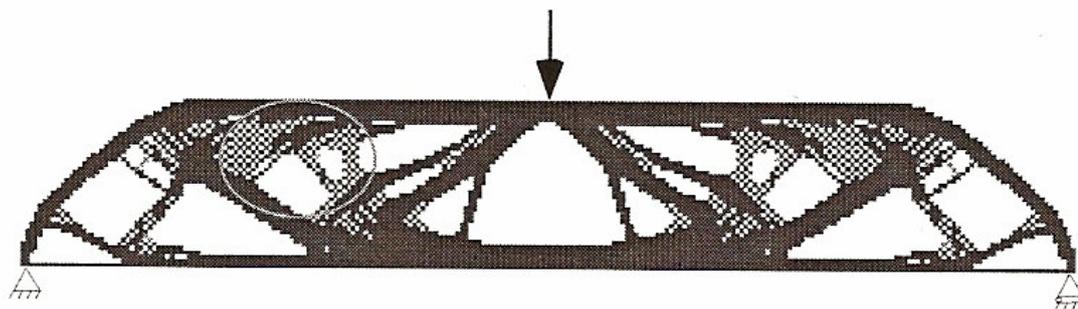


Figura 11: Exemplo de solução com instabilidade de tabuleiro (em destaque).

Jog e Haber (1996) atribuem o problema à diferença de ordem de interpolação dos campos de densidades (variáveis) e de deslocamentos, e propõem que a formulação do MOT leva a um problema similar às formulações de MEF para o escoamento de Stroke, onde se tem o campo de pressão e velocidade a serem definidos. Os autores afirmam que o problema pode ser reduzido quando são utilizadas funções de interpolação diferentes, mas de mesma ordem, para ambos os campos (densidades e deslocamentos).

Os elementos de alta ordem possuem funções de interpolação que representam melhor o campo de deslocamentos, o que permite reduzir o erro induzido aos termos de deformações de cisalhamento dos mesmos (LOPES, 2005).

Apesar da complexidade do problema de instabilidade de xadrez, existem diversas propostas de solução, sendo algumas delas, inclusive, bastante simples. Jog e Haber (1996) propõem um conjunto de testes para analisar se uma determinada combinação de interpolações de densidades e deslocamentos gera resultados estáveis ou instáveis. A primeira dela é utilizar elementos de alta ordem para representar o campo de deslocamentos, a outra, geralmente mais complicada, é aplicar métodos de filtragem ou de controle de gradiente.

É importante destacar que a utilização de elementos de alta ordem pode não evitar o aparecimento da instabilidade de xadrez para determinados valores do fator de penalização p (apud. LOPES, 2005).

O inconveniente fica por conta do aumento considerável do custo computacional necessário quando comparado à utilização de elementos de baixa ordem.

Preferem-se, então, soluções menos onerosas que utilizam elementos de baixa ordem. Desta forma utilizam-se elementos de baixa ordem aliados a métodos de filtragem ou de controle de gradiente, pois estes são de baixo custo computacional e de fácil aplicação. Basicamente os filtros tendem a amenizar a distribuição de densidades, não permitindo grandes variações da densidade entre elementos vizinhos.

A suavização da variação das variáveis de projeto nos problemas de OT pode ser efetuada através de restrições na formulação do problema de otimização, bem como através da restrição dos gradientes das variáveis de projeto (LOPES, 2005).

Vale lembrar que algumas soluções empregadas para combater a instabilidade de tabuleiro também são eficientes na prevenção de outros possíveis problemas, como para a solução da dependência de malha, que será vista adiante. Isso se deve ao fato de que o padrão geométrico do tabuleiro possui a mesma característica de oscilação brusca do campo de densidades que a solução ótima do problema discreto pode apresentar (STUMP, 2006).

Os métodos de filtragem objetivam impedir variações bruscas entre as densidades de elementos vizinhos. Lopes (2005) classifica os filtros de acordo com a forma com que os elementos vizinhos são considerados:

- filtros de vizinhança fixa: onde os elementos vizinhos são considerados aqueles que compartilham uma aresta e/ou um nó;
- filtros especiais: considera-se vizinho todos aqueles elementos que estão dentro de um raio de varredura em torno de um elemento central.

Neste trabalho será utilizado o filtro de sensibilidades, apresentado por Bendsøe (2003), que tem se mostrado bastante eficiente. Ele é puramente heurístico, mas produz resultados bastante similares àqueles obtidos por uma restrição local do gradiente das densidades. Requer pouco custo computacional adicional e possui a grande vantagem de uma fácil implementação.

Este filtro atua diretamente na distribuição dos gradientes da função objetivo $\frac{\partial C}{\partial X^e}$, de forma que, para um dado elemento “i”, o gradiente modificado da função objetivo é calculado a partir da seguinte equação:

$$\frac{\partial C}{\partial X^i} = \frac{1}{X^i \sum_{j=1}^{n_e} \hat{H}_j} \sum_{j=1}^{n_e} \hat{H}_j X_j \frac{\partial C}{\partial X^j}$$

$$\hat{H}_j = r_{\min} - \text{dist}(i, j), \quad \{j \in N \mid \text{dist}(i, j) \leq r_{\min}\}$$

onde n_e é o número total de elementos na discretização da malha, r_{\min} é o raio de atuação do filtro e $\text{dist}(i, j)$ a distância entre os centróides dos elementos “i” e “j”.

Assim, utiliza-se o valor do gradiente modificado da função objetivo para atualizar o critério da otimalidade.

3.3.3.2 Dependência de Malha

O problema de dependência de malha (“*mesh dependence*”) é caracterizado pelas diferentes estruturas finais obtidas (para o mesmo domínio fixo estendido e condições de contorno) em função da densidade da malha utilizada. A inserção de um maior número de “buracos”, sem alterar o volume de material, aumenta a eficiência da estrutura. Desta forma, quando se refina a malha com a intenção de que a definição dos contornos da estrutura melhorasse, observa-se que a topologia da estrutura se altera, aumentando seu número de membros, como mostrado na Figura 12.

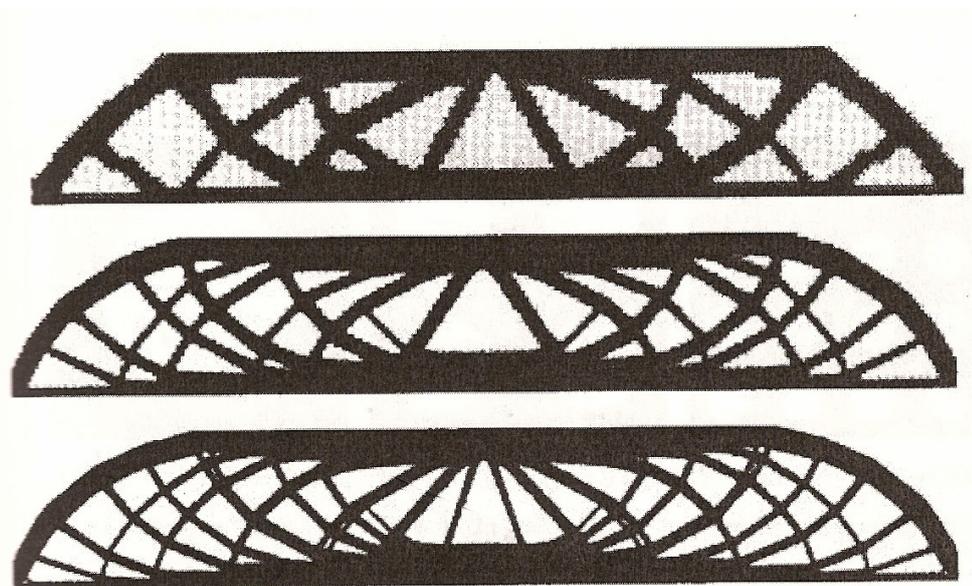


Figura 12: Dependência de malha no problema de Otimização Topológica.

Comumente divide-se o problema de dependência de malha em dois principais grupos, conforme sua origem:

- Topologia final obtida tornando-se cada vez mais complexa conforme a malha de elementos finitos vai sendo refinada. Neste caso a função objetivo é otimizada (minimizada ou maximizada) com o refinamento da malha;
- O problema não apresenta unicidade de solução, ou seja, obtém-se diferentes soluções ótimas com o mesmo valor da função objetivo. Como exemplo pode-se citar o caso de uma barra sob tração uniaxial onde as soluções de uma única barra de maior diâmetro ou de diversas barras de diâmetro menor, porém com a mesma área da barra única, apresentam a mesma rigidez, como mostrado na Figura 13 (SIGMUND; PETERSSON, 1998).

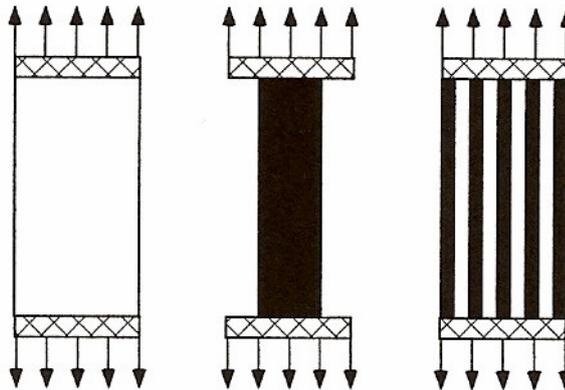


Figura 13: Barra sob tração uniaxial.

Os problemas de dependência de malha são, normalmente, de difícil solução. Contudo podem-se aplicar técnicas que possibilitam a redução de tal fenômeno. Estas consistem, basicamente, ou em adicionar restrições ao problema de otimização, reduzindo diretamente o número de possíveis soluções, ao aplicando-se filtros na implementação numérica (BENDSØE, 2003). Algumas destas técnicas serão apresentadas a seguir, de forma bastante resumidas:

a) Controle de Perímetro:

O método consiste em incluir restrições aos “furos” da estrutura, controlando sua quantidade e tamanho através do valor máximo do perímetro (Figura 14). A princípio, este método é a única regularização aplicável ao problema discreto, portanto é um método necessário para se utilizar otimização inteira no problema de otimização topológica (STUMP, 2006).

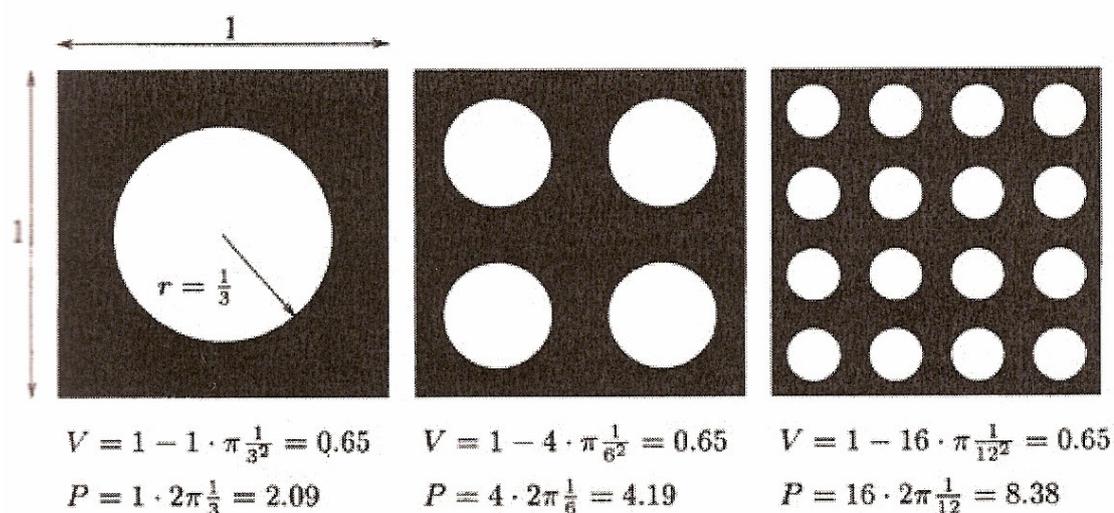


Figura 14: Exemplo de como furos menores podem aumentar o perímetro para um dado volume. V é o volume e P é o perímetro interno dos furos.

Considerando-se novamente o problema das barras sob tração uniaxial citadas anteriormente, a proposta do controle de perímetro é bastante interessante, pois permite controlar, de certa forma, o número de barras na estrutura otimizada, o que, em alguns casos, pode reduzir o custo de fabricação.

Como destaque negativo da restrição de perímetro pode-se ressaltar que a unicidade de solução não é garantida, pois o problema passa a possuir múltiplos mínimos locais.

b) Restrição Local do Gradiente das Densidades:

Consiste em aplicar uma restrição local que impede o surgimento de oscilações bruscas no campo de densidades, segundo a equação:

$$\left| \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right| \leq G \quad (3.9)$$

A equação acima determina que a distância entre dois elementos sem material, ou seja, vazios, deve ser superior a $2/G$.

Segundo Sigmund e Petersson (1998), esta técnica é capaz, além de evitar o problema de dependência de malha, também o de instabilidade de xadrez. Por outro lado, o grande número de restrições locais inseridas ao problema de otimização é difícil de ser tratado, além de aumentar consideravelmente o custo computacional, já que a quantidade de restrições dobra neste caso.

c) Restrição Global do Gradiente das Densidades:

Este método consiste na inserção da seguinte restrição global ao método de otimização topológica:

$$\|\rho\|_H = \left(\int_{\Omega} (\rho^2 + \|\nabla\rho\|^2) d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \leq M \quad (3.10)$$

Note que para qualquer discretização de elementos finitos da estrutura Ω pode-se determinar um limite M para o módulo de ρ de tal forma que a restrição permanece inativa.

A implementação deste método requer bastante cuidado na determinação de M , que deve ser determinado de forma experimental. Esta restrição também pode ser formulada sem o termo ρ^2 da equação (3.10), de tal maneira que a restrição se torna bastante semelhante à restrição de perímetro.

3.3.3.3 Escala de Cinza

Este problema já foi mencionado anteriormente neste trabalho ao explicar o Método das Densidades. A escala de cinza (“*gray scale*”) consiste em regiões compostas por elementos de pseudo-densidades intermediárias que aparecem ao se utilizar a formulação com variáveis contínuas. Este problema está ligado diretamente à microestrutura escolhida. Como já visto, no SIMP é utilizado o fator de penalização p para tentar reduzir a incidência de escala de cinza.

A escolha adequada do fator de penalização é importante para não retornar ao problema de não-existência da solução, como ocorre quando p é escolhido elevado demais, já que a medida que p aumenta, o problema “relaxado” se aproxima novamente do problema discreto.

Para amenizar os efeitos da aplicação do fator de penalização, é feito o método da continuação, ao longo de um processo iterativo. Este método se inicia com $p = 1$ e, após o método atingir a convergência, é aumentado em uma unidade, com o intuito de eliminar regiões com densidades intermediárias. Obtém-se uma segunda solução, diferente da primeira, que corresponde a um mínimo local próximo ao global, mas com menos regiões de densidade intermediárias.

Este processo é repetido até que se atinja o limite superior, que, segundo Bendsøe (BENDSØE, 2003), é aproximadamente $p = 3$, para o caso bidimensional, como mostrado na equação 3.7 considerando-se $\nu^0 \cong 0,3$.

4 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

4.1 Minimização da Flexibilidade Média

Considere um corpo tridimensional genérico constituído por um material elástico linear ocupando um domínio Ω^{mat} que é parte de um grande domínio Ω em \mathfrak{R}^3 . Suponha que são aplicadas forças concentradas \mathbf{f} em qualquer região do corpo e forças distribuídas \mathbf{t} ao longo de sua superfície Γ_t . Na região determinada por Γ_u o corpo está restrito, como mostrado na Figura 15.

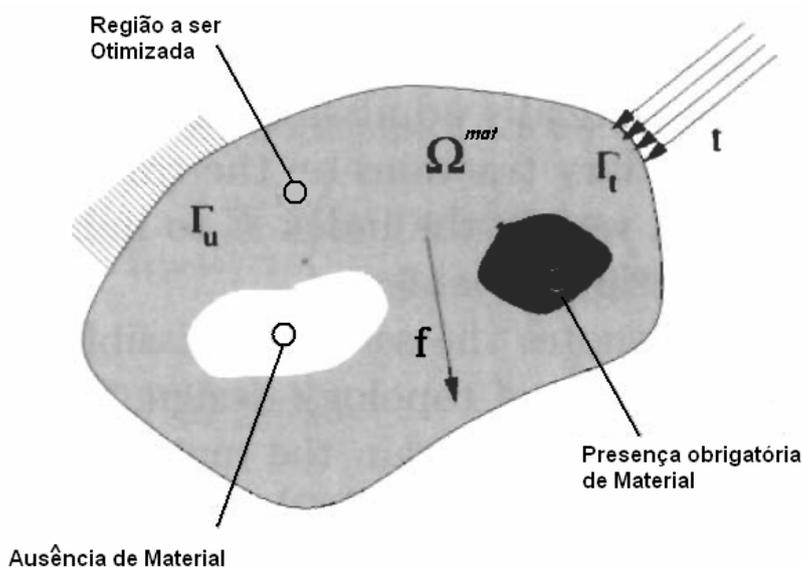


Figura 15: Domínio a ser otimizado.

A partir das equações (2.1) e (2.2) introduzidas no capítulo 2, pode-se escrever o Princípio da Mínima Energia Potencial Total de forma genérica, mostrada na equação (4.1):

$$\Pi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \mathbf{u} d\Gamma_t \quad (4.1)$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ é a deformação, função dos deslocamentos \mathbf{u} e \mathbf{v} , e \mathbf{E} caracteriza a rigidez da estrutura.

A primeira integral da equação (4.1) representa a energia de deformação, enquanto que a soma das duas últimas integrais refere-se ao trabalho das forças externas, sendo que o segundo termo refere-se às forças de superfície e o terceiro, às forças de corpo. Estas forças atuantes geram deformações no corpo, que são armazenadas na forma de energia. Este fenômeno é representado pelo Princípio da Mínima Energia Potencial Total.

Ou seja, minimizando a energia potencial armazenada tem-se a condição de deformações mínimas, e assim assegura-se o equilíbrio em toda a estrutura, bem como qualquer uma de suas partes. Para isso calcula-se o funcional da energia em relação ao campo de deslocamentos e iguala-se a zero, visto na equação (4.2).

$$\frac{\Pi(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{u}} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot (\partial \mathbf{u}) \cdot \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f}(\partial \mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{t}(\partial \mathbf{u}) d\Gamma_t = 0 \quad (4.2)$$

Com os conceitos acima apresentados pode-se escrever a formulação de minimização da flexibilidade (ou seja, minimização da energia potencial total) de uma estrutura mecânica sujeita a dadas restrições. Este problema também pode ser visto como uma tentativa de maximizar a rigidez da estrutura. Bendsøe (BENDSØE, 2003) propõe escrever o problema da seguinte forma:

$$\max_{\mathbf{E} \in \mathbf{E}_{Adm}} \quad \min_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \left\{ \frac{1}{2} a_E(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - b(\mathbf{u}) \right\}$$

tal que

$$\int_{\Omega} \eta(\mathbf{X}) d\Omega \leq \bar{V}$$

$$0 < \eta_{\min} \leq \eta \leq \eta_{\max}$$

onde \bar{V} corresponde à restrição de volume máximo adotado no projeto e $\eta(\mathbf{X})$ é a variável do projeto restrita por limites superiores e inferiores definidos pelo projeto. No problema em questão, de otimização topológica, esta variável é a pseudo-densidade, que irá determinar se um elemento será composto por presença ou ausência de material. Vale lembrar que esta variável depende do modelo de material adotado e que, neste estudo, será o SIMP.

$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega$ é a forma bilinear correspondente à energia de deformação, enquanto que $b(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma_f} \mathbf{t} \mathbf{u} d\Gamma_f$ é o termo linear referente ao trabalho das forças externas.

A formulação apresentada anteriormente é válida para sistemas contínuos. Como será utilizado o MEF no processo de otimização, deve-se considerar o domínio discretizado, de forma que as equações apresentadas não são adequadas para a solução do problema. Considerando a discretização do domínio Ω em n_e elementos finitos de maneira que

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n_e} \Omega_i^e \quad (4.3)$$

o problema de minimização da flexibilidade média sujeita à restrição de volume pode ser escrita de forma matricial:

$$\begin{aligned}
 & \min_{\mathbf{X}} C = \mathbf{f}^T \mathbf{u} \\
 & \text{tal que} \\
 & f_v \geq \frac{V(\Omega)}{V_0} \\
 & 0 \leq \mathbf{X}_{\min} \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{X}_{\max} \\
 & \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}
 \end{aligned}$$

onde f_v é a fração volumétrica, ou seja, a fração de material que se quer manter no domínio fixo estendido, e V_0 , o volume inicial da estrutura. A flexibilidade média da estrutura é dada por:

$$C = \mathbf{f}^T \mathbf{u} = \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} = \sum_{e=1}^{n_e} (\mathbf{u}^e)^T \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e \quad (4.4)$$

Com a definição da equação da flexibilidade média o conceito da função objetivo fica bastante claro: deseja-se minimizar a flexibilidade média alterando a quantidade de material X_e de cada elemento. Como visto anteriormente, a variável X_e , denominada pseudo-densidade do elemento, é determinada pelo modelo de material utilizado e compõe sua matriz de rigidez \mathbf{K}_e no modelo de elementos finitos. O conjunto das matrizes de rigidez dos elementos compõe a matriz de rigidez da estrutura \mathbf{K} . Como será utilizado o método SIMP, deve-se reescrever a equação (4.4) considerando as variáveis de projeto, as pseudo-densidades, com a devida penalização:

$$C = \sum_{e=1}^{n_e} (X^e)^p (\mathbf{u}^e)^T \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e \quad (4.5)$$

A restrição de volume é escrita igualmente à formulação da restrição de volume para o meio contínuo, porém, adotando-se o volume do domínio discretizado, dado por $V(\Omega) = \sum_{e=1}^{n_e} X^e v^e$:

$$f_v \geq \frac{V(\Omega)}{V_0} \quad (4.6)$$

4.2 Critério da Otimalidade

O critério da otimalidade é um método específico de programação desenvolvido nos anos 60 por Karush-Kuhn-Tucker para a resolução de problemas de otimização estrutural.

Por ser um método semi-empírico, não apresenta nenhuma justificativa matemática na atualização de variáveis. O ponto ótimo é escolhido (encontrado) através da verificação de diversos pontos no espaço. Sua grande vantagem, principalmente em relação aos métodos probabilísticos, é que, apesar de ser semi-empírico, é extremamente eficiente do ponto de vista computacional, além de sua fácil implementação. Por outro lado, o método é específico, necessitando ser

desenvolvido para cada tipo de problema, diferentemente dos métodos de programação matemática, que podem ser programados de forma genérica. Portanto, caso se deseje modificar a função objetivo ou até mesmo algumas restrições, este deve ser alterado.

Por ser considerado de fácil implementação e por já existirem trabalhos dentro do grupo de estudos de Otimização Topológica coordenado pelo Prof. Emílio N. Silva, como o realizado por Lopes (LOPES, 2005), o critério da otimalidade foi escolhido para aplicação neste trabalho.

Relembrando o problema genérico de otimização apresentado no tópico (3.1)

$$\min_{\mathbf{X} \in \mathfrak{R}^n} \{f(\mathbf{X}) \mid h(\mathbf{X}) = 0, g(\mathbf{X}) \leq 0\}$$

tal que

$$\begin{array}{lll} g_i(\mathbf{X}) \leq 0 & i = 1, \dots, I & \text{Restrição de desigualdade} \\ h_k(\mathbf{X}) = 0 & k = 1, \dots, K & \text{Restrição de igualdade} \\ \mathbf{X}_{MIN_j} \leq \mathbf{X}_j \leq \mathbf{X}_{MAX_j} & & \text{Restrição lateral} \end{array}$$

pode-se escrever o Lagrangeano do problema:

$$L = f(\mathbf{X}) + \sum_{k=1}^K \lambda_k h_k(\mathbf{X}) + \sum_{i=1}^I \lambda_i (g_i(\mathbf{X}) - \bar{g}_i) \quad (4.7)$$

λ_k : é o vetor de multiplicadores de Lagrange para restrição de igualdade;

λ_i : é o vetor de Lagrange para restrição de desigualdade;

\bar{g}_i : é o valor da i-ésima restrição de desigualdade.

O ponto ótimo é determinado quando a derivada da função de Lagrange é igual a zero para qualquer variável j .

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{X}_j} = \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}_j} + \sum_{k=1}^K \lambda_k \frac{\partial h_k(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}_j} + \sum_{i=1}^I \lambda_i \frac{\partial g_i(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}_j} = 0 \quad (4.8)$$

tal que:

$$\begin{aligned} g_i(\mathbf{X}) - \bar{g}_i &= 0 \\ h_k(\mathbf{X}) &= 0 \\ \lambda_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Se aplicarmos tal conceito especificamente para o problema de otimização topológica para minimizar a deflexão, como proposto neste trabalho, como restrição a redução de massa, tem-se:

$$L = C + \lambda \cdot (V - f_V V_0) + \lambda_1^T \cdot (\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{f}) + \sum_{e=1}^{n_e} \lambda_2^e (X_{\min} - X^e) + \sum_{e=1}^{n_e} \lambda_3^e (X^e - X_{\max}) \quad (4.9)$$

com

λ : multiplicador de Lagrange para a restrição de volume;

λ_1^T : multiplicador de Lagrange para a condição de equilíbrio;

λ_2^e e λ_3^e : multiplicadores de Lagrange para o limite inferior e superior da variável de projeto.

Para determinar o ponto ótimo deve-se derivar a equação (4.9) com relação à variável de projeto X^e . Vale notar que a única variável dependente de X^e é o volume ($V = f(X^e)$), de forma que o problema fica bastante simplificado:

$$\frac{\partial L}{\partial X^e} = \frac{\partial C}{\partial X^e} + \lambda \frac{\partial V}{\partial X^e} + \lambda_2^e + \lambda_3^e \quad (4.10)$$

Além do mais, nas densidades intermediárias os limites superiores e inferiores da variável de projeto não estão ativos, obviamente, e pode-se considerar os multiplicadores de Lagrange λ_2^e e λ_3^e nulos.

$$\frac{\partial L}{\partial X^e} = \frac{\partial C}{\partial X^e} + \lambda \frac{\partial V}{\partial X^e} \quad (4.11)$$

Como $C = \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u}$, pode-se expandir a equação (4.11) e aplicar a “regra da cadeia”. v^e é o volume do elemento “ e ”. Reagrupando os termos resulta:

$$\frac{\partial L}{\partial X^e} = \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X^e} \mathbf{u} + (2\mathbf{u}^T \mathbf{K}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X^e} + \lambda v^e \quad (4.12)$$

Sabendo que $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}$, pode-se derivar ambos os lados em função da pseudo-densidade X^e , e aplicar, novamente, a “regra da cadeia” do lado esquerdo. Chega-se à seguinte equação:

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X^e} \mathbf{u} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X^e} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial X^e} \quad (4.13)$$

Isolando o termo $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X^e}$ da equação (4.13) e já substituindo na equação (4.12):

$$\frac{\partial L}{\partial X^e} = \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X^e} \mathbf{u} + (2\mathbf{u}^T \mathbf{K}) \left(\mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial X^e} - \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X^e} \mathbf{u} \right) + \lambda v^e \quad (4.14)$$

Reagrupando os termos:

$$\frac{\partial L}{\partial X^e} = 2\mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial X^e} - \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X^e} \mathbf{u} + \lambda v^e \quad (4.15)$$

A equação (4.15) é de extrema importância neste trabalho. O primeiro termo do lado direito representa a parcela da derivada relativa às forças de campo, enquanto que o segundo termo, a parcela da equação referente à flexibilidade da estrutura. Neste trabalho as forças de campo são negligenciadas. Esta hipótese deve ser revista caso se queira aplicar tal metodologia a estruturas cujo comprimento for muito maior do que sua altura, de forma que o próprio peso da estrutura cause deflexões significativas, ou para estruturas que serão submetidas a acelerações fortes, como rotores ou eixos desbalanceados, onde o próprio movimento pode causar deformações na estrutura.

No caso de problemas de Otimização Topológica onde o carregamento é desprezado o primeiro termo é zero. Neste caso a derivada Lagrangeana é negativa e a convergência da função objetivo é monotônica. Este resultado é muito coerente, do ponto de vista físico, uma vez que a flexibilidade da estrutura diminui com o aumento de material na estrutura (LOPES, 2005).

Se for inserido na equação (4.15) também o modelo de material SIMP, proposto neste trabalho, como mostrado na equação (4.5), e já assumindo a não-existência de forças de campo, tem-se:

$$\frac{\partial L}{\partial X^e} = -p \cdot (X^e)^{p-1} \left((\mathbf{u}^e)^T \mathbf{K}_0 \mathbf{u}^e \right) + \lambda v^e \quad (4.16)$$

O ponto ótimo é determinado pela igualdade da derivada do lagrangeano em relação à pseudo-densidade a zero para cada elemento “ e ”.

$$\frac{p \cdot (X^e)^{p-1} \left((\mathbf{u}^e)^T \mathbf{K}_0 \mathbf{u}^e \right)}{\lambda v^e} = 1 \quad (4.17)$$

A equação (4.17) determina que a energia potencial é constante e igual a 1 em todo o domínio fixo estendido para os elementos que possuem densidades intermediárias. Para elementos cuja densidade $X^e = X_{\min}^e$ a energia potencial é menor que a unitária, e para $X^e = X_{\max}^e$, é maior (BENDSØE, 2003).

Assim, Bendsøe (BENDSØE, 2003) propõe um modelo heurístico para a determinação da densidade do material. O valor da densidade de material do elemento na iteração $(k+1)$ pode ser obtido com o uso da seguinte expressão:

$$X_{k+1}^e = \begin{cases} \max\{(X_k^e - \zeta), X_{\min}\} & \text{se } X_k^e \cdot M_k^e \leq \max\{(X_k^e - \zeta), X_{\min}\} \\ \mathbf{X}_k^e \cdot M_k^e & \text{se } \max\{(1 - \zeta) \cdot X_k^e, X_{\min}\} \leq X_k^e \cdot M_k^e \\ & \leq \min\{(1 + \zeta) \cdot X_k^e, X_{\max}\} \\ \min\{(X_k^e + \zeta), X_{\max}\} & \text{se } X_k^e \cdot M_k^e \geq \min\{(X_k^e + \zeta), X_{\max}\} \end{cases} \quad (4.18)$$

onde M_k^e é dado por:

$$M_k^e = \left\{ \frac{p \cdot (X^e)^{p-1} \left((\mathbf{u}^e)^T \mathbf{K}_0 \mathbf{u}^e \right)}{\lambda v^e} \right\}^\kappa$$

onde k é o índice da iteração, ζ é o valor do limite móvel e κ é o fator de amortecimento do algoritmo de otimização. Tanto ζ como κ controlam as modificações que podem acontecer em cada iteração e eles devem ser ajustados para uma boa eficiência do método. Valores típicos para ζ e κ são 0.2 e 0.5, respectivamente.

Note que a atualização da pseudo-densidade (X_{k+1}^e) depende do valor presente do multiplicador de Lagrange λ , portanto este deve ser ajustado em um “loop” interno ao processo iterativo da variável de projeto para satisfazer a restrição de volume. Isso ocorre porque ao longo do processo iterativo para determinar as pseudo-densidades, ou seja, conforme as variáveis do projeto são atualizadas, o volume da estrutura vai decrescendo, até que a restrição de volume esteja plenamente satisfeita. Portanto, para a determinação do multiplicador de Lagrange é comumente utilizado o método da dicotomia ou o Método de Newton.

O algoritmo descrito acima está sendo empregado com muito sucesso em diversos problemas estruturais de otimização topológica e é considerado como um método efetivo (apesar de heurístico) na solução de problemas de larga escala. Isso se dá pelo fato de cada variável ser atualizada independentemente das outras variáveis, com exceção da atualização de volume que deve respeitar a restrição imposta.

5 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

5.1 Introdução

Nos capítulos anteriores foram apresentados os conceitos básicos da teoria de Otimização Topológica. Com o intuito de validar tal metodologia, implementou-se uma formulação de otimização topológica a uma estrutura bastante simples submetida a forças concentradas. Considerou-se o problema clássico de flexibilidade média onde o objetivo encontrar a melhor distribuição de massa que minimiza a flexibilidade da estrutura condicionada à restrição de massa. Como sugerido nos capítulos anteriores, o algoritmo de otimização combina o método de elementos finitos com o critério da otimalidade.

A rotina foi implementada com a linguagem APDL do ANSYS, software comercial amplamente difundido no mercado. Este, por sua vez, foi utilizado para a resolução do método dos elementos finitos, de forma que não foi necessário programar rotinas para resolução do MEF. Deve-se também destacar que o próprio ANSYS é responsável pelo pós-processamento da otimização, capaz de elaborar gráficos claros e bem estruturados.

Por outro lado, a opção do uso de um software comercial de código fonte fechado nos deixa limitados aos recursos por ele disponibilizados. O ANSYS, por exemplo, não disponibiliza algumas grandezas fundamentais para a solução do problema, como a matriz de rigidez, força nodal referente a um determinado elemento, etc. de forma que “jogos algébricos” são necessários para conseguir tais propriedades.

Na Figura 16 é apresentado o fluxograma das etapas do processo de otimização implementada nesta primeira parte do trabalho, que tem como objetivo apenas validar os conceitos apresentados. Vale notar que é muito semelhante àquela apresentada na Figura 9, com a diferença de não possuir o filtro.

A seguir cada uma das etapas será explicada detalhadamente.

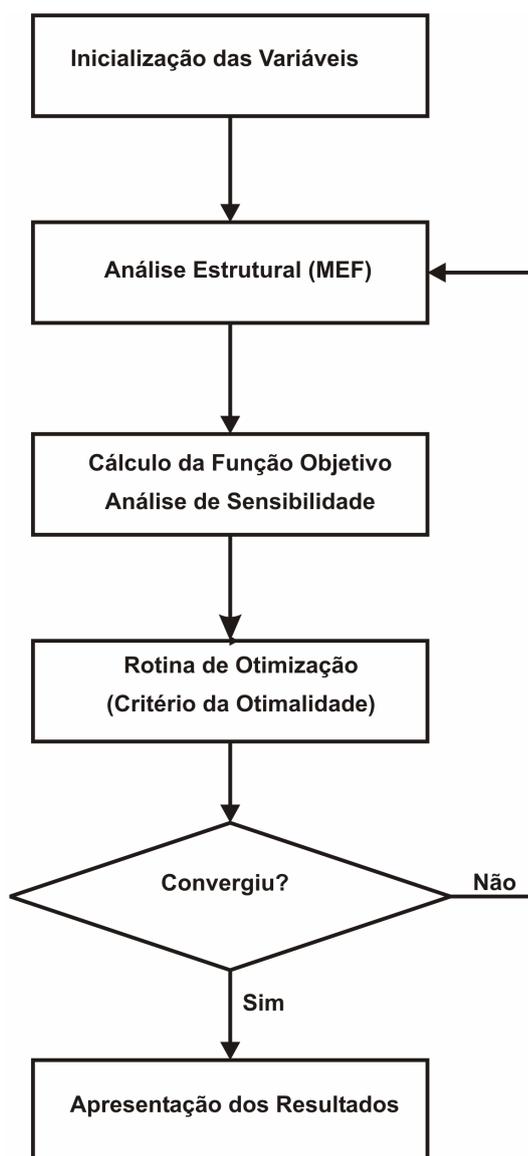


Figura 16: Fluxograma do Algoritmo de Otimização.

5.1.1 Inicialização das Variáveis

Determina o valor de algumas variáveis básicas para a simulação tais como:

- Modulo de elasticidade (E) do material base;
- Coeficiente de Poisson (ν);
- Restrição de volume;
- Fator de penalização (p);
- Número máximo de iterações no processo de otimização;

Na inicialização das variáveis também é feita a definição do material. Neste trabalho foram criados 1000 materiais com diferentes composições do módulo de elasticidade, ou seja, materiais que possuíam de $0,001 \cdot E$ até E . Estas diferentes composições de materiais correspondem ao módulo de elasticidade multiplicado pela pseudo-densidade. A este será aplicado o fator de penalização, como proposto pelo SIMP, para reduzir o número de densidades intermediárias, na tentativa de se obter soluções binárias para os elementos, ou seja, ele deve possuir material ou apresentar ausência dele.

Nesta etapa também é importado o modelo de elementos finitos. Este modelo contém a geometria da estrutura, as condições de contorno, os carregamentos aplicados à estrutura e também a malha de elementos finitos. Vale lembrar que a geometria foi criada através de comandos APDL, mas o software também permite que geometrias sejam importadas diretamente de CADs.

Na inicialização das variáveis as propriedades do modelo, tais como número de elementos e de nós, são lidas e armazenadas em variáveis. Vetores, que serão utilizados no método de otimização, são alocados com dimensões adequadas ao tamanho do modelo.

Finalmente, define-se a pseudo-densidade de cada elemento. Como já mencionado, inicialmente considera-se uma distribuição homogênea da densidade, de forma que esta vai sendo modificada ao longo das iterações do processo de otimização. Isso é feito para garantir que, inicialmente, o modelo satisfaça a restrição de volume.

5.1.2 Análise Estrutural

O modelo importado pela rotina de otimização já está com a malha gerada e com as forças e condições de contorno definidas, como explicado anteriormente. Basta, portanto, resolver as equações do MEF, o que é realizado diretamente pelo ANSYS de forma bastante eficaz e rápida.

5.1.3 Cálculo da Função Objetivo

Consiste na avaliação e na determinação da sensibilidade da função objetivo. Como dito anteriormente, muitos dos parâmetros necessários ao longo da análise não estão disponíveis de forma direta pelo software. Esta é uma dificuldade que se deparou ao tentar calcular a função objetivo, já que não se tem as matrizes de rigidez dos elementos. Para contornar a situação, foi utilizada a função “SENE” (ANSYS, 2001) do ANSYS que fornece a energia potencial da estrutura. Multiplicando-a por dois obtém-se a flexibilidade da estrutura, já que esta é o dobro da energia potencial. Finalmente, a energia potencial da estrutura é a somatória da energia potencial dos elementos.

5.1.4 Rotina de Otimização

Aplicam-se, eventualmente, filtros, que devem atuar diretamente no gradiente da função objetivo. Nesta etapa também é aplicado o critério da otimalidade, onde o novo vetor pseudo-densidade é calculado, como mostrado na equação (4.18).

5.1.5 Análise da Convergência

Verifica-se a convergência do processo iterativo. O critério de parada é definido pelo usuário e é definido pela diferença entre a densidade de um elemento em duas iterações consecutivas. Vale lembrar que quanto mais rigoroso este critério, maior será o tempo de processamento, já que mais iterações serão necessárias para se atingir a convergência. Desta forma, deve-se definir cuidadosamente o critério de parada, levando-se em conta não somente a precisão necessária, mas também o tempo necessário para que as iterações sejam executadas.

5.1.6 Pós-Processamento

Apresentação dos resultados. Nesta etapa é elaborada uma figura com a distribuição das densidades e um gráfico com a função objetivo em cada iteração.

5.2 Exemplo de Aplicação

Até agora foram introduzidos diversos conceitos fundamentais para a aplicação de métodos de otimização topológica, bem como possíveis dificuldades encontradas ao implementar tal método. Neste capítulo foi proposto um fluxograma de um processo de otimização topológica usando MEF e o algoritmo de otimização. Será visto agora um exemplo de aplicação de otimização topológica da estrutura com o intuito de validar toda a metodologia apresentada.

Foi adotada uma estrutura bastante simples: uma placa plana quadrada, engastada em um dos lados. Em um dos cantos da placa oposto ao engaste, foi utilizado um apoio simples, enquanto que no outro foi aplicada uma força perpendicular à placa, como pode ser visto na Figura 17.

O que se deseja observar é como o material é distribuído na placa quando se deseja minimizar a flexibilidade média da estrutura respeitando a restrição volumétrica, e notar que esta distribuição varia se a posição de aplicação da força ou a restrição de volume, por exemplo, forem alteradas. Para isto, será aplicada, em um segundo caso, uma força na borda da placa entre o apoio simples e o engaste, como mostrado na Figura 18.

Para ambos os casos foram adotadas as propriedades do aço carbono: módulo de elasticidade $E = 210GPa$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. Foi empregado o método das densidades com penalização, o SIMP, com fator de penalização $p = 3$. As placas são quadradas com lado de $2m$ e foram discretizadas com 640 elementos quadrados, cada um com $0,025m$ de comprimento.



Figura 17: Representação da placa plana sujeita a uma força.

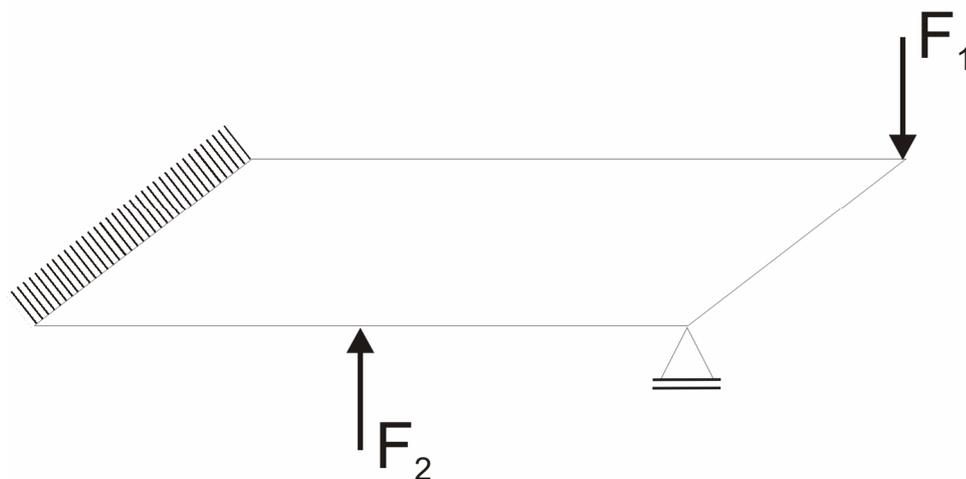


Figura 18: Representação da placa plana sujeita a duas forças.

Na Figura 19 é apresentado o modelo gerado em ANSYS, já discretizado. As condições de contorno estão definidas e podem ser observadas na imagem, tanto no lado esquerdo da placa como também no canto inferior direito. A força aplicada também pode ser observada pela “cruz” em vermelho no canto superior direito, caracterizando uma força aplicada perpendicular à vista do desenho, ou seja, uma força normal à placa.

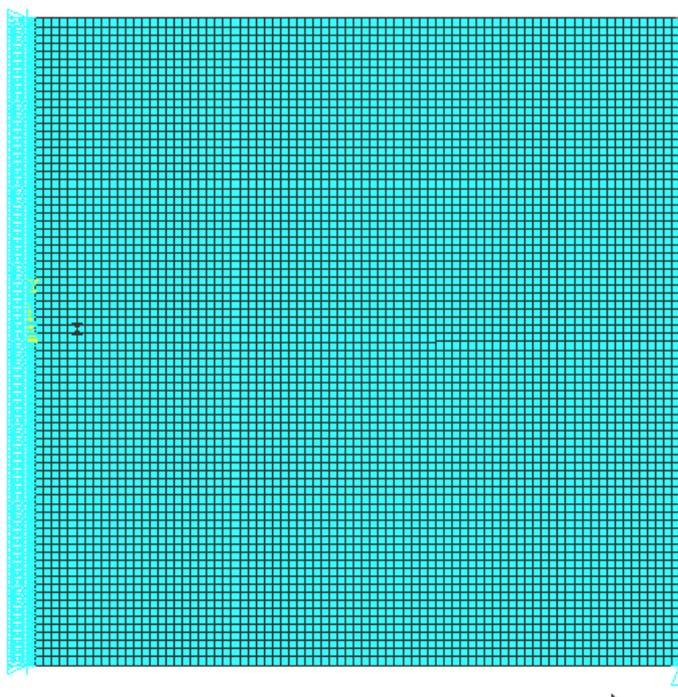


Figura 19: Modelo da placa plana discretizada.

5.2.1 Resultados: Placa Submetida a uma Força.

Primeiramente foi simulada a placa plana sujeita a uma única força, com $F_1 = 10kN$ e o volume restrito a 40% do volume inicial. Os gráficos a seguir representam a evolução do processo de otimização. O número máximo de iterações estipulado foi 30, mas caso o critério de convergência estabelecido (critérios de parada) seja atingido antes do número máximo de iterações, o algoritmo é finalizado. Cada uma das figuras representa a topologia obtida ao final de 5 iterações. A escala colorida representa o valor da pseudo-densidade, ou seja, defini quais as regiões da placa que apresentarão ausência de material e quais serão preenchidas. Vale lembrar que densidades intermediárias não são desejáveis, e estas podem ser reduzidas com o emprego do fator de penalização proposto pelo SIMP.

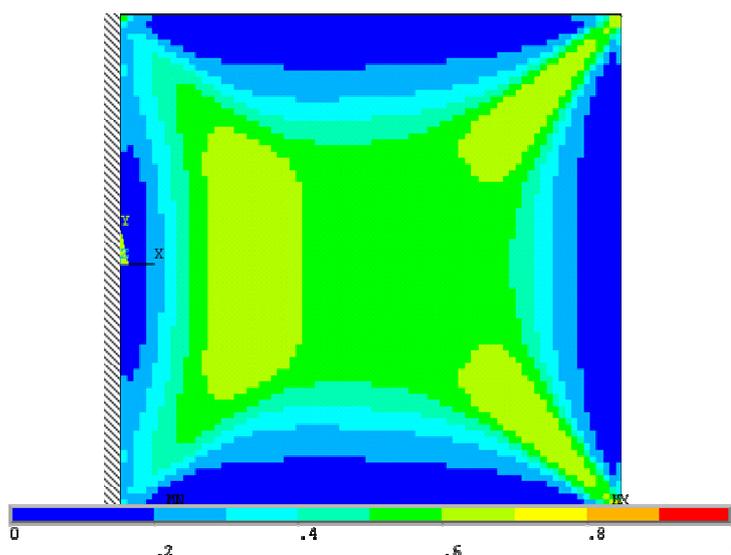


Figura 20: Distribuição de massa após 5 iterações.

A Figura 20 apresenta a distribuição de massa obtida pelo método de otimização após 5 iterações. Vale lembrar que se considera inicialmente distribuição homogênea de massa, ou seja, parte-se de pseudo-densidade igual para todos os elementos, e esta deve assumir, de início, o mesmo valor da restrição volumétrica. No exemplo aqui apresentado, a restrição volumétrica é de 40% do volume inicial, de forma que a pseudo-densidade é 0,4 para todos os elementos. Neste exemplo foi adotado limite móvel $\zeta = 0,05$, o que significa que a cada iteração a pseudo-

densidade pode ser incrementada (ou reduzida) em 0,05. Vale notar que após a 5ª iteração o valor máximo da pseudo-densidade é 0,65, o que corresponde à cor verde clara, e que o valor mínimo tangível é 0,15, correspondente à cor azul escuro.

Já ao final da décima iteração, o valor máximo da pseudo-densidade é 0,9, correspondente à cor laranja, enquanto que o mínimo é zero, como pode ser observado na Figura 21.

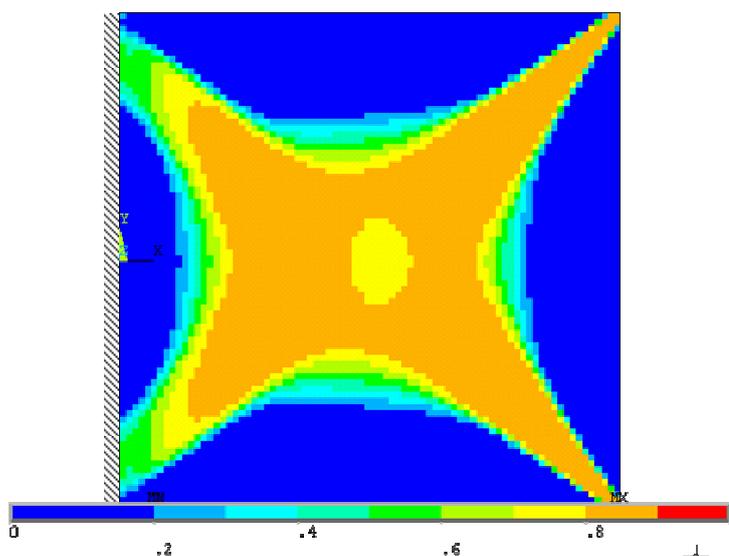


Figura 21: Distribuição de massa após a 10ª iteração.

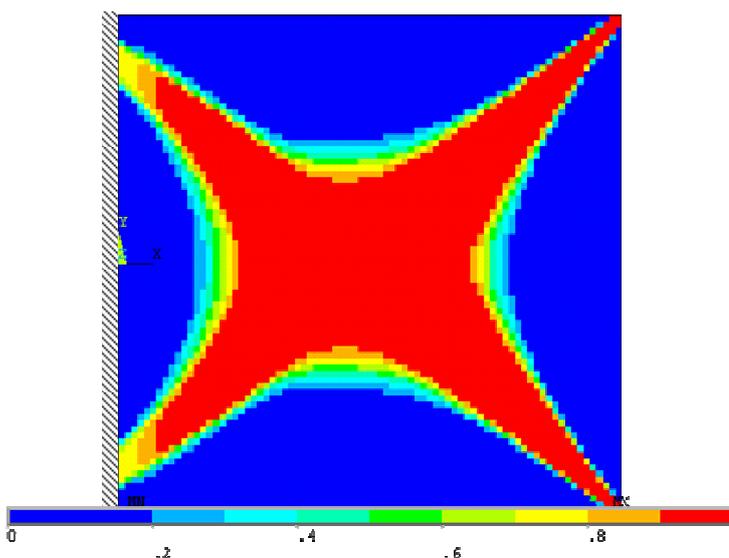


Figura 22: Distribuição de massa após a 15ª iteração.

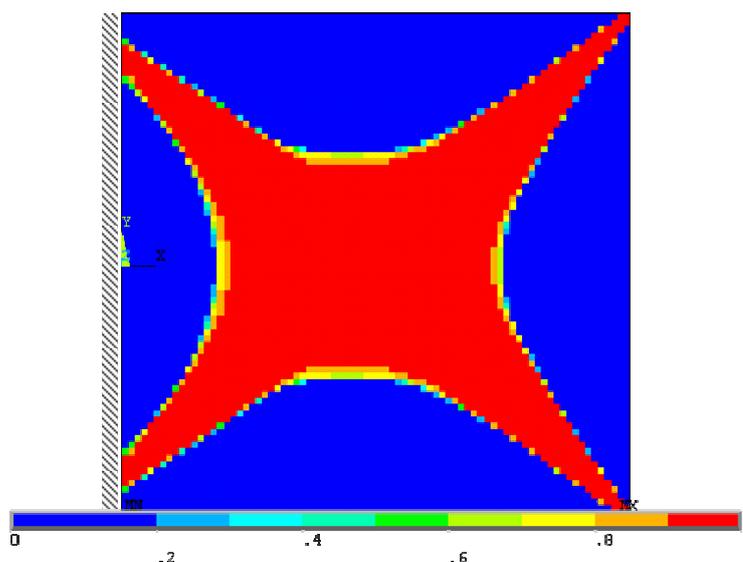


Figura 23: Distribuição de massa após a 20ª iteração.

Vale notar que a partir da 15ª iteração, aproximadamente, a forma da placa otimizada pouco se altera. Basicamente a otimização vai reduzindo a quantidade de elementos que apresentam pseudo-densidades intermediárias (entre zero e um).

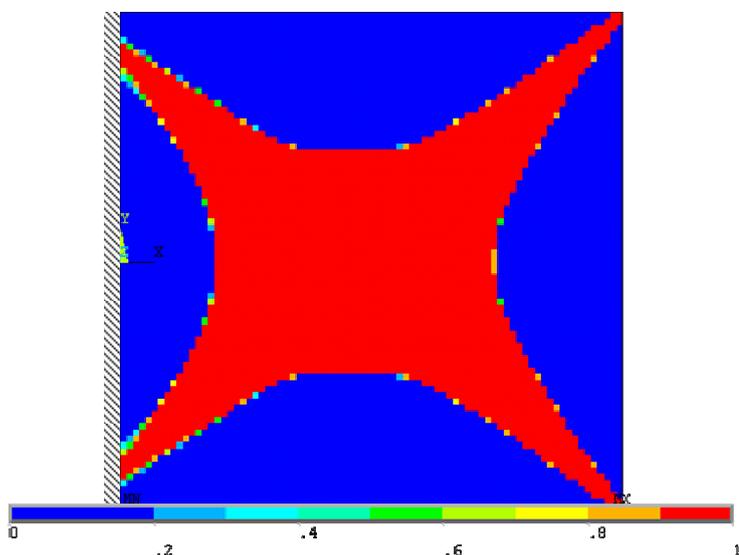


Figura 24: Distribuição de massa após a 25ª iteração.

Se tratando de um exemplo bastante simples, o resultado obtido não pode ser considerado surpreendente, mas sim, coerente e intuitivo. Como a aplicação da força e o apoio simples estão localizados nos cantos opostos ao engaste da placa, era de se esperar que as regiões do engaste mais próximas aos cantos fossem mais solicitadas,

ou seja, regiões opostas à aplicação da força. Assim, parte da região engastada apresenta ausência de material, e a estrutura ótima obtida é praticamente simétrica, como observado na Figura 25.

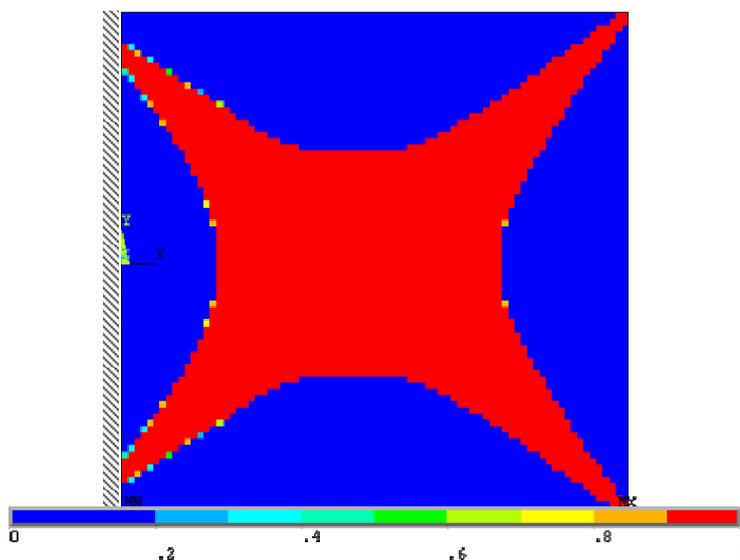


Figura 25: Estrutura final obtida.

A Figura 26 apresenta a curva de convergência da função objetivo. Vale notar que a partir da 15ª iteração a função pouco se altera, como já foi observado. A flexibilidade média da estrutura é apresentada em $N \cdot m$.

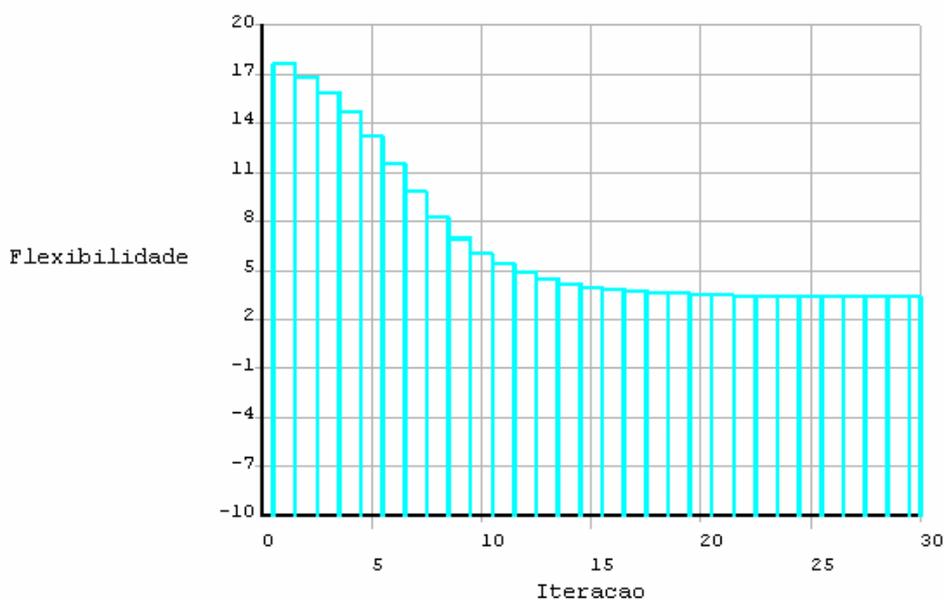


Figura 26: Curva de convergência da função objetivo.

5.2.2 Resultados: Placa Submetida a duas Forças.

O objetivo principal deste exemplo é mostrar que o algoritmo implementado é genérico, ou seja, pode ser usado para diferentes estruturas. Desta forma, uma segunda força foi aplicada na borda da placa entre o apoio simples e o engaste. O algoritmo de otimização utilizado foi o mesmo, somente alguns parâmetros foram alterados. Foi adotado $F_1 = 8kN$, $F_2 = 0,8 \cdot F_1 = 6,4kN$ e a mesma estrutura foi otimizada para 30%, 40% e 50% de restrição volumétrica.

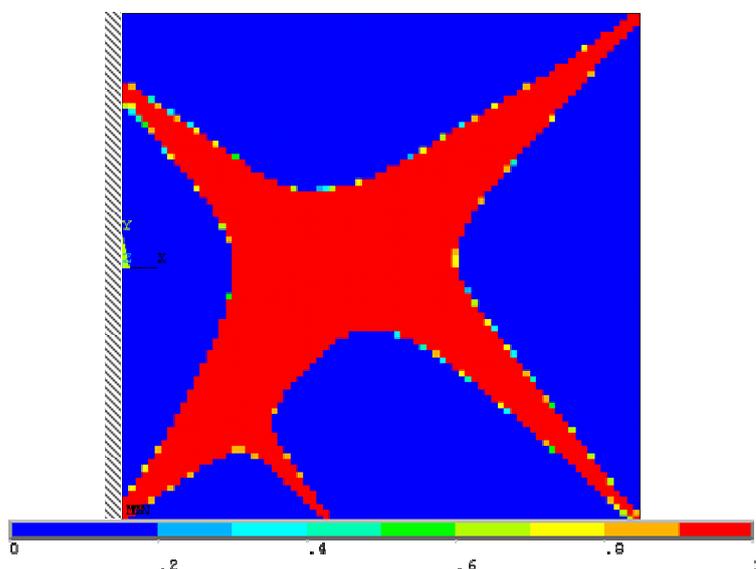


Figura 27: Duas forças aplicadas. Restrição volumétrica de 30%.

Como era esperado, o método de otimização apenas criou um “braço” que suporta a força F_2 aplicada. Deve-se observar, em primeiro lugar, que o “braço” gerado é praticamente perpendicular à região com material que vai canto inferior esquerdo até o centro da placa, o que corresponde à menor distância entre F_2 e a região otimizada obtida no exemplo 1. Em segundo lugar, todos os cantos são arredondados, o que reduz as tensões concentradas na placa.

Deve ser observado também que o apoio no canto superior esquerdo na Figura 27, que no caso do exemplo 1 estava bastante próximo do canto superior da placa, deslocou-se para baixo devido à restrição volumétrica mais rigorosa, de apenas 30% do volume inicial.

Se a restrição volumétrica for aliviada, ou seja, for permitida uma fração maior de material, a forma pouco se altera, a estrutura fica apenas mais robusta, como pode ser observado na Figura 28 e na Figura 29.

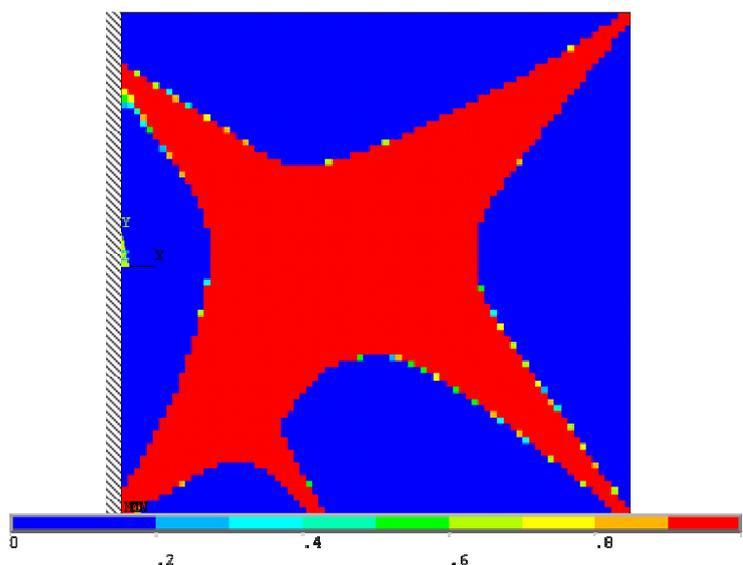


Figura 28: Duas forças aplicadas. Restrição volumétrica de 40%.

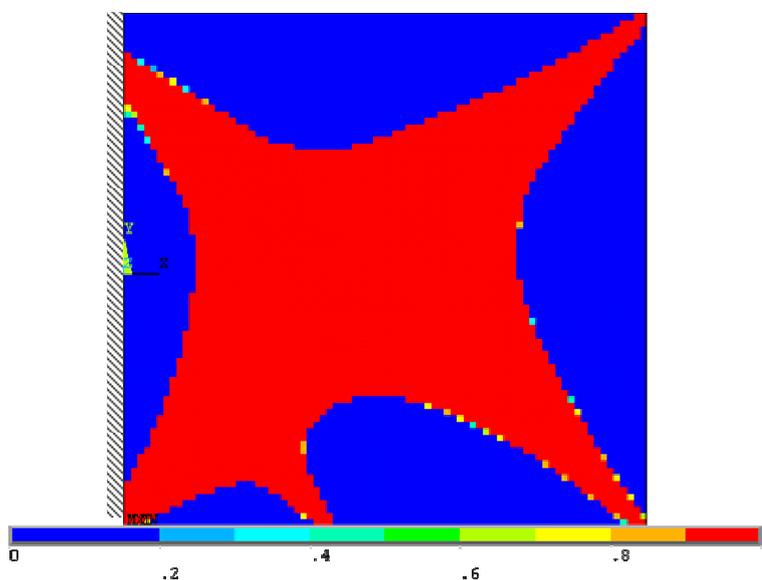


Figura 29: Duas forças aplicadas. Restrição volumétrica de 50%.

Da análise dos gráficos de convergência da função objetivo para as restrições volumétricas de 30% e 50% (Figura 30 e Figura 31), pode-se observar que quanto mais rígida a restrição, ou seja, quanto menos material é permitido, maior é a

flexibilidade da estrutura, o que é de se esperar. Quanto à convergência, não se pode afirmar que a restrição volumétrica exerça grande influência, uma vez todos os casos simulados convergiram aproximadamente na 15ª iteração.

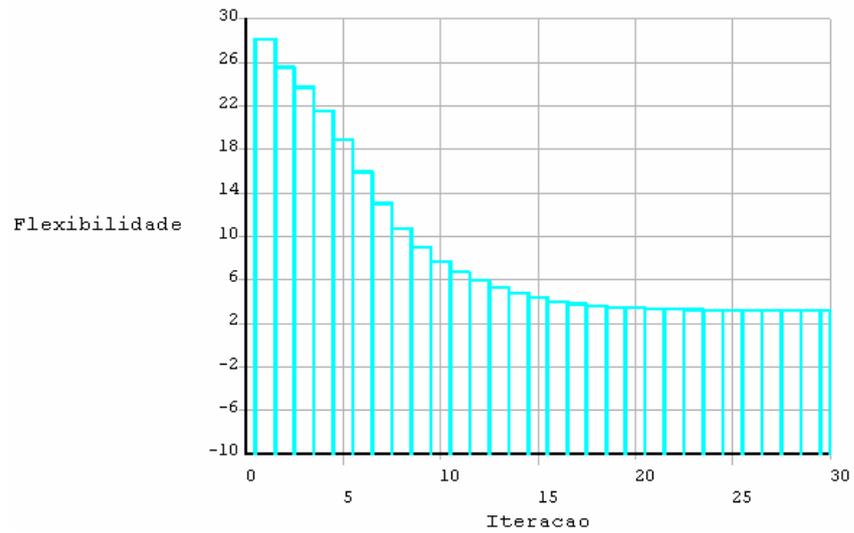


Figura 30: Curva de convergência da função objetivo para a restrição volumétrica de 30%.

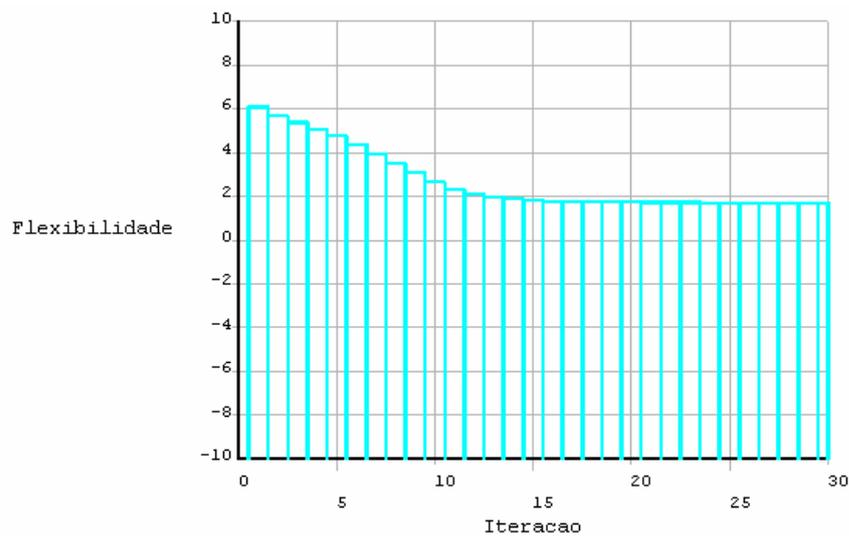


Figura 31: Curva de convergência da função objetivo para a restrição volumétrica de 50%.

6 REFORÇAMENTO DE ESTRUTURAS

O reforçamento consiste em adicionar massa (material) à estrutura de forma a torná-la mais resistente. Em se tratando de chapas e placas, muitas vezes isso é feito aumentando a espessura da estrutura, deixando-a mais pesada e custosa, mas também mais resistente. Neste caso, todas as regiões da estrutura são reforçadas igualmente, inclusive regiões que não necessitariam de reforço.

O objetivo da otimização topológica aplicada ao reforçamento de chapas é detectar as regiões da estrutura mais solicitadas e nelas aplicar o reforçamento, ou seja, somente aplicar o reforço nas regiões que necessitam, evitando assim o aumento desnecessário de massa.

Para isto é utilizado o elemento SHELL91 do ANSYS, que permite o uso de até 100 camadas com espessuras diferentes, muito usado para modelar compósitos e elementos compostos por diferentes materiais. É composto por 8 nós, e apresenta seis graus de liberdade (3 rotações e 3 translações). A Figura 32 esquematiza o elemento SHELL91.

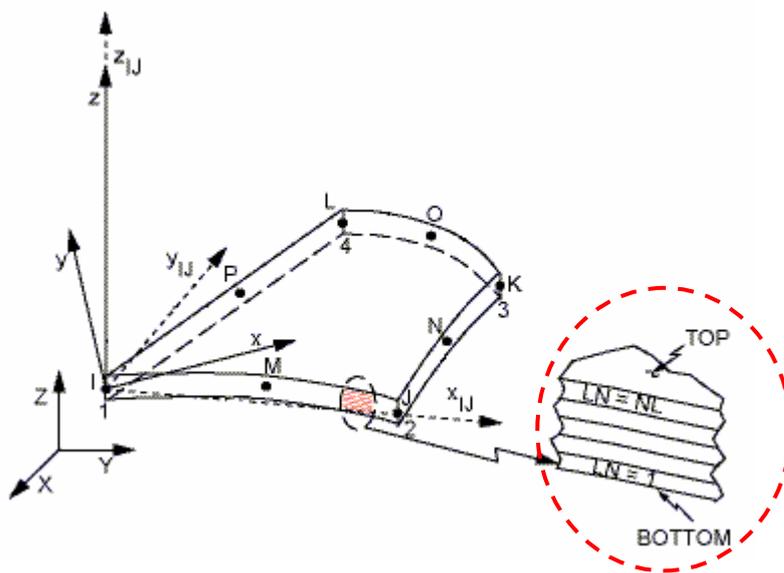


Figura 32: Elemento SHELL91. Em destaque a representação das camadas do elemento.

Neste trabalho são utilizadas duas camadas: uma para representar a estrutura e a outra, o reforçamento. O método de otimização topológica é aplicado somente à camada do reforçamento, sem alterar a estrutura.

Quanto ao algoritmo de otimização empregado para a estrutura *multilayer* (com mais de uma camada), não há diferença alguma quando comparado com aquele apresentado no capítulo anterior, ou seja, o algoritmo utilizado é o mesmo para o caso da otimização de estruturas com e sem reforçamento. A diferença consiste na definição das propriedades do material, que neste caso devem ser definidas para duas camadas, e apenas a em uma é realizada a otimização. O código fonte (em APDL) utilizado para a otimização do reforçamento da estrutura é apresentado no Anexo B.

O mesmo exemplo do capítulo anterior foi utilizado para verificação da metodologia empregada: uma placa plana, engastada em um dos lados, um apoio simples em um dos cantos do lado oposto ao engaste, e uma força, de magnitude $F_1 = 10kN$, aplicada no outro canto (Figura 17). Foi adotada restrição volumétrica de 40% e a relação entre a espessura da estrutura (w_1) e a espessura do reforçamento

$$(w_2) \text{ é } \frac{w_1}{w_2} = \frac{1}{2}.$$

A seqüência de figuras abaixo apresenta a evolução do processo de otimização topológica a cada 15 iterações. Nelas é representada a distribuição de massa do reforçamento, ou seja, a pseudo-densidade de cada elemento, uma vez que a topologia da estrutura permanece inalterada.

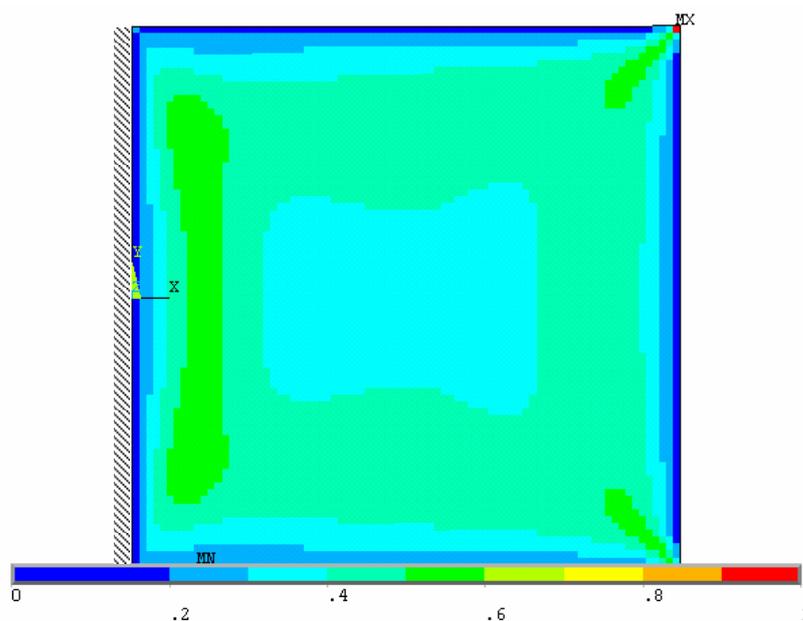


Figura 33: Distribuição de massa após a 15ª iteração para $\frac{w_1}{w_2} = \frac{1}{2}$.

Como se pode observar mesmo após a 15ª iteração a presença de densidades intermediárias é ainda bastante forte (uma vez que o limite móvel é $\zeta = 0,05$, já é possível haver pseudo-densidades iguais a 1, mas isto não ocorre, exceto no elemento onde a força é aplicada). Isto se dá porque a variação da pseudo-densidade de uma iteração para a outra depende da análise de sensibilidade da estrutura. A análise de sensibilidade mede a variação da flexibilidade em função da variação das pseudo-densidades da estrutura. No caso da placa sem reforçamento apresentada no Capítulo 5, a variação das pseudo-densidades exerce grande influência na sensibilidade, e conseqüentemente, na velocidade de convergência da otimização. Já no caso da placa com reforçamento, a influência da variação da pseudo-densidade do reforçamento é amenizada pela resistência à flexão da própria estrutura, que não é modificada pelo método de otimização topológica e apresenta, portanto, elementos cheios.

Desta análise, pode-se concluir que quanto maior for a espessura do reforçamento em relação à espessura da chapa, ou seja, quanto mais significativo for o reforçamento da estrutura, mais rápida é a convergência do processo de otimização. Isso será mostrado mais adiante.

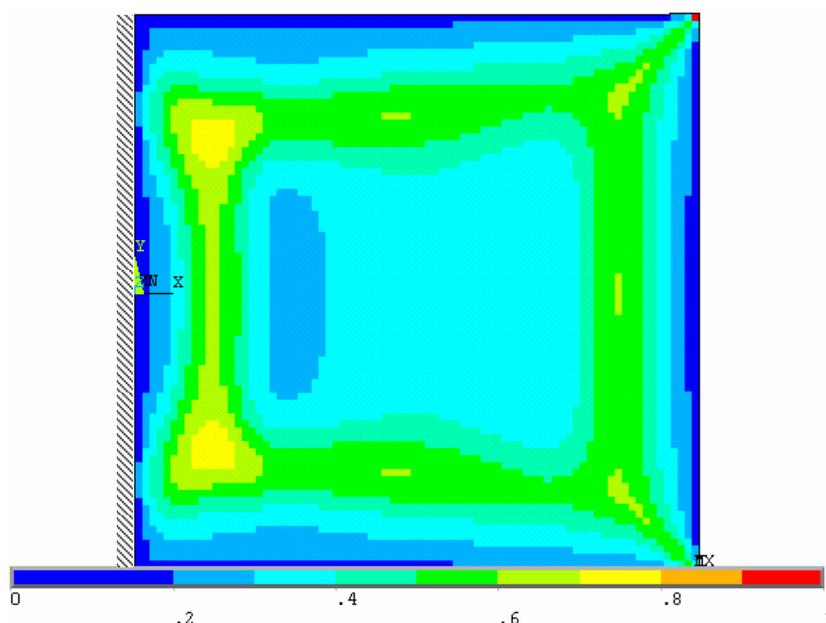


Figura 34: Distribuição de massa após a 30ª iteração para $\frac{w_1}{w_2} = \frac{1}{2}$.

Como pode ser observado na Figura 34, o reforçamento concentra-se próximo às bordas da placa, com alta densidade nas proximidades da região engastada. No centro, forte tendência de apresentar ausência de reforçamento. Abaixo seguem as figuras que apresentam a distribuição de massa para 45, 60 e 75 iterações.

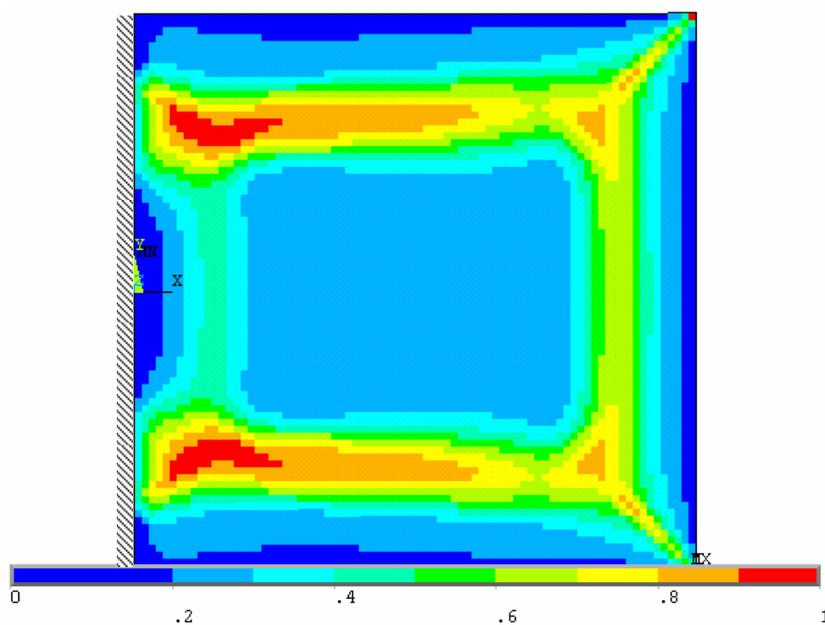


Figura 35: Distribuição de massa após a 45ª iteração para $\frac{w_1}{w_2} = \frac{1}{2}$.

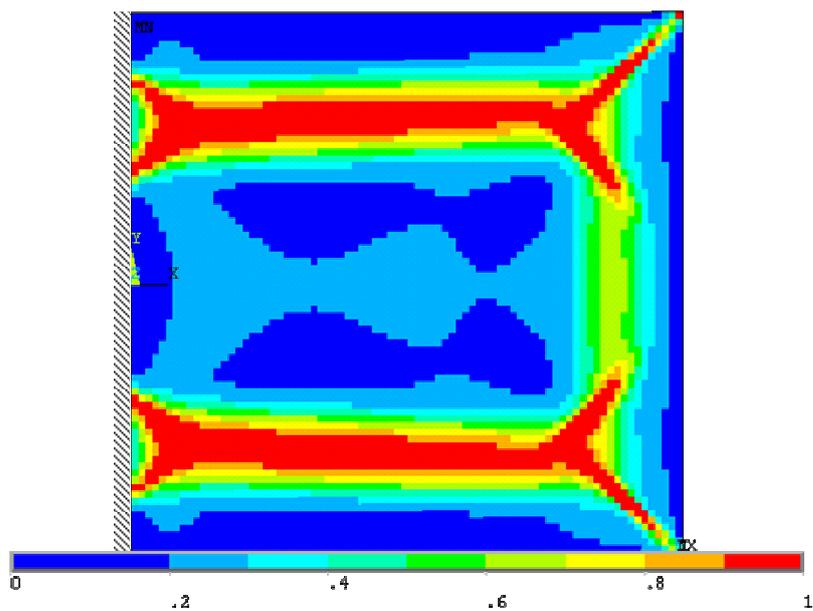


Figura 36: Distribuição de massa após a 60ª iteração para $\frac{w_1}{w_2} = \frac{1}{2}$.

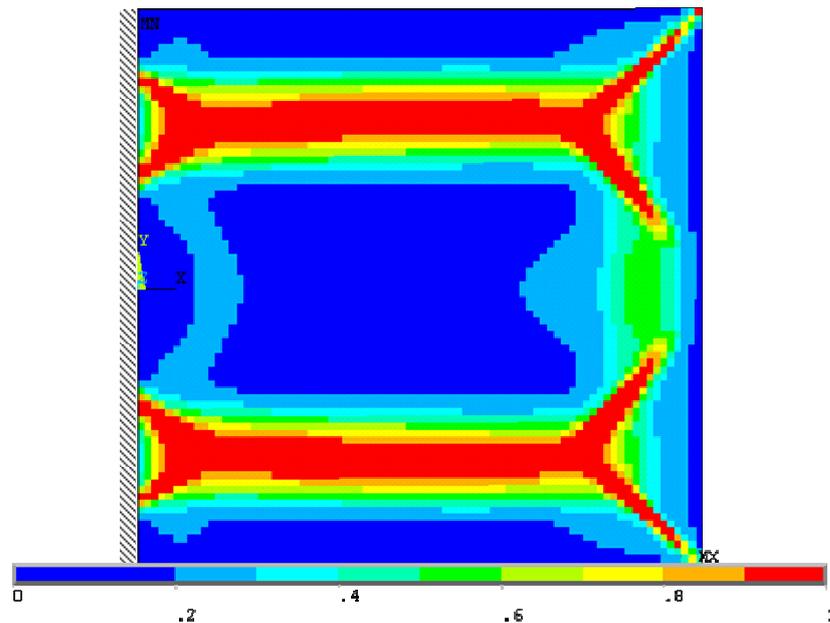


Figura 37: Distribuição de massa após a 75ª iteração para $\frac{w_1}{w_2} = \frac{1}{2}$.

Finalmente após a 75ª iteração o processo de otimização apresentou a geometria do reforço da placa plana bem definida (apesar de uma quantidade de densidades intermediárias considerada ainda alta).

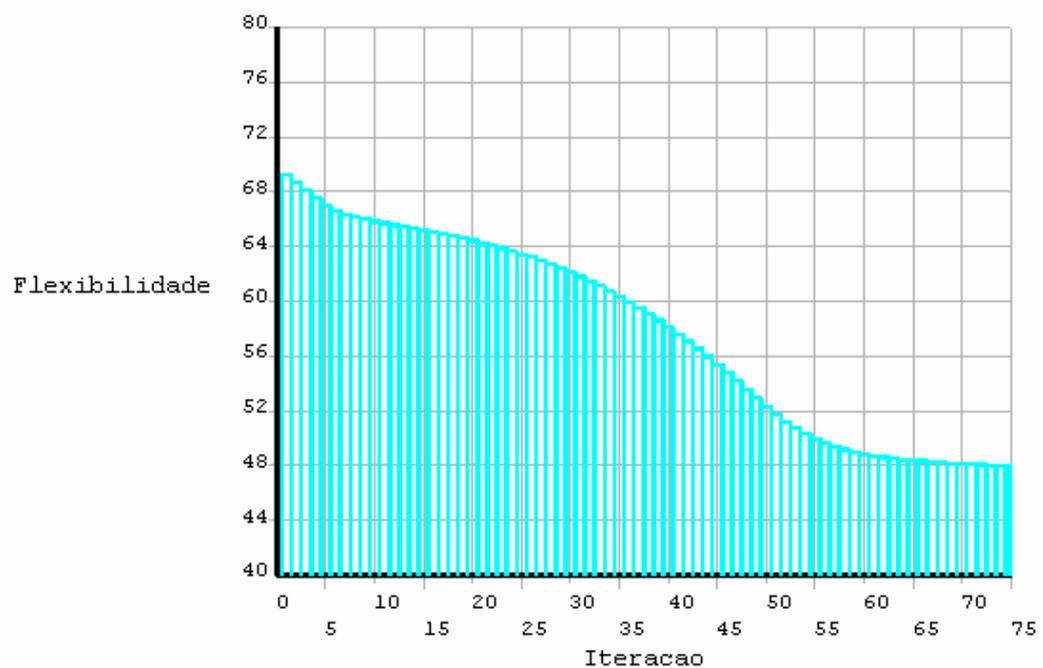


Figura 38: Convergência da função objetivo para a placa com reforço.

A Figura 38 apresenta a evolução da convergência da função objetivo, a flexibilidade da estrutura (em $N \cdot m$), ao longo das iterações. Vale notar que apesar de terem sido executadas 75 iterações a flexibilidade da estrutura ainda não apresenta estabilidade, ou seja, ainda há variação da flexibilidade ao longo do processo iterativo. Porém, a partir da 65ª iteração, aproximadamente, esta variação é bastante pequena.

Como mencionado anteriormente, a relação entre as espessuras da estrutura e do reforçamento tem relação direta com a convergência do processo de otimização. Para exemplificar tal fenômeno a mesma placa, porém com relação diferente entre a espessura da estrutura e do reforçamento (mantendo a espessura total da placa aproximadamente igual) foi simulada. Enquanto no caso anterior a relação é dada por

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{1}{2}, \text{ neste segundo caso a relação é } \frac{w_1}{w_2} = \frac{1}{3}.$$

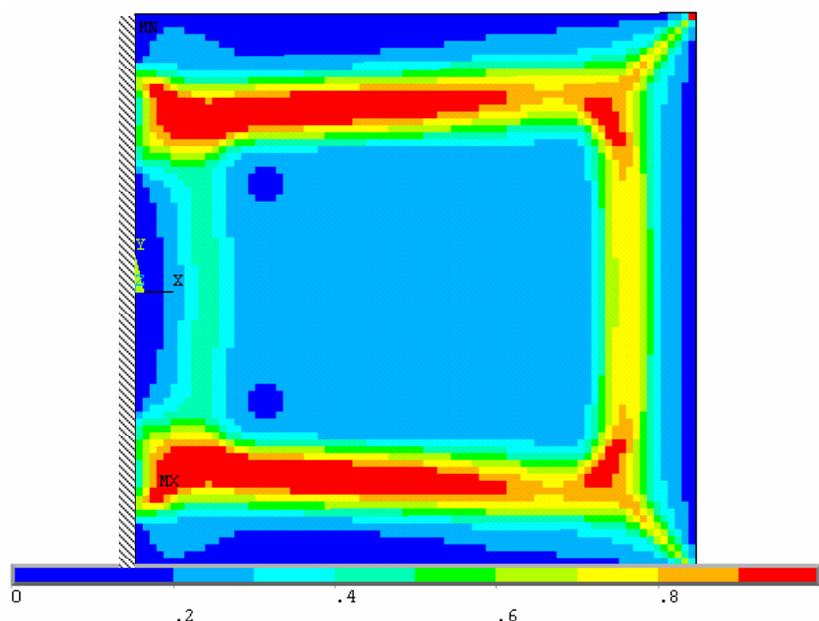


Figura 39: Distribuição de massa após a 45ª iteração para $\frac{w_1}{w_2} = \frac{1}{3}$.

Vale notar que após a 45ª iteração (Figura 39) a presença de pseudo-densidades na ordem da unidade, de cor vermelha, é bastante superior quando comparada ao caso apresentado anteriormente. O mesmo pode-se dizer ao se analisar a distribuição de massa após a 60ª iteração (Figura 40): é bem maior a presença da

cor amarela do lado direito da placa, oposto ao engastamento, e no centro a presença de pseudo-densidades nulas (ou vazias) é bastante intensa. Mas vale notar que o resultado final após a 75ª iteração é aproximadamente o mesmo para ambas as relações de espessuras (Figura 41).

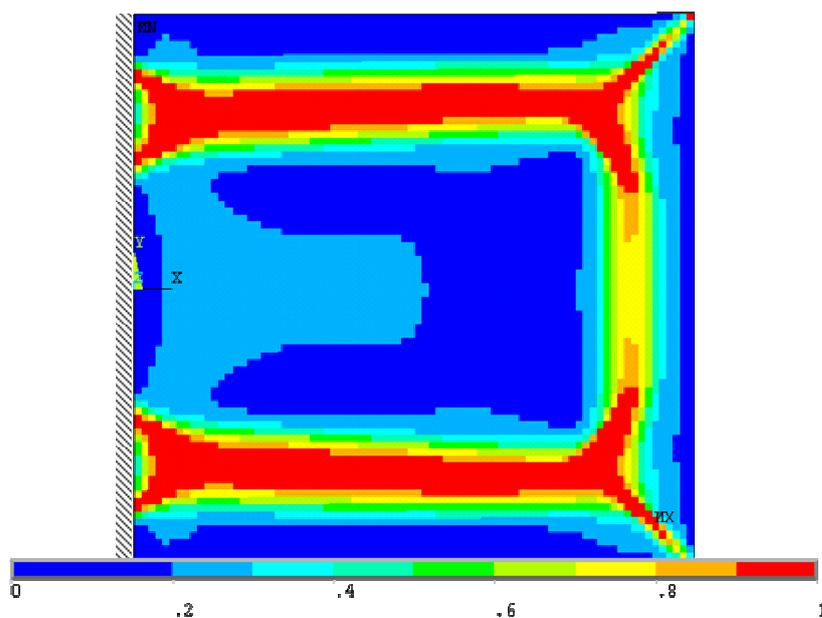


Figura 40: Distribuição de massa após a 60ª iteração para $\frac{w_1}{w_2} = \frac{1}{3}$.

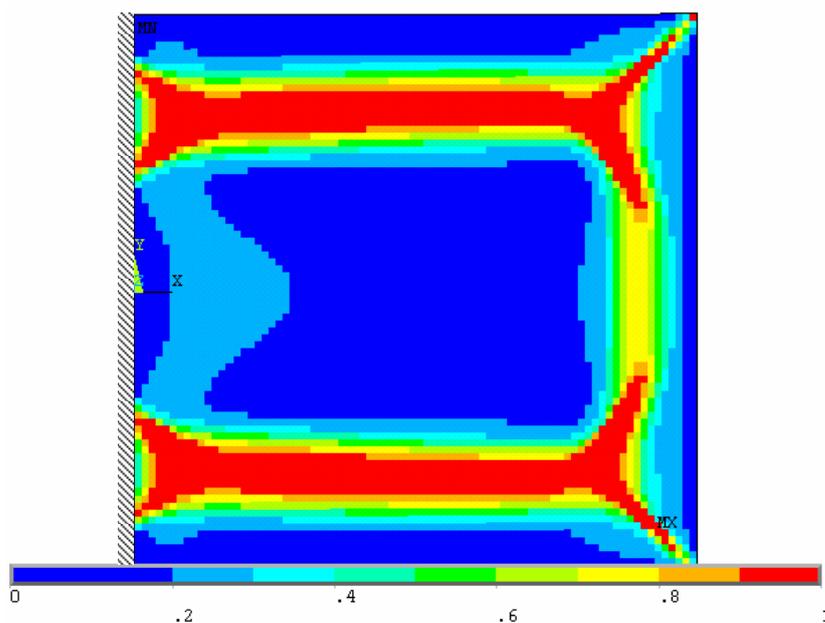


Figura 41: Distribuição de massa após a 75ª iteração para $\frac{w_1}{w_2} = \frac{1}{3}$.

O gráfico com a convergência da função objetivo corrobora com os resultados apresentados acima. Enquanto para o primeiro caso apresentado a função objetivo ainda variava bastante até a 65ª iteração, com o reforçamento maior em relação à espessura da chapa, a função objetivo pouco varia a partir da 55ª iteração.

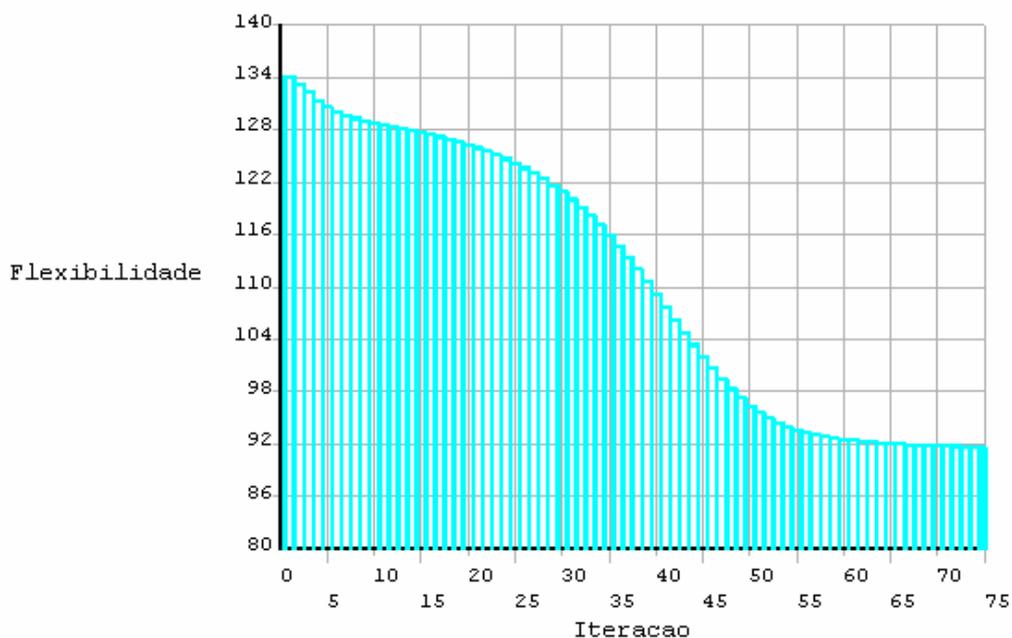


Figura 42: Convergência para placa com reforçamento. Relação de espessuras de $\frac{w_1}{w_2} = \frac{1}{3}$.

Para finalizar esta análise, também foi simulado o processo de otimização topológica para a espessura do reforçamento levemente superior ao da estrutura, ou expresso em termos de razão de espessuras: $\frac{w_1}{w_2} = \frac{2}{3}$. Como esperado, por apresentar uma relação de espessuras maior do que os outros dois casos, a convergência é mais lenta, mas o resultado ao final de 75 iterações também condiz com as outras simulações.

Ao observar a distribuição de massa após a 45ª iteração, apresentada na Figura 43, percebe-se que não há nenhum elemento com pseudo-densidade de ordem unitária (de cor vermelha), diferentemente dos outros casos apresentados (Figura 35 e Figura 39). Nota-se também que os gradientes de pseudo-densidades são bastante

extensos, ou seja, dificilmente se observa uma grande diferença de pseudo-densidade entre dois elementos vizinhos; a mudança é sempre bastante suave, percorrendo todas as cores da escala até atingir um elemento de alta densidade. Isso comprova que a variação da sensibilidade é pequena ao longo da simulação.

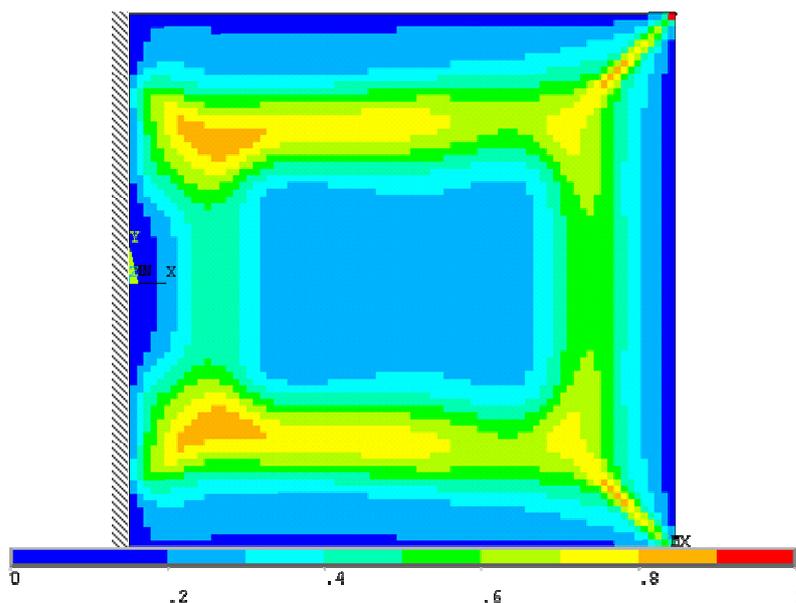


Figura 43: Distribuição de massa após a 45ª iteração para $\frac{w_1}{w_2} = \frac{2}{3}$.

A Figura 44 apresenta a distribuição de massa obtida após a 75ª iteração para a placa em questão. Como já mencionado anteriormente, o resultado é pouco diferente daquele obtido nas simulações anteriores e provavelmente com mais algumas iterações atingiria o mesmo grau de definição dos outros. A Figura 45 mostra a convergência da função objetivo para a mesma placa. Apesar de terem sido executadas 75 iterações a curva ainda não dá sinais de convergência, mas a variação de flexibilidade é bastante pequena de uma iteração para a outra.

As duas principais conclusões que se deve tirar desta análise é que quanto mais significativa for a espessura do reforçamento, mais rápida será a convergência da simulação e, independentemente desta relação, o resultado atingido será praticamente o mesmo.

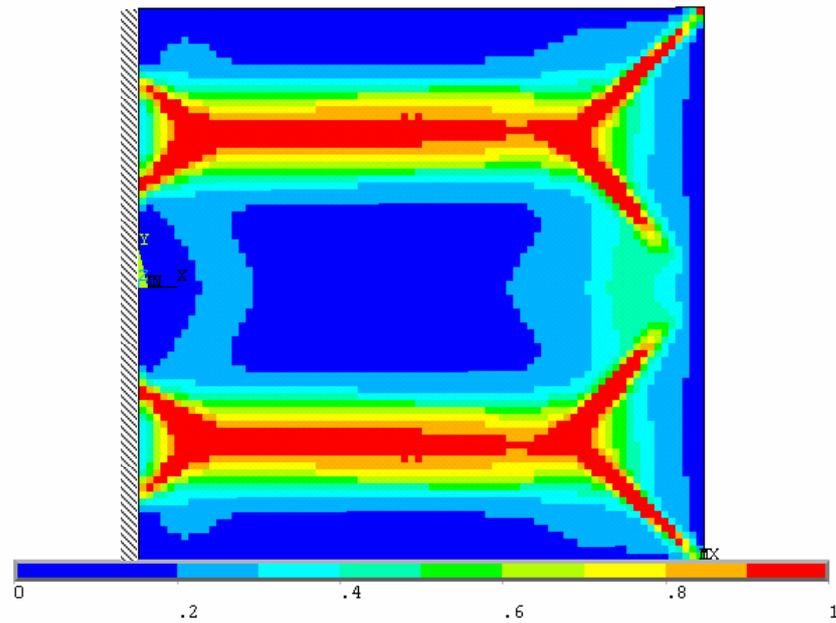


Figura 44: Distribuição de massa após a 75ª iteração para $\frac{w_1}{w_2} = \frac{2}{3}$.

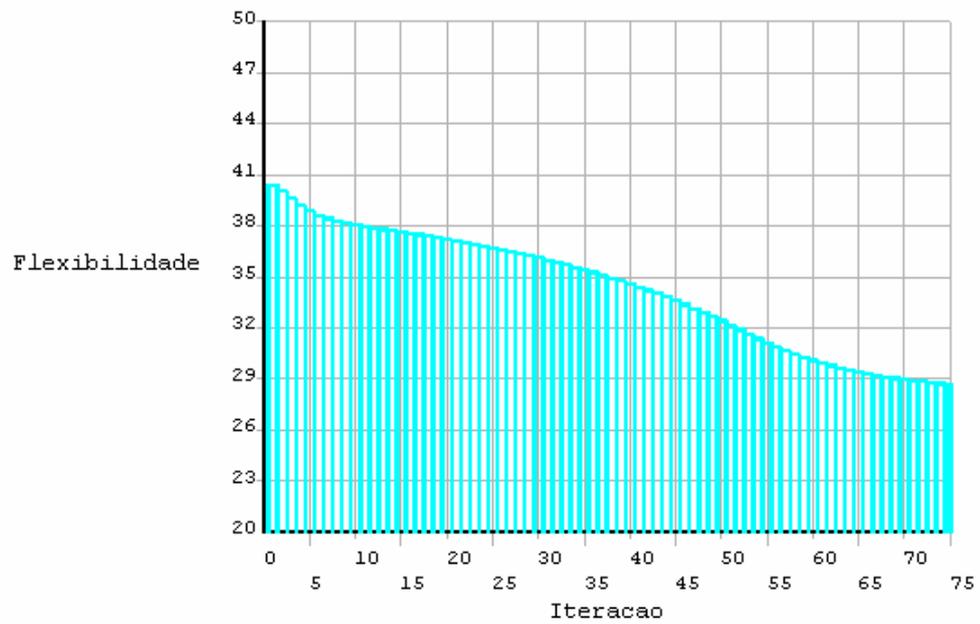


Figura 45: Convergência da função objetivo para a placa com relação $\frac{w_1}{w_2} = \frac{2}{3}$.

7 RESTRIÇÕES DE MANUFATURA

Frequentemente o processo de otimização topológica gera soluções com geometrias bastante complexas que, apesar de serem ótimas numericamente, podem ser inexecutáveis do ponto de vista da Engenharia, ou mesmo inviáveis.

Como mencionado no Capítulo 3 uma das alternativas para contornar tal problema é aplicar a otimização de forma para a suavização de curvas da geometria obtida pelo processo de OT (ou simplesmente através do uso de funções de interpolação). Porém, isso não garante que a geometria obtida seja factível, e em muitos casos ela deve ser modificada drasticamente para tal, o que a faz perder a característica de solução ótima.

Como alternativa, podem ser implementadas no algoritmo de otimização restrições de manufatura, que impõem limitações ao projeto para satisfazer uma necessidade do projetista. Como exemplo, pode-se destacar a restrição de fundição, que garante que todos os furos e concavidades de uma peça sigam a mesma direção, a direção do molde, de forma que não se tenha problemas para extraí-la da matriz.

As restrições, de forma geral, devem ser aplicadas com cautela, já que com o aumento do número de restrições, pode haver um decréscimo da otimalidade da solução – as restrições limitam o número de soluções, de forma que a solução ótima pode ser pior do que o mesmo caso sem restrições. Isto significa, no propósito deste trabalho, obter uma estrutura menos rígida.

Lippi (LIPPI, 2007) elaborou um trabalho onde apresenta restrições para diferentes processos de manufatura, como fundição, fresamento, torneamento e extrusão. Harzheim (HARZHEIM) aplica o MOT com e sem restrição de manufatura a diferentes peças para a indústria automobilística e aponta as diferenças entre elas.

Neste trabalho serão apresentadas 3 diferentes restrições visando o projeto de reforçamento de placas e chapas:

- *Repetição de Padrões*: onde um padrão será repetido por toda a extensão da estrutura. Neste caso, a geometria deste padrão é determinada pelo processo de OT;
- *Restrição de Tiras*: tiras, representando barras retas, empregadas no mesmo sentido. Foram consideradas barras horizontais e verticais.

- *Simetria*: a geometria do reforçamento obtida de um lado deve se espelhar no outro. Foram implementadas restrições de simetria horizontal e vertical.

Neste trabalho, as restrições de manufatura devem assegurar que um grupo de elementos siga o mesmo padrão, ou seja, no caso da restrição em tiras, todos os elementos de uma mesma linha devem apresentar as mesmas propriedades e, conseqüentemente, a mesma pseudo-densidade.

Como já apresentado anteriormente, a pseudo-densidade é determinada com base na análise de sensibilidade, que analisa a variação da função objetivo, no caso, a flexibilidade da estrutura, em relação à pseudo-densidade dos elementos. Assim sendo, estes elementos devem possuir também a mesma sensibilidade, de forma que, após executado o critério de otimalidade (necessário para satisfazer a restrição volumétrica), as propriedades dos elementos do mesmo grupo são semelhantes.

Matematicamente, as restrições de manufatura implementadas neste trabalho determinam para todos os elementos do mesmo grupo a mesma sensibilidade, que corresponde à média da sensibilidade dos elementos do grupo.

O fluxograma das etapas do processo de otimização topológica com restrições de manufatura é apresentado na Figura 46. Vale ressaltar que este fluxograma é idêntico àquele apresentado na Figura 16 adicionada a restrição de manufatura.

Para comprovar a eficiência da metodologia apresentada as restrições são testadas na placa plana apresentada no capítulo anterior. Em seguida o método de OT com e sem restrição é aplicado a um caso prático: uma “caixa de pressão”, que simula um vaso de pressão com seção transversal quadrada, como será visto adiante.

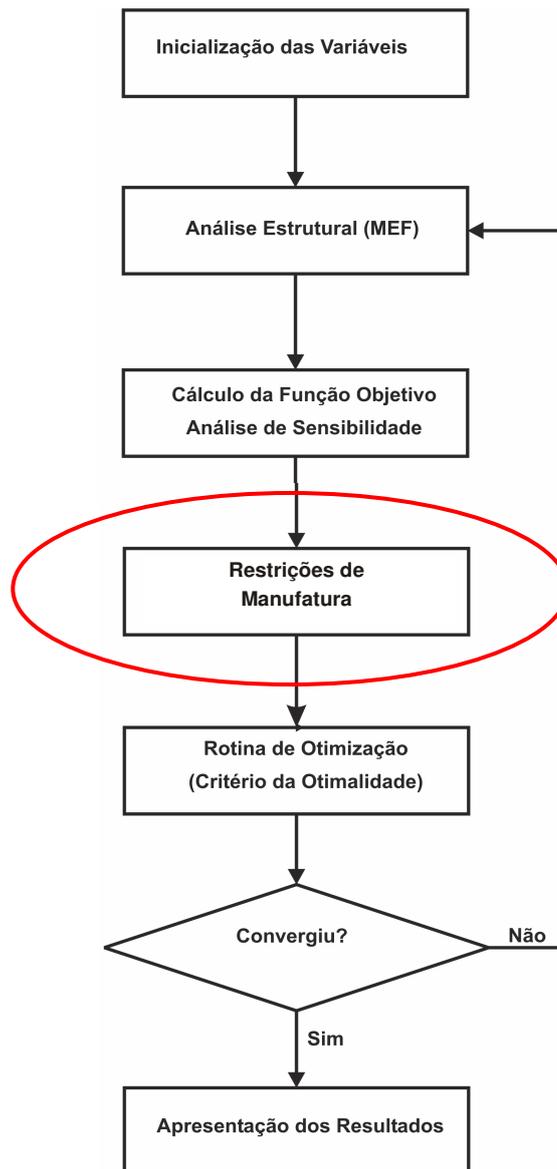


Figura 46: Fluxograma das etapas do processo de OT com restrições de manufatura.

7.1 Restrições de Manufatura na Placa Plana.

A placa plana utilizada é a mesma apresentada no capítulo 6. O número de iterações para cada um dos casos variou de acordo com a velocidade de convergência do processo. Em todos os casos a restrição volumétrica é 40%, o fator de penalização utilizado é $p = 3$ e a relação entre as espessuras da estrutura e do reforçamento é

$$\frac{w_1}{w_2} = 1/3.$$

Primeiramente são aplicadas as restrições de tiras horizontais e verticais, que fazem com que elementos de uma mesma linha/coluna apresentem as mesmas características. Para isso é calculada a sensibilidade média do grupo, neste caso de uma linha ou coluna, e aplica-se esta sensibilidade média igualmente para todos os elementos. Um grupo tende sempre a assumir as características dos elementos nele predominantes. A Figura 47 exemplifica o uso da restrição de tiras verticais.

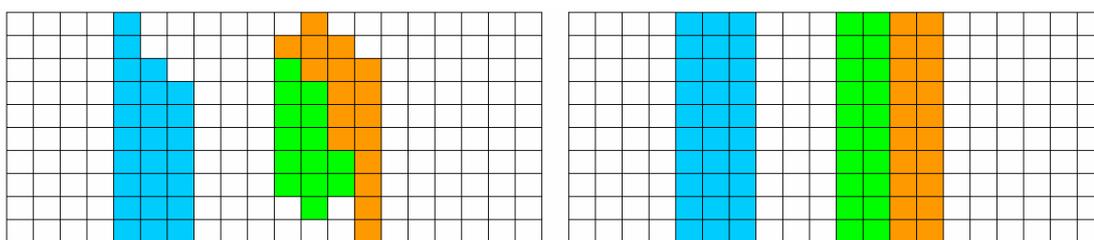


Figura 47: Representação da restrição de manufatura de tira vertical: sem (esquerda) e com (direita).

A Figura 48 e a Figura 49 apresentam os resultados da otimização topológica com restrição de tiras horizontal e vertical, respectivamente. Nota-se uma enorme presença de pseudo-densidades intermediárias, principalmente no caso de tiras verticais. Estes resultados, apesar de não desejáveis do ponto de vista da Engenharia, são bastante coerentes, como explicados a seguir.

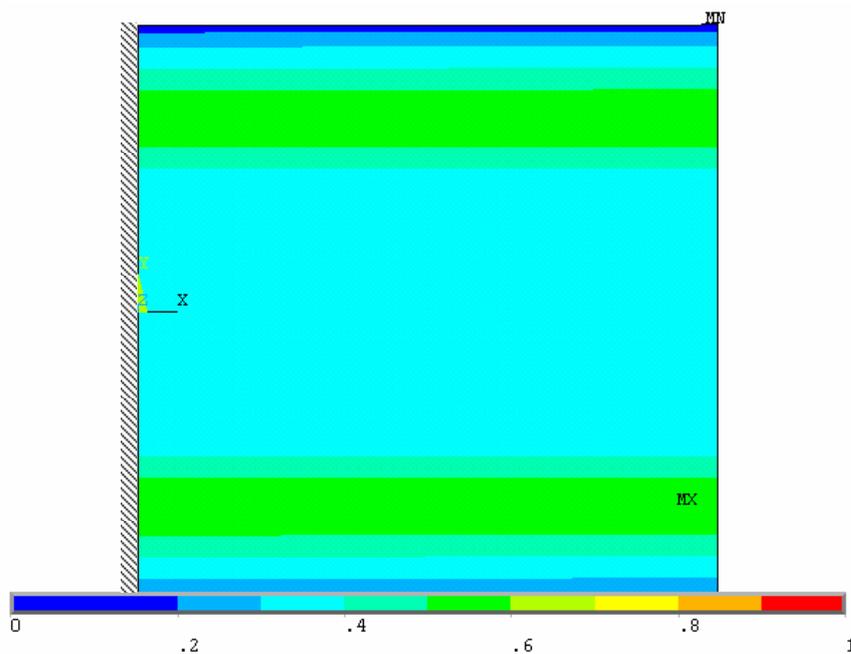


Figura 48: Otimização com restrição de tiras horizontais.

Se for analisado o resultado do processo de otimização da mesma placa sem restrições de manufatura apresentado na Figura 41, nota-se uma grande concentração de elementos com alta pseudo-densidade em duas linhas horizontais, resultado este bastante semelhante ao apontado pela otimização com restrição de tiras horizontais (apesar de neste caso as pseudo-densidades atingirem o valor máximo de 0,55).

Por outro lado, o processo de otimização com restrição de tiras verticais apresentou duas regiões, nas extremidades da placa, com pseudo-densidades mais elevadas (com valor máximo de 0,46). Porém, a diferença de densidade no centro da placa e nestas duas regiões é muito pequena, o que torna o resultado questionável, ou seja, o reforçamento nestas regiões pode não apresentar grande melhoria na rigidez da estrutura.

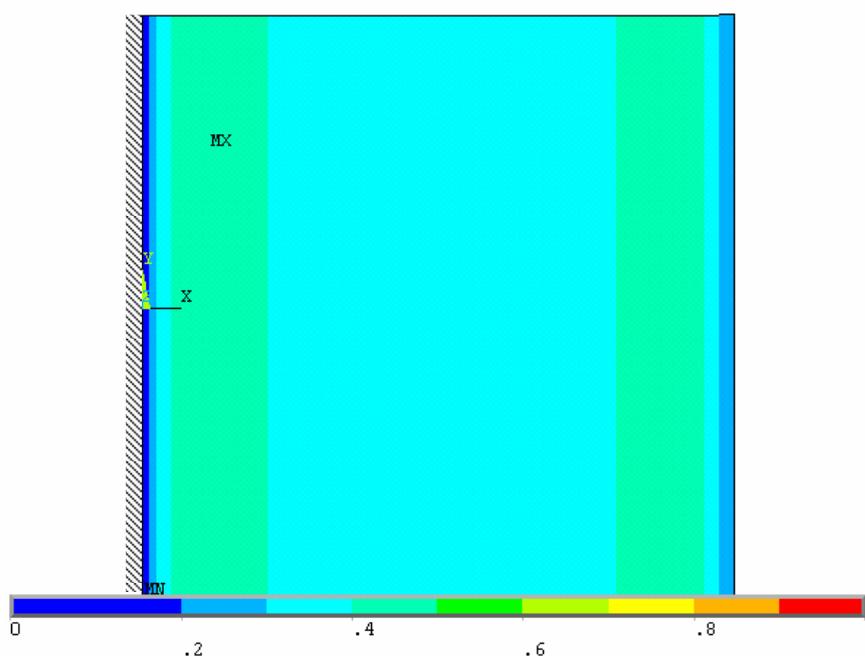


Figura 49: Otimização com restrição de tiras verticais.

Voltando ao resultado apresentado na Figura 41 nota-se do lado direito grande concentração de elementos com alta pseudo-densidade (superior a 0,70) e na extrema esquerda, uma região de reforçamento mais larga com densidades unitárias. Isso explica a pequena superioridade do reforçamento obtido nas extremidades no caso de restrições de tiras verticais.

Na verdade, o resultado obtido com o uso de restrições de tiras verticais não deve ser encarado como ruim. Deve-se ter a percepção de que a otimização com

restrições de tiras verticais não é adequada para esta aplicação e dificilmente ele trará benefícios à estrutura.

A Figura 50 e a Figura 51 mostram a evolução da convergência da função objetivo para ambos os casos. Nota-se que no primeiro caso a evolução é contínua, porém menos significativa a partir da 100ª iteração. Já o caso de tiras verticais, a flexibilidade da estrutura apresenta redução até, aproximadamente, a 20ª iteração, e a partir de então se estabiliza.

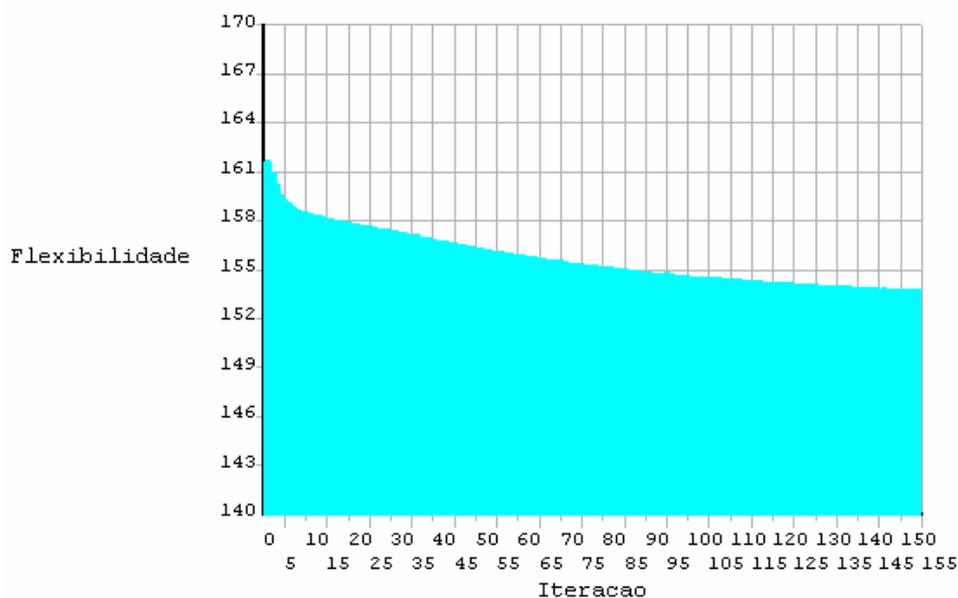


Figura 50: Convergência da função objetivo para a otimização com restrições de tiras horizontais.

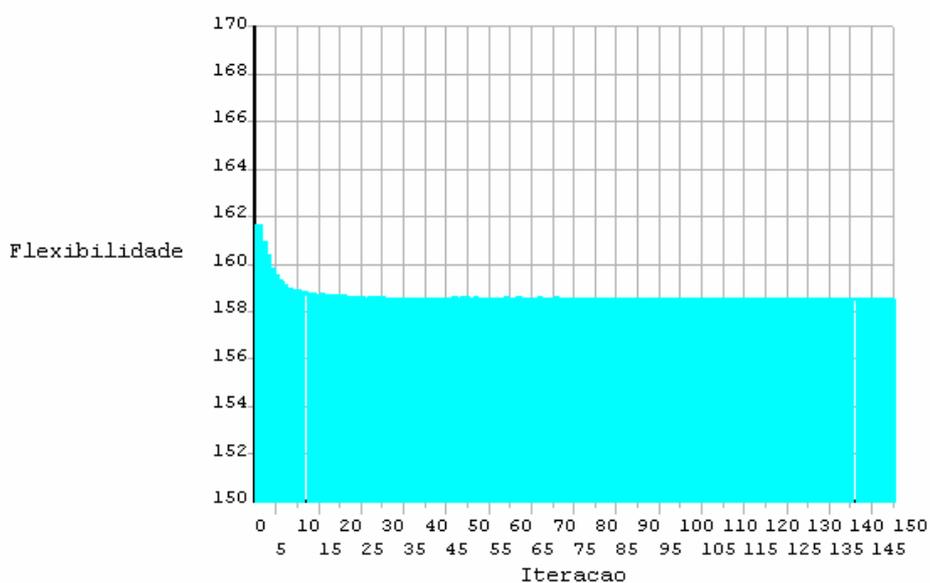


Figura 51: Convergência da função objetivo para a otimização com restrições de tiras verticais.

Em ambos os casos o fato da restrição de manufatura calcular a média da sensibilidade dos elementos do mesmo grupo faz com que a sensibilidade de cada elemento perca significância, já que esta é dissolvida junto com a de outros elementos. Desta forma, quanto mais elementos cada grupo possuir, maior poderá ser a quantidade de densidades intermediárias, a não ser que todos apresentem a mesma sensibilidade, seja esta alta ou baixa. Ou seja, para que uma linha ou coluna inteira apresente pseudo-densidade unitária a grande maioria dos elementos deste grupo também deve apresentar, ou em linguagem matemática, quanto menor o desvio-padrão da sensibilidade dos elementos de um mesmo grupo, melhor será o resultado.

O número elevado de elementos dentro de um grupo também contribui para a dissolução das sensibilidades dos elementos (no cálculo da média), já que quanto maior o número de elementos, menor é a probabilidade de todos apresentarem sensibilidades similares.

A quantidade de elementos em cada grupo é uma vantagem da restrição de simetria implementada neste trabalho, que apresenta apenas dois elementos em cada grupo. No caso genérico, a restrição de simetria também pode apresentar diversos elementos em um mesmo grupo, como acontece no caso da simetria radial.

A Figura 52 esquematiza a restrição de simetria vertical. A distribuição das pseudo-densidades de ambos os lados da linha de simetria (em vermelho) são espelhadas, de forma que a distância dos elementos simétricos em relação à linha de simetria é igual. Os elementos em amarelo representam dois elementos simétricos.

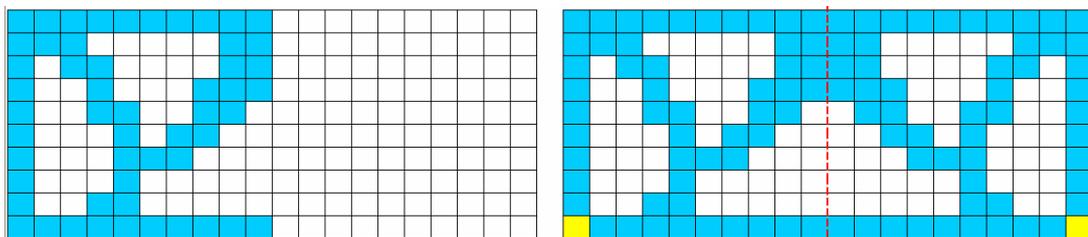


Figura 52: Representação da aplicação de restrição de simetria.

Os resultados obtidos para a otimização com restrição de simetria são apresentados na Figura 53e na Figura 54. A convergência da função objetivo para ambos os casos é bastante semelhante a da otimização sem restrições, porém estabilizando-se no patamar de $115 N \cdot m$.

Isso ajuda a explicar o porquê da otimização com restrição de simetria apresentar um resultado bastante próximo ao do caso sem restrição. Em primeiro lugar, a placa plana otimizada já apresenta alto grau de simetria tanto horizontal como vertical. Em segundo, o fato de cada grupo possuir apenas dois elementos (simétricos) faz com que a sensibilidade deles seja bem mais significativa.

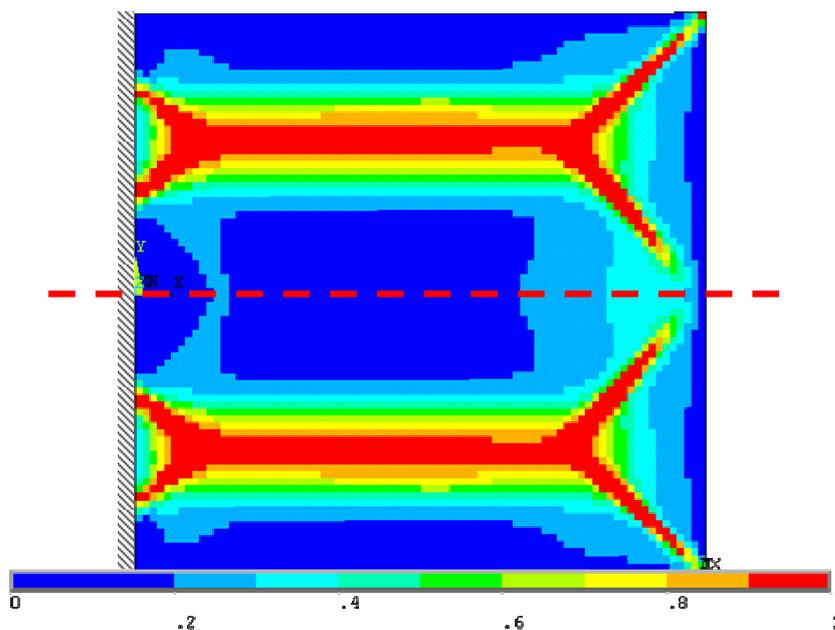


Figura 53: Otimização com restrição de simetria horizontal.

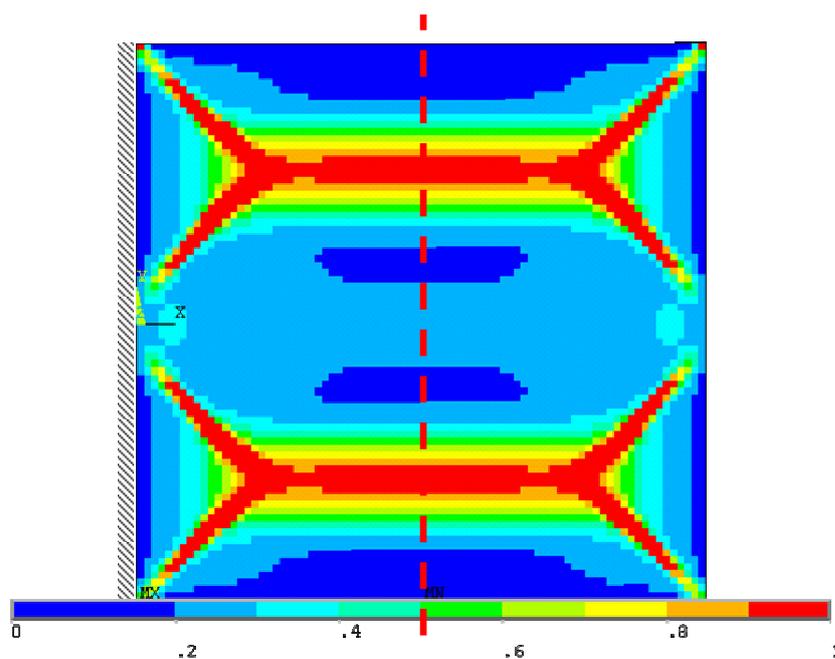


Figura 54: Otimização com restrição de simetria vertical.

A última restrição de manufatura implementada é a repetição de padrão. Esta restrição faz com que uma geometria otimizada se repita, uma ao lado da outra, diversas vezes ao longo da estrutura como mostrado na Figura 55. A região que define o padrão a ser repetido deve ser determinada pelo usuário. O MOT somente determina a geometria desta região.

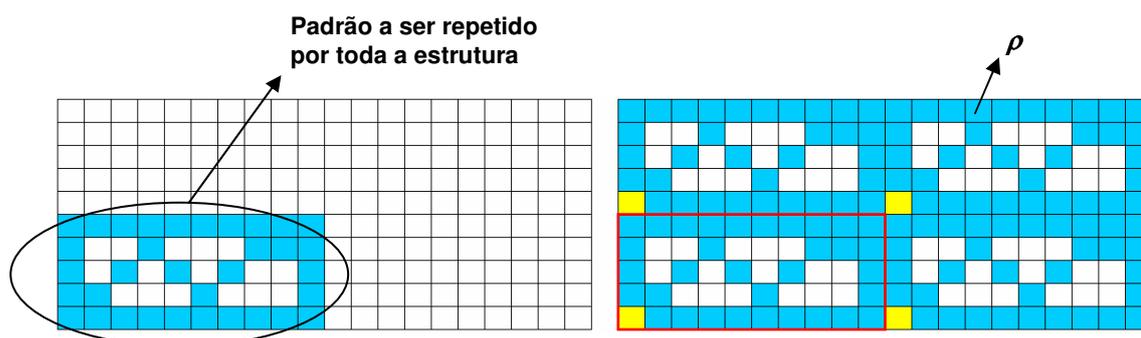


Figura 55: Restrição de repetição de padrão (LIPPI, 2007).

Os resultados obtidos para a placa plana são apresentados na Figura 56. O retângulo vermelho destaca o padrão repetido ao longo da placa.

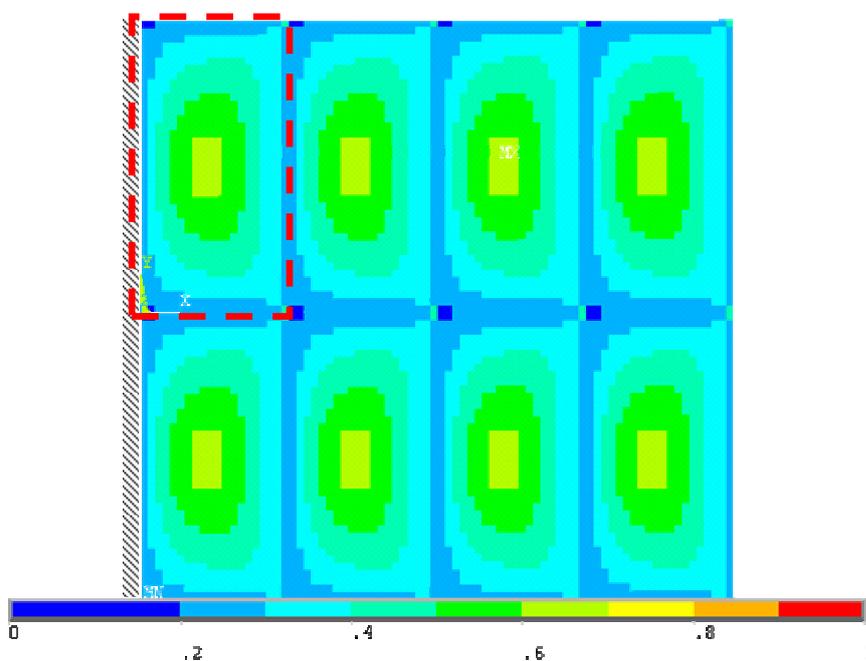


Figura 56: Otimização com restrição de repetição de padrão.

Comparado com os outros casos de otimização com restrição de manufatura apresentados, este é o que apresenta resultados menos intuitivos. O fato de a extremidade direita da placa otimizada sem restrições apresentar elementos com pseudo-densidades bastante baixas (ver Figura 41) faz com que o lado direito da região “amarela” (lado direito do padrão) apresente baixa pseudo-densidade, o que impede a formação esperada do reforçamento no sentido horizontal. As regiões superior e inferior do padrão eram esperadas de baixa pseudo-densidades, já que tanto o centro como as extremidades superior e inferior da placa plana são pouco solicitadas. Por fim, a região amarela é formada pela intersecção das duas regiões de reforçamento apontadas pelo processo de otimização.

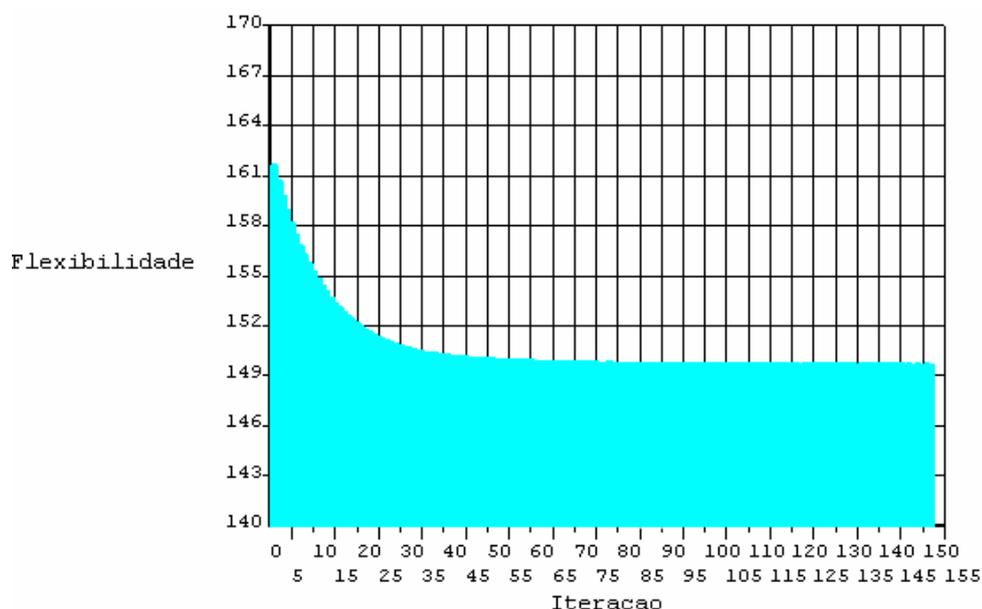


Figura 57: Convergência da função objetivo para a otimização com restrições de repetição de padrão.

A Figura 57 apresenta a evolução da convergência da função objetivo para o caso descrito acima. A flexibilidade da estrutura estabilizou-se em $149,6 \text{ N} \cdot \text{m}$ rapidamente.

Comparando-se a flexibilidade obtida nos processos de otimização com as restrições de manufatura aplicadas, os casos de simetria, por se assemelharem mais ao reforçamento otimizado sem restrições, apresentaram menor flexibilidade da estrutura, na ordem de $115 \text{ N} \cdot \text{m}$. Os outros casos apresentaram resultados bem piores, na ordem de $150 \text{ N} \cdot \text{m}$. Como dito anteriormente, isso não quer dizer que a

restrição de simetria é mais eficiente que as outras, mas para esta aplicação ela se mostrou mais adequada.

7.2 Caso Prático: “Caixa de Pressão”.

Até este ponto toda a teoria foi aplicada ao caso de uma placa plana, já que esta é bastante simples, necessita de pouco tempo de processamento e, principalmente, seus resultados são fáceis de serem interpretados. Infelizmente, os problemas existentes na Engenharia são bem mais complexos do que uma placa plana.

Como um caso prático foi escolhido uma “caixa de pressão”. Esta consiste em uma caixa retangular, sujeita a uma pressão interna, similar a um vaso de pressão, porém, retangular. A escolha por uma caixa de pressão, e não um vaso de pressão, se dá por dois motivos: a caixa de pressão não apresenta distribuição de tensões uniforme, que nem um vaso de pressão (com exceção das regiões de solda), o que a torna mais interessante para análise da necessidade de reforçamento; em segundo lugar, para se aplicar a restrição de manufatura, é necessário conhecer as coordenadas dos elementos (localização), o que é mais fácil em estruturas compostas de partes planas.

Na tentativa de aproximar a caixa de pressão à realidade, foram extraídos dados reais de um vaso de pressão apresentado por Jur (JUR, 2007), mas aplicados à caixa de pressão: largura e altura $A = 0,66m$; comprimento $L = 1,98m$ e pressão interna $P = 0,827MPa$. Para a aplicação do método de otimização é adotado fator de penalização $p = 3$, fração volumétrica $f_v = 0,4$. As propriedades do material são as do aço, as mesmas utilizadas para a placa plana. Como a caixa de pressão é simétrica, apenas um oitavo dela foi simulado. O modelo em ANSYS é apresentado na Figura 58.

A esta estrutura, além do método de otimização topológica para determinação de seu reforçamento, também foram aplicadas as restrições de manufatura de tiras horizontais e verticais.

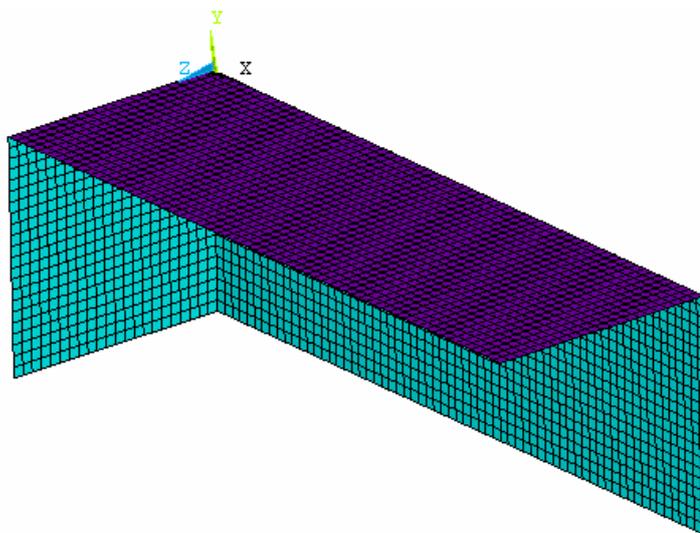


Figura 58: Modelo da caixa de pressão utilizado na simulação em ANSYS.

A Figura 59 apresenta a distribuição de massa para o reforço da caixa de pressão. A imagem apresenta a vista completa do interior da caixa (vista por baixo). Nota-se que as regiões de junção entre laterais são as mais críticas, enquanto que o canto (região de intersecção das três partes) apresenta a região de mínima pseudo-densidade, ou seja, menos solicitada. Na imagem também é possível visualizar a deformação nas laterais da caixa, mas isto não é alvo deste estudo, mas ajudará na interpretação de alguns resultados.

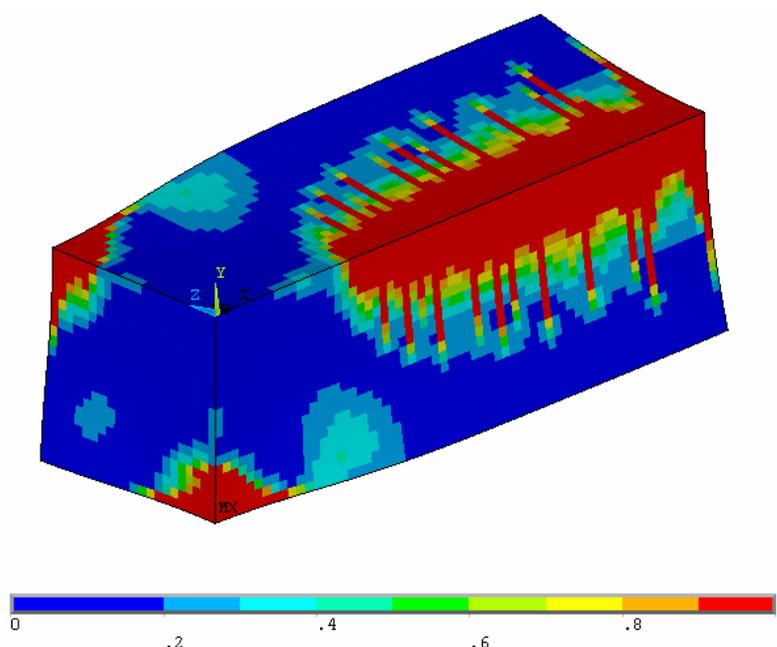


Figura 59: Método de otimização topológica aplicado ao reforço da caixa de pressão.

A Figura 60 apresenta a convergência da função objetivo para a determinação do reforçamento ótimo da caixa de pressão. A flexibilidade da estrutura é reduzida drasticamente com o emprego do reforçamento, caindo de pouco mais que 2200 $N \cdot m$ para aproximadamente 710 $N \cdot m$. A partir da 15ª iteração, a flexibilidade pouco se altera mostrando que a solução ótima da estrutura é atingida.

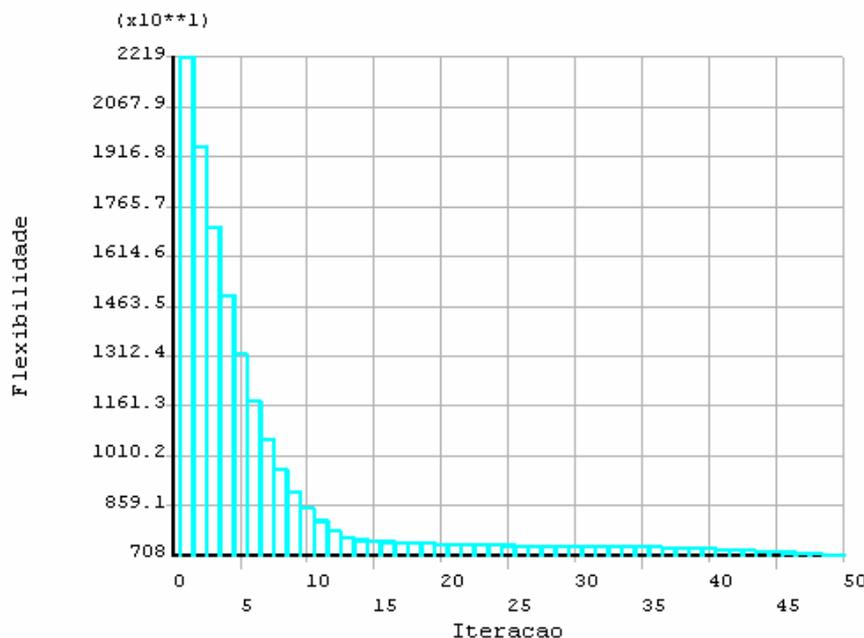


Figura 60: Convergência da função objetivo para o reforçamento da caixa de pressão.

A Figura 61 e a Figura 62 apresentam a distribuição de massa para o reforçamento da caixa de pressão levando-se em conta as restrições de manufatura de tiras transversais (no plano da seção transversal da “caixa de pressão”) e longitudinais, respectivamente.

No caso de restrição de tiras verticais há uma forte concentração de elementos de pseudo-densidade unitária, formando um cinturão em volta da caixa de pressão. Por um lado, este resultado parece bastante estranho, já que esta solução difere muito do caso sem o emprego de restrição de manufatura. Por outro lado, como já mencionado anteriormente, o emprego de tais restrições podem levar a soluções totalmente diferentes do que o esperado. Neste caso, o emprego de uma larga faixa com alta pseudo-densidade reduz fortemente a flexibilidade da estrutura na região, tanto que do lado direito desta faixa, o processo de otimização não aponta a

necessidade de reforçamento (elementos de baixa pseudo-densidade, inferiores a 0,3). Se a deformação das laterais da caixa de pressão for observada, será possível perceber que ela é pouco deformada na região com reforçamento, enquanto que do lado esquerdo já apresenta ondulações. Vale notar que este resultado se assemelha com a construção de um barril, onde dois reforçamentos metálicos são comumente empregados para garantir a rigidez da estrutura.

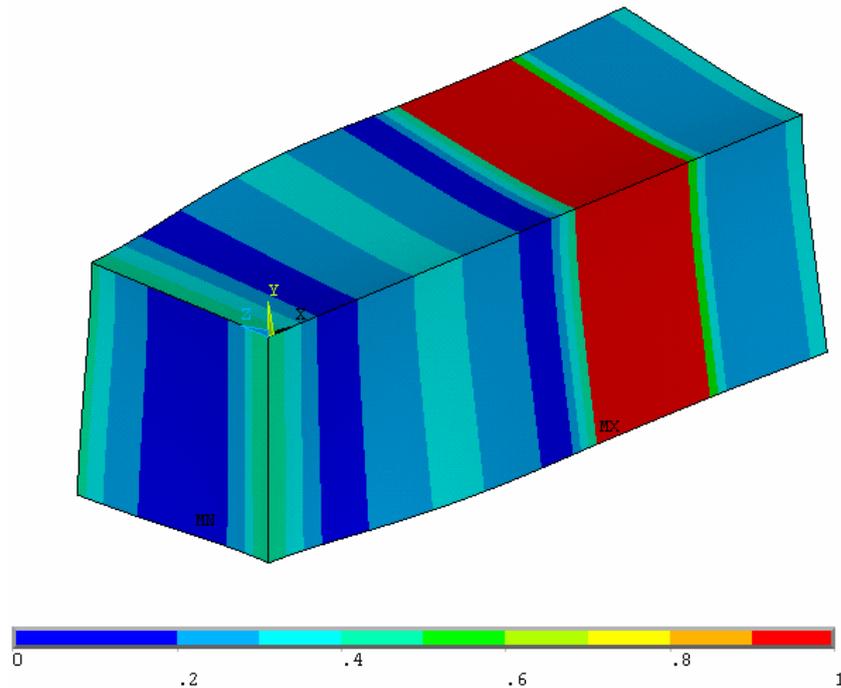


Figura 61: Otimização da caixa de pressão com restrição de tiras verticais.

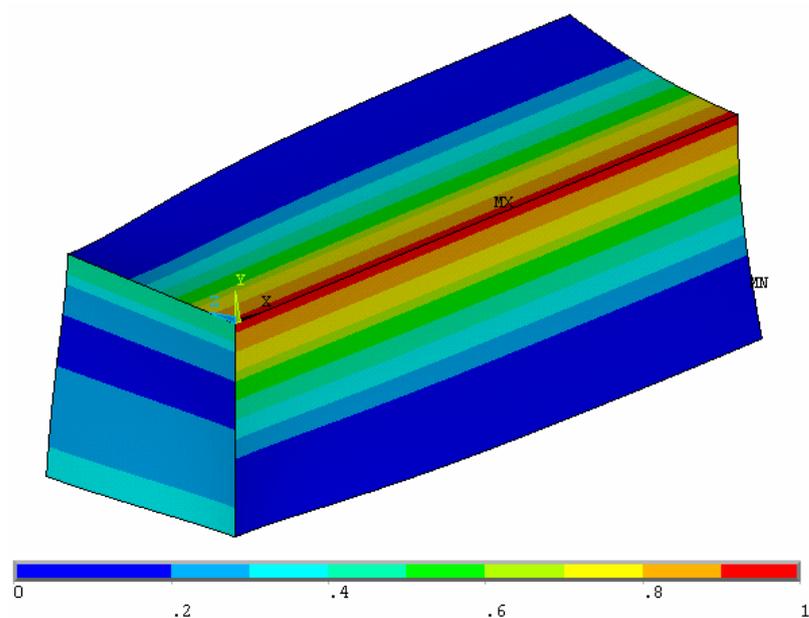


Figura 62: Otimização da caixa de pressão com restrição de tiras horizontais.

Já o caso da restrição de tiras horizontais apresenta um gradiente no reforçamento, com a região da junção das laterais com elementos de pseudo-densidades unitárias e na extremidade inferior das laterais, ausência de reforçamento. Quando se compara o resultado com o reforçamento sem restrições, este mostra-se totalmente coerente.

Para ambos os processos de otimização com restrição de manufatura 30 iterações se mostraram mais do que suficientes. O gráfico do processo com restrições de tiras verticais é mostrado na Figura 63. Como era de se esperar, o uso da restrição de manufatura fez com que a flexibilidade da estrutura ficasse pior do que o caso de reforçamento ideal, sem restrições. Mas mesmo assim o processo de otimização foi capaz de reduzir a flexibilidade da estrutura para aproximadamente $1380N \cdot m$.

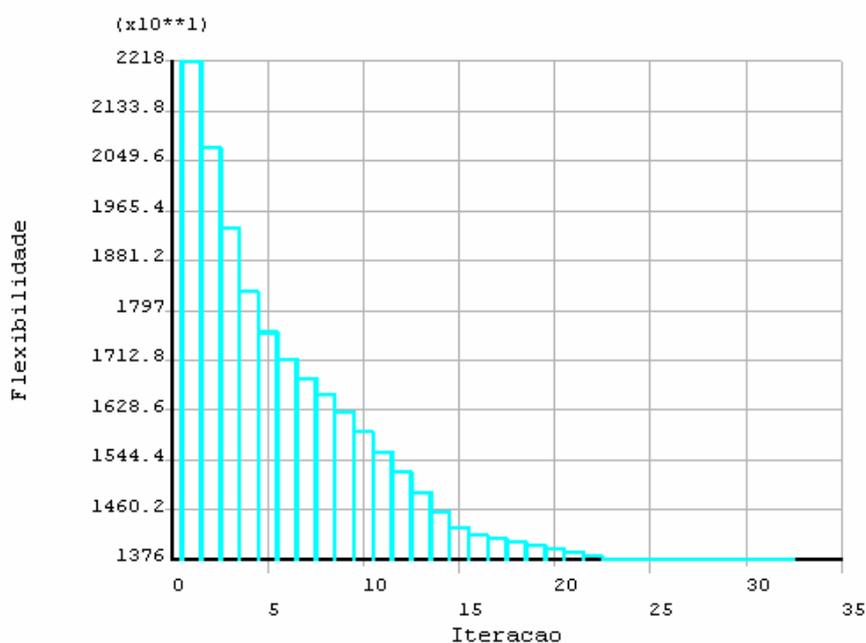


Figura 63: Convergência da função objetivo para o reforçamento com restrição de tiras verticais.

Já o caso com restrição de tiras horizontais, cujo gráfico da convergência da função objetivo é apresentado na Figura 64, se mostrou mais eficiente do que a de tiras verticais. A flexibilidade da estrutura foi reduzida para $1130N \cdot m$, também superior ao caso ideal, como esperado, além de ter necessitado menos iterações para atingir a convergência: menos de 15.

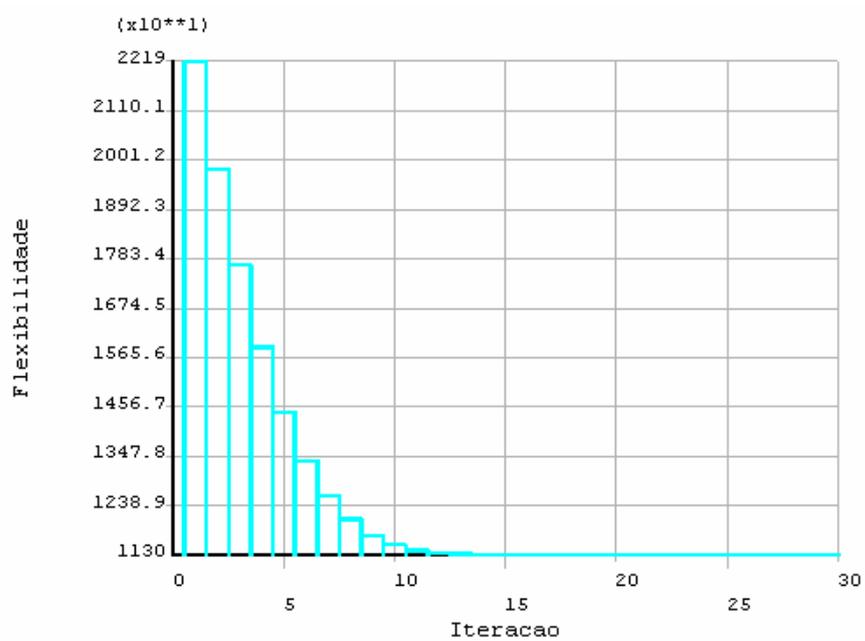


Figura 64: Convergência da função objetivo para o reforçamento com restrição de tiras horizontais.

8 CONCLUSÃO E COMENTÁRIOS

Neste trabalho de graduação foram apresentados os conceitos fundamentais para a compreensão e aplicação de um projeto de reforçamento de placas utilizando o método de otimização topológica. Também foram apresentados os principais problemas comumente enfrentados ao se implementar tal método bem como possíveis soluções.

Um código de otimização topológica foi implementado e aplicado a estruturas bastante simples. Foi visto que o método é bastante genérico e pode ser aplicado a diferentes estruturas, conseguindo obter soluções eficientes.

Ao se aplicar o método de otimização topológica ao reforçamento de estruturas utilizando-se elementos de casca compostos, conhecidos também por “*multilayer*”, observou-se que a distribuição de massa (pseudo-densidades) obtida é bastante diferente do resultado da otimização topológica aplicada ao projeto da placa. Isto ocorre porque ao se aplicar o reforçamento, a flexibilidade da estrutura é determinada tanto pelas propriedades e geometria da própria estrutura, como também pela do reforçamento. Como consequência, a velocidade de convergência da simulação é mais lenta, uma vez que influência da variação da pseudo-densidade do reforçamento é amenizada pela resistência à flexão da própria estrutura. Desta forma, a relação entre espessura da estrutura e do reforçamento exerce influência direta na velocidade de convergência do Método de Otimização Topológica, como mostrado neste trabalho.

O emprego de restrições de manufatura pode penalizar a eficiência do projeto de otimização, mas por outro lado, assegura que este siga restrições impostas pelo projetista. Desta forma pode-se obter soluções que são ótimas exequíveis, e não ótimas teóricas. Porém o resultado pode, muitas vezes, apresentar grande quantidade de pseudo-densidades intermediárias, o que dificulta a interpretação dos resultados.

O fato de um processo de otimização topológica com o emprego de restrições de manufatura resultar em uma solução com grande quantidade de pseudo-densidades intermediárias pode significar que ela simplesmente não é adequada àquela aplicação, e não que foi mal implementada ou que aquele tipo de restrição seja ruim.

Felizmente o método de Otimização Topológica se mostrou bastante eficiente em todos os casos simulados conseguindo reduzir a flexibilidade da estrutura. Todas as restrições de manufatura simuladas possibilitaram análises bastante completas, mesmo quando se chegou à conclusão de que ela não era a mais adequada para a aplicação, como foi no caso da restrição de tiras verticais para a placa plana.

Deve-se ressaltar que uma das propostas do trabalho é a utilização e aprendizagem do software comercial de elementos finitos ANSYS, devido à sua larga empregabilidade no mercado de trabalho e qualidade na solução de MEF. Tanto a aprendizagem do software, quanto a compreensão e aplicação do método de otimização topológica neste trabalho podem ser considerados satisfatórios.

Quanto às atividades inicialmente previstas, todas foram cumpridas.

9 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANSYS Inc., 2001. “Theory Manual”. Release 10.0A1

BECKER, W., 2005. Apostila do curso Strukturoptimierung (Otimização de Estruturas). Universidade Técnica de Darmstadt, Alemanha.

BENDSØE, M. P., Kikuchi, N., 1988. “Generating optimal topologies in Structural Design Using a Homogenization Method”. *Computer Methods in Applied Mechanics*, vol. 87, pp. 15-34.

BENDSØE, M. P., Sigmund O., 1999. “Material Interpolation Schemes in Topology Optimization”. *Archives of Applied Mechanics* 69 (9-10): 635-654.

BENDSØE, M. P., Sigmund O., 2003. “Topology Optimization. Theory, Methods and Applications”. Springer, Berlin.

HARZHEIM, L., Graf, G., 2005. “A Review of Optimization of Cast Parts Using Topology Optimization – Part I: Topology Optimization Without Manufacturing Constraints”, *Journal of Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 30, pp. 491-497.

HARZHEIM, L., Graf, G., 2006. “A Review of Optimization of Cast Parts Using Topology Optimization – Part II: Topology Optimization With Manufacturing Constraints”, *Journal of Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 31, pp. 388-399.

JOG, C., Haber, R. B., 1996. “Stability of Finite Element Models for Distributed-Parameter Optimization and Topology Design”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 130, pp. 203-226.

JUR, T., Minden, K., 2007. “An Inadequate Weld Repair and a Consequent Rupture of a Pressure Vessel”, *Journal of Failure Analysis and Prevention*.

KIKUCHI, S., 1991. “Shape and Layout Optimization Using Homogenization Method”. Dissertation (Doctor of Philosophy) – Aerospace Engineering, University of Michigan.

MEYNEN, S., 2004. “Die Methode der finiten Elemente in der Strukturmechanik”, Vorlesungsskript. Fachgebiet Numerische Berechnungsverfahren im Maschinenbau, Technische Universität Darmstadt.

LIPPI, T. N., 2007. “Restrições de Manufatura aplicadas ao Método de Otimização Topológica”. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, pp. 76.

LOPES, R. A., 2005. “Otimização Topológica Aplicada ao Projeto de Estruturas Submetidas a Forças de Campo Mecânicas”. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.

SIGMUND, O.; Petersson, J.; 1998. “Numerical Instabilities in Topology Optimization: A Survey on Procedures Dealing with Checkerboards, Mesh-Dependencies and Local Minima”, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol.16, pp. 68-75.

STUMP, F. V., 2006. “Otimização Topológica Aplicada ao Projeto de Estruturas Tradicionais e Estruturas com Gradação Funcional Sujeita a Restrição de Tensão”. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.

SUZUKI, K.; Kikuchi, N., 1991, “A Homogenization Method for Shape and Topology Optimization”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 93, pp. 291-318.

ANEXO A – Códigos APDL

1. Código de geração do modelo: Placa plana

```

!*****
!*
!* Placa Simples - MODELO
!* v.02 13/05/07
!*
!* Valter Unterberger Filho
!* N°USP - 3528522
!*
!* Prof. Dr. Emilio Carlos Nelli Silva
!*
!*****

!*****
!* DADOS DE ENTRADA

Dim_L=2.0      !* Comprimento da viga [m]
Dim_H=2.0      !* Altura da seção transversal da viga [m]
Dim_Elem=0.025 !* Tamanho do elemento [m]
Dim_Thck=0.001 !* Espessura da casca

!*****
!* DEFINE O TIPO DE ELEMENTO

/PREP7

CSYS,0

ET,1,SHELL93
R,TK,0.25

!*****
!* GERA O MODELO SÓLIDO

RECTNG,0,Dim_L,-0.5*Dim_H,0.5*Dim_H
/VIEW,1,0,0,1

!*****
!* GERA O MODELO EM ELEMENTOS FINITOS

ALLSEL
ESIZE,Dim_Elem
AMESH,ALL
NUMCMP,ALL
FINISH

```

```

!*****
!* CONDIÇÕES DE CONTORNO

/SOLU

NSEL,S,LOC,X,0
D,ALL,UX,0
NSEL,S,LOC,X,0
D,ALL,UZ,0
ALLSEL

!* Apoio simples
NSEL,S,LOC,X,Dim_L
NSEL,R,LOC,Y,-0.5*Dim_H
D,ALL,UY,0
NSEL,S,LOC,X,Dim_L
NSEL,R,LOC,Y,-0.5*Dim_H
D,ALL,UZ,0
ALLSEL

!*****
!* CARREGAMENTO

!* Força concentrada
F_Body=10000

NSEL,S,LOC,X,Dim_L
NSEL,R,LOC,Y,0.5*Dim_H
F,ALL,FZ,-F_Body

!* NSEL,S,LOC,X,0.4*Dim_L
!* NSEL,R,LOC,Y,-0.5*Dim_H
!* F,ALL,FZ,0.8*F_Body

ALLSEL
FINISH

!*****
!* LIBERA MEMORIA

*SET,CEX,
*SET,CEZ,
*SET,Vol_Elem,
*SET,N_Node,
*SET,Mass_P_No,
*SET,N_Force,
*SET,Co1,
*SET,Co2,

```

2. Código de otimização

```

!*****
!*
!* OTIMIZAÇÃO TOPOLOGICA
!* v.01.03
!*
!* Valter Unterberger Filho
!* N°USP - 3528522
!*
!* Prof. Dr. Emilio Carlos Nelli Silva
!*
!*****

FINISH
/CLEAR

!*****
!* PARAMETROS DA SIMULAÇÃO

Mat_d=1000      !* Discretização do material [-]
Mat_E=210e9     !* Módulo de elasticidade do aço [Pa]
Mat_v=0.3       !* Módulo de Poisson [-]
Vol_Frac=0.5    !* Redução de volume [-]

!*****
!* INICIALIZAÇÃO DAS VARIÁVEIS

ITot_Max=30     !* Numero máximo de iterações - total
K_Penal=3       !* Penalização da rigidez
/CONT,ALL,10,0,,1 !* Fixa a escala
F_Esc_X=5       !* Fator de escala - eixo X
N_Div_Y=10      !* Numero de divisoes - eixo Y

!*****
!* DEFINE AS PROPRIEDADES DO MATERIAL

/PREP7
ANTYPE,0

!* Módulo de elasticidade e Módulo de Poisson
*DO,Var_N,1,Mat_d,1
  MP,EX,Var_N,Mat_E*(Var_N/Mat_d)**K_Penal
  MP,PRXY,Var_N,Mat_v
*ENDDO

FINISH

!*****
!*
!* CARREGAR MODELO DE ELEMENTOS FINITOS
!*
!*****

```

```

!*****
!*** PROPRIEDADES DO MODELO / VARIÁVEIS

/PREP7
*GET,N_Elem,ELEM,,COUNT
*GET,N_Node,NODE,,COUNT

*DIM,X_DER,ARRAY,N_Elem,0,0
*DIM,X_DER_New,ARRAY,N_Elem,0,0
*DIM,X_ELE,ARRAY,N_Elem,0,0
*DIM,X_NEW,ARRAY,N_Elem,0,0
*DIM,X_OLD,ARRAY,N_Elem,0,0
*DIM,V_ELE,ARRAY,N_Elem,0,0
*DIM,V_A1,ARRAY,N_Elem,0,0
*DIM,V_A2,ARRAY,N_Elem,0,0
*DIM,V_A3,ARRAY,N_Elem,0,0
*DIM,Lmid,ARRAY,ITot_Max,0,0
*DIM,M_VIZ,ARRAY,N_Face*(N_Face+1),0,0
*DIM,M_SOR,ARRAY,N_Face*(N_Face+1),0,0
*DIM,R_TCOMP,ARRAY,ITot_Max,0,0
*DIM,R_TVOL,ARRAY,ITot_Max,0,0
*DIM,R_CLoop,ARRAY,ITot_Max,0,0
*DIM,R_VChan,ARRAY,ITot_Max,0,0
*DIM,R_K_Pen,ARRAY,ITot_Max,0,0

FINISH

!*****
!* CÓDIGO OT

*VCUM,0
*VOPER,X_NEW(1),Vol_Frac,ADD,0
Var_Loop=0
Var_Control=0
Var_Chg=1
Var_Move=0.05

*DO,C_i,1,ITot_Max,1

!*****
!* REDEFINE AS PROPRIEDADES DO MATERIAL

/PREP7
!* Módulo de elasticidade e Módulo de Poisson
*DO,Var_N,1,Mat_d,1
    MP,EX,Var_N,Mat_E*(Var_N/Mat_d)**K_Penal
*ENDDO

!*****
!* DEFINE AS NOVAS PROPRIEDADES DOS ELEMENTOS

*VOPER,X_ELE(1),X_NEW(1),MULT,Mat_d    ! X_ELE=X_NEW*Mat_d
*VFUN,X_ELE(1),NINT,X_ELE(1)         !X_ELE=integer(X_ELE)
*DO,Var_N,1,N_Elem,1

```

```

      EMODIF,Var_N,MAT,X_ELE(Var_N)
*ENDDO

*VOPER,X_ELE(1),X_ELE(1),DIV,Mat_d      ! X_ELE=X_ELE/Mat_d

FINISH

!*****
!* ATUALIZA VARIÁVEIS

Var_Loop=Var_Loop+1
Var_Control=Var_Control+1
R_K_Pen(Var_Loop)=K_Penal
*VFUN,X_OLD(1),COPY,X_NEW(1)

!*****
!* SOLUÇÃO - FEA

/SOLU
EQSLV,FRONT
SOLVE

FINISH

!*****
!* PROPRIEDADES - FUNÇÃO OBJETIVO

/POST1
TOT_VOL=0
TOT_COMP=0
disp_UZ=0
*DO,Var_N,1,N_Elem,1
  *GET,V_ELE(Var_N),ELEM,Var_N,VOLU
  TOT_VOL=TOT_VOL+V_ELE(Var_N)
  *GET,Var_Sene,ELEM,Var_N,SENE
  Var_Sene=Var_Sene/(X_NEW(Var_N)**K_Penal)
!* Função objetivo - Flexibilidade
  TOT_COMP=TOT_COMP+(2*Var_Sene)*X_NEW(Var_N)**K_Penal
!* Sensibilidade - Função objetivo - Parcela=Rigidez
  X_DER(Var_N)=-(2*Var_Sene)*
    K_Penal*X_NEW(Var_N)**(K_Penal-1)

  !*  $V(k+1) = V(k) + V(Var\_N)$ 
  !*  $Var\_Sene = (u.K.u)/2$ 
  !*  $C(k+1) = C(k) + 2.Var\_Sene.X\_NEW(Var\_N)^{K\_Penal}$ 
    =  $C(k) + (u.K.u).X\_NEW(Var\_N)^{K\_Penal}$ 
  !*  $dC = -(u.K.u).K\_Penal.X\_NEW(Var\_N)^{K\_Penal}$ 

*ENDDO
FINISH

!*****
!* CRITÉRIO DA OPTIMALIDADE

!Função Objetivo: Min Flexibilidade (escalar: TOT_COMP)

```

```
!Variáveis: Propriedades do elemento (vetor: X_ELE)
!Restrição: Vol total do corpo < Vol especificado
              (escalar:TOT_VOL)
```

```

Var_L1=0
Var_L2=1000
Var_DtL=Var_L2
C_jj=0
*DO, C_j, 1, 10000, 1
  C_jj=C_jj+1
  *IF, C_jj, EQ, 1, THEN
    Var_LMid=Var_L2
  *ELSE
    Var_LMid=0.5*(Var_L1+Var_L2)
  *ENDIF
  *VOPER, V_A1(1), V_ELE(1), MULT, -Var_LMid
  *VOPER, V_A2(1), X_DER(1), DIV, V_A1(1)
  *VFUN, V_A1(1), PWR, V_A2(1), (0.5)
  *VOPER, V_A2(1), X_OLD(1), MULT, V_A1(1)
  *VOPER, V_A1(1), X_OLD(1), ADD, Var_Move
  *VOPER, V_A3(1), V_A1(1), MIN, V_A2(1)
  *VOPER, V_A1(1), 1, MIN, V_A3(1)
  *VOPER, V_A2(1), X_OLD(1), SUB, Var_Move
  *VOPER, V_A3(1), V_A1(1), MAX, V_A2(1)
  *VOPER, X_NEW(1), 0.001, MAX, V_A3(1)

! V_A1=V_ELE*(-Var_LMid)
! V_A2=(dc./V_A1)
! V_A1=(V_A2)^0.5
! V_A2=X_NEW*V_A1
! V_A1=X_NEW+Move
! V_A3=MIN(V_A1, V_A2)
! V_A1=MIN(1, V_A3)
! V_A2=X_NEW-Move
! V_A3=MAX(V_A1, V_A2)
! X_NEW=MAX(0.001, V_A3)

  *VOPER, V_A1(1), X_NEW(1), MULT, V_ELE(1)
  *VSCFUN, Var_Aux1, SUM, V_A1(1)           ! Sum(xnew)

  *IF, Var_Aux1, GT, (Vol_Frac*TOT_VOL), THEN
    Var_L1=Var_LMid
    *IF, C_jj, EQ, 1, THEN
      Var_L2=Var_L2*10
      C_jj=0
    *ENDIF
  *ELSE
    Var_L2=Var_LMid
  *ENDIF

  Var_DtL=(Var_L2-Var_L1)/(Var_L2+Var_L1)
  *IF, Var_DtL, LT, 0.0001, THEN
    *Exit                                     ! Sai do Loop
  *ENDIF
  *IF, Var_L2, LT, 1e-10, THEN
    *Exit                                     ! Sai do Loop
  *ENDIF
*ENDDO
Lmid(C_i)=Var_LMid
```

```

TOT_VOL_R=Var_Aux1                                ! Volume real

!*****
!* APRESENTACAO DOS RESULTADOS

/POST1
SET, FIRST
ETABLE, , EPSW
*VPUT, X_NEW(1), ELEM, , ETAB, EPSW, , , 2
PLETAB, EPSW
/TITLE, It=%C_i% Comp=%TOT_COMP% K_P=%K_Penal%

/VIEW, 1 , 0, 0, 1
/REPLOT
/SHOW, PNG
PNGR, COMP, 1, -1
PNGR, ORIENT, HORIZ
PNGR, COLOR, 2
PNGR, TMOD, 1
/GFILE, 1200
/RGB, INDEX, 100, 100, 100, 0
/RGB, INDEX, 0, 0, 0, 15
/REPLOT
/SHOW, CLOSE
ALLSEL

FINISH

!*****
*VOPER, V_A1(1), X_NEW(1), SUB, X_OLD(1)
*VFUN, V_A2(1), PWR, V_A1(1), 2
*VFUN, V_A1(1), SQRT, V_A2(1)
*VSCFUN, Var_Chg, MAX, V_A1(1)

R_TCOMP(Var_Loop)=TOT_COMP
R_TVOL(Var_Loop)=TOT_VOL_R/TOT_VOL
R_CLoop(Var_Loop)=Var_Loop
R_VChan(Var_Loop)=Var_Chg

*ENDDO

!*****
!* APRESENTACAO DOS RESULTADOS

*DIM, R_Iter, ARRAY, Var_Loop, 0, 0
*DIM, R_FObj, ARRAY, Var_Loop, 0, 0

*DO, C_i, 1, Var_Loop, 1
  R_Iter(C_i)=C_i
  R_FObj(C_i)=R_TCOMP(C_i)
*ENDDO

N_DivX=NINT(Var_Loop/F_Esc_X)
*IF, N_DivX*F_Esc_X, LT, Var_Loop, THEN
  N_DivX=N_DivX+1
*ENDIF

```

```
*VSCFUN,FObj_max,MAX,R_FObj(1)
*VSCFUN,FObj_min,MIN,R_FObj(1)
L_InfY=(NINT(FObj_min/N_Div_Y)-1)*N_Div_Y
Delta_Y=(NINT((FObj_max-FObj_min)/N_Div_Y)+2)*N_Div_Y

*VPLOT,R_Iter(1),R_FObj(1)
/XRANGE,0,N_DivX*F_Esc_X
/YRANGE,L_InfY,L_InfY+Delta_Y
/GROPT,DIVX,N_DivX
/GROPT,DIVY,N_Div_Y
/AXLAB,X,Iteracao
/AXLAB,Y,Flexibilidade
/TITLE,Convergencia da funcao objetivo
/REPLOT
/SHOW,PNG
PNGR,COMP,1,-1
PNGR,ORIENT,HORIZ
PNGR,COLOR,2
PNGR,TMOD,1
/GFILE,1200
/RGB,INDEX,100,100,100,0
/RGB,INDEX,0,0,0,15
/REPLOT
/SHOW,CLOSE

*CFOPEN,Resultados,'txt'
*VWRITE,R_CLoop(1),R_TCOMP(1),R_TVOL(1),R_VChan(1),R_K_Pen(1),
Lmid(1)
*CFCLOS
```

ANEXO B – Códigos APDL

1. Código de geração do modelo: Placa plana

```

!*****
!*
!* Placa Simples - MODELO
!* v.04 31/08/07
!*
!* Valter Unterberger Filho
!* N°USP - 3528522
!*
!* Prof. Dr. Emilio Carlos Nelli Silva
!*
!*****

!*****
!* DADOS DE ENTRADA

Dim_L=2.0          !* Comprimento da viga [m]
Dim_H=2.0          !* Altura da seção transversal da viga [m]
Dim_Elem=0.025    !* Tamanho do elemento [m]

!*****
!* DEFINE O TIPO DE ELEMENTO

/PREP7

CSYS,0

ET,1,SHELL91
N_Node_Elem=8     !* Numero de nos do elemento
N_Face=6          !* Numero de faces do elemento

!*****
!* GERA O MODELO SÓLIDO

RECTNG,0,Dim_L,-0.5*Dim_H,0.5*Dim_H
/VIEW, 1 ,0,0,1

!*****
!* GERA O MODELO EM ELEMENTOS FINITOS

ALLSEL
ESIZE,Dim_Elem
AMESH,ALL
NUMCMP,ALL
FINISH

!*****
!* CONDIÇÕES DE CONTORNO

```

```

/SOLU

NSEL,S,LOC,X,0
D,ALL,UX,0
NSEL,S,LOC,X,0
D,ALL,UZ,0
ALLSEL

!* Apoio simples
NSEL,S,LOC,X,Dim_L
NSEL,R,LOC,Y,-0.5*Dim_H
D,ALL,UY,0
NSEL,S,LOC,X,Dim_L
NSEL,R,LOC,Y,-0.5*Dim_H
D,ALL,UZ,0
ALLSEL

!*****
!* CARREGAMENTO

!* Força concentrada
F_Body=10000

NSEL,S,LOC,X,Dim_L
NSEL,R,LOC,Y,0.5*Dim_H
F,ALL,FZ,-F_Body

!* NSEL,S,LOC,X,0.4*Dim_L
!* NSEL,R,LOC,Y,-0.5*Dim_H
!* F,ALL,FZ,0.8*F_Body

ALLSEL
FINISH

!*****
!* LIBERA MEMORIA

*SET,CEX,
*SET,CEZ,
*SET,Vol_Elem,
*SET,N_Node,
*SET,Mass_P_No,
*SET,N_Force,
*SET,Co1,
*SET,Co2,

```

2. Código de otimização para reforçamento de estruturas

```

!*****
!*
!* OTIMIZAÇÃO TOPOLOGICA
!* v.04      02/09/07
!*
!* Valter Unterberger Filho
!* N°USP - 3528522
!*
!* Prof. Dr. Emilio Carlos Nelli Silva
!*
!*****

FINISH
/CLEAR

!*****
!* PARAMETROS DA SIMULAÇÃO

Mat_d=1000      !* Discretização do material [-]
Mat_E=210e9     !* Módulo de elasticidade do aço [Pa]
Mat_v=0.3      !* Módulo de Poisson [-]
Vol_Frac=0.4   !* Redução de volume [-]
Lay_Thk1=0.05  !* Espessura da Estrutura
Lay_Thk2=0.10  !* Espessura do Reforço

!*****
!* INICIALIZAÇÃO DAS VARIÁVEIS

ITot_Max=60     !* Numero máximo de iterações - total
K_Penal=3       !* Penalização da rigidez
/CONT,ALL,10,0,,1 !* Fixa a escala
F_Esc_X=5       !* Fator de escala - eixo X
N_Div_Y=10      !* Numero de divisoes - eixo Y

!*****
!* DEFINE AS PROPRIEDADES DO MATERIAL

/PREP7
ANTYPE,0

!* Módulo de elasticidade e Módulo de Poisson

MP,EX,Mat_d+1,Mat_E
MP,PRXY,Mat_d+1,Mat_v
*DO,Var_N,1,Mat_d,1
  MP,EX,Var_N,Mat_E*(Var_N/Mat_d)**K_Penal
  MP,PRXY,Var_N,Mat_v
  R,Var_N,2
  RMORE
  RMORE,Mat_d+1,,Lay_Thk1
  RMORE,Var_N,,Lay_Thk2
*ENDDO
FINISH

```

```

!*****
!*
!* CARREGAR MODELO DE ELEMENTOS FINITOS
!*
!*****

!*****
!*** PROPRIEDADES DO MODELO / VARIÁVEIS

/PREP7
*GET,N_Elem,ELEM,,COUNT
*GET,N_Node,NODE,,COUNT

*DIM,X_DER,ARRAY,N_Elem,0,0
*DIM,X_DER_New,ARRAY,N_Elem,0,0
*DIM,X_ELE,ARRAY,N_Elem,0,0
*DIM,X_NEW,ARRAY,N_Elem,0,0
*DIM,X_OLD,ARRAY,N_Elem,0,0
*DIM,V_ELE,ARRAY,N_Elem,0,0
*DIM,V_A1,ARRAY,N_Elem,0,0
*DIM,V_A2,ARRAY,N_Elem,0,0
*DIM,V_A3,ARRAY,N_Elem,0,0
*DIM,Lmid,ARRAY,ITot_Max,0,0
*DIM,M_VIZ,ARRAY,N_Face*(N_Face+1),0,0
*DIM,M_SOR,ARRAY,N_Face*(N_Face+1),0,0
*DIM,R_TCOMP,ARRAY,ITot_Max,0,0
*DIM,R_TVOL,ARRAY,ITot_Max,0,0
*DIM,R_CLoop,ARRAY,ITot_Max,0,0
*DIM,R_VChan,ARRAY,ITot_Max,0,0
*DIM,R_K_Pen,ARRAY,ITot_Max,0,0

FINISH

!*****
!* CÓDIGO OT

*VCUM,0
*VOPER,X_NEW(1),Vol_Frac,ADD,0
Var_Loop=0
Var_Control=0
Var_Chg=1
Var_Move=0.05

*DO,C_i,1,ITot_Max,1

!*****
!* REDEFINE AS PROPRIEDADES DO MATERIAL

/PREP7
!* Módulo de elasticidade e Módulo de Poisson
*DO,Var_N,1,Mat_d,1
  MP,EX,Var_N,Mat_E*(Var_N/Mat_d)**K_Penal
  R,Var_N,2
  RMORE
  RMORE,Mat_d+1,,Lay_Thk1
  RMORE,Var_N,,Lay_Thk1
*ENDDO

```

```

!*****
!* DEFINE AS NOVAS PROPRIEDADES DOS ELEMENTOS

*VOPER,X_ELE(1),X_NEW(1),MULT,Mat_d      ! X_ELE=X_NEW*Mat_d
*VFUN,X_ELE(1),NINT,X_ELE(1)           !X_ELE=integer(X_ELE)
*DO,Var_N,1,N_Elem,1
    EMODIF,Var_N,MAT,X_ELE(Var_N)
*ENDDO

*VOPER,X_ELE(1),X_ELE(1),DIV,Mat_d      ! X_ELE=X_ELE/Mat_d

FINISH

!*****
!* ATUALIZA VARIÁVEIS

Var_Loop=Var_Loop+1
Var_Control=Var_Control+1
R_K_Pen(Var_Loop)=K_Penal
*VFUN,X_OLD(1),COPY,X_NEW(1)

!*****
!* SOLUÇÃO - FEA

/SOLU
EQSLV,FRONT
SOLVE

FINISH

!*****
!* PROPRIEDADES - FUNÇÃO OBJETIVO

/POST1
TOT_VOL=0
TOT_COMP=0
disp_UZ=0
*DO,Var_N,1,N_Elem,1
    *GET,V_ELE(Var_N),ELEM,Var_N,VOLU
    TOT_VOL=TOT_VOL+V_ELE(Var_N)
    *GET,Var_Sene,ELEM,Var_N,SENE
    Var_Sene=Var_Sene/(X_NEW(Var_N)**K_Penal)
!* Função objetivo - Flexibilidade
    TOT_COMP=TOT_COMP+(2*Var_Sene)*X_NEW(Var_N)**K_Penal
!* Sensibilidade - Função objetivo - Parcela=Rigidez
    X_DER(Var_N)=-(2*Var_Sene)*
        K_Penal*X_NEW(Var_N)**(K_Penal-1)

    !*  $V(k+1) = V(K) + V(Var\_N)$ 
    !*  $Var\_Sene = (u.K.u)/2$ 
    !*  $C(k+1) = C(k) + 2.Var\_Sene.X\_NEW(Var\_N)^{K\_Penal}$ 
        =  $C(k) + (u.K.u).X\_NEW(Var\_N)^{K\_Penal}$ 
    !*  $dC = -(u.K.u).K\_Penal.X\_NEW(Var\_N)^{K\_Penal}$ 

*ENDDO
FINISH

```

```

!*****
!* CRITÉRIO DA OPTIMALIDADE

!Função Objetivo: Min Flexibilidade (escalar: TOT_COMP)
!Variáveis: Propriedades do elemento (vetor: X_ELE)
!Restrição: Vol total do corpo < Vol especificado
              (escalar:TOT_VOL)

Var_L1=0
Var_L2=1000
Var_DtL=Var_L2
C_jj=0
*DO,C_j,1,10000,1
  C_jj=C_jj+1
  *IF,C_jj,EQ,1,THEN
    Var_LMid=Var_L2
  *ELSE
    Var_LMid=0.5*(Var_L1+Var_L2)
  *ENDIF
  *VOPER,V_A1(1),V_ELE(1),MULT,-Var_LMid
  *VOPER,V_A2(1),X_DER(1),DIV,V_A1(1)
  *VFUN,V_A1(1),PWR,V_A2(1),(0.5)
  *VOPER,V_A2(1),X_OLD(1),MULT,V_A1(1)
  *VOPER,V_A1(1),X_OLD(1),ADD,Var_Move
  *VOPER,V_A3(1),V_A1(1),MIN,V_A2(1)
  *VOPER,V_A1(1),1,MIN,V_A3(1)
  *VOPER,V_A2(1),X_OLD(1),SUB,Var_Move
  *VOPER,V_A3(1),V_A1(1),MAX,V_A2(1)
  *VOPER,X_NEW(1),0.001,MAX,V_A3(1)

! V_A1=V_ELE*(-Var_LMid)
! V_A2=(dc./V_A1)
! V_A1=(V_A2)^0.5
! V_A2=X_NEW*V_A1
! V_A1=X_NEW+Move
! V_A3=MIN(V_A1,V_A2)
! V_A1=MIN(1,V_A3)
! V_A2=X_NEW-Move
! V_A3=MAX(V_A1,V_A2)
! X_NEW=MAX(0.001,V_A3)

  *VOPER,V_A1(1),X_NEW(1),MULT,V_ELE(1)
  *VSCFUN,Var_Aux1,SUM,V_A1(1)           ! Sum(xnew)

  *IF,Var_Aux1,GT,(Vol_Frac*TOT_VOL),THEN
    Var_L1=Var_LMid
    *IF,C_jj,EQ,1,THEN
      Var_L2=Var_L2*10
      C_jj=0
    *ENDIF
  *ELSE
    Var_L2=Var_LMid
  *ENDIF

Var_DtL=(Var_L2-Var_L1)/(Var_L2+Var_L1)
*IF,Var_DtL,LT,0.0001,THEN

```

```

                *Exit                                ! Sai do Loop
            *ENDIF
            *IF,Var_L2,LT,1e-10,THEN
                *Exit                                ! Sai do Loop
            *ENDIF
        *ENDDO
        Lmid(C_i)=Var_LMid
        TOT_VOL_R=Var_Aux1                            ! Volume real

!*****
!* APRESENTACAO DOS RESULTADOS

/POST1
SET,FIRST
ETABLE,,EPEL,EQV
*VPUT,X_NEW(1),ELEM,,ETAB,EPELEQV,,2
PLETAB,EPELEQV
/TITLE,It=%C_i% Comp=%TOT_COMP% K_P=%K_Penal%

/VIEW, 1 ,0,0,1
/REPLOT
/SHOW,PNG
PNGR,COMP,1,-1
PNGR,ORIENT,HORIZ
PNGR,COLOR,2
PNGR,TMOD,1
/GFILE,1200
/RGB,INDEX,100,100,100,0
/RGB,INDEX,0,0,0,15
/REPLOT
/SHOW,CLOSE
ALLSEL

FINISH

!*****
*VOPER,V_A1(1),X_NEW(1),SUB,X_OLD(1)
*VFUN,V_A2(1),PWR,V_A1(1),2
*VFUN,V_A1(1),SQRT,V_A2(1)
*VSCFUN,Var_Chg,MAX,V_A1(1)

R_TCOMP(Var_Loop)=TOT_COMP
R_TVOL(Var_Loop)=TOT_VOL_R/TOT_VOL
R_CLoop(Var_Loop)=Var_Loop
R_VChan(Var_Loop)=Var_Chg

*ENDDO

!*****
!* APRESENTACAO DOS RESULTADOS

DIM,R_Iter,ARRAY,Var_Loop,0,0
DIM,R_FObj,ARRAY,Var_Loop,0,0

*DO,C_i,1,Var_Loop,1
    R_Iter(C_i)=C_i

```

```

      R_FObj(C_i)=R_TCOMP(C_i)
*ENDDO

N_DivX=NINT(Var_Loop/F_Esc_X)
*IF,N_DivX*F_Esc_X,LT,Var_Loop,THEN
  N_DivX=N_DivX+1
*ENDIF

*VSCFUN,FObj_max,MAX,R_FObj(1)
*VSCFUN,FObj_min,MIN,R_FObj(1)
L_InfY=(NINT(FObj_min/N_Div_Y)-1)*N_Div_Y
Delta_Y=(NINT((FObj_max-FObj_min)/N_Div_Y)+2)*N_Div_Y

*VPLOT,R_Iter(1),R_FObj(1)
/XRANGE,0,N_DivX*F_Esc_X
/YRANGE,L_InfY,L_InfY+Delta_Y
/GROPT,DIVX,N_DivX
/GROPT,DIVY,N_Div_Y
/AXLAB,X,Iteracao
/AXLAB,Y,Flexibilidade
/TITLE,Convergencia da funcao objetivo
/REPLOT
/SHOW,PNG
PNGR,COMP,1,-1
PNGR,ORIENT,HORIZ
PNGR,COLOR,2
PNGR,TMOD,1
/GFILE,1200
/RGB,INDEX,100,100,100,0
/RGB,INDEX,0,0,0,15
/REPLOT
/SHOW,CLOSE

*CFOPEN,Resultados,'txt'
*VWRITE,R_CLoop(1),R_TCOMP(1),R_TVOL(1),R_VChan(1),R_K_Pen(1),
Lmid(1)
*CFCLOSE

```