ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

ESTUDO DA DINÂMICA VERTICAL DE UM VEÍCULO ATRAVÉS DA TEORIA DE SISTEMAS MULTICORPOS

Vinícius Lopes dos Santos

São Paulo
2007

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

ESTUDO DA DINÂMICA VERTICAL DE UM VEÍCULO ATRAVÉS DA TEORIA DE SISTEMAS MULTICORPOS

Trabalho de Formatura apresentado à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Graduação em Engenharia

Vinícius Lopes dos Santos

Orientador:
Prof. Dr. Roberto Spinola Barbosa

Área de Concentração:
Engenharia Mecânica

São Paulo
2007

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

FICHA CATALOGRÁFICA

Santos, Vinícius Lopes dos
Estudo da dinâmica vertical de um veículo através da teoria de sistemas multicorpos / V.L. dos Santos. -- São Paulo, 2007.
132 p.

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1.Dinâmica veicular 2.Sistemas dinâmicos (Simulação) 3.Softwares (Simulação) 4.Teoria de sistemas I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II.t.

Aos meus pais e às minhas irmãs

AGRADECIMENTOS

Ao professor Dr. Roberto Spinola Barbosa pela orientação, pelas instruções precisas e pelo constante incentivo;

aos meus pais, Virgilio e Hidely, e às minhas irmãs, Fernanda e Paula, pelo apoio e pela paciência ao longo de todos estes anos da graduação;

aos colegas Rui Magalhães e Silvio Alano pelas sugestões e pelas orientações muito valiosas para este trabalho;

a todos os meus professores, que, durante todas as fases de minha vida, contribuíram com muita dedicação para a minha formação.

RESUMO

Neste trabalho é feita uma revisão bibliográfica sobre dinâmica veicular vertical e modelagem de veículos automotivos. Dada a complexidade da teoria de multicorpos envolvida no estudo proposto, apresenta-se uma breve revisão sobre os principais formalismos empregados na determinação das equações dinâmicas de sistemas mecânicos. Esta fase inicial do trabalho é necessária para garantir o cumprimento dos objetivos deste projeto, que são o estudo do comportamento dinâmico vertical do sistema de suspensão de um veículo comercial e a validação de uma metodologia para o estudo de sistemas multicorpos. Para tanto, um veículo com sete graus de liberdade foi modelado matematicamente através do software de multicorpos AUTOLEV. A carroceria do veículo foi modelada como um corpo rígido ligado a quatro massas, representando as rodas e as partes móveis da suspensão, através de molas e amortecedores lineares. Estas massas podem se deslocar em relação ao chassis do automóvel, possuindo um grau de liberdade de translação cada, e estão ligadas à superfície do pavimento através de molas e amortecedores, representando a rigidez mecânica e o coeficiente de amortecimento dos pneus. A carroceria rígida do veículo possui três graus de liberdade, podendo transladar verticalmente além de apresentar os movimentos de rolagem e arfagem. Os dados utilizados para a modelagem foram baseados em um veículo *off-road* comercial de médio porte, mas a abordagem utilizada neste trabalho é aplicável a uma grande variedade de tipos de automóveis. As equações de movimento do modelo apresentado foram desenvolvidas a partir do formalismo de Kane através do AUTOLEV. Determinadas as equações dinâmicas do veículo, elas foram integradas numericamente através do MATLAB e o modelo desenvolvido foi validado comparando-se suas freqüências naturais àquelas apresentadas por modelos analíticos simplificados. Em seguida, simulou-se o tráfego do veículo em velocidade constante sobre trechos de pistas com lombada e com obstáculo de torção dinâmica.

Palavras-chave: *dinâmica; veículo; multicorpos; simulação; AUTOLEV*

ABSTRACT

This work includes a review about vertical vehicle dynamics and automotive vehicles modeling. As the multibody systems theory involved is relatively complicated, it is presented a review about the main multibody systems formalisms used to solve the dynamics of mechanical systems. This initial phase is necessary to achieve the main goals of this project, which are the study of the vertical dynamic behavior of the suspension of a commercial vehicle and the validation of a methodology for the study of multibody systems. For this study a seven-degree-of-freedom vehicle was modeled on the multibody systems software AUTOLEV. The chassis of the vehicle was modeled as a rigid body linked to four masses, which represent the wheels of the car, by means of linear springs and dampers. These masses can move vertically relatively to the chassis, so they have one translational degree of freedom each, and they are linked to the track surface by springs and dampers which represent the mechanical stiffness and damping coefficient of the tires. The body of the car has three degrees of freedom: it can translate vertically and also presents pitch and roll movements. The data used for the modeling was based on an off-road commercial vehicle, but the approach used in this work is valid for many automobile types. The dynamic equations of the vehicle were deducted through Kane's formalism in AUTOLEV. Determined the dynamical equations of the car, these were numerically integrated in MATLAB and the model was validated through the comparison of its eigenmodes and eigenfrequencies with simple analytical models. After that, the dynamic behavior of the vehicle at constant speed on pieces of tracks with a spine and with a dynamic torsion obstacle was simulated.

Keywords: *dynamics; vehicle; multibody systems; simulation; AUTOLEV*

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LISTA DE SÍMBOLOS

1. INTRODUÇÃO 1

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA 3

2.1. Sistemas Multicorpos no Desenvolvimento de Produtos 3

2.2. Softwares de Multicorpos e Metodologia de Análise 8

2.3. Dinâmica Veicular, Conforto e Segurança 12

2.4. Modelagem Matemática de Sistemas Dinâmicos 20

3. REVISÃO E APLICAÇÃO DA TEORIA DE MULTICORPOS 28

3.1. Definições Básicas 29

3.2. Abordagem Euleriana 33

3.3. Abordagem Lagrangeana 35

3.4. Formalismo de Kane 41

3.5. Princípio de Jourdain 46

3.6. Exemplo de Aplicação da Teoria de Multicorpos 49

4. O SOFTWARE AUTOLEV 55

4.1. Exemplo de Aplicação do Software AUTOLEV 59

5. MODELO DO VEÍCULO 66

5.1. Introdução 66

5.2. Modelo Físico do Veículo 66

5.3. Dados do Veículo 69

5.4. Modelo Matemático do Veículo 70

6. VALIDAÇÃO DO MODELO DO VEÍCULO 72

6.1. Validação dos Graus de Liberdade 1 e 2 73

6.2. Validação dos Graus de Liberdade 3 e 4 76

6.3. Validação dos Graus de Liberdade 5, 6 e 7 78

7. SIMULAÇÕES DO VEÍCULO EM TRECHOS IRREGULARES DE PISTA 90

7.1. Veículo Trafegando sobre Trecho de Pista com Lombada 90

7.2. Veículo Trafegando sobre Trecho de Pista de Torção Dinâmica 95

8. OBSERVAÇÕES E CONCLUSÕES 100

9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 103

ANEXO A – PRINCIPAIS COMANDOS UTILIZADOS EM SIMULAÇÕES DINÂMICAS NO AUTOLEV 107

ANEXO B – CONTEÚDO DO ARQUIVO EXEMPLO.ALL 110

ANEXO C – CONTEÚDO DO ARQUIVO VEICULO.ALL 114

LISTA DE TABELAS

Tab. 1: Dados do veículo comercial *off-road* empregados nas simulações. 70
Tab. 2: Resultados da verificação das freqüências naturais de vibração das rodas 1 e 2. 76
Tab. 3: Resultados da verificação das freqüências naturais de vibração das rodas 3 e 4. 78
Tab. 4: Resultados da verificação das freqüências naturais de vibração da carroceria do veículo. 89

LISTA DE FIGURAS

Fig. 1: Fluxograma geral da metodologia de análise utilizada..... 2
Fig. 2: Diagrama das diferentes abordagens de MBS (adaptada de Costa [18])..... 28
Fig. 3: Configuração de um sistema de partículas (extraída de Costa [18]). 30
Fig. 4: Exemplo de sistema multicorpo (extraída de Kane; Levinson [19]). 50
Fig. 5: Sistema a ser resolvido através do AUTOLEV (extraída de Kane; Levinson [19]).... 60
Fig. 6: Prompt do AUTOLEV com exemplo de linha de comando..... 62
Fig. 7: Equações dinâmicas das partículas P_1 e P_2 obtidas com o AUTOLEV..... 62
Fig. 8: Aspecto geral do ALPLOT, módulo do AUTOLEV para a construção de gráficos.... 63
Fig. 9: Fluxograma de procedimentos das análises realizadas..... 64
Fig. 10: Função de posição do tubo em relação à vertical no exemplo de aplicação do AUTOLEV.... 64
Fig. 11: Posições de P_1 e P_2 na direção do tubo e em relação ao ponto O no exemplo de aplicação do AUTOLEV.... 65
Fig. 12: Modelo do veículo, seus graus de liberdade e sistemas de coordenadas..... 68
Fig. 13: Modelo do veículo, suas dimensões e parâmetros principais..... 69
Fig. 14: Modelo analítico simplificado para o estudo da freqüência natural de oscilação das rodas. Para o caso das rodas dianteira esquerda e dianteira direita (coordenadas generalizadas q_1 e q_2), tem-se $k_1 = k_{diant}$ e $k_2 = k_{pneu}$ 74
Fig. 15: Gráfico de função PSD para a oscilação livre das rodas dianteira esquerda (q_1) e dianteira direita (q_2). 75
Fig. 16: Modelo analítico simplificado para o estudo da freqüência natural de oscilação das rodas. Para o caso das rodas traseira direita e traseira esquerda (coordenadas generalizadas q_3 e q_4), tem-se $k_1 = k_{tras}$ e $k_2 = k_{pneu}$ 76
Fig. 17: Gráfico de função PSD para a oscilação livre das rodas traseira direita (q_3) e traseira esquerda (q_4)..... 77

Fig. 18: Modelo analítico simplificado para o estudo das freqüências naturais dos movimentos de rolagem (coordenada generalizada q_6) e de translação vertical (coordenada generalizada q_5) desacoplados. 79
Fig. 19: Gráfico de função PSD para a oscilação livre de rolagem da carroceria (q_6) para $M_R = 130kg$ (realidade) e para $M_R = 1kg$ (extrapolação). 81
Fig. 20: Modelo analítico simplificado para o estudo das freqüências naturais dos movimentos de arfagem (coordenada generalizada q_7) e de translação vertical (coordenada generalizada q_5) acoplados. 82
Fig. 21: Primeiro modo de vibrar acoplado para os movimentos de arfagem (coordenada generalizada q_7) e de translação vertical (coordenada generalizada q_5) da carroceria. 85
Fig. 22: Segundo modo de vibrar acoplado para os movimentos de arfagem (coordenada generalizada q_7) e de translação vertical (coordenada generalizada q_5) da carroceria. 85
Fig. 23: Gráfico de função PSD para a oscilação livre de arfagem da carroceria (q_7) para $M_R = 130kg$ (realidade) e para $M_R = 1kg$ (extrapolação). 86
Fig. 24: Gráfico de função PSD para a oscilação livre do movimento de translação vertical da carroceria (q_5) para $M_R = 130kg$ (realidade) e para $M_R = 1kg$ (extrapolação). 87
Fig. 25: Perfil de pista visto por cada uma das rodas quando o veículo trafega sobre trecho de pista com lombada. 91
Fig. 26: Deslocamentos verticais de cada uma das rodas durante a simulação de tráfego sobre trecho de pista com lombada. 92
Fig. 27: Forças nas suspensões durante a simulação de tráfego sobre trecho de pista com lombada. 92
Fig. 28: Forças de interação entre pneu e pavimento durante a simulação de tráfego sobre trecho de pista com lombada. 93
Fig. 29: Deslocamento vertical da carroceria durante a simulação de tráfego sobre trecho de pista com lombada. 94

Fig. 30: Ângulo de arfagem da carroceria durante a simulação de tráfego sobre trecho de pista com lombada. 95
Fig. 31: Perfil de pista visto por cada uma das rodas quando o veículo trafega sobre o trecho de pista de torção dinâmica. 96
Fig. 32: Deslocamentos verticais de cada uma das rodas durante a simulação de tráfego sobre trecho de pista de torção dinâmica. 97
Fig. 33: Forças nas suspensões durante a simulação de tráfego sobre trecho de pista de torção dinâmica. 97
Fig. 34: Forças de interação entre pneu e pavimento durante a simulação de tráfego sobre trecho de pista de torção dinâmica. 98
Fig. 35: Ângulo de rolagem da carroceria durante a simulação de tráfego sobre trecho de pista de torção dinâmica. 99

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABS – Antilock Braking System

CACE – Computer Aided Control Engineering

CAD – Computer Aided Design

CAE – Computer Aided Engineering

CFD – Computational Fluid Dynamics

DAE – Differential Algebraic Equations

FE – Finite Elements

LPA – Longitudinal Profile Analyser

MAGLEV – Magnetically Levitated Vehicles

MBS – Multibody Systems

NVH – Noise Vibration and Harshness

ODE – Ordinary Differential Equations

PSD – Power Spectral Density

LISTA DE SÍMBOLOS

x_i	Coordenada x da partícula i
y_i	Coordenada y da partícula i
z_i	Coordenada z da partícula i
t	Tempo
q_r	Coordenada generalizada
u_r	Velocidade generalizada
$\vec{L}^B$	Momento linear do corpo B
m^B	Massa do corpo B
$\vec{v}^{B*}$	Velocidade do centro de massa do corpo B
$\vec{H}^{B*}$	Momento angular central do corpo B em relação ao seu centro de massa
I^{B*}	Matriz de inércia do corpo B em relação ao seu centro de massa
$\vec{\omega}^B$	Velocidade angular do corpo B
$\vec{R}^B$	Resultante de forças atuantes no corpo B
$\vec{a}^{B*}$	Aceleração do centro de massa do corpo B
$\vec{T}^B$	Resultante de momentos atuantes no corpo B
$\vec{\alpha}^B$	Aceleração angular do corpo B
m^{Pi}	Massa da partícula P_i
R_{xi}	Resultante de forças na direção x atuantes na partícula P_i
R_{yi}	Resultante de forças na direção y atuantes na partícula P_i
R_{zi}	Resultante de forças na direção z atuantes na partícula P_i
δ_{xi}	Deslocamento virtual na direção x imposto à partícula P_i
δ_{yi}	Deslocamento virtual na direção y imposto à partícula P_i
δ_{zi}	Deslocamento virtual na direção z imposto à partícula P_i
K	Energia cinética
V	Energia potencial
f	Função de dissipação

λ_i Multiplicador de Lagrange

$\vec{\omega}_r^B$ R-ésima velocidade angular parcial holonômica do corpo B

$\vec{v}_r^{Pi}$ R-ésima velocidade parcial holonômica da partícula P_i

$\vec{\tilde{\omega}}_r^B$ R-ésima velocidade angular parcial não-holonômica do corpo B

$\vec{\tilde{v}}_r^{Pi}$ R-ésima velocidade parcial não-holonômica da partícula P_i

F_r Força ativa generalizada

F_r^* Força de inércia generalizada

$\delta_{\dot{x}i}$ Velocidade virtual em x imposta à partícula P_i

$\delta_{\dot{x}i}$ Velocidade virtual em x imposta à partícula P_i

$\delta_{\dot{y}i}$ Velocidade virtual em y imposta à partícula P_i

$\delta_{\dot{z}i}$ Velocidade virtual em z imposta à partícula P_i

k_i Constante elástica da mola i

L_i Dimensão linear relativa ao elemento i

g Aceleração da gravidade

M Matriz de massas de um sistema

K Matriz de rigidez de um sistema

A_q Amplitude de oscilação de um grau de liberdade

ω Freqüência natural angular de vibração

ϕ Ângulo de fase, ou de defasagem

I Matriz identidade

f_q Freqüência natural de vibração relativa em relação a um grau de liberdade

1. INTRODUÇÃO

A utilização de ferramentas computacionais como softwares de multicorpos é crescente na indústria automobilística da atualidade por permitir a redução de custos de projeto, a abreviação do tempo de desenvolvimento e lançamento do produto no mercado, além de permitir o estudo de diversas alternativas funcionais e a otimização de soluções já conhecidas de forma muito mais rápida e eficiente.

Apesar de grande parte dos pesquisadores se dedicarem ao desenvolvimento de sistemas de suspensões ativas e semi-ativas cada vez mais inteligentes e sofisticados, a maior parte dos veículos comercializados no mundo atual ainda vem equipada com sistemas de suspensão passiva, que, apesar de não terem capacidade alguma de adaptação, são baratos e bastante confiáveis.

Dada a crescente exigência por veículos mais seguros, confortáveis, silenciosos e de baixo custo por parte dos consumidores e a importância do estudo da dinâmica veicular vertical neste contexto, a utilização da teoria de sistemas multicorpos no estudo de sistemas de suspensão passiva de veículos comerciais pode ser considerado um tema bastante atual e interessante para um trabalho de conclusão de curso na área de Engenharia Mecânica.

Este trabalho foi motivado pelas tendências apontadas acima e consiste em um estudo do comportamento dinâmico vertical da suspensão passiva de um veículo comercial envolvendo análises modais e cenários específicos, em que o mesmo trafega em linha reta e em velocidade constante por trechos de pista com irregularidades como lombadas e obstáculos de torção dinâmica.

É importante ressaltar que os principais objetivos deste trabalho são o estudo da dinâmica vertical de um veículo comercial e, também, a validação de uma metodologia para o estudo de sistemas multicorpos envolvendo desde a modelagem física do sistema até a validação e a análise dos resultados fornecidos pelo modelo, conforme mostra a Fig. 1.

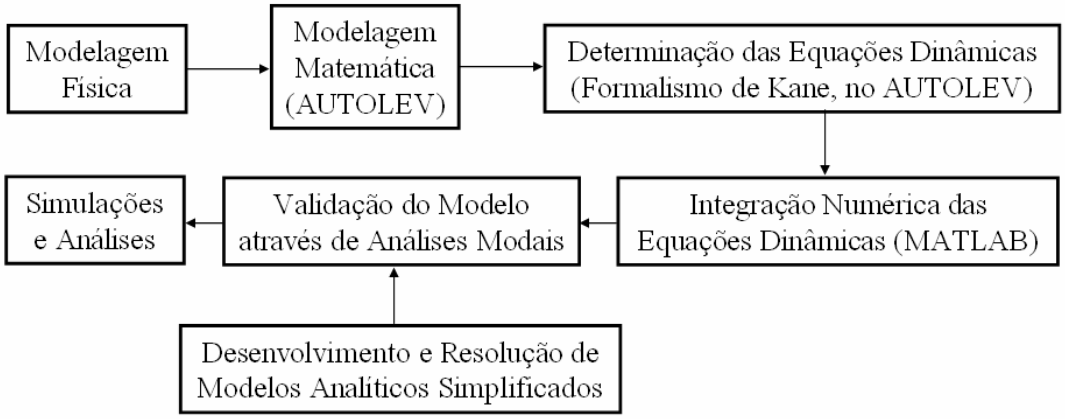

Fig. 1: Fluxograma geral da metodologia de análise utilizada.

Como o objetivo deste estudo é um veículo *off-road* comercial de médio porte, um modelo não-linear de veículo completo com sete graus de liberdade foi desenvolvido através do software de multicorpos AUTOLEV. As equações dinâmicas do veículo foram obtidas através do formalismo de Kane, disponível no próprio AUTOLEV, e integradas numericamente no MATLAB. Para validar o modelo computacional desenvolvido, suas freqüências naturais foram determinadas e comparadas às freqüências naturais apresentadas por modelos analíticos simplificados. Finalmente, o modelo validado foi submetido às simulações de tráfego sobre pistas com perfis irregulares e o comportamento vertical de seu sistema de suspensão foi avaliado.

O modelo não-linear de veículo desenvolvido ao longo deste trabalho pode ser utilizado, por exemplo, nas etapas iniciais do dimensionamento de um sistema de suspensão veicular, em que se pretende determinar a influência da rigidez das molas e do coeficiente de amortecimento dos amortecedores no comportamento dinâmico vertical do carro. Uma linearização deste modelo poderia, ainda, torna-lo útil para a otimização do sistema de suspensão do veículo.

Dada a complexidade do tema abordado, bem como do pacote de multicorpos escolhido para a realização deste estudo, foram feitas uma revisão bibliográfica sobre dinâmica veicular e modelagem matemática de veículos, além de uma revisão relativamente profunda sobre a teoria de sistemas multicorpos envolvida e sobre o software AUTOLEV.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1. Sistemas Multicorpos no Desenvolvimento de Produtos

O rápido desenvolvimento de novas ferramentas computacionais das últimas décadas tem causado um grande impacto no processo de desenvolvimento de produtos. Diferentes softwares baseados em diversas disciplinas da engenharia já se encontram disponíveis para auxiliar os engenheiros neste processo. No entanto, é importante que estas disciplinas encontrem-se integradas em um processo de Engenharia Simultânea (do inglês, *Simultaneous Engineering*), onde todas as atividades importantes como projeto, análises, testes e fabricação sejam envolvidas o mais cedo possível no processo de desenvolvimento de um novo produto. Esta metodologia permite que se tomem decisões corretas antecipadamente e, assim, tanto o tempo quanto o custo do projeto podem ser reduzidos.

A superposição de diferentes fases no processo de desenvolvimento do produto e a cooperação entre as várias equipes de projeto permitem a aplicação de teorias como Desenvolvimento Integrado de Produto (do inglês, *Integrated Product Development*), Organização de Grupos de Trabalho (aplicação da teoria de *Concurrent Engineering*), bem como da supracitada Engenharia Simultânea, que têm sido muito pesquisadas nos últimos tempos e baseiam-se, principalmente, nos seguintes aspectos:

- Melhoria da qualidade do produto.
- Redução dos custos de projeto, fabricação e manutenção.
- Diminuição do tempo de desenvolvimento do produto.

As possibilidades e vantagens propiciadas pela simulação computacional de sistemas mecânicos ainda não se encontram completamente exploradas na indústria da atualidade. Segundo Larsson [1], através do uso adequado de ferramentas de simulação, o setor industrial pode:

- Experimentar um maior número de alternativas de projeto em um menor intervalo de tempo.
- Simular um maior número de condições às quais o produto estaria sujeito, possibilitando a descoberta de um possível comportamento não esperado.

- Melhorar a qualidade do produto por adquirir um maior conhecimento do mesmo e, conseqüentemente, tomar decisões de forma mais correta.
- Diminuir o tempo de lançamento de um produto no mercado através da redução de iterações de projeto.
- Desenvolver produtos orientados por simulações computacionais e não simplesmente verificados por ela.
- Verificar através de testes virtuais que o produto efetivamente cumpre as especificações de projeto e satisfaz os requisitos dos consumidores.
- Otimizar diversos parâmetros do produto antes mesmo da construção do protótipo.

Larsson [1] ressalta, ainda, os benefícios da aplicação da simulação computacional para a comunidade acadêmica:

- Adquirir um maior conhecimento da teoria de sistemas multicorpos.
- Identificar os fatores que influenciam a eficiência do processo de simulação de sistemas multicorpos.
- Descobrir a melhor forma de estruturar o processo de simulação de sistemas multicorpos quando do desenvolvimento de novos produtos.

O desenvolvimento de ferramentas CAD (*Computer Aided Design*) permite sua utilização em uma grande parte da cadeia de desenvolvimento de um produto. Uma análise integrada de um produto ainda em fase de projeto já é possível já que modelos CAD podem ser utilizados na criação de modelos de Elementos Finitos (*Finite Elements*, ou FE) para análises estruturais, modelos MBS (*Multibody Systems*) para análises dinâmicas e até modelos CFD (*Computational Fluid Dynamics*) para simulações de escoamento ou interações fluido-estrutura. Ainda dentro do contexto das ferramentas computacionais empregadas no desenvolvimento de produtos, é importante citar aquelas responsáveis por implementar leis de controle aos modelos mencionados, ou seja, os sistemas CACE (*Computer Aided Control Engineering*).

Aplicações freqüentes das ferramentas computacionais acima mencionadas podem ser facilmente encontradas no desenvolvimento de sistemas de freio anti-travamento (*Antilock Braking Systems*, ou ABS) e em sistemas de controle da dinâmica longitudinal de veículos de passeio (*Cruise Control*).

Kortüm; Vaculín [2] propõem uma integração entre todas estas ferramentas, já que ainda não existe um pacote de engenharia multidisciplinar que aborde todas as disciplinas necessárias para que se construa um modelo completo. Os autores sugerem a utilização de um pacote CAD para a construção de um modelo tridimensional que poderia ser exportado para um software MBS para a geração das equações dinâmicas a partir do formalismo de Newton-Euler, por exemplo. Após um estudo do comportamento dinâmico do sistema em malha aberta no software MBS, as equações poderiam ser exportadas para um pacote CACE, onde seriam linearizadas e o sistema seria submetido a uma lei de controle. Como o controlador deve ser validado no modelo não-linear, o software MBS seria utilizado na simulação final do sistema controlado. Finalizado o procedimento de simulação do modelo controlado, poder-se-ia importar a geometria desenvolvida no pacote CAD para desenvolver animações tridimensionais das simulações, o que facilitaria uma análise do comportamento dinâmico geral do sistema em questão.

Segundo Kortüm; Vaculín [2], o estágio de desenvolvimento dos pacotes MBS mostra que uma ferramenta computacional de multicorpos poderia facilmente atuar como uma plataforma integradora para todas as ferramentas de *Computer Aided Engineering* (CAE) supracitadas. Pode-se citar, como exemplo, o software SIMPACK, que é tradicionalmente conhecido por atuar como interface entre os outros pacotes CAE e acaba sendo muito utilizado como solução no desenvolvimento de projetos mecatrônicos.

Nos últimos anos grandes esforços têm sido feitos no sentido de promover uma interação completa entre ferramentas computacionais de MBS e FE através da introdução de corpos flexíveis nos pacotes de MBS. Tais esforços visam à concretização e à difusão destas poderosas ferramentas para a resolução de inúmeros problemas da Engenharia Mecânica da atualidade.

De acordo com Vaculín; Krüger; Valásek [3], a busca de uma interface entre os vários pacotes CAE surgiu da necessidade de desenvolver e simular novos sistemas mecatrônicos, onde a complexidade dos controladores era crescente devido, também, à inclusão de corpos elásticos nos sistemas. Como a exportação de modelos linearizados de um software MBS para um pacote CACE era uma tarefa relativamente simples até então e dado que os códigos-fonte gerados em pacotes

MBS eram historicamente melhor preparados para exportação que os códigos CACE, era mais fácil adaptar os códigos MBS para serem trabalhados em softwares CACE que o contrário. No entanto, com o passar do tempo, os pacotes MBS mostraram fazer uso de recursos numéricos mais avançados para a solução das equações dinâmicas, e, assim, nos últimos anos do século passado, surgiram as chamadas interfaces inversas, onde módulos simplificados para o projeto de controladores já encontravam-se “embutidos” nos softwares MBS, o que significa que agora os códigos CACE passaram a ser importados para pacotes MBS.

Rauh [4] defende que através da utilização de ferramentas de simulação e da realização de experimentos com produtos virtuais, as empresas podem melhorar seu processo de desenvolvimento, culminando na elaboração de produtos otimizados e de melhor qualidade e permitindo que estes sejam lançados no mercado em um período de tempo reduzido. Apesar disso, o autor ressalta a importância da construção de protótipos para a verificação de requisitos legais associados ao produto, para o levantamento de parâmetros a serem utilizados nas simulações e também para o ajuste final dos componentes.

Segundo a definição de Larsson [1], um sistema multicorpos é um sistema constituído por corpos sólidos que são conectados uns aos outros por juntas que restringem seus movimentos relativos. O estudo de sistemas multicorpos consiste em uma análise de como um mecanismo se movimenta através da influência de forças, ou seja, faz parte da chamada Dinâmica Direta. O estudo do problema inverso, isto é, quais forças são necessárias para fazer um mecanismo mover-se de uma forma específica é conhecido como um problema de Dinâmica Inversa e é muito útil no campo da Robótica, onde o controle preciso de movimentos é necessário.

Segundo Kortüm; Vaculín [2], o surgimento da abordagem MBS para a resolução de problemas dinâmicos data do início do século passado. No entanto, devido à não existência de recursos computacionais na época, as equações resultantes da teoria aplicada não podiam ser exploradas profundamente. A abordagem por multicorpos ficou, então, subutilizada por quase meio século, sendo retomada quando a humanidade iniciou suas tentativas de exploração do espaço. Nesta época, foi preciso desenvolver equações dinâmicas e suas soluções para satélites e ônibus espaciais complexos. Simultaneamente, grandes esforços foram feitos para

disponibilizar computadores digitais de alta capacidade de processamento, o que propiciou a utilização teoria de multicorpos na corrida espacial.

Wallrapp [5] ressalta que grande parte dos recursos investidos em pesquisas e no desenvolvimento de softwares relacionados à teoria de multicorpos teve origem governamental.

Após a explosão da teoria de MBS proporcionada por projetos de exploração do espaço, ela passou a ser utilizada em problemas dinâmicos terrestres, como mecanismos, robôs e até mesmo no desenvolvimento de veículos como os MAGLEV (do inglês, *Magnetically Levitated Vehicles*), trens convencionais e veículos rodoviários.

Larsson [1] ressalta que existem diferentes alternativas para a formulação das equações que regem a dinâmica de um sistema multicorpos. Os formalismos mais conhecidos são o de Newton-Euler, o de Lagrange e o desenvolvido por Kane, que é o mais recente. O formalismo de Newton-Euler baseia-se na inclusão de todas as forças de restrição atuando em todos os corpos do sistema, resultando em um maior número de equações que de incógnitas, o que atrapalha a resolução do problema. Os formalismos de Lagrange e de Kane eliminam as forças de restrição a partir da aplicação do Princípio de D'Alembert, o que possibilita a redução do número de equações em relação ao formalismo de Newton-Euler e uma resolução mais simples e eficiente para o problema abordado.

Wallrapp [5] destaca que, diferentemente do que acontece em análises por FE, as equações dinâmicas de MBS são, em geral, equações diferenciais não-lineares. Dependendo das coordenadas escolhidas para representar os movimentos dos corpos, pode-se chegar tanto a um sistema de equações diferenciais ordinárias (do inglês, *Ordinary Differential Equations*, ou ODEs) quanto a um conjunto de equações diferenciais com equações algébricas (do inglês, *Differential Algebraic Equations*, ou DAEs). Por isso, o desenvolvimento da teoria de multicorpos sempre esteve intimamente relacionada à solução de ODEs e DAEs, além do desenvolvimento de métodos numéricos para resolvê-las. Segundo Wallrapp [5], a grande vantagem da abordagem por multicorpos encontra-se na possibilidade de trabalhar com juntas não-lineares entre corpos e relações de forças também não-lineares para descrever o comportamento de corpos em aplicações específicas como

em motores magnéticos, contato entre roda e trilhos ferroviários, modelos de pneus, caracterização de molas e amortecedores viscosos e etc. Além disso, os poderosos métodos numéricos desenvolvidos para a resolução das equações dinâmicas de MBS permitem que engenheiros e cientistas obtenham resultados rápidos tanto no domínio do tempo quanto no domínio da freqüência.

2.2. Softwares de Multicorpos e Metodologia de Análise

Muitas ferramentas de simulação para a análise do comportamento dinâmico de sistemas mecânicos têm sido desenvolvidas nas últimas décadas. Estes softwares permitem a formulação das equações de movimento e sua resolução automática. Os softwares disponíveis no mercado têm diferentes recursos, como geração das equações de movimento na forma numérica ou simbólica, integradores numéricos, interface gráfica para a entrada e saída de dados, capacidade de animação gráfica dos resultados, conectividade com sistemas CAD e FE e até mesmo ferramentas para análise de sinais.

Segundo Larsson [1], softwares comerciais para simulação de sistemas mecânicos com integração CAD/CAE, como o ADAMS e o DADS começaram a ser desenvolvidos na década de 70. Eles são utilizados na determinação das equações dinâmicas de sistemas multicorpos e, para isso, fazem uso dos formalismos de Newton-Euler e de Lagrange. Além de determinar as equações, tais softwares também são capazes de integrá-las numericamente para condições iniciais previamente especificadas. Outros softwares utilizados na simulação de sistemas multicorpos são o Pro/MECHANICA e o WorkingModel, que também possibilitam a visualização dos resultados da simulação através de animações. Softwares mais especializados como SIMPACK, SOPHIA, AUTOLEV, GENSYS, DYMOLA e MathModelica também são amplamente difundidos e têm a vantagem de serem bastante flexíveis, sendo, no entanto, aconselhados para usuários com um conhecimento mais profundo da teoria de MBS. Destacam-se entre estes softwares o SOPHIA e o AUTOLEV, que são baseados no formalismo de Kane. O AutoSim também é um pacote bastante conhecido e é utilizado para geração de equações

dinâmicas na forma simbólica, além disso, o software inclui integradores numéricos e possibilita a usuário gerar códigos-fonte em linguagem C e Fortran.

Wallrapp [5] destaca a atuação da equipe de Willi Kortüm no desenvolvimento de pacotes MBS mundialmente conhecidos como FADYNA (1977), MEDYNA (1984) e SIMPACK (1990). Estes softwares continuam sofrendo atualizações contínuas devido ao surgimento de novos formalismos, a melhorias na arquitetura e no desempenho dos microcomputadores e também a novas alternativas de interface entre software e usuário, como animações para análise de resultados.

De acordo com Larsson [1], a metodologia de análise de um sistema de multicorpos pode ser dividida em 6 passos principais conforme segue:

1) *Formulação do Problema.*

2) *Definição do Modelo.*

3) *Definição do Modelo Computacional.*

4) *Formulação do Sistema de Equações.*

5) *Resolução do Sistema de Equações.*

6) *Pós-processamento dos Resultados.*

Segundo Larsson [1], na fase de *Formulação do Problema*, devem-se definir o objetivo da análise MBS e os efeitos físicos a serem considerados ou desconsiderados no problema em questão. O objetivo da análise pode ser definido a partir das entidades físicas que se pretende calcular, como, por exemplo, valores de força, torque ou acelerações aos quais determinados corpos estão sujeitos. De forma mais explícita, é importante definir tecnicamente o problema a ser resolvido, as limitações do sistema e seus componentes.

Depois que o problema é identificado e os componentes do sistema são definidos, Larsson [1] prossegue à *Definição do Modelo*. O modelo deve ser o mais simples possível, porém deve descrever adequadamente o sistema que se pretende analisar. Nesta etapa devem-se coletar os dados e parâmetros relevantes do sistema. Parâmetros do sistema incluem, tipicamente, massas, inércias, propriedades de componentes como rigidez e coeficiente de amortecimento e etc.

Larsson [1] atenta para o fato de que, dependendo do método escolhido para a resolução das equações, a *Definição do Modelo Computacional* pode ser feita de várias formas. Um modelo computacional mais detalhado encontra-se diretamente

ligado a um método de resolução menos flexível. O nível de detalhamento de um modelo pode variar de um simples modelo linear de um grau de liberdade até um modelo sólido complexo e tridimensional com vários graus de liberdade. Quando se pretende construir modelos mais complexos é aconselhável acoplar a definição do sistema dinâmico a um pacote CAD, onde é mais fácil de definir a geometria, calcular massas, momentos e produtos de inércia, posições das juntas e etc. Modelos tridimensionais construídos em sistemas CAD também são bastante úteis na visualização e revisão da geometria em fases mais avançadas do processo de análise. O método de modelagem de sistemas multicorpos baseia-se na definição de elementos como corpos rígidos, partículas, rolamentos, juntas, apoios, molas, amortecedores e atuadores.

Conforme definido anteriormente, um sistema MBS é composto por um número finito de corpos que possuem massa e/ou momentos e produtos de inércia, conectados entre si por juntas sem massa e elementos que transmitem esforços. Juntas têm a função de restringir determinados graus de liberdade entre os corpos unidos por elas. Elementos de força podem ser passivos, quando causam apenas forças de reação nos corpos devido ao movimento relativo entre eles, ou ativos, quando as forças aplicadas aos corpos são resultado da atuação de um sistema de controle composto por sensores, atuadores e leis de controle.

Apesar de métodos para a análise de corpos elásticos já serem uma realidade nos dias atuais, o corpo rígido continua sendo a base de grande parte dos métodos e aplicações da teoria de sistemas multicorpos. Um corpo rígido é considerado indeformável mesmo quando exposto a forças concentradas, distribuídas ou de campo. O conceito de corpo rígido é, obviamente, uma simplificação, já que um corpo, por mais rígido que seja, nunca poderá ser dito indeformável.

Larsson [1] ressalta que a *Formulação do Sistema de Equações* costumava ser uma tarefa difícil e trabalhosa há alguns anos atrás e, para alguns problemas, dependendo da abordagem considerada, continua sendo. Vários softwares de MBS comerciais, como ADAMS e DADS, por exemplo, determinam automaticamente as equações dinâmicas do sistema e as resolvem para condições iniciais dadas. Apesar disso, algumas vezes é necessário que se tenha um maior controle sobre o processo de geração destas equações. Em tais casos, são aconselhados softwares mais flexíveis

como o SIMPACK, o SOPHIA, o AUTOLEV, o GENSYS, o DYMOLA e o MathModelica.

Segundo Larsson [1], a *Resolução do Sistema de Equações* pode ser feita de diferentes formas. Nos pacotes comerciais para análises dinâmicas, a resolução das equações no domínio do tempo pode ser realizada automaticamente, com pouca ou mesmo nenhuma interação por parte do usuário. Apenas a entrada de alguns parâmetros como passo de integração e tempo de simulação faz-se necessária. Quando se pretende trabalhar com as equações de uma forma mais direta, é aconselhável que se trabalhe com softwares científicos como o MATLAB, por exemplo. Apesar de as ferramentas de simulação se mostrarem eficientes para a integração numérica, é preciso que o usuário mantenha-se atento, pois pode haver erros devidos a instabilidades numéricas. Estes eventos resultam freqüentemente em falhas na simulação. Para minimizar a ocorrência de falhas é importante que se tenha controle sobre as configurações dos integradores numéricos. Informações sobre tais configurações encontram-se disponíveis nos manuais de referência do software utilizado e devem ser sempre levadas em consideração.

Quando os processos de modelagem e análise computacional são finalizados, segundo Larsson [1], dá-se início à etapa mais crucial do processo: o *Pós-processamento dos Resultados*. Quando se utiliza um software comercial para a análise dinâmica de um sistema complexo, o número de resultados a serem analisados pode ser enorme. Para um simples sistema de multicorpos com algumas partes, existem dezenas de variáveis (deslocamentos, velocidades, acelerações, forças e torques) que se pode investigar.

Conforme ressalta Larsson [1], a maneira mais simples de análise de um resultado se dá quando um o valor de uma ou mais variáveis são requeridos em um instante pré-definido. O resultado é, então, simplesmente, o valor da variável no instante considerado. Quando se pretende analisar a resposta do sistema durante um determinado intervalo de tempo, é aconselhável que sejam plotados gráficos que ilustrem a variação da grandeza em questão no referido período. Tal prática é muito utilizada na comparação de modelos iguais configurados com parâmetros diferentes. O uso de animações é uma forma bastante comum para a análise de resultados de simulações de sistemas multicorpos, já que consiste em uma boa alternativa para a

visualização do comportamento dinâmico do sistema. O uso de animações exige, no entanto, a disponibilidade de informações sobre a geometria das partes na forma de modelos sólidos, por exemplo. As animações podem ser visualizadas localmente nos programas de MBS comerciais ou, ainda, exportadas na forma de arquivos de vídeo. Os resultados das simulações podem, também, ser analisados na forma de tabela em arquivos texto. Desta forma, os resultados obtidos podem ser utilizados para alimentar outros processos, como simulações posteriores, algoritmos de otimização ou de controle.

2.3. Dinâmica Veicular, Conforto e Segurança

Segundo Rebello [6], o movimento de um veículo é gerado de acordo com os comandos do motorista e da influência do meio ambiente. Um veículo apresenta os seguintes movimentos: translação (posição, velocidade e aceleração nas direções longitudinal, lateral e vertical), rotação (orientação, velocidade angular e aceleração angular de rolagem, arfagem e guinada, ou seja, *roll*, *pitch* e *yaw*, respectivamente), além de movimentos relativos entre as partes do veículo. As entradas às quais o motorista pode submeter o veículo são dadas através dos mecanismos de direção, freio, acelerador e transmissão. Há, ainda, entradas consideradas como distúrbios que são constantemente aplicadas ao veículo, isto é, irregularidades da pista (sinuosidades, buracos, obstáculos, valetas, entre outros) e esforços aerodinâmicos (ventos e deslocamento do veículo através da massa de ar).

O estudo da dinâmica veicular divide-se em três partes:

- Dinâmica longitudinal: estudo do movimento preponderantemente na direção longitudinal do veículo, envolvendo deslocamento, velocidade e aceleração nesta direção. A dinâmica longitudinal engloba subsistemas como rodas e pneumáticos, trem de força e sistema de frenagem e é influenciada pela inclinação da pista e por efeitos aerodinâmicos.
- Dinâmica lateral: estudo do movimento na direção lateral do veículo, envolvendo deslocamento, velocidade e aceleração nesta direção e os

movimentos de rolagem e guinada. A dinâmica lateral engloba subsistemas como rodas e pneus, chassis e sistema de direção.

- Dinâmica vertical: estudo do movimento na direção vertical do veículo, envolvendo deslocamento, velocidade e aceleração nesta direção e os movimentos de rolagem e arfagem. A dinâmica vertical engloba subsistemas como suspensão e chassis, sendo afetada principalmente por irregularidades da pista.

Stone; Ball [7] definem a suspensão como todo o sistema que faz a interface entre a estrutura do veículo e a superfície da pista. Por esta definição, componentes como rodas e pneus acabam sendo incluídos no sistema. De acordo com os autores, as principais funções da suspensão são: isolar os passageiros e a carga transportada de vibrações e choques proporcionados por irregularidades da pista promovendo conforto aos usuários; promover estabilidade e segurança às manobras do veículo, resistindo a movimentos indesejáveis como o movimento de rolagem; manter os pneus sempre em contato ao solo, garantindo as interações de contato necessárias para manobras de aceleração, frenagem e guinadas.

Após breves considerações sobre as funcionalidades e requisitos de uma suspensão veicular, Stone; Ball [7] classificam os diversos modelos de suspensão existentes. Quanto a sua posição no veículo, as suspensões podem ser classificadas em suspensões dianteiras e suspensões traseiras. Quanto à existência de sistemas de controle, podem ser classificadas entre suspensões passivas, semi-ativas e ativas. Quanto ao tipo, podem ser classificadas em suspensões de eixo rígido (Suspensões *Hotchkiss*, Suspensões *Four-Link* e Suspensões *de Dion*) e suspensões independentes (Suspensões SLA, isto é, *Short-Long Arm*, Suspensões *MacPherson*, Suspensões *Trailing Arm*, Suspensões *Multi-Link* e Suspensões *Swing Arm*).

Segundo Stone; Ball [7], um importante conceito referente à análise de um sistema de suspensão é o do centro de rotação. O centro de rotação da suspensão é o ponto através do qual as forças laterais aplicadas ao corpo do veículo são transformados em momentos de rolagem aplicados ao chassis. Cada suspensão, traseira e dianteira, tem seu próprio centro de rotação. Uma linha longitudinal ligando os dois centros de rotação do veículo define o seu eixo de rotação, eixo em torno do qual a massa suspensa do veículo gira em relação às massas não-suspensas.

É importante notar que os centros de rotação são pontos instantâneos, isto é, assim que o veículo começa a girar em torno do eixo instantâneo, o sistema de suspensão leva os centros de rotação para coordenadas diferentes. Poucos automóveis têm suspensões dianteiras e traseiras idênticas, assim, o eixo de rotação fica inclinado em relação ao eixo longitudinal do veículo. A grande maioria dos automóveis possui o centro de rotação da suspensão dianteira mais baixo, assim quando o veículo efetua uma curva, por exemplo, a suspensão dianteira acaba sendo mais exigida que a suspensão traseira. O eixo de rotação de um veículo encontra-se intimamente relacionado com seu movimento de rolagem e, consequentemente, tem uma forte ligação com o capotamento de veículo em curvas. Um estudo como este pertence ao ramo da dinâmica veicular lateral e está, portanto, fora do escopo deste texto. No entanto, o conceito de eixo de rotação é importante na análise do movimento de rolagem, que surge sempre que o veículo trafega em linha reta sobre pistas com irregularidades assimétricas.

De acordo com Rolvag [8], vibração e ruído são os principais critérios pelos quais os consumidores julgam a qualidade de um automóvel. Um veículo é um sistema dinâmico que vibra e gera ruídos em resposta às excitações às quais se encontra exposto. As propriedades de resposta do veículo determinam a magnitude e a direção das vibrações impostas ao compartimento de passageiros e, conseqüentemente, a percepção dos ocupantes em relação ao automóvel. O entendimento da teoria de conforto veicular envolve o estudo de três tópicos principais: fontes de excitação às quais o veículo está sujeito; resposta do veículo às vibrações impostas e percepção e tolerância dos passageiros às vibrações.

Existem inúmeras fontes de vibração às quais um veículo está sujeito. Estas fontes podem ser classificadas em fontes internas e fontes externas de vibração. Vibrações internas são aquelas originárias da rotação de componentes do veículo como virabrequim e rodas. Vibrações externas são aquelas geradas pelas irregularidades da pista de rodagem. A forma mais empregada na representação das irregularidades da pista é a função PSD (do inglês, *Power Spectral Density*).

Sayers; Karamihas [9] ressaltam que um perfil de pista pode ser construído a partir de um somatório de senóides e cossenóides, conforme mostra a Série de

Fourier. Assim, a função PSD de um perfil de pista é uma representação estatística da importância de cada um dos comprimentos de onda na formação deste perfil.

De acordo com Rolvag [8], uma faixa de vibração vertical considerada confortável ao trafegar em um veículo compreende valores entre 1,0 e 1,5 Hz. Quando esta freqüência atinge os 2,0 Hz, os ocupantes do veículo começam a ter sensações de desconforto. Assim, a suspensão de um veículo de passeio deve ter freqüência de ressonância em torno de 1,0 e 1,5 Hz. Sistemas de suspensão de carros de corrida, por serem mais rígidos, possuem freqüência de ressonância entre 2,0 e 2,5 Hz.

Pode-se entender facilmente o motivo pelo qual se pretende projetar suspensões veiculares com baixas freqüências de ressonância, considerando o fato de que em um sistema massa-mola o ganho de amplitude decai 1,0 dB por década após a freqüência de ressonância. Assim, quanto menor for a freqüência de ressonância da suspensão, menor será a faixa de freqüência amplificada e, conseqüentemente, menor será a excitação dos passageiros.

Sayers; Karamihas [9] ressaltam que, além da freqüência de ressonância do sistema de suspensão como um todo, que se dá a uma freqüência de aproximadamente 1,0 Hz e provoca uma amplificação de amplitude de oscilação de 1,5 a 3,0 vezes em carros de passeio, existe também o fenômeno da ressonância das rodas, que se dá entre 10,0 e 15,0 Hz. Por isso é comum a existência de picos nos gráficos de resposta em freqüência de automóveis para freqüências ao redor de 1,0 e de 12,0 Hz. Apesar disso, pode-se notar em tais gráficos que vibrações verticais de freqüência próxima a 5,0 Hz (às quais os seres humanos são mais sensíveis) são significativamente filtradas.

Segundo Rolvag [8], originalmente, acreditava-se que a sensibilidade humana em relação às freqüências de vibração estava associada às oscilações naturais do corpo de um adulto durante uma caminhada. Um adulto anda com uma freqüência entre 70 e 90 passos por minuto e seu corpo oscila com cerca de 50 mm de amplitude. Baseados nestas informações, os primeiros projetistas procuraram restringir as vibrações dos veículos a estes limites e, como os veículos desenvolvidos a partir de tal concepção de limite de vibração eram considerados confortáveis, acreditou-se na validade da teoria.

Atualmente as informações sobre sensibilidade humana à vibração disponíveis na literatura são mais sofisticadas. É sabido que tanto amplitude quanto freqüência de oscilação influenciam na sensação de desconforto e que freqüências de vibração localizadas em determinadas faixas obtidas experimentalmente são consideradas desconfortáveis. De acordo com Rolvag [8], têm-se sensação de desconforto na região das vísceras em freqüências entre 5,0 e 7,0 Hz. Na região da cabeça e do pescoço, as piores freqüências situam-se entre 18,0 e 20,0 Hz. Assim, pretende-se evitar que vibrações cujas freqüências se situam dentro dos intervalos acima especificados atinjam o compartimento de passageiros do automóvel.

De acordo com Blundell; Harty [10], vibrações com freqüências superiores a 25,0 Hz são consideradas ruídos e devem ser estudadas através de análises de NVH (do inglês, *Noise Vibration and Harshness*). Esta separação por faixa de freqüências existe, pois muitos dos modelos considerados precisos em análises dinâmicas de multicorpos para efeitos de conforto e dirigibilidade são, na realidade, pouco úteis em análises de NVH, onde as freqüências consideradas são mais elevadas.

Segundo Sayers; Karamihas [9], os engenheiros automobilísticos costumam medir acelerações nos assentos dos veículos para avaliar o desempenho do sistema de suspensão e procurar o melhor ajuste entre a rigidez das molas dianteiras e traseiras, bem como do coeficiente de amortecimento dos amortecedores utilizados. Apesar disso, o conforto proporcionado por uma suspensão não é puramente julgado pelas vibrações induzidas aos assentos. Isolar o volante e o assoalho do veículo de vibrações também é muito importante já que, assim, pode-se diminuir o nível de oscilação ao qual os pés e as mãos do motorista estão sujeitos.

De acordo com Rolvag [8], a percepção de conforto e desconforto é um fator qualitativo, relativo e parcial por sofrer influência de fatores que na verdade não se encontram ligados diretamente ao sistema de suspensão do veículo. No entanto, a freqüência natural da suspensão ainda é considerada o principal critério quantitativo no que se refere ao conforto veicular.

Para simulações computacionais na área da dinâmica veicular e conforto é importante que se tenham descrições gráficas dos perfis de pista sobre os quais os veículos ou modelos trafegam. Perfis de pistas reais não podem ser descritos somente por ruídos aleatórios, mas sim por obstáculos transientes como valas e lombadas

somados a um sinal aleatório. Geralmente quatro diferentes categorias de obstáculos são utilizadas na composição de um perfil de pista: valas, lombadas, rampas ascendentes e rampas descendentes. Em cada uma destas categorias os obstáculos transientes são classificados de acordo com sua altura (ou profundidade) e comprimento.

Öijer; Edlund [11] descrevem um procedimento para a reconstituição de um perfil de pista desconhecido. Um modelo matemático do veículo empregado nas medições de perfil é utilizado para calcular as respostas dinâmicas para um número limitado de obstáculos idealizados. Paralelamente a isso, utilizando o veículo real de medições, as acelerações verticais apresentadas pelos eixos em uma pista desconhecida são medidas a partir de acelerômetros e os ruídos aleatórios de medição são filtrados, restando apenas as acelerações referentes às excitações dos obstáculos transientes. As acelerações transientes medidas experimentalmente são, então, comparadas àquelas obtidas a partir da simulação do modelo matemático e se suas formas forem semelhantes, o obstáculo real da pista encontra-se aproximadamente determinado.

Segundo Öijer; Edlund [11] a importância dos obstáculos transientes pode ser exemplificada utilizando um trecho curto de uma rodovia. As acelerações do veículo de medição aquisitadas experimentalmente foram comparadas às acelerações do modelo do veículo quando este foi submetido a dois perfis de pista sintetizados artificialmente: o primeiro perfil considerava apenas um ruído aleatório semelhante ao da rodovia e o segundo perfil considerava este mesmo ruído somado aos perfis dos obstáculos idealizados de formato semelhante aos obstáculos originais da rodovia. Foi possível concluir que apenas o ruído aleatório não era suficiente para descrever o perfil da pista, no entanto o perfil artificial que considerava os obstáculos idealizados mostrou excelentes resultados.

Conforme explicado, interações e forças entre roda e pista só podem ser calculadas através de simulações se o perfil da pista for medido ou conhecido. Pensando nisso, Imine; Dellane; M’Sirdi [12] desenvolveram um observador de estados simples e de fácil implementação para a estimação de perfis de pista baseado na resposta dinâmica de um veículo conhecido equipado com sensores relativamente baratos como acelerômetros e trenas a laser. Ao percorrer a pista com o veículo, os

acelerômetros medem a aceleração do chassis enquanto que as trenas medem a distância dos acelerômetros ao solo. Estes dados passam por um filtro passa-baixas para que os ruídos inerentes à medição sejam eliminados e alimentam, em seguida, o observador de estados em questão, baseado em um modelo bastante simples de veículo completo cujo chassis é tratado como rígido e cujos pneus mantêm contato contínuo com o solo. Desta forma é possível obter a excitação proporcionada pela pista em cada uma das rodas quando o veículo a percorre em linha reta e em velocidade constante. Este sistema para obtenção de perfis de pista é chamado de Analisador Inercial de Perfis.

Para a validação do observador de estados e de sua aplicação ao Analisador Inercial de Perfis, Imine; Dellane; M'Sirdi [12] utilizaram um equipamento já bastante conhecido e difundido nesta área, o Analisador Longitudinal de Perfis (do inglês, *Longitudinal Profile Analyser*, ou LPA). O LPA é um trailer que possui uma roda de medição que mantém contato contínuo com o solo devido a sua instalação em um garfo equipado com um sistema de suspensão (mola e amortecedor) bastante rígido. O LPA é puxado em velocidade constante por um veículo e como sua roda está sempre em contato com a pista, o garfo da suspensão é forçado a realizar um movimento angular, que pode ser facilmente medido.

Os resultados obtidos com o Analisador Inercial de Perfis juntamente com o observador de estados de Imine; Dellane; M'Sirdi [12] foram comparados com os resultados provenientes do LPA em um teste experimental. Foi possível notar que o observador de estados desenvolvido possui pequenas limitações na estimação de ondas de baixa freqüência e que, por outro lado, responde muito bem a ondas de média e alta freqüência.

Segundo Barbosa; Costa [13], a dirigibilidade é uma característica muito importante de um veículo por permitir que o motorista mantenha o controle do mesmo em manobras de aceleração, frenagem e seguimento de trajetórias. A dirigibilidade do veículo está diretamente ligada a sua capacidade de produzir forças horizontais na região de contato do pneu com a pista. Para o caso de manobras de aceleração e frenagem, forças longitudinais nos pneus são necessárias. No caso de manobras laterais, que envolvem seguimento de curvas e mudanças de faixa, as forças laterais nos pneus são muito importantes. Estas forças são, no entanto,

limitadas pela Lei de Coulomb, que relaciona forças de contato verticais entre o pneu e o pavimento com as forças horizontais mencionadas. No caso do projeto de um automóvel, é desejável que se tenha a mínima variação possível nas forças de contato entre pista e pneu para permitir a existência de altas forças horizontais para um dado coeficiente de atrito.

Preocupados com questões de segurança e dirigibilidade de veículos nos mais variados tipos de pista existentes, Barbosa; Costa [13] buscaram estabelecer limites máximos de velocidade de tráfego. A metodologia adotada baseou-se em propriedades estatísticas de irregularidade de pista, ou seja, na função PSD da mesma, e na resposta em freqüência da força de contato entre pneu e pista. A relação entre a resposta em freqüência do veículo e o comprimento de onda das irregularidades do pavimento é dada pela velocidade constante de tráfego do veículo. Os autores fizeram uso de um modelo tradicional de um quarto de carro com dois graus de liberdade para a realização do estudo proposto.

Barbosa; Costa [13] ressaltam que ondas de baixo comprimento presentes no perfil de pista muitas vezes não causam movimentação da suspensão do veículo já que a própria elasticidade dos pneus suprime pequenas irregularidades do pavimento. Para considerar tal efeito em uma simulação por multicorpos, pode-se filtrar as irregularidades de pista de comprimento de onda inferior ao comprimento da superfície de contato do pneu.

Após a realização das simulações, Barbosa; Costa [13] observaram que pistas com perfil de rugosidade de classes A e B quase não proporcionaram variação nas forças de contato entre pneu e pista com o aumento da velocidade de tráfego. Pavimentos de classe C, por outro lado, mostraram uma probabilidade de anulação da força de contato de aproximadamente 68% com o veículo trafegando sob velocidade constante e igual a 100 km/h. Considerando inaceitável o descolamento entre pneu e pista, os autores estabeleceram um limite de velocidade em torno de 50 e 60 km/h para um automóvel de passageiros trafegando por uma pista de classe D e um limite entre 25 e 30 km/h para o mesmo veículo em uma pista de classe E.

2.4. Modelagem Matemática de Sistemas Dinâmicos

Rauh [4] defende que o modelo matemático deve ser o mais simples possível (e, portanto, utilizar o mínimo de recursos computacionais em sua simulação) para satisfazer ao estudo proposto. O autor avalia os vários níveis de detalhamento de modelos matemáticos utilizados em simulações na área automotiva: *Modelo Parcial*, *Modelo Funcional Tridimensional*, *Modelo Completo Orientado a Componentes* e *Modelo de Componente*.

Muitos modelos de veículos descrevem apenas uma parte bem limitada do comportamento do veículo propriamente dito. Segundo Rauh [4], um *Modelo Parcial* típico é o modelo de um quarto de carro. Este modelo representa uma suspensão veicular através de elementos mecânicos unidimensionais (molas e amortecedores), não representando, assim, o movimento real do veículo. No entanto, a partir deste modelo simplificado é possível julgar quesitos relativos à vibração ao e conforto de veículos projetados com suspensão passiva, semi-ativa e ativa.

De acordo com Rauh [4], um *Modelo Funcional Tridimensional* permite mais que a simples simulação de funções veiculares individuais. O comportamento geral do veículo pode ser calculado e descrito através de simulações antes mesmo da construção de protótipos. Modelos como estes mostram, por exemplo, como o veículo reage a operações do motorista como acionamento do pedal de freio, acelerador e mudanças de trajetória. A base deste modelo é um corpo rígido, representando o chassis, que pode se mover nas direções longitudinal, vertical e lateral, além de apresentar os três movimentos de rotação (rolagem, arfagem e guinada). As quatro rodas e os elementos da suspensão existem de forma simplificada, sendo o veículo totalmente representado na sua forma funcional.

O *Modelo Completo Orientado a Componentes* é um modelo bastante detalhado. Diferentemente de um modelo funcional, este modelo é baseado nas propriedades físicas dos componentes. Segundo Rauh [4], *Modelos Completos Orientados a Componentes* levam em consideração as deformações no chassis e nos componentes da suspensão do veículo e, desta forma, servem para avaliar de forma mais precisa a dirigibilidade do veículo em questão.

Rauh [4] aponta que, adicionalmente a sua estrutura básica, muitos modelos de veículos contém sub-modelos mais ou menos complexos de componentes individuais como pneus, amortecedores viscosos, buchas e etc. Assim como os modelos para veículos completos, os *Modelos de Componente* podem variar de simples descrições analíticas até modelos fisicamente orientados. A maior demanda por *Modelos de Componente* tem surgido de sistemas mecatrônicos como suspensões ativas e sistemas de direcionamento servo-assistidos. Nestes casos, adicionalmente aos aspectos mecânicos do sistema, os engenheiros devem modelar sensores e atuadores. Isto significa que várias disciplinas da engenharia devem ser reunidas em um único modelo, o que torna sua modelagem mais trabalhosa e sua simulação mais susceptível a problemas numéricos.

Segundo Chengjian; Dihua [14], um bom modelo de pneumático é um fator importantíssimo para a construção de um modelo dinâmico satisfatório para um veículo, por isso os autores desenvolveram um modelo baseado em parâmetros modais de pneu e corrigiram sua propriedade de rigidez vertical considerando os fatores não-lineares de rigidez introduzidos pelas paredes laterais do mesmo. Os autores verificaram que ao aumentar o número de modos através da ampliação da faixa de freqüência de suas análises modais, era possível obter valores de rigidez vertical ligeiramente mais coerentes com os experimentais. No entanto, tal medida era insuficiente para obter um modelo satisfatório, o que foi corrigido através da introdução do comportamento não-linear das paredes. Experimentos foram realizados em laboratório (mais especificamente em uma máquina que permite ao pneumático rodar sobre uma esteira cheia de obstáculos iguais mantendo o centro da roda a uma altura constante e medindo a força exercida pela roda sobre o cubo) e permitiram a validação do modelo final. A rigidez vertical obtida a partir do modelo diferiu de 4,7% em relação àquela obtida experimentalmente para pequenas cargas verticais e 10,6% para grandes cargas verticais.

De acordo com Blundell; Harty [10], modelos de pneus devem ser coerentes com a aplicação à qual o estudo se propõe. Para estudos de dinâmica vertical envolvendo suporte de carga e conforto, os modelos de pneus são utilizados simplesmente para transmitir os efeitos das irregularidades da pista ao sistema de suspensão do veículo. Nestes casos, os pneus podem ser representados de uma forma

bastante simples, ou seja, através de uma mola (ou uma mola e um amortecedor trabalhando em paralelo) ligando a superfície da pista ao centro de cada uma das rodas. Em casos mais específicos envolvendo, por exemplo, veículos pesados ou simulações nas quais os pneus encontram-se sujeitos a altas deformações pode ser necessário estender o modelo linear supracitado a um modelo não-linear.

Após uma breve revisão de dinâmica automotiva e de modelagem de sistemas dinâmicos, Rebello [6] apresenta as bases teóricas para a formulação das equações dinâmicas para um veículo utilizando o formalismo de Kane. Em seguida, apresenta um modelo de veículo completo com 10 graus de liberdade, onde 6 são do chassis rígido do veículo e 1 para cada um dos quatro braços da suspensão. A suspensão é representada como um pêndulo, de forma que os braços da mesma simulem o movimento angular das bandejas do veículo. As forças de suspensão são representadas por meio de molas e amortecedores lineares que atuam somente na direção vertical. Massas concentradas nos cubos de roda representam o efeito combinado das inércias da roda e de parte da suspensão e os pneumáticos são representados por molas de alta rigidez que se mantêm sempre em contato com o solo.

Rebello [6] ressalta que uma representação menos sofisticada porém bastante empregada e útil na simulação isolada da dinâmica vertical de um veículo seria representar o chassis como uma massa suspensa com uma mola e um amortecedor em cada canto ligados às massas concentradas que representariam as rodas. Modelos como este último são largamente utilizados em estudos de controle de dinâmica vertical, entretanto eles não representam ações de esterçamento e aceleração nas rodas, não sendo úteis, portanto, para o estudo do controle da suspensão onde os efeitos combinados de propulsão e esterçamento também são incluídos.

As equações dinâmicas do modelo de veículo de Rebello [6] foram determinadas a partir do formalismo de Kane e aproximadas pela simplificação de Rill de forma a diminuir o tempo de cálculo sem grandes perdas de precisão nos resultados. A implementação do cálculo foi feita a partir da programação orientada a objetos realizada no software MATHEMATICA, escolhido por ser um manipulador simbólico de equações. Os resultados obtidos na simulação da dinâmica vertical do veículo foram muito bons e coerentes com os resultados disponíveis na literatura.

Segundo Blundell; Harty [10], antes do advento da simulação computacional, os projetistas de automóveis tinham de simplificar a modelagem de seus veículos até um nível em que a formulação das equações dinâmicas e sua solução fossem acomodadas nos recursos disponíveis na época. Tal abordagem encorajava um melhor entendimento do veículo por parte do analista, já que ele era obrigado a identificar os fatores importantes para a representação do problema em questão. Mas o fato de hoje existirem softwares capazes de considerar modelos mais realistas não significa que não seja interessante fazer uso de modelos simplificados. Pensando nisso, os autores apresentam três diferentes modelos simplificados do mesmo veículo cujos desempenhos são comparados em uma manobra de dupla mudança de pista. Devido ao fato de tal manobra ser objeto de estudo da dinâmica veicular lateral, apenas os modelos do veículo sem os respectivos sistemas de esterçamento serão focados neste texto.

No primeiro modelo de Blundell; Harty [10], as suspensões e as rodas são simplificadas como massas concentradas que podem simplesmente transladar verticalmente em relação ao corpo rígido do veículo. Estas massas são conectadas ao corpo do veículo através de juntas de translação, portanto não há mudança no ângulo de cambagem das rodas. As forças entre as massas concentradas e o chassis são exercidas por uma mola e um amortecedor que trabalham em paralelo.

No segundo modelo apresentado por Blundell; Harty [10], as suspensões dianteira e traseira são tratadas como eixos rígidos conectados ao corpo do veículo através de juntas de revolução. As localizações das juntas são os respectivos centros de rotação, cujo conceito já foi apresentado. Molas torcionais são dispostas nos centros de rotação das suspensões dianteira e traseira, simulando a rigidez ao movimento de rolagem do veículo. Apesar de este modelo ser considerado muito satisfatório para a análise do movimento de rolagem, ele tem a grande desvantagem de eliminar a característica de independência do sistema de suspensão, característica esta abordada de uma forma bem simples no primeiro modelo.

O terceiro modelo de Blundell; Harty [10] é muito parecido com aquele estudado por Rebello [6]. Juntas de revolução permitem à suspensão de cada uma das quatro rodas rotacionar em relação ao corpo do veículo como um pêndulo. Este modelo tem a vantagem de permitir a variação independente do ângulo de cambagem

de cada uma das rodas, além de computar muito bem o movimento de arfagem do veículo.

Watanabe; Sayers [15] comparam o comportamento dinâmico de dois modelos de suspensões automotivas independentes. No modelo não-linear, cada eixo de roda se movimenta ao longo de uma curva tridimensional e rotaciona em torno de um eixo paralelo ao eixo longitudinal do veículo. No caso do modelo simplificado de suspensão, que é linear, o eixo de roda translada ao longo de um segmento de reta sem rotacionar. Para avaliar os resultados das duas modelagens, ambas as propostas foram inseridas em um modelo de veículo completo com suspensões dianteiras e traseiras independentes, massa suspensa com seis graus de liberdade e quatro massas não-suspensas, representando as rodas, com um grau de liberdade cada. Cada roda possui um grau de liberdade rotacional (em torno de seu eixo principal) e cada pneu tem dois graus de liberdade, um para escorregamento longitudinal e o outro para escorregamento lateral. O virabrequim do motor adiciona um grau de liberdade ao modelo e cada atuador de freio tem um grau de liberdade representando a dinâmica do fluido de freio. Assim, o modelo completo tem, no total, 27 graus de liberdade.

As equações dinâmicas dos modelos de Watanabe; Sayers [15] são bastante complicadas. As equações e os códigos-fonte que as resolvem foram geradas pelo AutoSim, um pacote simbólico de multicorpos que combina o formalismo de multicorpos com uma linguagem de álgebra simbólica e gera códigos-fonte em linguagem C. As equações são, na verdade, sistemas de ODEs que podem ser resolvidos com quase todos os métodos de integração numéricos. O AutoSim foi utilizado na geração das duas versões de modelos com diferentes conceitos cinemáticos. Os parâmetros numéricos utilizados para alimentar os modelos completos no AutoSim são provenientes de um sedan de luxo norte-americano.

Watanabe; Sayers [15] realizaram algumas simulações buscando identificar as diferenças das duas modelagens no comportamento dinâmico do modelo completo, principalmente no tocante aos movimentos de rolagem e arfagem. Na simulação de frenagem os dois modelos mostraram ângulos de arfagem praticamente idênticos. Na simulação de máxima aceleração, o modelo não-linear apresentou mais arfagem que o linear. No caso de manobras envolvendo grandes ângulos de esterçamento, grandes diferenças nos ângulos de rolagem puderam ser notadas.

Apesar disso pode-se dizer que o modelo linear de suspensão descreve a dinâmica do sistema de forma aceitável para pequenas oscilações verticais da massa suspensa. Para grandes oscilações deve-se utilizar o modelo não-linear.

Costa [16] apresenta um modelo de um quarto de veículo cuja suspensão tipo MacPherson é modelada como um transformador cinemático. O sistema de multicorpos possui dois graus de liberdade, sendo o primeiro pertencente à suspensão propriamente dita e o segundo representando o movimento do chassis na direção vertical. O chassis é modelado como um corpo rígido. Duas situações diferentes são simuladas. No primeiro caso parte-se do pressuposto que o veículo é abandonado de uma altura inicial na qual o pneu não toca o solo. Na análise são monitoradas variáveis como o ângulo entre a bandeja e o chassis e o comprimento da mola, além dos deslocamentos e velocidades relativos aos dois graus de liberdade do sistema. Em seguida, repete-se a análise considerando um pneu com pressão reduzida, para isso a constante elástica da mola que representa o comportamento vertical do pneu é diminuída. Comparando-se os resultados obtidos nas duas simulações, nota-se que no segundo caso os batentes da suspensão entram em ação, gerando descontinuidades nas curvas das variáveis monitoradas.

Segundo Costa [16], uma das alternativas para simular sistemas não-lineares complexos empregando poucos recursos computacionais é a utilização de um número mínimo de coordenadas através de transformadores cinemáticos que propiciam a geração de modelos baseados na geometria do sistema sem a necessidade do uso de técnicas iterativas para a resolução das equações. Tal abordagem permite a redução do número de equações de movimento e garante a modularidade do sistema, possibilitando a substituição com facilidade de conjuntos de equações, como, se faz, por exemplo, quando se quer substituir duas das quatro suspensões MacPherson de um veículo por outras de tipo diferente.

Costa [17] realizou um trabalho de modelagem e simulação dinâmica do jipe canadense de uso militar Iltis 4x4. Os parâmetros e dimensões do modelo foram fornecidos por Anderson apud Costa [17] em um simpósio internacional com o objetivo de incentivar pesquisadores de todo o globo a realizarem simulações com os mais variados softwares de multicorpos disponíveis. Utilizando o mesmo modelo de veículo, os pesquisadores teriam uma boa base de comparação dos resultados e,

consequentemente, poderiam avaliar os diferentes softwares de multicorpos disponíveis no mercado com maior propriedade.

Costa [17] obteve as equações dinâmicas do veículo através do pacote SD/FAST e realizou as simulações no programa ACSL. A análise e o pós-processamento dos resultados foram realizados no MATLAB. Inicialmente o jipe Iltis foi modelado como um quarto de carro devido ao fato de esta abordagem permitir uma pré-analise do comportamento do veículo. Em seguida, um modelo de veículo completo foi desenvolvido aproveitando a propriedade de modularidade do modelo reduzido. O modelo completo continha 28 corpos rígidos e possuía 12 graus de liberdade.

Definido o modelo, Costa [17] procedeu à análise de equilíbrio estático do veículo adotando valores para os comprimentos indeformados e deformados das molas e amortecedores e calculando as forças suportadas por estes componentes. Em seguida, as não-linearidades do modelo foram removidas e um modelo linear em torno do ponto de equilíbrio estático do veículo foi desenvolvido. Em uma análise de autovalores do modelo, freqüências naturais e coeficientes de amortecimento para cada um dos movimentos do veículo foram determinados. Ainda com o modelo linearizado, procedeu-se à determinação da resposta em freqüência da aceleração do centro de massa do veículo quando este se encontra submetido a irregularidades de pista. A simulação final do veículo consistiu em uma manobra de esterçamento senoidal, isto é, uma manobra de “zigue-zague”, a uma velocidade constante de 10 m/s. Os resultados obtidos em todas as simulações foram muito próximos àqueles atingidos por outros pesquisadores e a avaliação do software SD/FAST por parte do autor foi bastante positiva.

Blundell; Harty [10] reconhecem que grande parte dos estudos de dinâmica veicular através da abordagem de multicorpos trata o chassis do veículo como um corpo rígido. Esta hipótese é feita, muitas vezes, por questões de simplicidade já que não se quer introduzir um modelo de chassis por elementos finitos em uma análise de multicorpos. Existe, no entanto, uma solução alternativa para tal problema. O chassis pode ser modelado como dois corpos rígidos conectados por uma junta de revolução alinhada ao eixo longitudinal do veículo e localizada em seu centro de massa. O valor da rigidez torcional de tal junta pode ser obtido através de testes experimentais

ou por uma análise por elementos finitos conduzida separadamente da análise por multicorpos.

3. REVISÃO E APLICAÇÃO DA TEORIA DE MULTICORPOS

O presente capítulo é baseado no artigo de Costa [18] e procura reunir de forma resumida os principais formalismos empregados no desenvolvimento das equações dinâmicas de sistemas multicorpos. Segundo o próprio Costa [18], um texto como este não tem a pretensão de apresentar a teoria de forma detalhada. O objetivo é familiarizar o leitor às teorias mais utilizadas através de um breve resumo sobre o material apresentado nos principais livros de dinâmica de multicorpos. Para complementar a revisão teórica, um exemplo de aplicação envolvendo dois dos formalismos mais utilizados é resolvido no final do capítulo.

O comportamento dinâmico de sistemas mecânicos pode ser descrito de forma adequada pelas leis de Newton da mecânica clássica e suas inúmeras variações. Tais variações incluem, por exemplo, as equações de Newton-Euler, as equações de Lagrange, o formalismo de Kane e o princípio de Jourdain, conforme mostra a Fig. 2. O diagrama da figura exibe de uma maneira bastante simples as relações entre as diferentes abordagens. Formalismos baseados nas equações de Newton-Euler são chamados sintéticos enquanto que aqueles baseados nas equações de Lagrange são denominados analíticos.

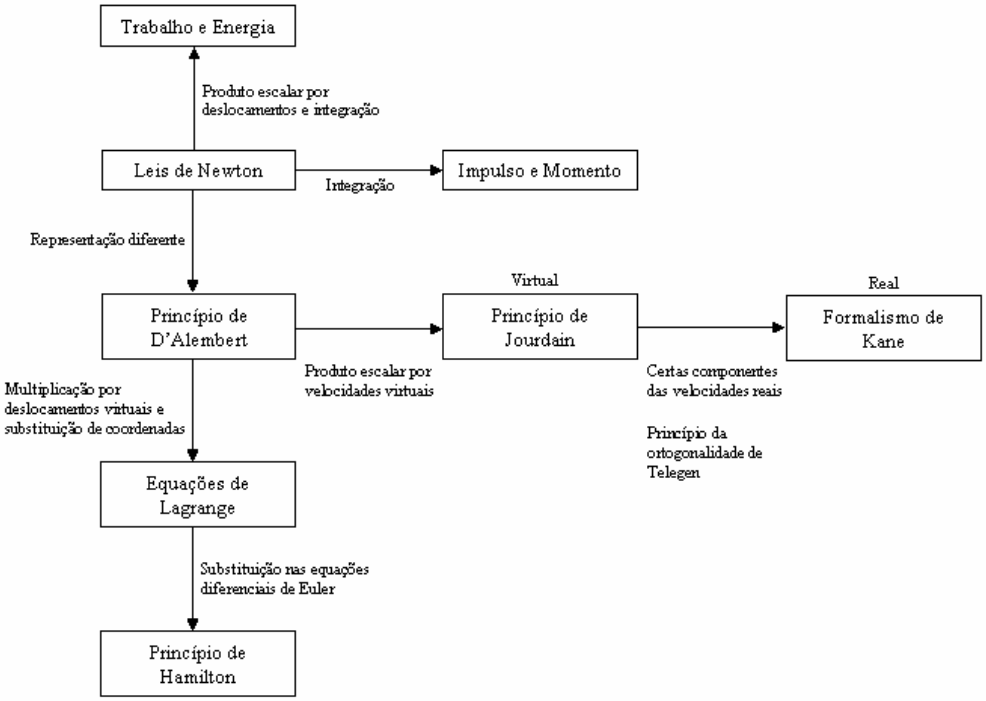

Fig. 2: Diagrama das diferentes abordagens de MBS (adaptada de Costa [18]).

3.1. Definições Básicas

Neste texto sobrescritos são utilizados para identificar o sistema de coordenadas e o corpo (ou ponto) aos quais um vetor se refere. Quando o seu significado é claro no contexto ou quando não importa à qual sistema de coordenadas o vetor de refere, os sobrescritos são omitidos. Quando presente, o sobrescrito à direita refere-se ao corpo (ou ponto) de aplicação do vetor, enquanto que o sobrescrito à esquerda refere-se ao sistema de coordenadas em questão. Subscritos são utilizados pelos mais variados motivos e seus significados são claros em cada situação específica.

3.1.1. Configuração do Sistema

A configuração de um conjunto S de v partículas P_i, ..., P_v em um sistema de coordenadas A é conhecida desde que o vetor posição de cada partícula em relação a um ponto fixo em A seja conhecido. Assim, v grandezas vetoriais, ou, equivalentemente, $3 \cdot v$ grandezas escalares são requeridas para especificar a configuração de S em A. As grandezas escalares são chamadas coordenadas cartesianas e são definidas a seguir. Se $\vec{a}_x$, $\vec{a}_y$ e $\vec{a}_z$ são os vetores ortonormais que definem o sistema de referência A, então,

$$\begin{aligned} x_i &= \vec{p}_i \cdot \vec{a}_x \\ y_i &= \vec{p}_i \cdot \vec{a}_y \\ z_i &= \vec{p}_i \cdot \vec{a}_z \end{aligned} \tag{1}$$

onde $\vec{p}_i$ é o vetor posição de um ponto O fixo em A para o ponto P_i e x_i, y_i e z_i representam as componentes $\vec{p}_i$ nas direções de $\vec{a}_x$, $\vec{a}_y$ e $\vec{a}_z$. Esta situação é ilustrada pela Fig. 3.

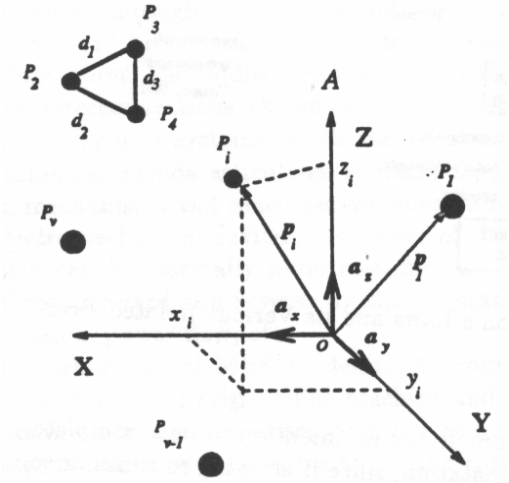

Fig. 3: Configuração de um sistema de partículas (extraída de Costa [18]).

3.1.2. Configuração dos Vínculos do Sistema

Se a dinâmica de S é influenciada pela presença de corpos que podem entrar em contato com um ou mais pontos P_i, restrições devem ser impostas às posições que a partícula afetada poderá ocupar. Neste caso, pode-se dizer que S está sujeito a vínculos. Uma equação que expressa um vínculo de posição é chamada equação holonômica. Um exemplo de vínculo de posição é representado pelos conectores rígidos d_1, d_2 e d_3 entre as partículas P_1, P_2 e P_3 da Fig. 3. Uma equação holonômica pode ser expressa da seguinte forma

$$f\left(x_1, y_1, z_1, ..., x_v, y_v, z_v, t\right) = 0 \tag{2}$$

Equações como esta são classificadas como reonômicas quando dependem do tempo ou escleronômicas quando independem dele.

3.1.3. Coordenadas Generalizadas

Quando um conjunto S de v partículas P_i, ..., P_v está sujeito a vínculos representados por M equações holonômicas, apenas

$$n = 3 \cdot v - M \tag{3}$$

das $3 \cdot v$ coordenadas cartesianas x_i, y_i e z_i são independentes entre si. Assim, a dinâmica do sistema pode ser reduzida a um conjunto de n funções do tempo, $q_1(t)$, ..., $q_n(t)$, de tal forma que as equações de vínculo sejam satisfeitas. Estas n variáveis são denominadas coordenadas generalizadas de S em A.

O número n de coordenadas generalizadas de um conjunto S de v partículas é o menor número de grandezas escalares independentes que, para qualquer valor imposto ao tempo e a estas grandezas, obtém-se configurações admissíveis de S em A.

3.1.4. Velocidades Generalizadas

Expressões para velocidades angulares de corpos rígidos e velocidades de pontos de um sistema S cuja configuração em um sistema de coordenadas A é caracterizada por n coordenadas generalizadas q_1, ..., q_n podem ser trazidas para uma forma mais vantajosa a partir da introdução de n grandezas u_1, ..., u_n chamadas velocidades generalizadas de S em A definidas como

$$u_r = \sum_{s=1}^{n} A_{rs} \cdot \dot{q}_s + B_r \qquad (r = 1,...,n) \tag{4}$$

onde A_{rs} e B_r são funções de q_1, ..., q_n e t. Elas devem ser escolhidas de tal forma que a Eq. (4) possa ser resolvida univocamente para $\dot{q}_1$, ..., $\dot{q}_n$, dadas por

$$\dot{q}_r = \sum_{s=1}^{n} C_{rs} \cdot u_s + D_r \qquad (r = 1,...,n) \tag{5}$$

onde C_{rs} e D_r são funções conhecidas de q_1, ..., q_n e t. Equações como a Eq. (5) são chamadas equações cinemáticas diferenciais de S em A e são muito importantes na determinação das equações dinâmicas de um sistema mecânico.

3.1.5. Vínculos de Movimento

Pode acontecer, por razões físicas, de as velocidades generalizadas $u_1, ..., u_n$ de um sistema mecânico S em um sistema de coordenadas A não serem independentes umas das outras. Neste caso, diz-se que S está sujeito a vínculos de movimento. Uma equação que relaciona as velocidades generalizadas $u_1, ..., u_n$ entre si é denominada equação não-holonômica. Quando um sistema possui no mínimo uma equação deste tipo, trata-se de um sistema não-holonômico.

Quando todas as equações não-holonômicas podem ser expressas a partir de m equações do tipo

$$u_i = \sum_{s=1}^{p} Y_{is} \cdot u_s + Z_i \qquad (i = p+1,...,n) \tag{6}$$

onde

$$p = n - m \tag{7}$$

e Y_{is} e Z_i são funções de $q_1, ..., q_n$ e t, S é denominado sistema não-holonômico simples com p graus de liberdade em A. Alternativamente, as equações de vínculos de movimento podem ser expressas na seguinte forma

$$\sum_{r=1}^{n} W_{ir} \cdot \dot{q}_r + T_i = 0 \qquad (i = p+1,...,n) \tag{8}$$

onde W_{ir} e T_i são funções de $q_1, ..., q_n$ e t. A Eq. (8) expressa a Eq. (6) como uma função das derivadas das coordenadas generalizadas do sistema.

Um exemplo clássico de vínculo não-holonômico consiste em um disco com arestas vivas rolando sem escorregar sobre um plano. Neste caso existem restrições intrínsecas ao movimento já que a direção do vetor velocidade do centro de massa do

disco é definida pelo ângulo de orientação (obtido a partir de uma vista superior) do disco no plano, pois não existe escorregamento lateral.

3.1.6. Variáveis de Estado

As variáveis de estado de um sistema mecânico S em um sistema de coordenadas A são um conjunto de grandezas escalares que permite a descrição da configuração e do movimento de cada partícula P_i pertencente a S.

Devido a diferenças no tratamento dos vínculos para os vários formalismos matemáticos, existem diferenças no que diz respeito à definição de coordenadas e velocidades generalizadas e, consequentemente, a escolha das variáveis de estado do sistema pode não ser simples. Normalmente, em cada formalismo as variáveis de estado são definidas como as grandezas que se pretende obter através da integração das equações dinâmicas geradas pelo formalismo utilizado, apesar de esta não ser a única forma de escolha para as variáveis representativas do sistema. De outra forma, pode-se dizer que uma certa variável é uma variável de estado em um determinado formalismo caso ela só possa ser obtida por integração.

3.2. Abordagem Euleriana

Formalismos sintéticos, também conhecidos como abordagens eulerianas, são baseados nas equações que descrevem o equilíbrio de forças e momentos em um sistema.

O momento linear de um corpo rígido B em um sistema de coordenadas inercial N é dado por

$$\vec{L}^B = m^B \cdot \vec{v}^{B*} \tag{9}$$

onde m^B é a massa de B e $\vec{v}^{B*}$ é a velocidade do centro de massa $B*$ do corpo B em N.

O momento angular central para o corpo B em relação ao seu centro de massa $B*$ em um sistema de coordenadas inercial N é descrito por

$$\vec{H}^{B^*} = I^{B^*} \cdot \vec{\omega}^B \tag{10}$$

onde I^{B^*} é a matriz de inércia de B em relação ao seu centro de massa B^* e $\vec{\omega}^B$ é a velocidade angular de B em N.

As equações de Newton-Euler podem ser obtidas das Eqs. (9) e (10) conforme segue. Para o movimento translacional do corpo rígido B, a equação de Newton se resume a

$$\vec{R}^B = \frac{d\vec{L}^B}{dt} = m^B \cdot \vec{a}^{B^*} \tag{11}$$

onde $\vec{R}^B$ é a resultante de todas as forças de contato e de campo atuantes em B e $\vec{a}^{B^*}$ é a aceleração do centro de massa de B em N.

Para o movimento rotacional de B, a equação de Euler é dada por

$$\vec{T}^B = \frac{d\vec{H}^{B^*}}{dt} = I^{B^*} \cdot \vec{\alpha}^B + \vec{\omega}^B \times I^{B^*} \cdot \vec{\omega}^B \tag{12}$$

onde $\vec{T}^B$ é a soma de todos os momentos, ou torques, aplicados ao corpo B em relação ao seu centro de massa B^* e $\vec{\alpha}^B$ é a aceleração angular de B em N.

As Eqs. (11) e (12) definem uma relação linear entre as derivadas das velocidades e a soma das forças e torques externos aplicados a um corpo rígido. Para um sistema com n graus de liberdade, uma equação do tipo

$$M \cdot \dot{\vec{u}} = \vec{f} \tag{13}$$

pode ser obtida a partir das Eqs. (11) e (12) em termos das derivadas temporais das velocidades generalizadas. Equações como estas são denominadas equações diferenciais dinâmicas.

A matriz M, de dimensão nxn, é composta pelos coeficientes das derivadas temporais das velocidades generalizadas e é frequentemente chamada de matriz de massa do sistema. Os elementos da matriz de massa têm dimensão de massa ou de momento de inércia. O vetor $\vec{f}$, de dimensão n, é chamado de vetor de força e seus elementos possuem dimensão de força ou de momento. Nele estão incluídos todos os termos que aparecem no lado direito de cada equação dinâmica e todos os outros termos que não multiplicam derivadas temporais de velocidades generalizadas.

As Eqs. (5) e (13) definem, juntas, um conjunto de $2 \cdot n$ equações diferenciais que descrevem a dinâmica de um sistema de multicorpos e que podem ser resolvidas para $\dot{q}$ e $\dot{u}$ a partir de técnicas conhecidas da Álgebra Linear. Caso o sistema fosse não-holonômico com p graus de liberdade, ter-se-iam n equações definidas pela Eq. (5), p equações dinâmicas definidas pela Eq. (13) e m equações não-honolômicas definidas pela Eq. (6), totalizando, também, $2 \cdot n$ equações. O vetor resultante das derivadas temporais das coordenadas e velocidades generalizadas poderia, em seguida, ser integrado numericamente para a obtenção da resposta dinâmica do sistema mecânico em questão.

Alguns exemplos de aplicação da abordagem euleriana para a resolução de problemas de multicorpos são os trabalhos de Barbosa; Costa [13] e de Costa [16].

3.3. Abordagem Lagrangeana

Formalismos analíticos, também conhecidos como formalismos lagrangeanos, são descritos pelo balanço de energia no sistema em termos de suas coordenadas generalizadas bem como de suas derivadas. As equações de Lagrange são determinadas a partir da aplicação do princípio dos deslocamentos virtuais às equações de movimento dadas pelas Eqs. (11) e (12) representadas em sua forma de D'Alembert.

Sejam q_1, ..., q_n as coordenadas generalizadas que definem um sistema holonômico S composto por v partículas P_i, ..., P_v em um determinado instante de tempo t. Seja m^{Pi} a massa de uma partícula P_i de S. As coordenadas cartesianas de

P_i em um referencial newtoniano são expressas como funções das coordenadas generalizadas do sistema conforme segue

$$\begin{aligned} x_i &= \theta_i(q_1,...,q_n,t) \\ y_i &= \phi_i(q_1,...,q_n,t) \\ z_i &= \psi_i(q_1,...,q_n,t) \end{aligned} \tag{14}$$

Sendo R_{xi}, R_{yi} e R_{zi} as componentes da resultante de todas as forças atuantes em P_i, as equações de Newton para esta partícula ficam

$$\begin{aligned} m^{Pi} \cdot \ddot{x}_i &= R_{xi} \\ m^{Pi} \cdot \ddot{y}_i &= R_{yi} \\ m^{Pi} \cdot \ddot{z}_i &= R_{zi} \end{aligned} \tag{15}$$

Multiplicando a primeira equação por δ_{xi}, a segunda equação por δ_{yi} e a terceira equação por δ_{zi} e somando as equações resultantes, obtém-se

$$R_{xi} \cdot \delta_{xi} + R_{yi} \cdot \delta_{yi} + R_{zi} \cdot \delta_{zi} = m^{Pi} \cdot \ddot{x}_i \cdot \delta_{xi} + m^{Pi} \cdot \ddot{y}_i \cdot \delta_{yi} + m^{Pi} \cdot \ddot{z}_i \cdot \delta_{zi} \tag{16}$$

As quantidades δ_{xi}, δ_{yi} e δ_{zi} são pequenos deslocamentos chamados deslocamentos virtuais e foram escritos como deltas para enfatizar que eles possuem valores arbitrários.

Transformando as coordenadas cartesianas x_i, y_i e z_i da Eq. (16) para coordenadas generalizadas q_1, ..., q_n utilizando as Eqs. (14), resultam, para os deslocamentos virtuais, as seguintes expressões

$$\begin{aligned}\delta_{xi} &= \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_r} \cdot \delta_{qr} \\ \delta_{yi} &= \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial q_r} \cdot \delta_{qr} \\ \delta_{zi} &= \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial z_i}{\partial q_r} \cdot \delta_{qr}\end{aligned} \tag{17}$$

Para simplificar o trabalho algébrico, supõe-se $\delta_1 \neq 0$, enquanto $\delta_2 = ... = \delta_n = 0$. Tal simplificação é permitida já que as coordenadas generalizadas foram definidas independentes. Neste caso, as Eqs. (17) tomam a seguinte forma

$$\begin{aligned}\delta_{xi} &= \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \cdot \delta_{q1} \\ \delta_{yi} &= \frac{\partial y_i}{\partial q_1} \cdot \delta_{q1} \\ \delta_{zi} &= \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \cdot \delta_{q1}\end{aligned} \tag{18}$$

Substituindo estes valores em (16) e somando para todas as partículas do sistema S, obtém-se

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{v} \left(R_{xi} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_1} + R_{yi} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial q_1} + R_{zi} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \right) \cdot \delta_{q1} = \\ &= \sum_{i=1}^{v} \left(m^{Pi} \cdot \ddot{x}_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_1} + m^{Pi} \cdot \ddot{y}_i \cdot \frac{\partial y_i}{\partial q_1} + m^{Pi} \cdot \ddot{z}_i \cdot \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \right) \cdot \delta_{q1}\end{aligned} \tag{19}$$

O lado esquerdo da Eq. (19) tem um significado físico simples: é o trabalho feito pelas forças externas durante o deslocamento δ_{q1}. Igualando o termo em questão a $F_1 \cdot \delta_{q1}$, define-se força generalizada como

$$F_1 = \sum_{i=1}^{v} \left(R_{xi} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_1} + R_{yi} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial q_1} + R_{zi} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \right) \tag{20}$$

Deve-se notar que a força generalizada não tem, necessariamente, dimensão de força. Por exemplo, se q_i for uma grandeza angular, δ_{qi} será adimensional e F_i terá dimensão de momento.

Para prosseguir com a demonstração, os termos do lado direito da Eq. (19) devem ser substituídos. Utilizando a regra da diferenciação de produto, resulta para a coordenada x_i,

$$\ddot{x}_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \right) - \dot{x}_i \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_1} \right) \tag{21}$$

Das Eqs. (14), $\dot{x}_i$ pode ser expresso como

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_r} \cdot \dot{q}_r \tag{22}$$

e, assim,

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_1} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_1} \tag{23}$$

Pode-se usar, também, o fato de que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_1} \right) = \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{dx_i}{dt} \right) = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_1} \tag{24}$$

Substituindo as Eqs. (23) e (24) na Eq. (21), resulta

$$\ddot{x}_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i \cdot \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_1} \right) - \dot{x}_i \cdot \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\left(\frac{\dot{x}_i^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\dot{x}_i^2}{2} \right) \tag{25}$$

Desenvolvendo expressões similares para as coordenadas y_i e z_i e substituindo na Eq. (19), obtém-se

$$F_1 \cdot \delta_{q1} = \sum_{i=1}^{v} m^{Pi} \cdot \left\{ \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\left(\frac{\dot{x}_i^2}{2} + \frac{\dot{y}_i^2}{2} + \frac{\dot{z}_i^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\dot{x}_i^2}{2} + \frac{\dot{y}_i^2}{2} + \frac{\dot{z}_i^2}{2} \right) \right\} \cdot \delta_{q1} \tag{26}$$

A energia cinética K do sistema S é dada por

$$K = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{v} m^{Pi} \cdot \left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2 \right) \tag{27}$$

Tal expressão, quando substituída na Eq. (26), resulta

$$F_1 \cdot \delta_{q1} = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_1} \right] \cdot \delta_{q1} \tag{28}$$

Dividindo ambos os lados da Eq. (28) por δ_{q1}, obtém-se

$$F_1 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_1} \tag{29}$$

A Eq. (29) é a equação de Lagrange na sua forma mais utilizada e difundida. Se a simplificação feita para a obtenção das Eqs. (18) tivesse sido $\delta_2 \neq 0$, enquanto $\delta_1 = \delta_3 = ... = \delta_n = 0$, uma equação equivalente a Eq. (29) teria sido obtida para δ_{q2}. Procedendo de maneira similar para todas as n coordenadas generalizadas, obtém-se n equações de Lagrange independentes, correspondendo aos n graus de liberdade do sistema S, isto é,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_r} = F_r \qquad (r = 1,...,n) \tag{30}$$

Se todas as forças externas atuantes no sistema forem conservativas, podendo, portanto, serem derivadas de uma função energia potencial V, vale a seguinte expressão

$$F_r = -\frac{\partial V}{\partial q_r} \tag{31}$$

Assim, para um sistema conservativo, as equações de Lagrange tomam a seguinte forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_r} + \frac{\partial V}{\partial q_r} = 0 \qquad (r = 1,...,n) \tag{32}$$

Caso o sistema mecânico considerado não seja conservativo, várias formas de função de dissipação são possíveis. Quando um sistema está sujeito a forças resistivas diretamente proporcionais às velocidades de seus pontos de aplicação, é possível expressar as equações de Lagrange com um termo extra. Sendo f a função de dissipação em questão, a equação de Lagrange pode ser escrita da seguinte maneira

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_r} + \frac{\partial V}{\partial q_r} + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_r} = F_r \qquad (r = 1,...,n) \tag{33}$$

Para um sistema não-holonômico com p graus de liberdade e m equações de vínculo não-holonômicas conforme a Eq. (8), as equações de Lagrange podem ser obtidas considerando o sistema S sujeito a forças externas adicionais. Nestes casos um conjunto de m termos adicionais chamados multiplicadores de Lagrange são introduzidos e as equações assumem a seguinte forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_r} + \frac{\partial V}{\partial q_r} + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_r} = F_r + \sum_{i=1}^{m} W_{ir} \cdot \lambda_i \qquad (r = 1,...,n) \tag{34}$$

onde os λ_i são os multiplicadores de Lagrange e os coeficientes W_{ir} são dados pela Eq. (8). A Eq. (34) juntamente com a Eq. (8) são suficientes para a determinação das $n+m$ variáveis desconhecidas (q_1, ..., q_n, λ_1, ..., λ_m).

Algumas vantagens da abordagem lagrangeana são: as equações dinâmicas são determinadas da mesma forma para qualquer conjunto de coordenadas generalizadas; as acelerações não precisam ser determinadas; o número necessário de equações para a resolução do problema é automaticamente obtido; isto além da eliminação de possíveis dificuldades com sinais algébricos inerentes a abordagens vetoriais. É importante ressaltar que algumas destas vantagens são intrínsecas aos métodos de resolução por energia e que a equação de Lagrange é considerada a forma mais geral e mais conhecida dos princípios de resolução de sistemas multicorpos pelo método das energias.

Devido às vantagens supracitadas, muitos softwares de MBS fazem uso da abordagem lagrangeana para a resolução de sistemas multicorpos. Dentre estes pacotes destacam-se o ADAMS e o MEDYNA.

3.4. Formalismo de Kane

O formalismo de Kane pode ser classificado como uma abordagem euleriana e baseia-se em quantidades denominadas velocidades parciais. Este método utiliza as equações de Newton e de Euler, Eqs. (11) e (12) respectivamente, escritas na forma de D'Alembert e o princípio da ortogonalidade de Telegen para projetar vetores força em algumas direções particulares através do produto escalar. O formalismo de Kane é semelhante ao princípio de Jourdain da potência virtual, que determina que a potência virtual associada a forças e torques de restrição devem desaparecer no equacionamento, conforme será mostrado no item 3.5. No caso do método de Kane não são utilizadas velocidades virtuais, mas sim componentes específicas das velocidades reais dos corpos em estudo.

Prosseguindo nesta linha de raciocínio, Kane obteve relações escalares entre as forças e torques de inércia projetados, chamados forças de inércia generalizadas e as forças e torques externos projetados, denominados forças ativas generalizadas. As

equações dinâmicas de Kane são válidas para descrever o movimento de um sistema S de partículas P_i em qualquer sistema de coordenadas. É importante notar, no entanto, que as forças de inércia generalizadas e as forças ativas generalizadas devem ser definidas em relação a um sistema inercial de referência.

3.4.1. Velocidades Parciais

Seja um sistema holonômico simples S com n graus de liberdade no referencial A. A velocidade angular em relação a A de um corpo rígido B pertencente a S pode ser escrita da seguinte forma

$$\vec{\omega}^B = \sum_{r=1}^{n} \vec{\omega}_r^B \cdot u_r + \vec{\omega}_t^B \tag{35}$$

Analogamente, para a velocidade de uma partícula P_i pertencente a S em relação ao referencial A, tem-se

$$\vec{v}^{Pi} = \sum_{r=1}^{n} \vec{v}_r^{Pi} \cdot u_r + \vec{v}_t^{Pi} \tag{36}$$

onde $\vec{\omega}_r^B$, $\vec{v}_r^{Pi}$, $\vec{\omega}_t^B$, $\vec{v}_t^{Pi}$ são funções de q_1, ..., q_n e t. O vetor $\vec{\omega}_r^B$ é chamado r-ésima velocidade angular parcial holonômica de B em A e o vetor $\vec{v}_r^{Pi}$ é denominado r-ésima velocidade parcial holonômica de P_i em A. Se o sistema S for holonômico escleronômico, $\vec{\omega}_t^B$ e $\vec{v}_t^{Pi}$ são iguais a zero.

Caso o sistema S seja não-holonômico, os vetores $\vec{\omega}^B$ e $\vec{v}^{Pi}$, podem ser expressos da seguinte maneira

$$\vec{\omega}^B = \sum_{r=1}^{p} \tilde{\vec{\omega}}_r^B \cdot u_r + \tilde{\vec{\omega}}_t^B \tag{37}$$

$$\vec{v}^{\,Pi} = \sum_{r=1}^{p} \tilde{\vec{v}}_r^{\,Pi} \cdot u_r + \tilde{\vec{v}}_t^{\,Pi} \tag{38}$$

onde os vetores $\tilde{\vec{\omega}}_r^{\,B}$, $\tilde{\vec{v}}_r^{\,Pi}$, $\tilde{\vec{\omega}}_t^{\,B}$, $\tilde{\vec{v}}_t^{\,Pi}$ são funções de q_1, ..., q_n e t. O vetor $\tilde{\vec{\omega}}_r^{\,B}$ é chamado r-ésima velocidade angular parcial não-holonômica de B em A e o vetor $\tilde{\vec{v}}_r^{\,Pi}$ é denominado r-ésima velocidade parcial não-holonômica de P_i em A. É possível estabelecer uma relação entre as velocidades parciais holonômicas e não-holonômicas a partir das equações não-holonômicas de vínculo, Eq. (6). Para o caso das velocidades angulares parciais não-holonômicas, esta relação é expressa pelas equações

$$\tilde{\vec{\omega}}_r^{\,B} = \vec{\omega}_r^{\,B} + \sum_{i=p+1}^{n} \vec{\omega}_i^{\,B} \cdot Y_{ir} \qquad (r = 1,..., p) \tag{39}$$

$$\tilde{\vec{\omega}}_t^{\,B} = \vec{\omega}_t^{\,B} + \sum_{i=p+1}^{n} \vec{\omega}_i^{\,B} \cdot Z_i \tag{40}$$

Procedendo de forma similar para $\tilde{\vec{v}}_r^{\,Pi}$ e $\tilde{\vec{v}}_t^{\,Pi}$, obtém-se

$$\tilde{\vec{v}}_r^{\,Pi} = \vec{v}_r^{\,Pi} + \sum_{i=p+1}^{n} \vec{v}_i^{\,Pi} \cdot Y_{ir} \qquad (r = 1,..., p) \tag{41}$$

$$\tilde{\vec{v}}_t^{\,Pi} = \vec{v}_t^{\,Pi} + \sum_{i=p+1}^{n} \vec{v}_i^{\,Pi} \cdot Z_i \tag{42}$$

Pode-se afirmar que, para o caso de um sistema holonômico, não existem vínculos de movimento, e, portanto, $m = 0$, $p = n$, $\tilde{\vec{\omega}}_r^{\,B} = \vec{\omega}_r^{\,B}$ e $\tilde{\vec{v}}_r^{\,Pi} = \vec{v}_r^{\,Pi}$.

As velocidades parciais podem ser vistas como uma indicação das componentes das velocidades angulares e lineares de um corpo. Dada a velocidade angular $\vec{\omega}^{\,B}$ de um corpo, a r-ésima velocidade angular parcial do corpo B pertencente a S pode ser expressa como

$$\vec{\omega}_r^{\,B} = \frac{\partial \vec{\omega}^{\,B}}{\partial u_r} \qquad (r = 1,...,n) \tag{43}$$

Conhecida a velocidade $\vec{v}^{\,Pi}$ de uma partícula P_i pertencente a S, sua r-ésima velocidade parcial é dada por

$$\vec{v}_r^{\,Pi} = \frac{\partial \vec{v}^{\,Pi}}{\partial u_r} \qquad (r = 1,...,n) \tag{44}$$

Uma interpretação física para as velocidades parciais baseia-se no fato de que forças e torques só realizam trabalho se há movimento. Assim, as velocidades parciais representam as direções nas quais os movimentos dos corpos acontecem.

3.4.2. Equações de Kane

Para a presente dedução das equações de Kane, assume-se que o sistema S seja holonômico escleronômico. Esta hipótese não afeta o entendimento do formalismo e torna a dedução das equações uma tarefa mais simples. A mesma dedução voltada a um sistema não-holonômico genérico pode ser encontrada no livro de Kane; Levinson [19].

As equações dinâmicas de Kane podem ser obtidas somando-se as equações de Newton e de Euler, Eqs. (11) e (12) respectivamente, em suas formas de D'Alembert multiplicadas pelas velocidades parciais já definidas. O resultado destas operações algébricas é

$$\sum_{B}^{corpos} \left[\left(\vec{R}^{\,B} - m^B \cdot \vec{a}^{\,B^*} \right) \cdot \vec{v}_r^{\,B^*} + \left(\vec{T}^{\,B} - I^{\,B^*} \cdot \vec{\alpha}^{\,B} - \vec{\omega}^{\,B} \times I^{\,B^*} \cdot \vec{\omega}^{\,B} \right) \cdot \vec{\omega}_r^{\,B} \right] = 0 \tag{45}$$

$(r = 1,...,n)$

onde $\vec{v}_r^{\,B^*}$ é um caso especial de $\vec{v}_r^{\,Pi}$ no qual o ponto em questão é o centro de massa B^* do corpo B pertencente a S.

Agrupando as forças e torques externos e os termos de inércia, resulta

$$\sum_{B}^{corpos}\left[\left(\vec{R}^{B}\cdot\vec{v}_r^{B^*}+\vec{T}^{B}\cdot\vec{\omega}_r^{B}\right)-m^{B}\cdot\vec{a}^{B^*}\cdot\vec{v}_r^{B^*}-\left(I^{B^*}\cdot\vec{\alpha}^{B}+\vec{\omega}^{B}\times I^{B^*}\cdot\vec{\omega}^{B}\right)\cdot\vec{\omega}_r^{B}\right]=0 \qquad (46)$$

$$(r=1,...,n)$$

A partir da Eq. (46) define-se matematicamente o conceito de forças ativas generalizadas, F_r,

$$F_r=\sum_{B}^{corpos}\left(\vec{R}^{B}\cdot\vec{v}_r^{B^*}+\vec{T}^{B}\cdot\vec{\omega}_r^{B}\right) \qquad (r=1,...,n) \qquad (47)$$

Analogamente, define-se matematicamente o conceito de forças de inércia generalizadas, F_r^*,

$$F_r^*=\sum_{B}^{corpos}\left[-m^{B}\cdot\vec{a}^{B^*}\cdot\vec{v}_r^{B^*}-\left(I^{B^*}\cdot\vec{\alpha}^{B}+\vec{\omega}^{B}\times I^{B^*}\cdot\vec{\omega}^{B}\right)\cdot\vec{\omega}_r^{B}\right] \qquad (48)$$

$$(r=1,...,n)$$

Assim, as equações dinâmicas de Kane podem ser escritas como

$$F_r+F_r^*=0 \qquad (r=1,...,n) \qquad (49)$$

As equações de Kane descrevem o movimento de um sistema S em qualquer sistema de referência quando as forças generalizadas F_r e F_r^* estiverem determinadas em relação a um referencial inercial.

É interessante ressaltar que algumas forças e momentos que contribuem para $\vec{R}^{B}$ e $\vec{T}^{B}$ não contribuem necessariamente para F_r. Esta é, na verdade, a maior motivação para o uso de forças ativas generalizadas. Por exemplo, a contribuição total para F_r de todas as forças e torques entre os corpos de S é nula já que tais

quantidades aparecem em pares e com sinais trocados na Eq. (47). Tal fato contribui, por razões óbvias, para a obtenção de equações dinâmicas mais simples.

Um bom exemplo do emprego do formalismo de Kane para a resolução de um problema de MBS é o trabalho de Rebello [6]. Alguns softwares mundialmente conhecidos como o AUTOLEV e o SD/FAST também fazem uso deste método para a resolução de problemas de multicorpos.

3.5. Princípio de Jourdain

Esta breve revisão sobre o princípio de Jourdain é baseada nas notas de aula de Hagedorn [20] e complementa a teoria apresentada no artigo de Costa [18]. Conforme já mencionado, o princípio de Jourdain é semelhante ao formalismo de Kane, mas, em vez de utilizar quantidades como componentes de velocidades reais, faz uso das potências virtuais do sistema em sua formulação.

Para que seja possível iniciar a dedução, é preciso recordar as equações de Newton para o movimento de partículas, Eqs. (15), doravante denominadas Eqs. (50).

$$\begin{aligned} m^{Pi} \cdot \ddot{x}_i &= R_{xi} \\ m^{Pi} \cdot \ddot{y}_i &= R_{yi} \\ m^{Pi} \cdot \ddot{z}_i &= R_{zi} \end{aligned} \tag{50}$$

Multiplicando as Eqs. (50) respectivamente pelas velocidades virtuais $\delta_{\dot{x}i}$, $\delta_{\dot{y}i}$ e $\delta_{\dot{z}i}$ e somando as equações resultantes, obtém-se, para uma partícula P_i pertencente ao sistema S,

$$\left(R_{xi} - m^{Pi} \cdot \ddot{x}_i\right) \cdot \delta_{\dot{x}i} + \left(R_{yi} - m^{Pi} \cdot \ddot{y}_i\right) \cdot \delta_{\dot{y}i} + \left(R_{zi} - m^{Pi} \cdot \ddot{z}_i\right) \cdot \delta_{\dot{z}i} = 0 \tag{51}$$

Adaptando-se as Eqs. (17) para as velocidades virtuais $\delta_{\dot{x}i}$, $\delta_{\dot{y}i}$ e $\delta_{\dot{z}i}$, obtém-se

$$\delta_{\dot{x}i} = \sum_{r=1}^{p} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial u_r} \cdot \delta_{ur}$$
$$\delta_{\dot{y}i} = \sum_{r=1}^{p} \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial u_r} \cdot \delta_{ur} \tag{52}$$
$$\delta_{\dot{z}i} = \sum_{r=1}^{p} \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial u_r} \cdot \delta_{ur}$$

A simplificação de que $\delta_1 \neq 0$, enquanto $\delta_2 = ... = \delta_n = 0$ feita para a dedução das equações de Lagrange continua válida já que as coordenadas generalizadas foram definidas independentes. Assim, resulta

$$\delta_{\dot{x}i} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial u_1} \cdot \delta_{u1}$$
$$\delta_{\dot{y}i} = \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial u_1} \cdot \delta_{u1} \tag{53}$$
$$\delta_{\dot{z}i} = \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial u_1} \cdot \delta_{u1}$$

Substituindo as Eqs. (53) na Eq. (51) e eliminando δ_{u1} da equação resultante, obtém-se

$$\left(R_{xi} - m^{Pi} \cdot \ddot{x}_i\right) \cdot \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial u_1} + \left(R_{yi} - m^{Pi} \cdot \ddot{y}_i\right) \cdot \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial u_1} + \left(R_{zi} - m^{Pi} \cdot \ddot{z}_i\right) \cdot \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial u_1} = 0 \tag{54}$$

Somando as Eq. (54) referente a cada uma das v partículas P_i pertencentes a S e colocando a equação resultante na forma vetorial, resulta

$$\sum_{i=1}^{v} \left(\vec{R}^{Pi} - m^{Pi} \cdot \vec{a}^{Pi}\right) \cdot \frac{\partial \vec{v}^{Pi}}{\partial u_1} = 0 \tag{55}$$

Generalizando a Eq. (55), obtém-se

$$\sum_{i=1}^{v}\left(\vec{R}^{Pi} - m^{Pi}\cdot\vec{a}^{Pi}\right)\cdot\frac{\partial\vec{v}^{Pi}}{\partial u_r} = 0 \qquad (r = 1,..., p) \tag{56}$$

Conforme mencionado anteriormente, a Eq. (56) é válida para um sistema S de v partículas. Pode-se, no entanto, estendê-la a um sistema composto por corpos rígidos. Neste caso, a equação anterior toma a seguinte forma

$$\sum_{B}^{corpos}\left\{\left[\vec{R}^{B} - m^{B}\cdot\vec{a}^{B^*}\right]\cdot\frac{\partial\vec{v}^{B^*}}{\partial u_r} + \left[\vec{T}^{B} - I^{B^*}\cdot\vec{\alpha}^{B} - \vec{\omega}^{B}\times I^{B^*}\cdot\vec{\omega}^{B}\right]\cdot\frac{\partial\vec{\omega}^{B}}{\partial u_r}\right\} = 0 \tag{57}$$

$(r = 1,..., p)$

A Eq. (57) é a expressão final para o princípio de Jourdain. É importante ressaltar que apenas p equações foram obtidas porque optou-se por equacionar o princípio de Jourdain para um sistema não-holonômico genérico. Neste caso, as m equações adicionais para a resolução do problema são provenientes da Eq. (6), aqui repetida e identificada como Eq. (58).

$$u_i = \sum_{s=1}^{p} Y_{is}\cdot u_s + Z_i \qquad (i = p+1,..., n) \tag{58}$$

É importante notar que a Eq. (57) é idêntica à Eq. (45) e constitui a base para o desenvolvimento do formalismo de Kane. O artigo de Piedboeuf [21] discute justamente a relação entre o princípio de Jourdain e o formalismo de Kane. Piedboeuf [21] afirma que Kane publicou um artigo em 1961 detalhando o seu formalismo e popularizando o seu método na área de modelagem de sistemas mecânicos e robótica. No entanto, no ano de 1909, Jourdain já havia publicado seu artigo estabelecendo o princípio da potência virtual, no qual são deduzidas equações equivalentes às do formalismo de Kane.

Como a expressão característica e mundialmente conhecida do formalismo de Kane é a Eq. (49), baseada nos conceitos de forças ativas generalizadas e forças de inércia generalizadas, pode-se dizer que o formalismo em questão pode ser considerado uma reestruturação algébrica do princípio de Jourdain feita de uma

forma fisicamente mais intuitiva por ser baseada em componentes das velocidades reais dos corpos que compõem o sistema em estudo.

Bons exemplos da aplicação do princípio de Jourdain para a resolução de problemas de multicorpos relacionados à engenharia automotiva são os artigos de Rill [22] [23].

3.6. Exemplo de Aplicação da Teoria de Multicorpos

Devido ao fato de o formalismo de Kane ter sido o método de resolução escolhido para o estudo da dinâmica veicular vertical proposto por este trabalho, pretende-se, nesta seção, demonstrar a aplicação deste método através da resolução de um problema simples. Para comprovar a correção da resolução pelo formalismo de Kane, o mesmo problema é, em seguida, resolvido através das equações de Lagrange.

O exemplo proposto foi extraído do livro de Kane; Levinson [19] e consiste em duas partículas, P_1 e P_2, com massas m^{P_1} e m^{P_2} e sujeitas à ação da força gravitacional, que podem deslizar livremente por dentro de um tubo liso T e estão presas às molas σ_1 e σ_2 (com constantes elásticas iguais a k_1 e k_2 e comprimentos naturais iguais a L_1 e L_2), conforme mostra a Fig. 4. O tubo T pode girar em torno de um eixo horizontal fixo que passa pelo ponto O de tal forma que o ângulo entre a vertical e o eixo longitudinal de T é representado por uma função $\theta(t)$ do tempo t. Devem-se determinar as equações dinâmicas que regem o movimento das partículas P_1 e P_2 e, para isso, devem ser utilizadas as coordenadas generalizadas q_1 e q_2 mostradas na Fig. 4.

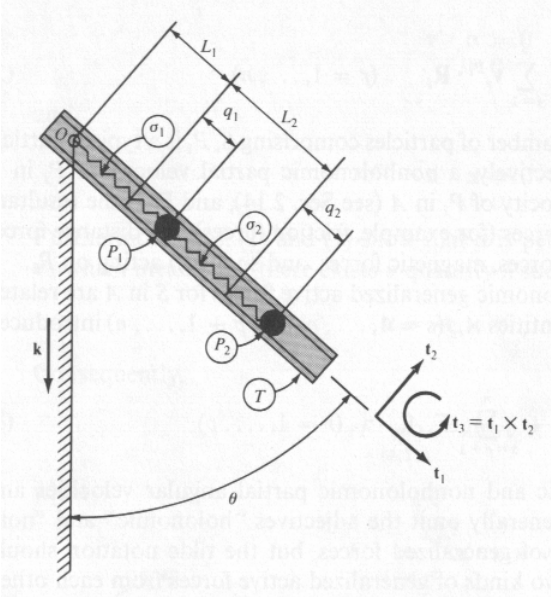

Fig. 4: Exemplo de sistema multicorpo (extraída de Kane; Levinson [19]).

3.6.1. Exemplo de Aplicação do Formalismo de Kane

Inicialmente, definem-se as velocidades generalizadas do sistema

$$\begin{aligned} u_1 &= \dot{q}_1 \\ u_2 &= \dot{q}_2 \end{aligned} \tag{59}$$

As velocidades das partículas P_1 e P_2 são dadas por

$$\begin{aligned} \vec{v}^{P_1} &= u_1 \cdot \vec{t}_1 + (L_1 + q_1) \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{t}_2 \\ \vec{v}^{P_2} &= u_2 \cdot \vec{t}_1 + (L_1 + L_2 + q_2) \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{t}_2 \end{aligned} \tag{60}$$

Calculam-se, então, as acelerações das partículas P_1 e P_2

$$\begin{aligned} \vec{a}^{P_1} &= \frac{d\vec{v}^{P_1}}{dt} = \left[\dot{u}_1 - (L_1 + q_1) \cdot \dot{\theta}^2\right] \cdot \vec{t}_1 + \left[2 \cdot u_1 \cdot \dot{\theta} + (L_1 + q_1) \cdot \ddot{\theta}\right] \cdot \vec{t}_2 \\ \vec{a}^{P_2} &= \frac{d\vec{v}^{P_2}}{dt} = \left[\dot{u}_2 - (L_1 + L_2 + q_2) \cdot \dot{\theta}^2\right] \cdot \vec{t}_1 + \left[2 \cdot u_2 \cdot \dot{\theta} + (L_1 + L_2 + q_2) \cdot \ddot{\theta}\right] \cdot \vec{t}_2 \end{aligned} \tag{61}$$

As velocidades parciais definidas pela Eq. (44) são calculadas para este sistema em específico

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1^{P_1} &= \frac{\partial \vec{v}^{P_1}}{\partial u_1} = \vec{t}_1 \\
\vec{v}_2^{P_1} &= \frac{\partial \vec{v}^{P_1}}{\partial u_2} = \vec{0} \\
\vec{v}_1^{P_2} &= \frac{\partial \vec{v}^{P_2}}{\partial u_1} = \vec{0} \\
\vec{v}_2^{P_2} &= \frac{\partial \vec{v}^{P_2}}{\partial u_2} = \vec{t}_1
\end{aligned} \tag{62}$$

As forças resultantes atuantes sobre as partículas P_1 e P_2 são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned}
\vec{R}^{P_1} &= \left[-k_1 \cdot q_1 + k_2 \cdot \left(q_2 - q_1\right)\right] \cdot \vec{t}_1 + T_{12} \cdot \vec{t}_2 + T_{13} \cdot \vec{t}_3 + m^{P_1} \cdot g \cdot \vec{k} \\
\vec{R}^{P_2} &= -k_2 \cdot (q_2 - q_1) \cdot \vec{t}_1 + T_{22} \cdot \vec{t}_2 + T_{23} \cdot \vec{t}_3 + m^{P_2} \cdot g \cdot \vec{k}
\end{aligned} \tag{63}$$

onde T_{ij} é a força de contato atuante na partícula P_i na direção $\vec{t}_j$ devido ao contato da partícula com o tubo T. Não existe força na direção $\vec{t}_1$, porque o atrito entre as partículas P_1 e P_2 e o tubo liso T pode ser desprezado.

Calculam-se as forças ativas generalizadas do sistema formado pelas partículas P_1 e P_2 de acordo com a Eq. (47)

$$\begin{aligned}
F_1 &= \vec{R}^{P_1} \cdot \vec{v}_1^{P_1} + \vec{R}^{P_2} \cdot \vec{v}_1^{P_2} = -k_1 \cdot q_1 + k_2 \cdot \left(q_2 - q_1\right) + m^{P_1} \cdot g \cdot \cos\theta \\
F_2 &= \vec{R}^{P_1} \cdot \vec{v}_2^{P_1} + \vec{R}^{P_2} \cdot \vec{v}_2^{P_2} = -k_2 \cdot \left(q_2 - q_1\right) + m^{P_2} \cdot g \cdot \cos\theta
\end{aligned} \tag{64}$$

Deve-se atentar para o fato de que as forças de contato entre as partículas e o tubo, por não realizarem trabalho (já que não há deslocamento relativo entre o tubo e as partículas nas direções $\vec{t}_2$ e $\vec{t}_3$), acabam não contribuindo para expressão das forças ativas generalizadas do sistema.

Calculam-se, então, as forças de inércia generalizadas para o sistema formado pelas partículas P_1 e P_2 conforme a Eq. (48)

$$\begin{aligned} F_1^* &= -m^{P_1} \cdot \vec{a}^{P_1} \cdot \vec{v}_1^{P_1} - m^{P_2} \cdot \vec{a}^{P_2} \cdot \vec{v}_1^{P_2} = m^{P_1} \cdot \left[\left(L_1 + q_1 \right) \cdot \dot{\theta}^2 - \dot{u}_1 \right] \\ F_2^* &= -m^{P_1} \cdot \vec{a}^{P_1} \cdot \vec{v}_2^{P_1} - m^{P_2} \cdot \vec{a}^{P_2} \cdot \vec{v}_2^{P_2} = m^{P_2} \cdot \left[\left(L_1 + L_2 + q_2 \right) \cdot \dot{\theta}^2 - \dot{u}_2 \right] \end{aligned} \tag{65}$$

Escrevem-se, então, as equações dinâmicas de Kane para o sistema

$$\begin{aligned} F_1 + F_1^* &= 0 \\ F_2 + F_2^* &= 0 \end{aligned} \tag{66}$$

Substituindo as Eqs. (59), (64) e (65) nas Eqs. (66), determinam-se, finalmente, as equações dinâmicas que regem o movimento das partículas P_1 e P_2 em função das coordenadas generalizadas q_1 e q_2

$$\begin{aligned} &m^{P_1} \cdot \ddot{q}_1 + \left(k_1 + k_2 - m^{P_1} \cdot \dot{\theta}^2 \right) \cdot q_1 - k_2 \cdot q_2 - m^{P_1} \cdot L_1 \cdot \dot{\theta}^2 - m^{P_1} \cdot g \cdot \cos\theta = 0 \\ &m^{P_2} \cdot \ddot{q}_2 + \left(k_2 - m^{P_2} \cdot \dot{\theta}^2 \right) \cdot q_2 - k_2 \cdot q_1 - m^{P_2} \cdot \left(L_1 + L_2 \right) \cdot \dot{\theta}^2 - m^{P_2} \cdot g \cdot \cos\theta = 0 \end{aligned} \tag{67}$$

3.6.2. Exemplo de Aplicação das Equações de Lagrange

Assim como nos outros formalismos para a resolução de sistemas multicorpos, na abordagem lagrangeana devem-se, inicialmente, definir as coordenadas generalizadas do sistema. Para que os resultados dos cálculos pelas equações de Lagrange possam ser comparados aos resultados obtidos com o formalismo de Kane, as coordenadas generalizadas escolhidas são as coordenadas q_1 e q_2, mostradas na Fig. 4.

As velocidades das partículas P_1 e P_2 são dadas por

$$\begin{aligned} \vec{v}^{P_1} &= \dot{q}_1 \cdot \vec{t}_1 + \left(L_1 + q_1 \right) \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{t}_2 \\ \vec{v}^{P_2} &= \dot{q}_2 \cdot \vec{t}_1 + \left(L_1 + L_2 + q_2 \right) \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{t}_2 \end{aligned} \tag{68}$$

A energia cinética do sistema formado pelas partículas P_1 e P_2 é dada por

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}\cdot\left[m^{P_1}\cdot\vec{v}^{P_1}\cdot\vec{v}^{P_1}+m^{P_2}\cdot\vec{v}^{P_2}\cdot\vec{v}^{P_2}\right]= \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left\{m^{P_1}\cdot\left[\dot{q}_1^2+\left(L_1+q_1\right)^2\cdot\dot{\theta}^2\right]+m^{P_2}\cdot\left[\dot{q}_2^2+\left(L_1+L_2+q_2\right)^2\cdot\dot{\theta}^2\right]\right\} \end{aligned} \tag{69}$$

A energia potencial do sistema formado pelas partículas P_1 e P_2 é dada por

$$V = \frac{1}{2}\cdot\left[k_1\cdot q_1^2+k_2\left(q_2-q_1\right)^2\right]-\left[m^{P_1}\cdot\left(L_1+q_1\right)+m^{P_2}\cdot\left(L_1+L_2+q_2\right)\right]\cdot g\cdot\cos\theta \tag{70}$$

Como o sistema em questão trata-se de um sistema conservativo, aplica-se a equação de Lagrange dada pela Eq. (32) para as coordenadas generalizadas q_1 e q_2

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial\dot{q}_1}\right)-\frac{\partial K}{\partial q_1}+\frac{\partial V}{\partial q_1}=0 \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial\dot{q}_2}\right)-\frac{\partial K}{\partial q_2}+\frac{\partial V}{\partial q_2}=0 \end{aligned} \tag{71}$$

Substituindo as Eqs. (69) e (70) nas Eqs. (71) e rearranjando os termos resultantes, determinam-se, as equações dinâmicas de movimento para as partículas P_1 e P_2 em função das coordenadas generalizadas q_1 e q_2

$$\begin{aligned} &m^{P_1}\cdot\ddot{q}_1+\left(k_1+k_2-m^{P_1}\cdot\dot{\theta}^2\right)\cdot q_1-k_2\cdot q_2-m^{P_1}\cdot L_1\cdot\dot{\theta}^2-m^{P_1}\cdot g\cdot\cos\theta=0 \\ &m^{P_2}\cdot\ddot{q}_2+\left(k_2-m^{P_2}\cdot\dot{\theta}^2\right)\cdot q_2-k_2\cdot q_1-m^{P_2}\cdot\left(L_1+L_2\right)\cdot\dot{\theta}^2-m^{P_2}\cdot g\cdot\cos\theta=0 \end{aligned} \tag{72}$$

Deve-se ressaltar que as Eqs. (72), obtidas através das equações de Lagrange, são exatamente iguais às Eqs. (67), determinadas a partir do formalismo de Kane. No caso do exemplo apresentado, o trabalho algébrico demandado pelo formalismo de Kane é consideravelmente maior que o necessário para resolver o mesmo problema pelas equações de Lagrange. No entanto, por fornecer resultados confiáveis e ser

fisicamente mais intuitivo, o formalismo de Kane é altamente recomendável para a determinação das equações dinâmicas que regem sistemas multicorpos quando se dispõem de recursos computacionais como manipuladores simbólicos.

4. O SOFTWARE AUTOLEV

Atualmente é comum a utilização de simulações computacionais para observar a resposta dinâmica de um sistema mecânico como um veículo ou mesmo um robô. Esta forma de projeto de produtos e de componentes reduz drasticamente a necessidade da construção de protótipos para testes físicos. Vários softwares de multicorpos, formalismos e métodos computacionais têm sido desenvolvidos nas últimas três décadas. Segundo Schiehlen [24], quando se pretende escolher um pacote de multicorpos para a resolução de um problema em específico, é importante avaliar os softwares disponíveis no mercado de acordo com os seguintes quesitos:

- Topologia de sistema abrangida pelo software: é importante saber se o pacote de multicorpos contempla a topologia do problema em questão. Em geral os sistemas podem ser classificados como mecanismos de cadeia aberta e mecanismos de cadeia fechada.
- Elementos de modelagem incluídos no software: em geral, todos os pacotes permitem a modelagem de corpos rígidos, partículas, juntas representando vínculos holonômicos e elementos passivos como molas e amortecedores. Alguns softwares permitem, além disso, a modelagem de corpos deformáveis, elementos ativos para aplicação de forças (atuadores), vínculos reonômicos e não-holonômicos.
- Sistemas de coordenadas utilizados pelo software: geralmente, todos os pacotes permitem a utilização de sistemas de coordenadas inerciais, relativos e mistos.
- Métodos computacionais utilizados pelo software: a maior parte dos pacotes multicorpos faz uso de computação numérica, no entanto, existem softwares que utilizam computação simbólica, ou mesmo, uma combinação entre computação numérica e simbólica, como é o caso do AUTOLEV.
- Métodos dinâmicos utilizados no software: chamam-se métodos dinâmicos, aqui, os métodos utilizados para a formulação das equações dinâmicas do sistema. Os métodos mais utilizados são as equações de Lagrange, as equações de Newton-Euler e o princípio de Jourdain (ou princípio da potência

virtual). Conforme já discutido, o princípio de Jourdain também é tratado, principalmente no hemisfério ocidental, por formalismo de Kane.

- Tipos de equações geradas pelo software: em geral, as equações geradas pelos softwares de multicorpos são equações diferenciais ordinárias ou equações diferenciais algébricas. Alguns pacotes mais avançados permitem a geração de equações destes tipos já linearizadas em torno de um ponto específico de operação.
- Métodos de simulação utilizados pelo software: geralmente, os pacotes de multicorpos utilizam-se de recursos de integração numérica para a resolução das equações diferenciais desenvolvidas.
- Pré-processamento no software: há alguns anos não existiam interfaces gráficas para pacotes multicorpos que auxiliassem na modelagem matemática do problema em questão, assim esta etapa era realizada, basicamente, através da entrada de comandos em editores de texto. Na última década, muitos esforços têm sido realizados no sentido de desenvolver interfaces gráficas amigáveis de forma a tornar a modelagem matemática de sistemas complexos uma tarefa mais simples. Software de multicorpos como o ADAMS e o DADS já contam com interfaces gráficas de pré-processamento bastante desenvolvidas.
- Pós-processamento no software: alguns anos atrás a análise dos resultados de uma simulação por multicorpos era feita, basicamente, através da análise das grandezas envolvidas a partir de gráficos. Softwares que permitiam a realização de análises de resposta em freqüência já eram considerados diferenciados. Os pacotes de multicorpos atuais já produzem animações bastante realistas que permitem que usuário tenha uma visão mais ampla e integrada do comportamento dinâmico do sistema.
- Áreas de aplicação do software: os softwares hoje disponíveis no mercado possibilitam uma ampla gama de aplicações da teoria de multicorpos, incluindo veículos ferroviários e rodoviários, aeronaves, satélites, robôs manipuladores, máquinas, mecanismos e até mesmo estudos de ergonomia.

O AUTOLEV, principal produto da OnLine Dynamics Inc. [25], é um software de multicorpos baseado em computação simbólica e no formalismo de Kane que difere dos outros pacotes disponíveis no mercado por permitir ao usuário um controle passo-a-passo do processo de formulação das equações dinâmicas de um sistema. O software não possui qualquer tipo de restrição em relação ao tipo de sistema dinâmico a ser resolvido, permitindo que o usuário trabalhe com a mesma facilidade com sistemas uni, bi, ou tridimensionais, com vínculos holonômicos e não-holonômicos de cadeia fechada ou aberta.

Segundo a própria OnLine Dynamics Inc. [25], as principais características do software AUTOLEV são:

- Realização de simulações dinâmicas de forma excepcionalmente rápida.
- Desenvolvimento de equações não-lineares e equações linearizadas para aplicação da teoria de controle.
- Otimização simbólica visando alta velocidade de resolução e mínima utilização de memória, ideal para análises com *hardware-in-loop*.
- Simplificação automática de expressões numéricas e simbólicas.
- Operações numéricas e simbólicas com escalares, matrizes, vetores e díades.
- Trabalho com propriedades cinemáticas, dinâmicas, estáticas, de energia e de inércia.
- Rápida preparação de códigos-fonte bastante compactos em linguagem C, Fortran e em script para MATLAB.

Com estas funcionalidades, o AUTOLEV torna-se um software muito útil e amplamente utilizado em universidades, indústrias automotivas, aeroespaciais e de automação, consultorias técnicas (como a própria Kane Dynamics Inc.), empresas desenvolvedoras de softwares de engenharia, centros médicos e até mesmo pela própria NASA e por departamentos de defesa governamentais.

Encontram-se listadas a seguir as principais *features* do AUTOLEV 4.0 (versão utilizada neste trabalho) divulgadas pela OnLine Dynamics Inc. [25]:

- Simplificação automática de expressões.

- Adição, multiplicação e inversão de matrizes, cálculo de determinantes, autovalores e autovetores.
- Solução de sistemas de equações diferenciais lineares e não-lineares.
- Avaliação de expressões algébricas.
- Introdução automática de variáveis intermediárias para facilitar a realização de operações.
- Derivações parciais ou totais de quantidades escalares e matriciais.
- Expansões por série de Taylor para várias variáveis simultaneamente.
- Operações com números complexos e variáveis complexas.
- Determinação de raízes de polinômios.
- Realização de operações de produto escalar e produto vetorial.
- Derivações totais e parciais de vetores e díades em relação a sistemas de coordenadas.
- Determinação de matrizes de transformação de sistemas de coordenadas orientadas por grandezas angulares, parâmetros de Euler e parâmetros de Rodrigues.
- Determinação do centro de massa, matriz de inércia e díades de inércia de um conjunto de corpos.
- Formulação automática de expressões para vetores posição, velocidade e aceleração (tanto lineares quanto angulares).
- Formulação de expressões para momento linear, angular e energia cinética.
- Utilização de algoritmos altamente eficientes para formulação e resolução de equações dinâmicas.
- Determinação de equações dinâmicas não-lineares e linearizadas, estas últimas muito úteis para o desenvolvimento e a simulação de sistemas de controle.
- Rápida geração de códigos-fonte otimizados em relação ao consumo de memória.
- Geração de códigos-fonte em linguagem C, Fortran e script para MATLAB para a integração numérica das equações simbólicas obtidas.

- Criação de gráficos de alta qualidade através do módulo ALPLOT, que lê os resultados da integração numérica das equações dinâmicas.
- Criação de animações simplificadas, isto é, baseadas em sólidos primitivos, da dinâmica do sistema estudado através do módulo ANIMAKE.

Apesar destas várias funcionalidades e das vantagens apresentadas pelo AUTOLEV em relação aos outros softwares de multicorpos disponíveis no mercado, ao longo deste trabalho foram notadas algumas deficiências deste software. As principais limitações do AUTOLEV 4.0 estão listadas a seguir:

- O AUTOLEV, diferentemente de softwares como o ADAMS e o DADS, não possibilita a inserção de corpos deformáveis (ou corpos elásticos) nos sistemas.
- O pré-processamento, isto é, a modelagem matemática do sistema, é uma tarefa bastante complicada no AUTOLEV devido à inexistência de uma interface gráfica. Este fator torna o software impróprio para usuários que não possuem algum conhecimento prévio da teoria de multicorpos.
- O pós-processamento no AUTOLEV é praticamente limitado à análise gráfica de variáveis escalares, pois o software não possui ferramentas para uma análise de resposta em freqüência e as animações geradas pelo módulo ANIMAKE são extremamente simplificadas e pouco realistas.

4.1. Exemplo de Aplicação do Software AUTOLEV

Para que o leitor entenda melhor o funcionamento do software AUTOLEV, optou-se por demonstrar a utilização deste programa através de um sistema mais simples que o modelo do veiculo com 7 graus de liberdade. Assim, o exemplo apresentado na seção 3.6 será novamente utilizado.

Recapitulando, o exemplo proposto consiste em duas partículas, P_1 e P_2, com massas m^{P_1} e m^{P_2} e sujeitas à ação da força gravitacional, que podem deslizar livremente por dentro de um tubo liso T e estão presas às molas σ_1 e σ_2 (com constantes elásticas iguais a k_1 e k_2 e comprimentos naturais iguais a L_1 e L_2),

conforme mostra a Fig. 5. O tubo T pode girar em torno de um eixo horizontal fixo que passa pelo ponto O de tal forma que o ângulo entre a vertical e o eixo longitudinal de T é representado por uma função $\theta(t)$ do tempo t. Devem-se determinar as equações dinâmicas que regem o movimento das partículas P_1 e P_2 e, para isso, devem ser utilizadas as coordenadas generalizadas q_1 e q_2 mostradas na Fig. 5.

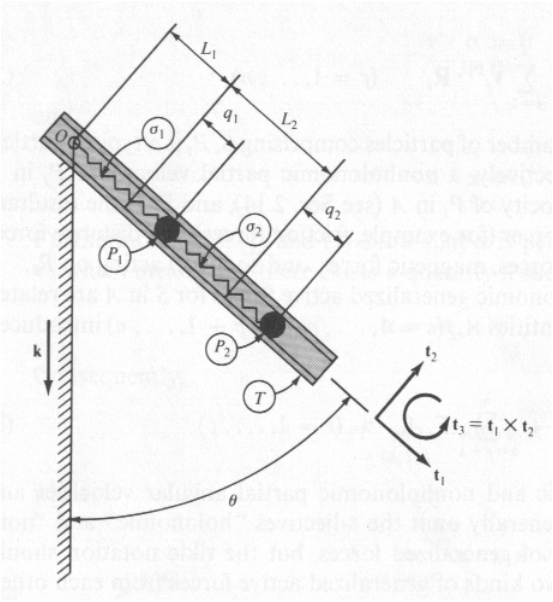

Fig. 5: Sistema a ser resolvido através do AUTOLEV (extraída de Kane; Levinson [19]).

Apesar de o software permitir a resolução de uma ampla gama de problemas dinâmicos, é importante que o usuário seja sistemático na escrita do respectivo código-fonte para que nenhum dos principais itens do pré-processamento seja esquecido. Estes itens incluem:

1) Definição do sistema de unidades utilizado, dos corpos e/ou partículas que constituem o sistema, dos sistemas de coordenadas envolvidos e das constantes, variáveis e funções matemáticas utilizadas.
2) Definição das equações cinemáticas diferenciais do sistema, isto é, a relação entre as coordenadas generalizadas e as velocidades generalizadas empregadas na resolução do problema.

3) Definição das posições, velocidades e acelerações lineares e angulares (quando aplicável) de todos os corpos e partículas que compõem o sistema dinâmico em estudo.
4) Definição das propriedades de massa e inércia dos corpos e das partículas do sistema.
5) Definição das forças atuantes sobre cada um dos corpos e partículas.
6) Definição do campo gravitacional atuante (quando aplicável).
7) Inserção dos comandos para a montagem das equações dinâmicas do sistema.
8) Definição das grandezas escalares que se pretende estudar, para que seja possível requisita-las como *outputs* das análises dinâmicas.
9) Definição matemática das funções utilizadas como entradas para o sistema dinâmico.
10) Especificação dos valores numéricos das constantes envolvidas na análise, das condições iniciais das variáveis em questão, do tempo total de simulação e do passo de integração a ser utilizado na resolução numérica.
11) Definição dos *outputs* da análise, isto é, das variáveis que se pretende analisar graficamente.
12) Inserção dos comandos para a geração de um código-fonte em linguagem C, Fortran, ou script para MATLAB para que as equações possam ser integradas numericamente em um compilador ou no MATLAB.

Os passos enumerados não precisam ser seguidos necessariamente na ordem apresentada acima, no entanto, é aconselhável que este padrão seja seguido para que nenhuma definição seja deixada para trás. O anexo A foi baseado no manual do usuário do AUTOLEV, escrito por Kane; Levinson [26], e contém uma lista com os principais comandos utilizados no AUTOLEV para o pré-processamento de um sistema dinâmico.

Visando resolver o exemplo da Fig. 5 através do AUTOLEV, escreveu-se o código-fonte *exemplo.al*. Este código foi escrito em um editor de texto comum, como o TEXTPAD e o WINDOWS EDITOR, e segue a mesma seqüência de comandos apresentada neste texto. Para executá-lo, o arquivo *exemplo.al* deve estar no mesmo

diretório do arquivo executável do AUTOLEV (*al.exe*) e, após a execução do arquivo *al.exe*, deve-se entrar com a linha de comando *run exemplo.al* no próprio prompt do programa, conforme mostrado na Fig. 6.

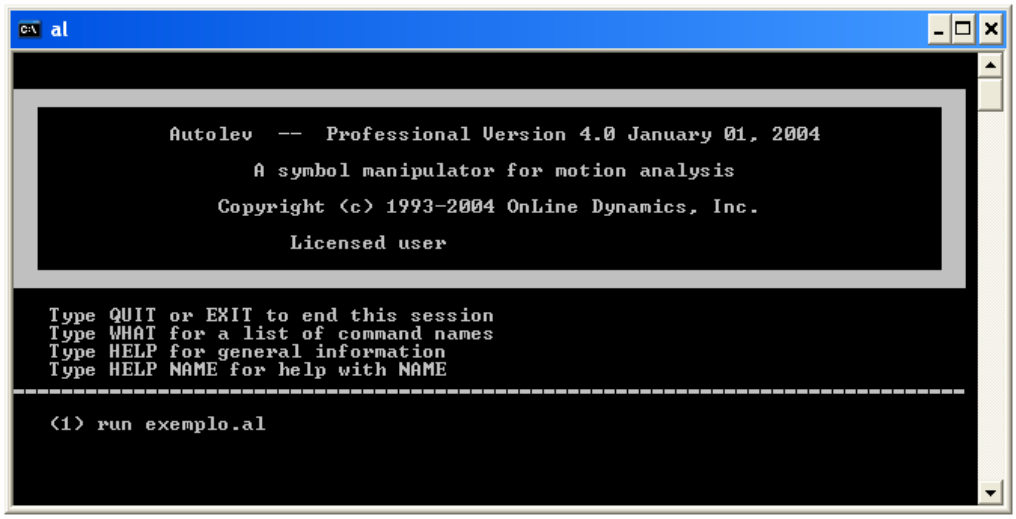

Fig. 6: Prompt do AUTOLEV com exemplo de linha de comando.

Após a execução desta linha de comando, o software gera as equações dinâmicas do sistema de forma simbólica nesta mesma janela. Muitas vezes é, no entanto, mais vantajoso salvar as respostas do programa em um arquivo texto para um exame mais detalhado. Para o caso apresentado deve-se, então, introduzir a linha de comando *save exemplo.all*, que dá origem ao arquivo texto *exemplo.all*, que inclui as linhas de comando escritas pelo usuário no arquivo *exemplo.al* e as respostas do AUTOLEV a estes comandos (linhas iniciadas por setas). O conteúdo do arquivo *exemplo.all* encontra-se exposto no anexo B.

No arquivo *exemplo.all* são encontradas as equações dinâmicas que regem o movimento das partículas P_1 e P_2, conforme mostra a Fig. 7.

```
ZERO[1] = G*MP1*COS(TETA) + MP1*TETA'^2*(L1+Q1) - K1*Q1 - K2*(Q1-Q2) - MP1*U1'
ZERO[2] = G*MP2*COS(TETA) + K2*(Q1-Q2) + MP2*TETA'^2*(L1+L2+Q2) - MP2*U2'
```

Fig. 7: Equações dinâmicas das partículas P_1 e P_2 obtidas com o AUTOLEV.

É importante ressaltar que as equações dinâmicas obtidas com o auxílio do AUTOLEV são exatamente iguais às Eqs. (67) e (72), obtidas manualmente no capítulo anterior e aqui novamente apresentadas como Eqs. (73)

$$\begin{aligned} m^{P_1}\cdot\ddot{q}_1+\left(k_1+k_2-m^{P_1}\cdot\dot{\theta}^2\right)\cdot q_1-k_2\cdot q_2-m^{P_1}\cdot L_1\cdot\dot{\theta}^2-m^{P_1}\cdot g\cdot\cos\theta=0 \\ m^{P_2}\cdot\ddot{q}_2+\left(k_2-m^{P_2}\cdot\dot{\theta}^2\right)\cdot q_2-k_2\cdot q_1-m^{P_2}\cdot\left(L_1+L_2\right)\cdot\dot{\theta}^2-m^{P_2}\cdot g\cdot\cos\theta=0 \end{aligned} \tag{73}$$

Lembrando que as equações cinemáticas diferenciais do sistema são dadas por

$$\begin{aligned} u_1&=\dot{q}_1 \\ u_2&=\dot{q}_2 \end{aligned} \tag{74}$$

A execução da linha de comando *run exemplo.al* dá origem ao arquivo *exemplo.dir*, que mostra uma lista dos *outputs* da simulação em questão, e ao arquivo *exemplo.m*, que é um código-fonte para MATLAB através do qual as equações dinâmicas do sistema serão integradas. Executando-se o arquivo *exemplo.m* no MATLAB, as equações são resolvidas numericamente e este software gera o arquivo *exemplo.1*, no qual as variáveis escolhidas como *outputs* são tabeladas em função do tempo. O arquivo *exemplo.1* é um arquivo texto bastante simples, porém muito útil para a construção de gráficos envolvendo as saídas da simulação. Pode-se, por exemplo, construir gráficos deste tipo muito facilmente através de um módulo do AUTOLEV chamado ALPLOT (*alplot.exe*), que possui recursos gráficos relativamente avançados e uma interface simples e amigável. A Fig. 8 mostra o aspecto geral do módulo ALPLOT.

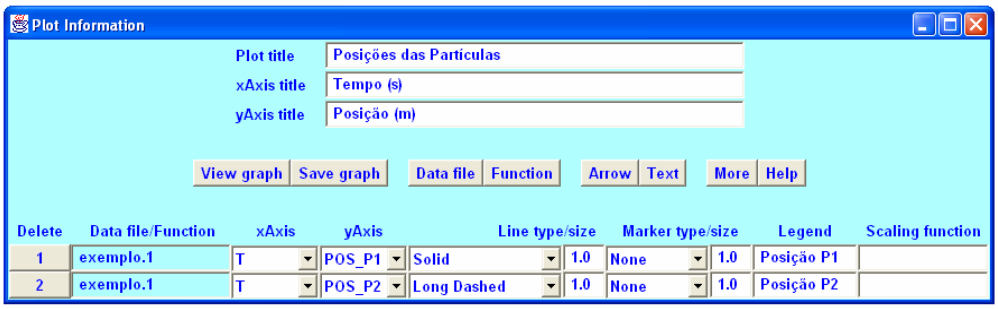

Fig. 8: Aspecto geral do ALPLOT, módulo do AUTOLEV para a construção de gráficos.

O fluxograma da Fig. 9 resume os procedimentos adotados nas análises de multicorpos realizadas neste trabalho.

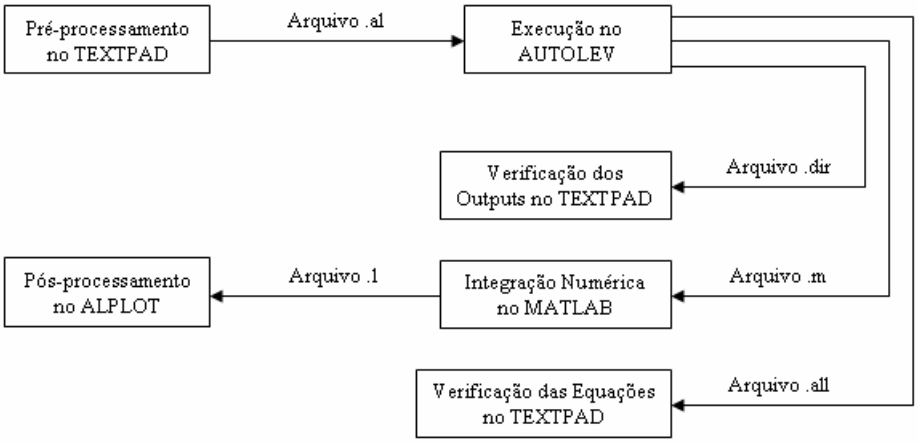

Fig. 9: Fluxograma de procedimentos das análises realizadas.

Entendido o funcionamento do AUTOLEV e sua interação com o MATLAB, passa-se à análise dos resultados do exemplo proposto. Para a resolução deste exemplo, adotou-se $m^{P_1} = m^{P_2} = 0{,}5$ kg para as massas das partículas, $k_1 = k_2 = 50$ N/m para as constantes elásticas das molas, $L_1 = L_2 = 0{,}2$ m para os comprimentos de mola não-deformados e $g = 9{,}81$ m/s^2 para a aceleração da gravidade. A função $\theta(t)$ foi considerada uma função degrau conforme mostra a Fig. 10.

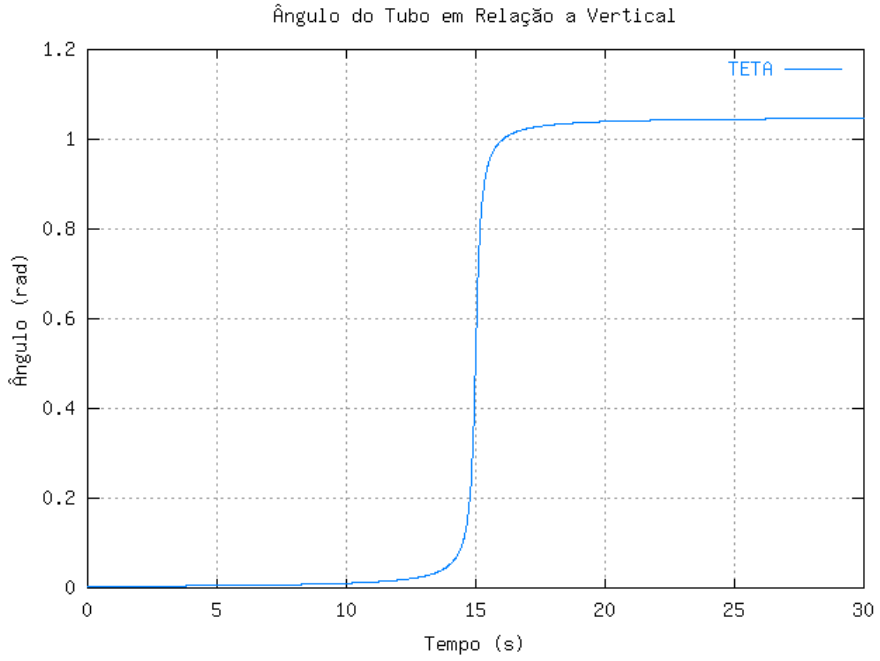

Fig. 10: Função de posição do tubo em relação à vertical no exemplo de aplicação do AUTOLEV.

A partir da Fig. 10, nota-se que a simulação considera o tubo na vertical (ângulo de inclinação de 0 rad) no período de 0 a 10 segundos. No intervalo entre 10 e 20 segundos, o tubo é movimentado bruscamente até formar um ângulo de 60º (1,05 rad) com a vertical. De 20 a 30 segundos, o tubo permanece na posição de 60º em relação à referência.

Para a integração numérica no MATLAB, considerou-se um passo de integração de 0,01 segundos e um tempo total de 30 segundos. As posições das duas partículas na direção do tubo e em relação ao ponto O foram monitoradas ao longo da simulação e encontram-se dispostas no gráfico da Fig. 11.

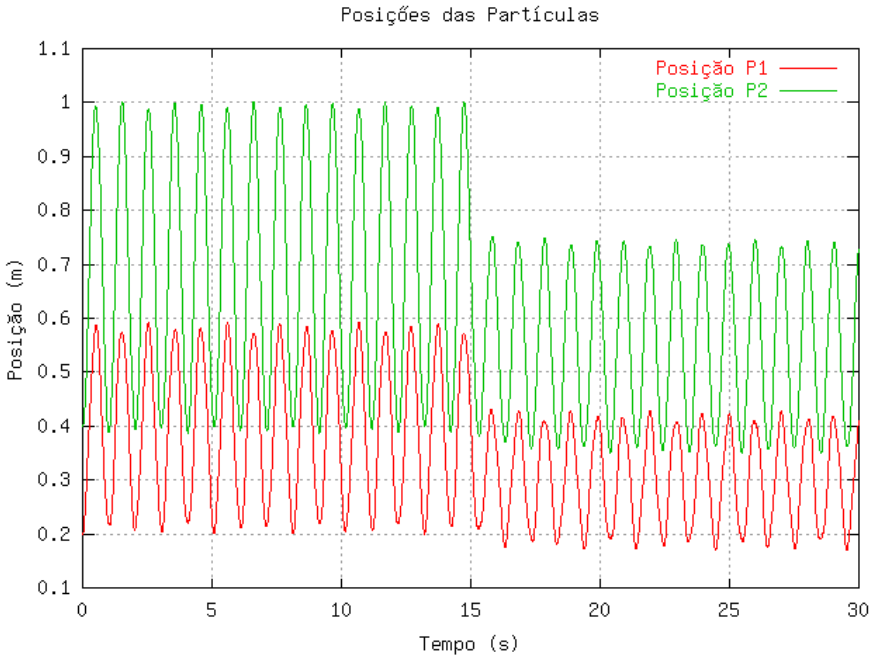

Fig. 11: Posições de P_1 e P_2 na direção do tubo e em relação ao ponto O no exemplo de aplicação do AUTOLEV.

Nota-se pela Fig. 11 que no intervalo de tempo de 0 a 15 segundos, as partículas P_1 e P_2 oscilam em torno de suas condições de equilíbrio quando o tubo encontra-se na posição vertical. Após a transição brusca para a posição de 60º, que ocorre, basicamente, no instante de tempo de 15 segundos, as duas partículas passam a oscilar em torno de suas novas condições de equilíbrio, mantendo, no entanto, a mesma freqüência de oscilação.

5. MODELO DO VEÍCULO

5.1. Introdução

Para o estudo de dinâmica veicular vertical a que este trabalho se propõe, um modelo semelhante àquele estudado por Rebello [6] será desenvolvido no software de multicorpos AUTOLEV.

No modelo de Rebello [6], o sistema de suspensão independente é representado por um braço em forma de pêndulo, permitindo a realização de simulações da dinâmica longitudinal, vertical e lateral do veículo.

Como o escopo deste trabalho é limitado ao estudo da dinâmica veicular vertical, um modelo mais simples será utilizado. Em vez de os cubos de roda percorrerem trajetórias tridimensionais, como na tese de Rebello [6], neste trabalho, eles poderão apenas transladar sobre uma linha cuja direção é definida pela orientação da carroceria do veículo no espaço.

Os dados utilizados para a modelagem foram baseados em um veículo *off-road* comercial de médio porte apenas para objetivo de ilustração. No entanto, a abordagem utilizada neste trabalho é aplicável a uma grande variedade de tipos de automóveis.

5.2. Modelo Físico do Veículo

O veículo é representado fisicamente por cinco corpos rígidos: a carroceria e as quatro rodas associadas às partes móveis das respectivas suspensões. Cada uma das rodas tem um grau de liberdade translacional em relação à carroceria, sendo a direção desta translação definida pela orientação do vetor $\vec{c}_3$, pertencente ao sistema de coordenadas C, que, por sua vez, é solidário à carroceria do carro. O grau de liberdade número 1 do sistema (coordenada generalizada q_1) está relacionado à movimentação da roda dianteira esquerda do veículo; o grau de liberdade 2 (coordenada generalizada q_2) diz respeito ao movimento da roda dianteira direita e os graus de liberdade 3 e 4 (coordenadas generalizadas q_3 e q_4) correspondem às translações das rodas traseiras direita e esquerda, respectivamente.

Como o estudo está limitado à dinâmica vertical a trajetória do veículo é sempre retilínea e os movimentos de translação lateral (*sway*) e guinada (*yaw*) da carroceria encontram-se travados no modelo. Dado que apenas situações em que o veículo trafega com velocidade constante serão analisadas, o movimento de translação longitudinal (*surge*) da carroceria encontra-se automaticamente determinado, não constituindo, portanto, um grau de liberdade do sistema.

A carroceria rígida do veículo possui três graus de liberdade: translação na direção vertical (*bounce*), que é o grau de liberdade número 5 do sistema (coordenada generalizada q_5); movimento de rolagem (*roll*), grau de liberdade número 6 (coordenada generalizada q_6) e movimento de arfagem (*pitch*), grau de liberdade número 7 (coordenada generalizada q_7). Estes três movimentos de corpo rígido são medidos tomando o sistema de referência C, fixo ao centro de massa do automóvel, em relação ao sistema inercial N, preso a Terra.

As rodas do veículo são modeladas como partículas (pontos com massa e sem momentos e produtos de inércia) e encontram-se ligadas à carroceria por uma mola e um amortecedor lineares e sem massa atuando em paralelo. Como as rodas transladam apenas na direção do vetor $\vec{c}_3$, fixo à carroceria, as forças da suspensão também se dão nesta direção.

Os pneus do veículo, assim como cada uma das suspensões independentes, também são modelados como uma mola e um amortecedor em paralelo. Estes componentes atuam, no entanto, na direção $\vec{n}_3$ do sistema de coordenadas inercial N.

É importante ressaltar que no modelo desenvolvido inexiste a possibilidade de descolamento dos pneus em relação à superfície da pista, o que restringe a aplicação do modelo a casos simples em que o veículo trafega a baixas velocidades por pistas com perfis suaves. Uma forma de garantir que tais condições são respeitadas é verificar que as forças nos pneus do veículo mantêm-se sempre positivas, o que significa que os pneus estão sempre sendo comprimidos e nunca tensionados.

Para facilitar o entendimento do modelo físico do carro por parte do leitor, a Fig. 12 mostra os corpos que compõem o sistema, os sistemas de coordenadas utilizados nas análises e os graus de liberdade do veículo.

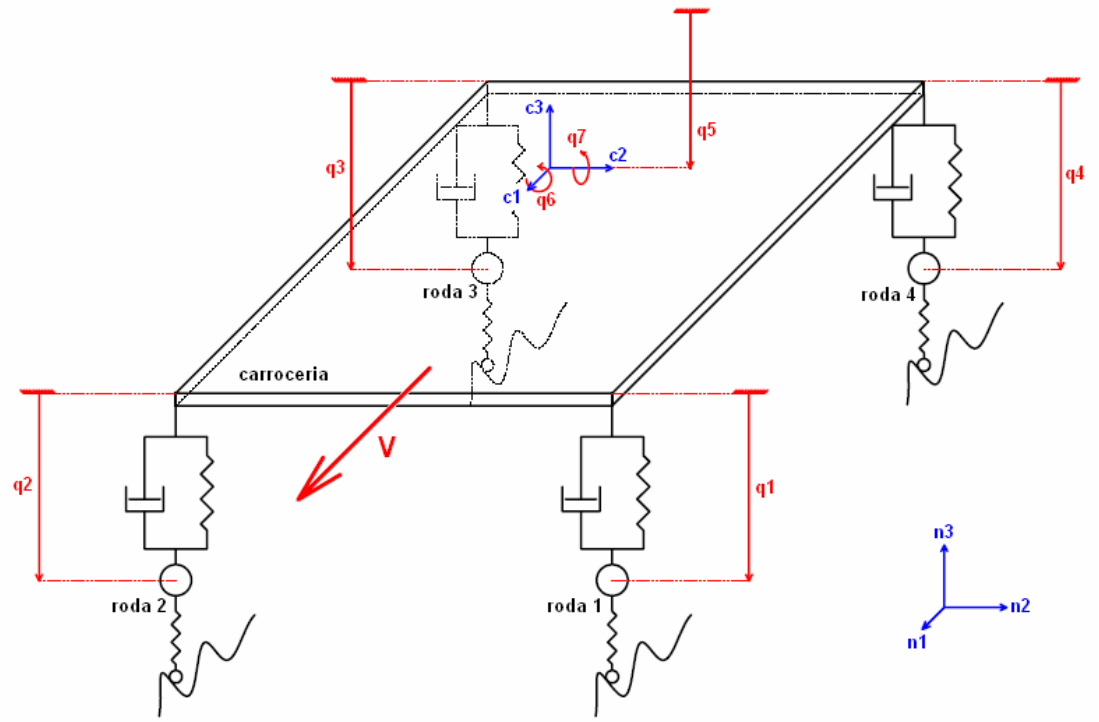

Fig. 12: Modelo do veículo, seus graus de liberdade e sistemas de coordenadas.

Outra aproximação do modelo apresentado pode ser observada na Fig. 12: cada um dos pneus do veículo possui um único ponto de contato com o pavimento, o que significa que mesmo irregularidades de pista de comprimentos de onda baixíssimos poderiam excitar a massa suspensa. Isto não acontece nos veículos reais ou em modelos de multicorpos mais complexos, pois, além do fato de existir uma superfície de contato entre o pneu e o solo, a própria flexibilidade do pneu suprime os efeitos destas irregularidades. Barbosa; Costa [13] atentam para tais considerações e afirmam, ainda, que modelos como o aqui apresentado podem ser utilizados em pistas com irregularidades de alta freqüência desde que seu perfil passe por um filtro que retire de seu espectro de rugosidades as irregularidades cujo comprimento de onda sejam inferiores ao comprimento de contato entre pneu e pista, que é, normalmente, da ordem de 0,15 m.

Além das forças de interação entre pneu e pista e das forças internas do veículo, oriundas da movimentação entre as suas partes, o modelo de multicorpos aqui apresentado contempla, também, as forças gravitacionais atuantes sobre cada um dos corpos. Além dos esforços já mencionados, não se pode esquecer que existem esforços aerodinâmicos que influenciam na dinâmica vertical do veículo. Tais esforços serão, no entanto, desconsiderados neste trabalho.

5.3. Dados do Veículo

A Fig. 13 mostra um esquema do modelo físico do veículo, suas dimensões e parâmetros principais.

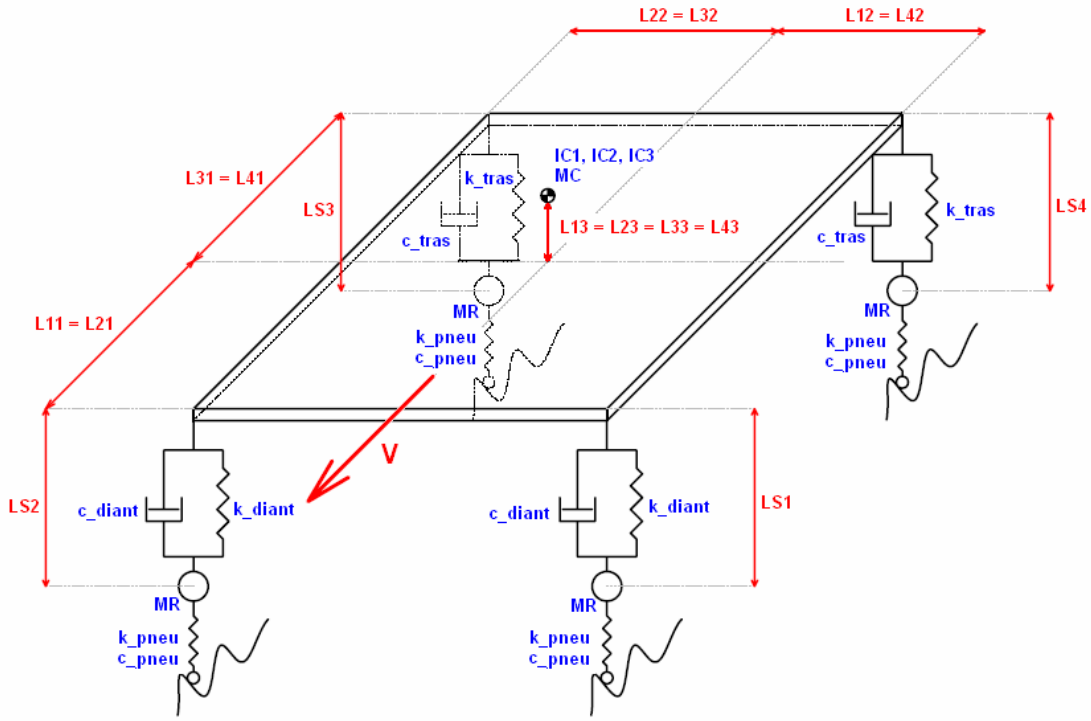

Fig. 13: Modelo do veículo, suas dimensões e parâmetros principais.

A Tab. 1 resume os dados numéricos do veículo comercial *off-road* utilizados nas simulações deste trabalho. Os dados da tabela referem-se ao veículo carregado com 5 ocupantes, bagagem no porta-malas e no bagageiro do teto.

Tab. 1: Dados do veículo comercial *off-road* empregados nas simulações.

Grandeza	Símbolo	Valor	Unidade
Massa da carroceria	M_C	1340	kg
Massa das rodas e partes móveis da suspensão	M_R	130	kg
Momento de inércia de *roll* da carroceria	I_{C1}	895	kg*m^2
Momento de inércia de *pitch* da carroceria	I_{C2}	3750	kg*m^2
Momento de inércia de *yaw* da carroceria	I_{C3}	3865	kg*m^2
Rigidez das molas dianteiras	k_{diant}	38025	N/m
Rigidez das molas traseiras	k_{tras}	28330	N/m
Rigidez vertical dos pneus	k_{pneu}	196250	N/m
Coeficiente de amortecimento dos amortecedores dianteiros	c_{diant}	3850	N/m/s
Coeficiente de amortecimento dos amortecedores traseiros	c_{tras}	3850	N/m/s
Coeficiente de amortecimento vertical dos pneus	c_{pneu}	50	N/m/s
Distância longitudinal do centro de massa do veículo ao ponto de fixação da suspensão 1 à carroceria	L_{11}	1,535	m
Distância longitudinal do centro de massa do veículo ao ponto de fixação da suspensão 2 à carroceria	L_{21}	1,535	m
Distância longitudinal do centro de massa do veículo ao ponto de fixação da suspensão 3 à carroceria	L_{31}	0,725	m
Distância longitudinal do centro de massa do veículo ao ponto de fixação da suspensão 4 à carroceria	L_{41}	0,725	m
Distância lateral do centro de massa do veículo ao ponto de fixação da suspensão 1 à carroceria	L_{12}	0,515	m
Distância lateral do centro de massa do veículo ao ponto de fixação da suspensão 2 à carroceria	L_{22}	0,515	m
Distância lateral do centro de massa do veículo ao ponto de fixação da suspensão 3 à carroceria	L_{32}	0,515	m
Distância lateral do centro de massa do veículo ao ponto de fixação da suspensão 4 à carroceria	L_{42}	0,515	m
Distância vertical do centro de massa do veículo ao ponto de fixação da suspensão 1 à carroceria	L_{13}	0,265	m
Distância vertical do centro de massa do veículo ao ponto de fixação da suspensão 2 à carroceria	L_{23}	0,265	m
Distância vertical do centro de massa do veículo ao ponto de fixação da suspensão 3 à carroceria	L_{33}	0,265	m
Distância vertical do centro de massa do veículo ao ponto de fixação da suspensão 4 à carroceria	L_{43}	0,265	m
Comprimento da mola da suspensão 1 (veículo em equilíbrio no plano)	L_{S1}	0,415	m
Comprimento da mola da suspensão 2 (veículo em equilíbrio no plano)	L_{S2}	0,415	m
Comprimento da mola da suspensão 3 (veículo em equilíbrio no plano)	L_{S3}	0,415	m
Comprimento da mola da suspensão 4 (veículo em equilíbrio no plano)	L_{S4}	0,415	m

5.4. Modelo Matemático do Veículo

Definido o modelo físico do automóvel, escreveu-se o arquivo *veiculo.al*, que, conforme explicado no item 4, dá origem ao arquivo *veiculo.all*, cujo conteúdo encontra-se reproduzido no anexo C e inclui, além dos comandos dados no arquivo

veiculo.al, as respostas do AUTOLEV a estes comandos (linhas iniciadas por setas) e, portanto, as equações dinâmicas que regem o movimento dos corpos do sistema. Para tornar o arquivo *veiculo.all* menos extenso e o processo de integração das equações menos trabalhoso, o AUTOLEV introduz variáveis internas (identificadas com a letra Z seguida de um número, conforme nota-se no anexo C) automaticamente durante as operações simbólicas.

O modelo do arquivo *veiculo.al* está sujeito a perturbações dinâmicas dadas por funções matemáticas que simulam as irregularidades da pista. No caso do código do anexo C, o veículo trafega sobre uma pista plana. As variáveis utilizadas para monitorar o comportamento dinâmico do automóvel ao longo das simulações são: posição vertical de cada uma das rodas; posição vertical do centro de massa da carroceria; ângulos de rolagem (*roll*) e arfagem (*pitch*) da carroceria; forças em cada uma das suspensões independentes e forças verticais nos pneus do veículo. Observando o anexo C, nota-se que tais grandezas são os *outputs* das análises realizadas e, portanto, constituem as respostas do sistema a serem analisadas na fase de pós-processamento.

6. VALIDAÇÃO DO MODELO DO VEÍCULO

Uma forma de verificar a correção do modelo de multicorpos do veículo consiste na comparação das freqüências naturais do modelo computacional desenvolvido às freqüências calculadas analiticamente através de modelos simplificados. Para tanto, foram desconsiderados os amortecimentos do modelo de multicorpos ($c_{diant} = c_{tras} = c_{pneu} = 0$) e cada um dos 7 graus de liberdade do veículo foi excitado a partir da imposição de um deslocamento inicial. Integradas as equações, e de posse dos resultados das simulações, analisou-se cada grau de liberdade do veículo através de seu gráfico de função PSD, no qual é possível observar picos para as freqüências naturais de oscilação. Os valores de freqüências naturais para cada grau de liberdade, obtidos através das simulações realizadas, foram comparados às freqüências naturais de modelos analíticos simples calculadas manualmente. Os modelos analíticos para as rodas do veículo consistem em modelos massa-mola de um grau de liberdade de translação, enquanto que os modelos para a carroceria do veículo foram adaptados dos modelos desenvolvidos por Vierck [27] e possuem dois graus de liberdade que podem apresentar modos de vibração acoplados ou não, conforme será mostrado adiante.

É sabido que sistemas com mais de um grau de liberdade necessitam de mais de uma coordenada generalizada para a definição de sua configuração espacial e dinâmica no tempo. Para casos em que o sistema não-amortecido é analisado, o que será feito a partir de agora, é possível determinar formas através das quais o sistema pode vibrar de forma harmônica. Estas formas de vibrar, segundo Vierck [27], são denominadas modos de vibrar principais, ou simplesmente, modos de vibrar do sistema. A freqüência na qual um determinado modo de vibrar é observado é denominada freqüência natural deste modo.

É importante ressaltar que, se o objeto do estudo de uma análise de freqüência natural e dos modos de vibração for um sistema linear não-amortecido, ou mesmo um sistema linearizado não-amortecido que possa ser escrito na forma

$$M \cdot \ddot{x} + K \cdot x = 0 \tag{73}$$

as freqüências naturais e os modos de vibrar do sistema, representados, respectivamente, por seus autovalores e autovetores, podem ser obtidos a partir da substituição de soluções harmônicas do tipo

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_3 \end{bmatrix} \cdot sen(\omega \cdot t + \phi) \tag{74}$$

à equação (73), resultando na equação (75)

$$\left(M^{-1} \cdot K - \omega^2 \cdot I\right) \cdot A = 0 \tag{75}$$

Forçando-se o determinante da matriz que multiplica o vetor de amplitudes A a zero, é possível determinar os autovalores, $\omega_1^2,...,\omega_n^2$, do sistema mecânico linear, conforme mostrado na equação (76)

$$\det\left(M^{-1} \cdot K - \omega^2 \cdot I\right) = 0 \tag{76}$$

Conhecidos os autovalores do sistema estão determinadas as suas freqüências naturais. Substituindo os valores de $\omega_1^2,...,\omega_n^2$ na equação (75) é possível determinar as razões de amplitude para cada modo de vibração e caracteriza-lo.

6.1. Validação dos Graus de Liberdade 1 e 2

Os graus de liberdade 1 (coordenada generalizada q_1) e 2 (coordenada generalizada q_2) correspondem, respectivamente, à movimentação das rodas dianteira esquerda e dianteira direita do carro. Admitindo que a carroceria do veículo, cuja massa é $M_C = 1340kg$, pouco se movimenta devido à oscilação de uma das rodas dianteiras, que possuem massa $M_R = 130kg$, pode-se calcular a freqüência

natural de oscilação de uma roda dianteira através de um sistema massa-mola como o da Fig. 14.

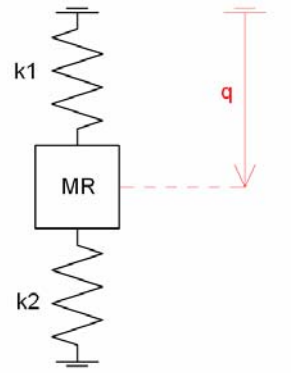

Fig. 14: Modelo analítico simplificado para o estudo da freqüência natural de oscilação das rodas.

Para o caso das rodas dianteira esquerda e dianteira direita (coordenadas generalizadas q_1 e q_2), tem-se $k_1 = k_{diant}$ e $k_2 = k_{pneu}$.

Para este modelo analítico simplificado, tem-se

$$k_{eq} = k_1 + k_2 = k_{diant} + k_{pneu} \tag{77}$$

e

$$f_{q1_{AN}} = f_{q2_{AN}} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{k_{eq}}{M_R}} \tag{78}$$

Substituindo os valores da Tab. 1 nas Eqs. (77) e (78), obtém-se $f_{q1_{AN}} = f_{q2_{AN}} = 6{,}76 Hz$ para o modelo analítico. Para o modelo computacional, aplicou-se um deslocamento inicial de 0,05 m à roda dianteira esquerda (roda 1) do modelo de veículo não-amortecido e analisou-se o comportamento dinâmico do grau de liberdade 1 durante 60 segundos. O mesmo foi feito para a roda dianteira direita (roda 2) e para o grau de liberdade 2 em uma análise posterior. A Fig. 15 mostra o gráfico de função PSD para ambos os casos. É importante ressaltar que as curvas apresentadas neste gráfico são coincidentes.

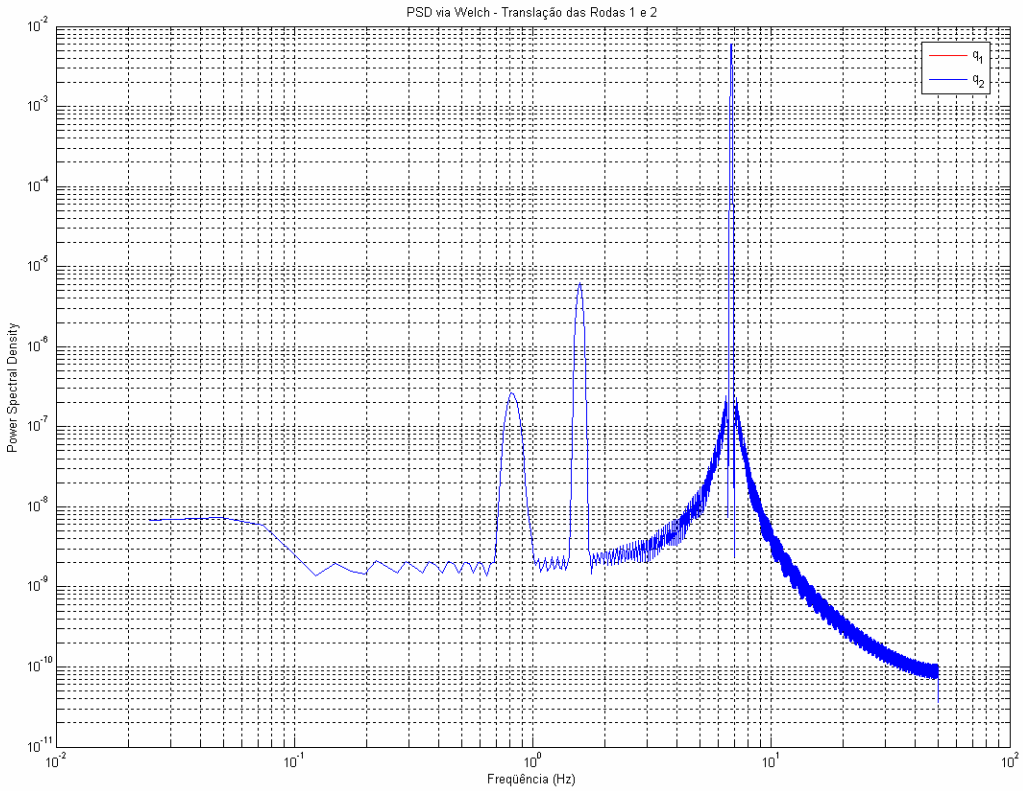

Fig. 15: Gráfico de função PSD para a oscilação livre das rodas dianteira esquerda (q_1) e dianteira direita (q_2).

De acordo com o gráfico da Fig. 15, baseado no modelo de multicorpos do veículo, as rodas dianteiras do mesmo apresentaram freqüência natural $f_{q1_{MBS}} = f_{q2_{MBS}} = 6{,}79Hz$. Este valor corresponde à abscissa do pico de máxima amplitude apresentado pelas funções PSD da oscilação livre das rodas dianteiras. Os dois primeiros picos, com amplitudes bem inferiores à do ponto de máximo global, representam as freqüências naturais dos movimentos de translação vertical e de arfagem da carroceria, conforme será visto a seguir. No que diz respeito à freqüência natural de oscilação das rodas dianteiras, a discrepância entre o modelo computacional e o modelo analítico simplificado é de apenas 0,4%, o que evidencia a correção do modelo de multicorpos desenvolvido. A Tab. 2 resume os resultados da verificação das freqüências naturais de vibração apresentadas pelas rodas 1 e 2.

Tab. 2: Resultados da verificação das freqüências naturais de vibração das rodas 1 e 2.

Freqüências Naturais de Vibração			
Grau de Liberdade	**Modelo MBS**	**Modelo Analítico**	**Discrepância**
1	6,79 Hz	6,76 Hz	0,4%
2	6,79 Hz	6,76 Hz	0,4%

6.2. Validação dos Graus de Liberdade 3 e 4

Os graus de liberdade 3 (coordenada generalizada q_3) e 4 (coordenada generalizada q_4) correspondem, respectivamente, à movimentação das rodas traseira direita e traseira esquerda do carro. Da mesma forma feita para os graus de liberdade 1 e 2, os graus de liberdade 3 e 4 podem ser verificados a partir de um modelo analítico simplificado como o da Fig. 16.

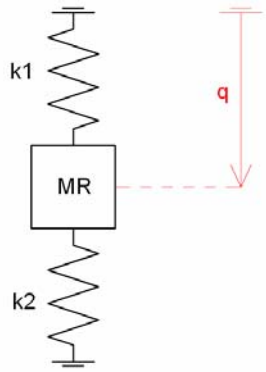

Fig. 16: Modelo analítico simplificado para o estudo da freqüência natural de oscilação das rodas.

Para o caso das rodas traseira direita e traseira esquerda (coordenadas generalizadas q_3 e q_4), tem-se

$$k_1 = k_{tras} \text{ e } k_2 = k_{pneu}.$$

Para o modelo analítico simplificado de cada roda traseira, tem-se

$$k_{eq} = k_1 + k_2 = k_{tras} + k_{pneu} \tag{79}$$

e

$$f_{q3_{AN}} = f_{q4_{AN}} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{k_{eq}}{M_R}} \tag{80}$$

Substituindo os valores da Tab. 1 nas Eqs. (79) e (80), obtém-se $f_{q3_{AN}} = f_{q4_{AN}} = 6{,}62Hz$ para o modelo analítico. Para o modelo computacional, foi imposto um deslocamento inicial de 0,05 m à roda traseira direita (roda 3) do modelo de veículo não-amortecido e analisou-se o comportamento dinâmico do grau de liberdade 3 durante 60 segundos. O mesmo foi feito para a roda traseira esquerda (roda 4) e para o grau de liberdade 4 em uma análise seguinte. A Fig. 17 mostra o gráfico de função PSD para ambos os casos.

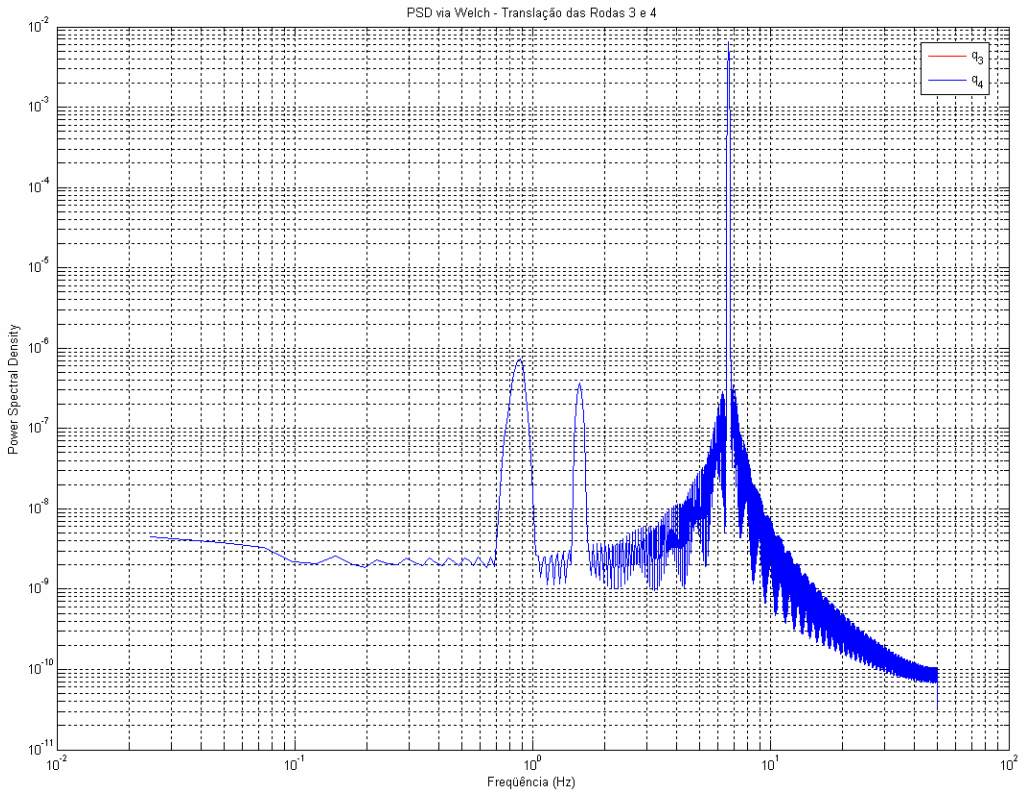

Fig. 17: Gráfico de função PSD para a oscilação livre das rodas traseira direita (q_3) e traseira esquerda (q_4).

O gráfico da Fig. 17, baseado no modelo de multicorpos do veículo, mostra que as rodas traseiras apresentaram freqüência natural $f_{q3_{MBS}} = f_{q4_{MBS}} = 6{,}62Hz$, já que este é o valor de freqüência para o qual a função PSD atinge seu ponto máximo. Os picos menores destacam as freqüências naturais dos movimentos de translação vertical e de arfagem da carroceria, que serão estudadas mais detalhadamente a

seguir. Assim, o valor obtido computacionalmente para a freqüência natural de oscilação das rodas traseiras foi exatamente igual ao calculado de forma analítica, demonstrando a correção do modelo de multicorpos. A Tab. 3 resume os resultados da verificação das freqüências naturais de vibração apresentadas pelas rodas 3 e 4 do veículo.

Tab. 3: Resultados da verificação das freqüências naturais de vibração das rodas 3 e 4.

Freqüências Naturais de Vibração			
Grau de Liberdade	**Modelo MBS**	**Modelo Analítico**	**Discrepância**
3	6,62 Hz	6,62 Hz	0,0%
4	6,62 Hz	6,62 Hz	0,0%

6.3. Validação dos Graus de Liberdade 5, 6 e 7

No caso do movimento da carroceria de um veículo não é possível estudar as freqüências naturais de movimento a partir de um modelo simplificado de um único grau de liberdade, pois pode acontecer de os movimentos de translação e rotação da massa suspensa serem acoplados. Assim, para tais análises costumam-se utilizar modelos analíticos mais complexos, como aqueles apresentados por Vierck [27].

Segundo Vierck [27], quando a carroceria possui um plano de simetria, os movimentos de translação e de rotação da mesma são desacoplados, podendo ser analisados independentemente. A simetria da massa suspensa em relação ao seu movimento de rolagem, grau de liberdade 6 representado pela coordenada generalizada q_6, e ao seu movimento de translação vertical, grau de liberdade 5 representado pela coordenada generalizada q_5, pode ser verificada através da Fig. 18 quando $b_1 = b_2$ e $k_1 = k_2$.

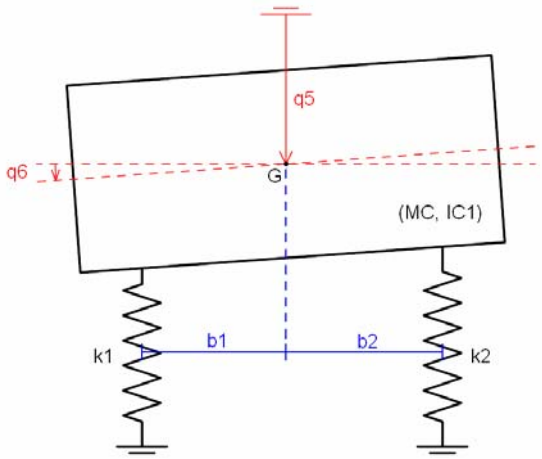

Fig. 18: Modelo analítico simplificado para o estudo das freqüências naturais dos movimentos de rolagem (coordenada generalizada q_6) e de translação vertical (coordenada generalizada q_5) desacoplados.

Para o modelo do veículo em questão, tem-se

$$b_1 = b_2 = L_{12} = L_{22} = L_{32} = L_{42} \tag{81}$$

$$k_1 = k_2 = \frac{k_{diant} \cdot k_{pneu}}{k_{diant} + k_{pneu}} + \frac{k_{tras} \cdot k_{pneu}}{k_{tras} + k_{pneu}} \tag{82}$$

Segundo Vierck [27], calculam-se as freqüências naturais dos movimentos de rolagem e de translação vertical estabelecendo-se as seguintes constantes

$$r = \sqrt{\frac{I_{C1}}{M_C}} \tag{83}$$

$$\beta = \frac{k_1 + k_2}{M_C} \tag{84}$$

$$\gamma = \frac{k_1 \cdot b_1 - k_2 \cdot b_2}{M_C} \tag{85}$$

$$\eta = \frac{k_1 \cdot b_1^{\,2} + k_2 \cdot b_2^{\,2}}{I_{C1}} \tag{86}$$

Ainda de acordo com Vierck [27], as freqüências naturais são dadas por

$$f_{q6,q5_{AN}} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{\eta + \beta}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{\eta - \beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{r}\right)^2}} \tag{87}$$

Substituindo nas Eqs. (81) a (87) os valores da Tab. 1, obtém-se $f_{q6_{AN}} = 0{,}92Hz$ e $f_{q5_{AN}} = 1{,}46Hz$. É importante ressaltar, no entanto, que a freqüência natural desacoplada f_{q5} na realidade não existe para o modelo do veículo apresentado, pois, conforme será exposto a seguir, o movimento de translação vertical da carroceria encontra-se sempre acoplado ao movimento de arfagem da mesma.

Nota-se claramente através da Fig. 18 que o modelo analítico simplificado para o estudo da freqüência natural de rolagem da carroceria não considera a existência das massas não-suspensas entre as molas que representam os pneus e as molas da suspensão. Tal consideração pode levar a uma certa discrepância entre o resultado do modelo analítico e o do modelo computacional. No entanto, como a massa de cada roda (e das partes móveis da suspensão associadas a ela) corresponde a menos de 10% da massa total da carroceria, espera-se que as freqüências naturais obtidas das duas formas não estejam muito distantes.

Como, conforme mencionado anteriormente, as freqüências naturais do movimento de translação vertical da carroceria (f_{q5}) só representam a realidade da dinâmica do veículo quando estudadas juntamente com as freqüências naturais de arfagem da carroceria, para o estudo da freqüência natural de rolagem da massa suspensa, excitou-se apenas a coordenada generalizada q_6 do modelo não-amortecido através da imposição de uma condição angular inicial de 10º. Conforme feito para as massas não-suspensas, analisou-se o comportamento dinâmico do grau de liberdade 6 por 60 segundos e um gráfico com a função PSD para a oscilação livre de rolagem, como mostra a Fig. 19, foi construído.

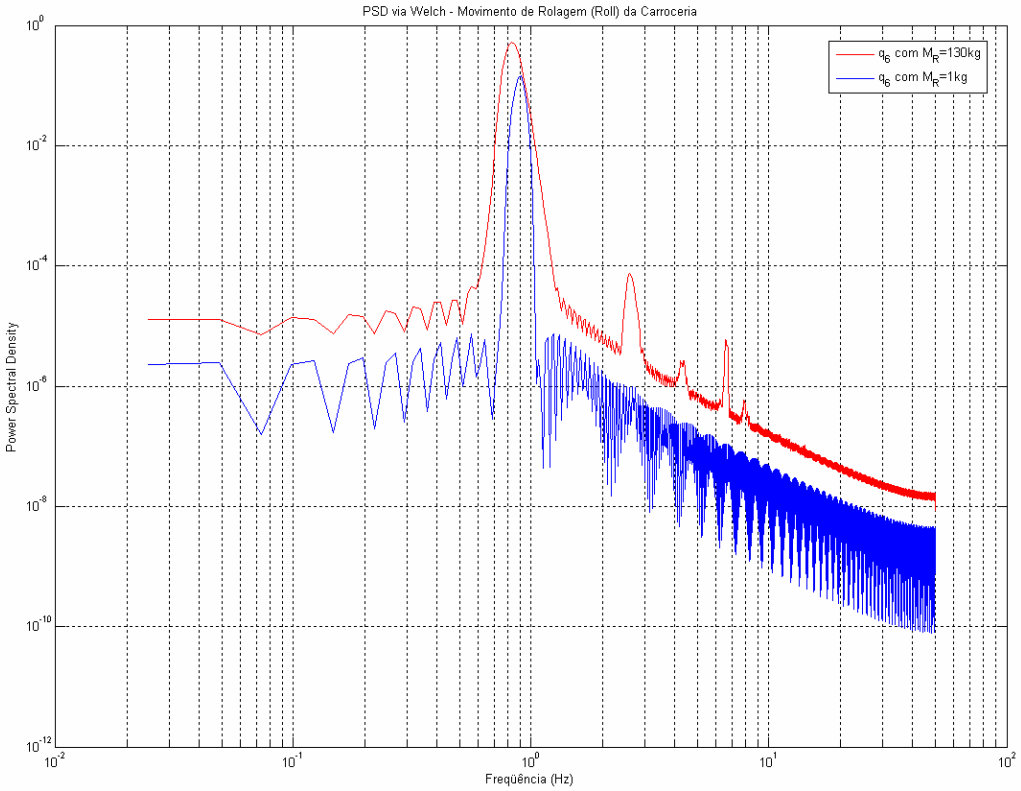

Fig. 19: Gráfico de função PSD para a oscilação livre de rolagem da carroceria (q_6) para $M_R = 130kg$ (realidade) e para $M_R = 1kg$ (extrapolação).

A função PSD da coordenada generalizada q_6 com massa de roda de 130 kg é coerente ao modelo desenvolvido para o veículo em questão, enquanto que a PSD com massa de roda de 1 kg é uma extrapolação da realidade que procura tornar o modelo de multicorpos desenvolvido comparável ao modelo analítico da Fig. 18, já que este não inclui o efeito das massas não-suspensas. O modelo com $M_R = 130kg$ mostrou freqüência natural de rolagem da carroceria $f_{q6_{MBS130kg}} = 0{,}83Hz$ (abscissa do ponto de máximo global da curva vermelha) enquanto que o modelo com $M_R = 1kg$ apresentou a freqüência natural $f_{q6_{MBS1kg}} = 0{,}90Hz$ (abscissa do ponto de máximo global da curva azul). Nota-se, portanto, uma clara tendência de convergência ao valor analítico $f_{q6_{AN}} = 0{,}92Hz$ com a diminuição do valor das massas não-suspensas, o que justifica a correção do modelo computacional desenvolvido. Na teoria, fazendo-se $M_R = 0kg$, o modelo computacional

apresentaria uma freqüência natural de rolagem da carroceria próxima àquela calculada analiticamente. No entanto, tal condição não foi simulada porque a inserção de um parâmetro nulo ao modelo causa instabilidades numéricas na integração das equações. Assim, escolheu-se o valor $M_R = 1kg$, desprezível frente à massa da carroceria do veículo, para tornar mais clara a comparação do modelo computacional ao modelo analítico. Ainda atentando para o gráfico da Fig. 19, é importante ressaltar que a função PSD para $M_R = 130kg$, diferentemente da curva para $M_R = 1kg$, apresenta pontos de máximo locais para freqüências mais elevadas, justificados pela oscilação das rodas do veículo.

A Fig. 20 mostra um modelo analítico simplificado para o estudo dos movimentos acoplados de arfagem, grau de liberdade 7 representado pela coordenada generalizada q_7 e de translação vertical da carroceria, grau de liberdade 5 representado pela coordenada generalizada q_5. Estes dois movimentos tornam-se acoplados devido à assimetria observada no modelo ($b_1 \neq b_2$ e $k_1 \neq k_2$).

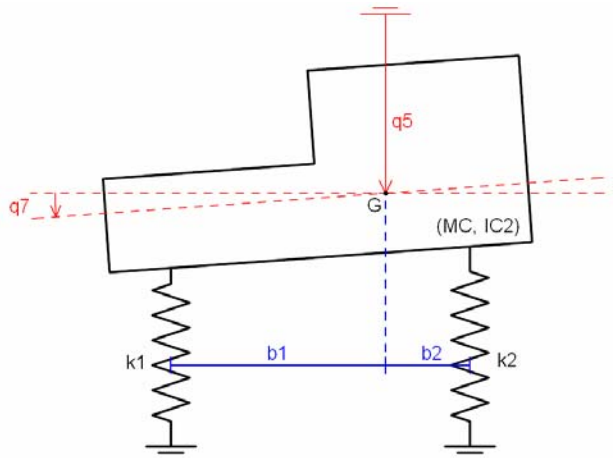

Fig. 20: Modelo analítico simplificado para o estudo das freqüências naturais dos movimentos de arfagem (coordenada generalizada q_7) e de translação vertical (coordenada generalizada q_5) acoplados.

Para o modelo da Fig. 20, tem-se

$$b_1 = L_{11} = L_{21} \tag{88}$$

$$b_2 = L_{31} = L_{41} \tag{89}$$

$$k_1 = 2 \cdot \left(\frac{k_{diant} \cdot k_{pneu}}{k_{diant} + k_{pneu}} \right) \tag{90}$$

$$k_2 = 2 \cdot \left(\frac{k_{tras} \cdot k_{pneu}}{k_{tras} + k_{pneu}} \right) \tag{91}$$

As já conhecidas constantes para o cálculo das freqüências naturais são aqui repetidas

$$r = \sqrt{\frac{I_{C2}}{M_C}} \tag{92}$$

$$\beta = \frac{k_1 + k_2}{M_C} \tag{93}$$

$$\gamma = \frac{k_1 \cdot b_1 - k_2 \cdot b_2}{M_C} \tag{94}$$

$$\eta = \frac{k_1 \cdot b_1^{\,2} + k_2 \cdot b_2^{\,2}}{I_{C2}} \tag{95}$$

As freqüências naturais dos movimentos acoplados de arfagem (coordenada generalizada q_7) e de translação vertical da carroceria (coordenada generalizada q_5) são dadas por

$$f_{q5,q7\,1,2\,AN} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{\eta + \beta}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{\eta - \beta}{2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma}{r} \right)^2}} \tag{96}$$

É importante notar que, neste caso, não se pode associar uma freqüência natural a cada movimento como feito no caso do modelo analítico simétrico para o estudo do movimento de rolagem. Quando os movimentos estão acoplados dinamicamente, os dois graus de liberdade em questão apresentam as duas freqüências naturais calculadas, já que estas estão, na realidade, associadas aos modos de vibração do sistema e não aos seus graus de liberdade. Substituindo nas Eqs. (88) a (96) os valores da Tab. 1, obtém-se $f_{q5,q7_{1AN}} = 0{,}91Hz$ e $f_{q5,q7_{2AN}} = 1{,}58Hz$.

Para que seja possível entender fisicamente o movimento acoplado, é importante que sejam analisadas as relações de amplitude em cada um dos modos cujas freqüências naturais foram calculadas acima. Segundo Vierck [27], essas relações de amplitude (em m/rad) são dadas por

$$\frac{A_{q5_{1,2}}}{A_{q7_{1,2}}} = \frac{\gamma}{\frac{\eta-\beta}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{\eta-\beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{r}\right)^2}} \tag{97}$$

Substituindo nas Eqs. (88) a (95) e (97) os valores da Tab. 1, obtém-se para o primeiro modo de vibrar a razão de amplitudes $\frac{A_{q5_1}}{A_{q7_1}} = -0{,}89m/rad = -15{,}46mm/°$, que corresponde ao movimento em torno de um centro de giro localizado a uma distância $OG_1 = -0{,}89m$ do centro de massa da carroceria. Para o segundo modo acoplado, obtém-se a razão de amplitudes $\frac{A_{q5_2}}{A_{q7_2}} = 3{,}16m/rad = 55{,}14mm/°$, que corresponde ao movimento em relação a um centro de giro a uma distância $OG_2 = 3{,}16m$ do baricentro da carroceria.

A Fig. 21 ilustra fisicamente o primeiro modo acoplado, em que o ângulo de arfagem da carroceria (coordenada generalizada q_7) possui sinal trocado em relação ao seu deslocamento vertical (coordenada generalizada q_5).

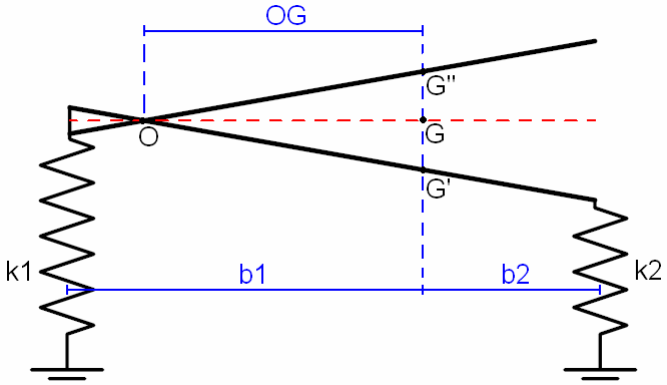

Fig. 21: Primeiro modo de vibrar acoplado para os movimentos de arfagem (coordenada generalizada q_7) e de translação vertical (coordenada generalizada q_5) da carroceria.

A Fig. 22 ilustra fisicamente o segundo modo de vibrar acoplado, em que o ângulo de arfagem da carroceria (coordenada generalizada q_7) e o seu deslocamento vertical (coordenada generalizada q_5) apresentam o mesmo sinal.

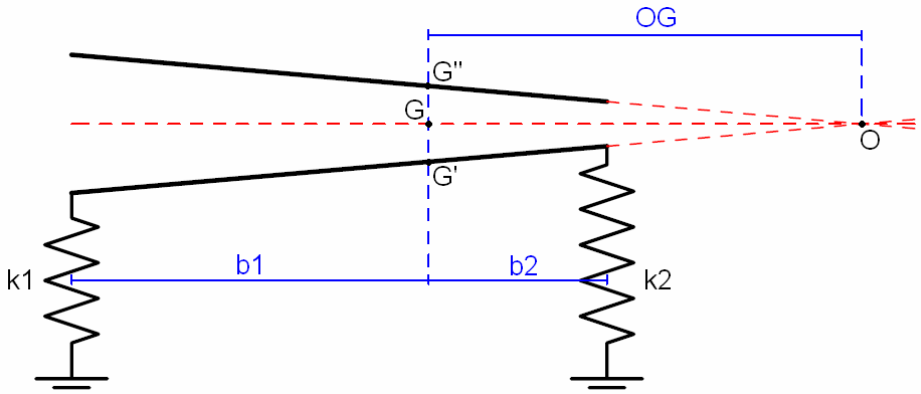

Fig. 22: Segundo modo de vibrar acoplado para os movimentos de arfagem (coordenada generalizada q_7) e de translação vertical (coordenada generalizada q_5) da carroceria.

Para determinar as freqüências naturais dos modos de vibração que envolvem o movimento de arfagem da carroceria, excitou-se a coordenada generalizada q_7 do modelo não-amortecido através da imposição de uma condição angular inicial de 10º. Analisou-se o comportamento dinâmico do grau de liberdade 7 por 60 segundos e um gráfico com a função PSD para a oscilação livre de arfagem da carroceria, conforme mostra a Fig. 23, foi construído. Assim como feito no caso do estudo da freqüência natural de rolagem da carroceria, as simulações foram realizadas considerando o

valor original das massas não-suspensas ($M_R = 130kg$) e o valor extrapolado ($M_R = 1kg$), visando uma melhor comparação ao modelo analítico, que desconsidera as massas das rodas e das partes móveis da suspensão.

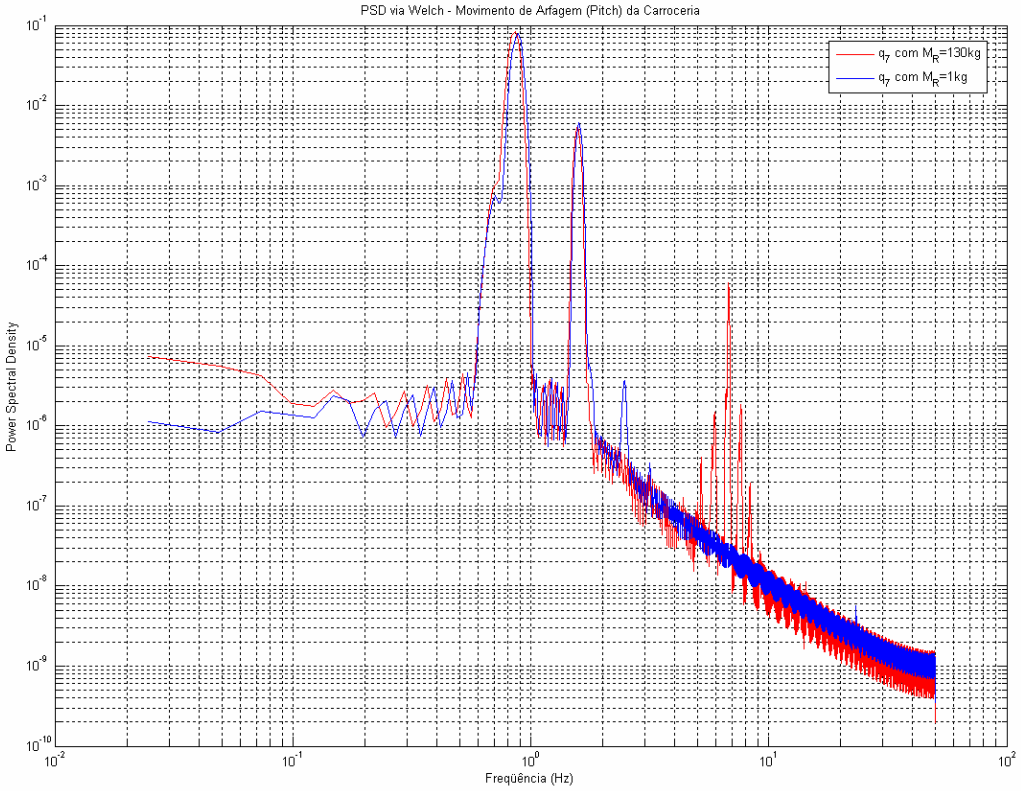

Fig. 23: Gráfico de função PSD para a oscilação livre de arfagem da carroceria (q_7) para $M_R = 130kg$ (realidade) e para $M_R = 1kg$ (extrapolação).

O modelo computacional com $M_R = 130kg$ apresentou a primeira freqüência natural de arfagem da carroceria $f_{q7_{1MBS130kg}} = 0{,}85Hz$ e a segunda freqüência natural $f_{q7_{2MBS130kg}} = 1{,}56Hz$. O modelo computacional extrapolado, com $M_R = 1kg$, apresentou primeira freqüência natural de arfagem $f_{q7_{1MBS1kg}} = 0{,}88Hz$ e a segunda freqüência natural $f_{q7_{2MBS1kg}} = 1{,}58Hz$. É importante relembrar que estes valores foram obtidos das abscissas dos dois picos de máxima amplitude apresentados por cada uma das funções PSD exibidas no gráfico da Fig. 23. Nota-se claramente que, a partir da redução do valor das massas não-suspensas, existe uma tendência de convergência dos valores de freqüência natural do modelo computacional aos valores

provenientes do modelo analítico, $f_{q5,q7_{1AN}} = 0{,}91Hz$ e $f_{q5,q7_{2AN}} = 1{,}58Hz$, o que demonstra a correção do modelo de multicorpos elaborado. Novamente, os pontos de máximo locais presentes na função PSD para $M_R = 130kg$ são justificados pela vibração das rodas do veículo.

Visando determinar as freqüências naturais dos modos de vibração que envolvem o movimento de translação vertical da carroceria, excitou-se a coordenada generalizada q_5 do modelo não-amortecido com um deslocamento inicial de 0,05 m imposto ao baricentro da mesma e analisou-se o comportamento dinâmico do grau de liberdade 5 durante 60 segundos. A Fig. 24 mostra o gráfico da função PSD para a oscilação livre de translação vertical da carroceria. O modelo de multicorpos desenvolvido foi simulado considerando-se $M_R = 130kg$ e $M_R = 1kg$, como nos casos anteriores.

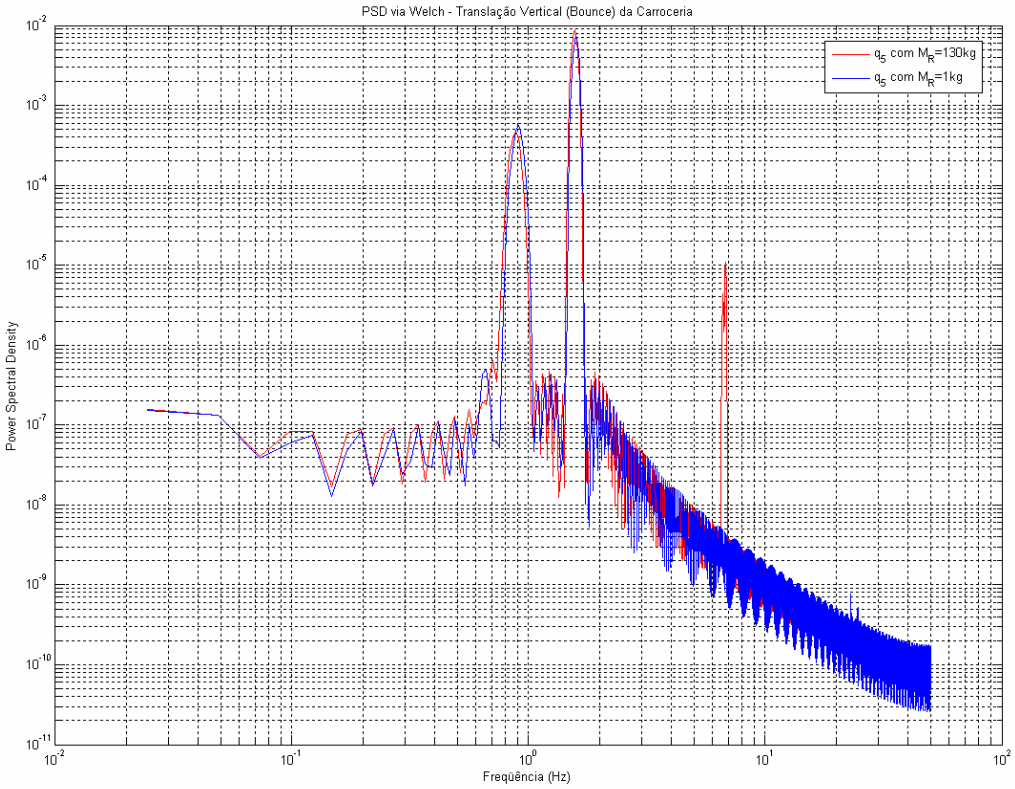

Fig. 24: Gráfico de função PSD para a oscilação livre do movimento de translação vertical da carroceria (q_5) para $M_R = 130kg$ (realidade) e para $M_R = 1kg$ (extrapolação).

O modelo computacional com $M_R = 130kg$ apresentou a primeira freqüência natural de translação vertical da carroceria $f_{q5_{1MBS130kg}} = 0{,}88Hz$ e a segunda freqüência natural $f_{q5_{2MBS130kg}} = 1{,}56Hz$. O modelo computacional extrapolado, com $M_R = 1kg$, apresentou a primeira freqüência natural de translação vertical $f_{q5_{1MBS1kg}} = 0{,}90Hz$ e a segunda freqüência natural $f_{q5_{2MBS1kg}} = 1{,}58Hz$. Nota-se novamente que, reduzindo-se o valor das massas não-suspensas, existe uma tendência de convergência dos valores de freqüência natural do modelo computacional aos valores provenientes do modelo analítico, $f_{q5,q7_{1AN}} = 0{,}91Hz$ e $f_{q5,q7_{2AN}} = 1{,}58Hz$, justificando a correção do modelo de multicorpos. Percebe-se pelo gráfico da Fig. 24, mais uma vez, a influência da freqüência natural de oscilação das rodas do veículo em torno de 6,7 Hz.

Nota-se, também, que a primeira freqüência natural detectada na simulação do movimento de arfagem da carroceria, $f_{q7_{1MBS130kg}} = 0{,}85Hz$, praticamente coincide com a primeira freqüência natural determinada na simulação do movimento de translação vertical da mesma, $f_{q5_{1MBS130kg}} = 0{,}88Hz$, diferindo dela em apenas 3,4%. Percebe-se, ainda, que a segunda freqüência natural detectada na simulação de arfagem da carroceria, $f_{q7_{2MBS130kg}} = 1{,}56Hz$, e a segunda freqüência natural determinada na simulação de translação vertical da mesma, $f_{q5_{2MBS130kg}} = 1{,}56Hz$, apresentam exatamente o mesmo valor, o que demonstra o acoplamento dos movimentos representados pelos graus de liberdade 7 e 5 do modelo de multicorpos desenvolvido.

A Tab. 4 resume os resultados da verificação das freqüências naturais de vibração apresentadas pela carroceria do veículo.

Tab. 4: Resultados da verificação das freqüências naturais de vibração da carroceria do veículo.

Freqüências Naturais de Vibração					
Grau de Liberdade	**Modo de Vibrar**	**Modelo MBS M_R=130 kg**	**Modelo MBS M_R=1kg**	**Modelo Analítico**	**Tendência de Convergência?**
5	1	0,88 Hz	0,90 Hz	0,91 Hz	Sim
5	2	1,56 Hz	1,58 Hz	1,58 Hz	Sim
6	1	0,83 Hz	0,90 Hz	0,92 Hz	Sim
7	1	0,85 Hz	0,88 Hz	0,91 Hz	Sim
7	2	1,56 Hz	1,58 Hz	1,58 Hz	Sim

7. SIMULAÇÕES DO VEÍCULO EM TRECHOS IRREGULARES DE PISTA

Nesta seção o modelo de multicorpos desenvolvido para o veículo será simulado em condições de tráfego em velocidade constante e em linha reta sobre trechos de pistas com perfis irregulares. A primeira análise realizada consiste na passagem do veículo sobre uma lombada enquanto que a segunda simulação envolve a passagem do mesmo por um trecho de pista de torção dinâmica. Através destes estudos pretende-se simular condições reais de uso do veículo, que consistem na excitação simultânea de vários graus de liberdade do mesmo. Alguns gráficos representativos dos graus de liberdade do carro, das forças no sistema de suspensão e das forças de interação entre pneu e solo serão mostrados visando à verificação da representatividade do modelo.

7.1. Veículo Trafegando sobre Trecho de Pista com Lombada

Neste primeiro caso o veículo trafega em velocidade constante de 20 km/h (5,56 m/s) sobre um trecho de pista que inclui uma lombada padrão de 0,1 m de altura e 4,0 m de comprimento. O gráfico da Fig. 25 mostra o perfil de pista visto por cada uma das rodas em função da distância percorrida pelo centro de massa da carroceria. Nota-se que o perfil do trecho de pista visto pelas duas rodas dianteiras (rodas 1 e 2) são iguais, mas diferem do perfil visto pelas rodas traseiras (rodas 3 e 4), que precisam percorrer uma distância maior no sentido positivo do eixo longitudinal do carro até que a lombada seja alcançada.

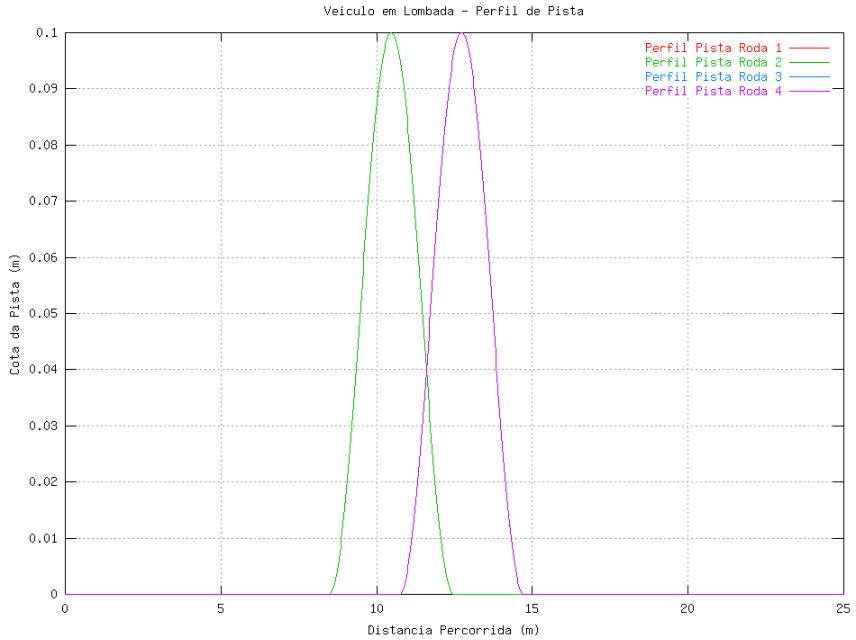

Fig. 25: Perfil de pista visto por cada uma das rodas quando o veículo trafega sobre trecho de pista com lombada.

O gráfico da Fig. 26 mostra a oscilação vertical de cada uma das rodas do modelo quando da passagem em velocidade constante sobre a lombada. Nota-se que as rodas apresentam um deslocamento vertical máximo um pouco superior à altura máxima da lombada. O máximo deslocamento de cada roda é atingido logo após a sua passagem pelo ponto de máxima cota da lombada. Próximo a este instante, as forças entre o pneu e a pista atingem seu valor mínimo e as rodas tendem a perder contato com o solo. A perda total de contato não ocorre devido à baixa velocidade de tráfego do carro e à suavidade do perfil de lombada analisado. Maiores velocidades de tráfego ou a presença de lombadas mais altas e curtas provocariam diferenças maiores entre o deslocamento vertical das rodas e a altura máxima do obstáculo.

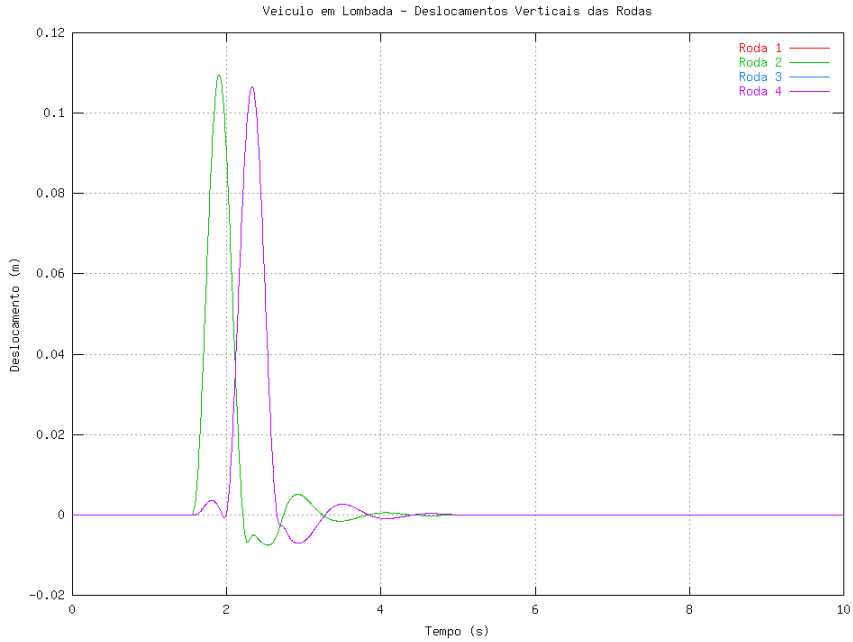

Fig. 26: Deslocamentos verticais de cada uma das rodas durante a simulação de tráfego sobre trecho de pista com lombada.

As Figs. 27 e 28 mostram, respectivamente, as forças nas suspensões e as forças de interação entre os pneus e pavimento para a simulação de tráfego sobre trecho de pista com lombada.

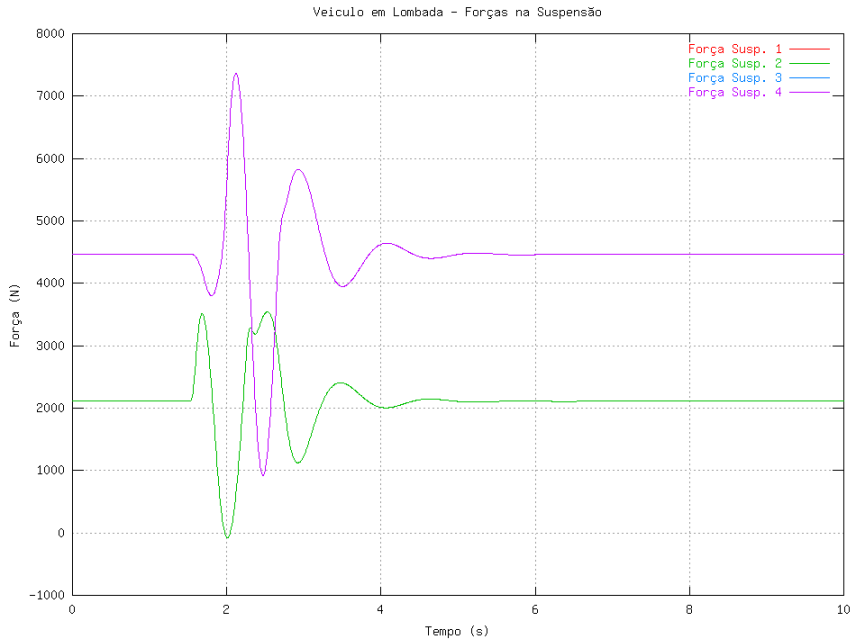

Fig. 27: Forças nas suspensões durante a simulação de tráfego sobre trecho de pista com lombada.

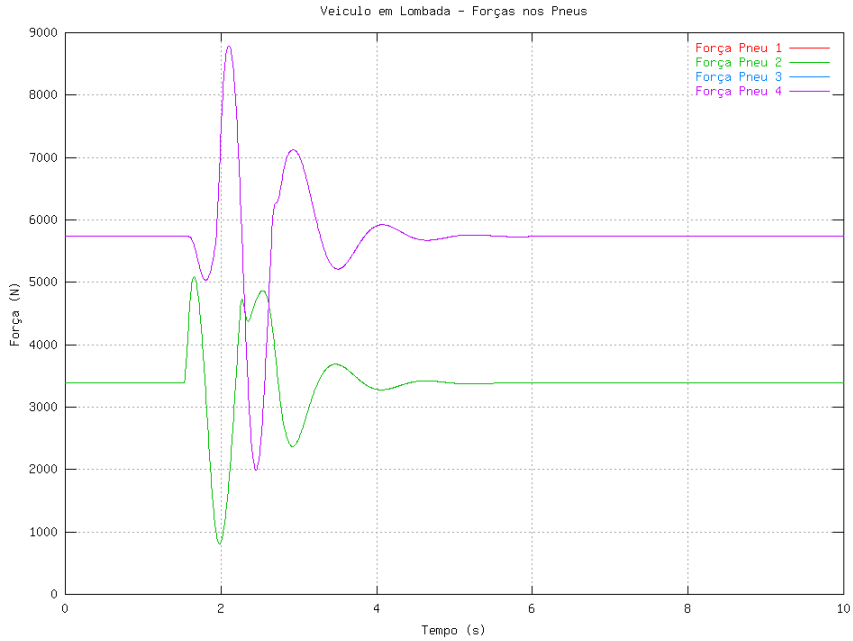

Fig. 28: Forças de interação entre pneu e pavimento durante a simulação de tráfego sobre trecho de pista com lombada.

Antes de tudo, é importante esclarecer que nos gráficos das Figs. 27 e 28, as forças variam em torno de um valor constante não-nulo devido ao peso próprio da massa suspensa e das massas não-suspensas, sendo as forças residuais após a passagem do veículo pela lombada, portanto, de ordem estática e não dinâmica.

Nota-se que, realmente, o pneus das rodas 1 e 2 encontram-se submetidos à mínima força de compressão no instante 1,9 s, que é o mesmo instante em que as rodas dianteiras atingem seu máximo pico de deslocamento vertical, conforme mostra o gráfico da Fig. 26. Percebe-se o mesmo para as rodas traseiras no instante 2,4 s, o que justifica o argumento feito quando da análise da Fig. 26.

É importante ressaltar que, para o modelo de multicorpos desenvolvido, é possível que se tenham forças negativas de interação entre pneu e solo (pneu sob tração), já que a mola e o amortecedor que representam o pneu no modelo têm sempre uma extremidade presa ao pavimento, impedindo o descolamento. No entanto, para que as análises tenham validade é importante verificar que as forças entre pneu e pavimento sejam sempre positivas ou nulas (pneu sob compressão ou descarregado), como no caso do gráfico da Fig. 28, pois na aplicação real do veículo, os pneus podem apresentar descolamento em relação à pista, condição esta em que o modelo desenvolvido não é válido.

A Fig. 29 mostra o deslocamento vertical da carroceria do veículo em função do tempo quando da passagem do veículo pela lombada. Nota-se um deslocamento máximo de aproximadamente 0,073 m para cima, ou seja, no sentido contrário ao da coordenada generalizada q_5. O primeiro pico do gráfico acontece quando as rodas dianteiras passam sobre a lombada, enquanto que o segundo pico se dá com a passagem das rodas traseiras por ela. É importante notar que o deslocamento vertical máximo da carroceria é consideravelmente inferior ao das rodas do veículo, que ficou em torno de 0,108 m. Com tal observação, conclui-se que a suspensão modelada está efetivamente cumprindo sua função de minimizar a vibração do compartimento de passageiros do veículo.

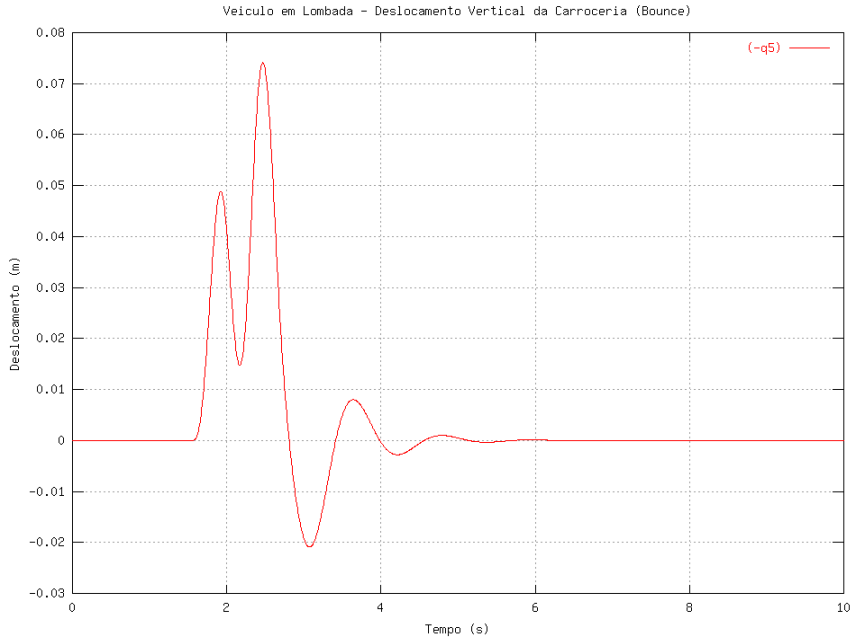

Fig. 29: Deslocamento vertical da carroceria durante a simulação de tráfego sobre trecho de pista com lombada.

O gráfico referente ao grau de liberdade 6, que representa o ângulo de rolagem da carroceria do veículo não é apresentado nesta seção já que a coordenada generalizada q_6 mostrou-se nula ao longo de toda a simulação. Tal resultado já era esperado, já que, quando um veículo trafega na direção perpendicular ao eixo longitudinal de uma lombada, conforme feito na presente simulação, não deve haver excitação do grau de liberdade de rolagem da carroceria devido à condição de simetria da pista.

A Fig. 30 mostra o ângulo de arfagem da carroceria do veículo ao longo da simulação de tráfego sobre a lombada. Nota-se um vale de -0,054 rad (-3,1º) quando da passagem das rodas dianteiras sobre a lombada, mostrando que neste instante a parte anterior da carroceria encontra-se em elevação. Em um segundo instante, as rodas traseiras passam pela lombada, provocando a elevação da parte de trás da carroceria e um pico de 0,071 rad (4,0º).

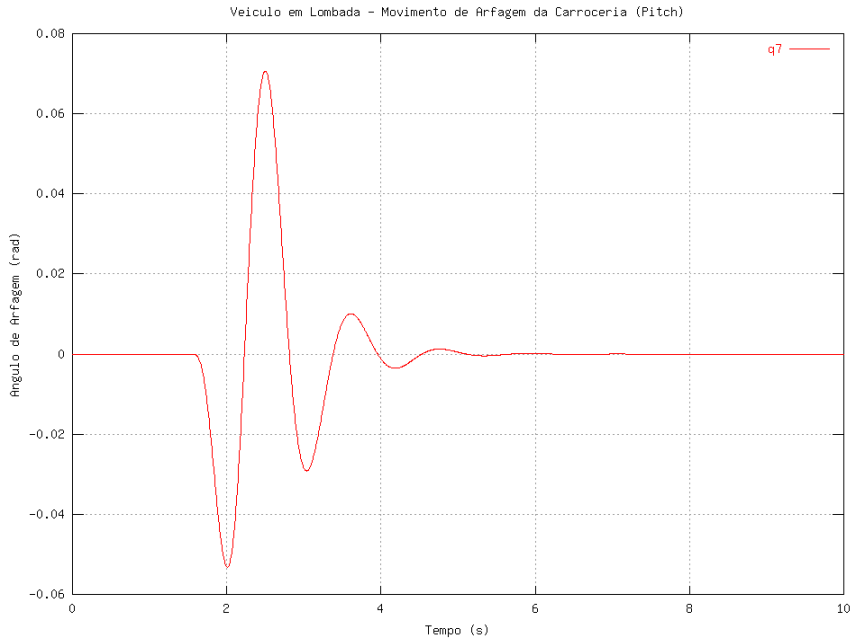

Fig. 30: Ângulo de arfagem da carroceria durante a simulação de tráfego sobre trecho de pista com lombada.

Os gráficos exibidos nesta seção mostram resultados plausíveis e coerentes para uma simulação de tráfego sobre lombada, o que demonstra a correção do modelo de multicorpos desenvolvido.

7.2. Veículo Trafegando sobre Trecho de Pista de Torção Dinâmica

Neste segundo caso o carro trafega em velocidade constante de 12 km/h (3,33 m/s) sobre um trecho de torção dinâmica. Entende-se por trecho de torção dinâmica um obstáculo ao tráfego no qual as rodas 1 e 4 do veículo, localizadas em seu lado esquerdo, passam por uma lombada de 0,1 m de altura e 4,0 m de comprimento enquanto que as rodas 2 e 3, localizadas no lado esquerdo do carro passam por uma

vala com 0,1 m de profundidade e 4,0 m de comprimento. O gráfico da Fig. 31 mostra o perfil de pista visto por cada uma das rodas em função da distância percorrida pelo baricentro da carroceria. Nota-se que o perfil de pista visto pelas duas rodas dianteiras (rodas 1 e 2) são opostos e diferem dos perfis opostos vistos pelas rodas traseiras (rodas 3 e 4), já que estas precisam percorrer uma distância maior no sentido positivo do eixo longitudinal do carro até que o obstáculo seja alcançado.

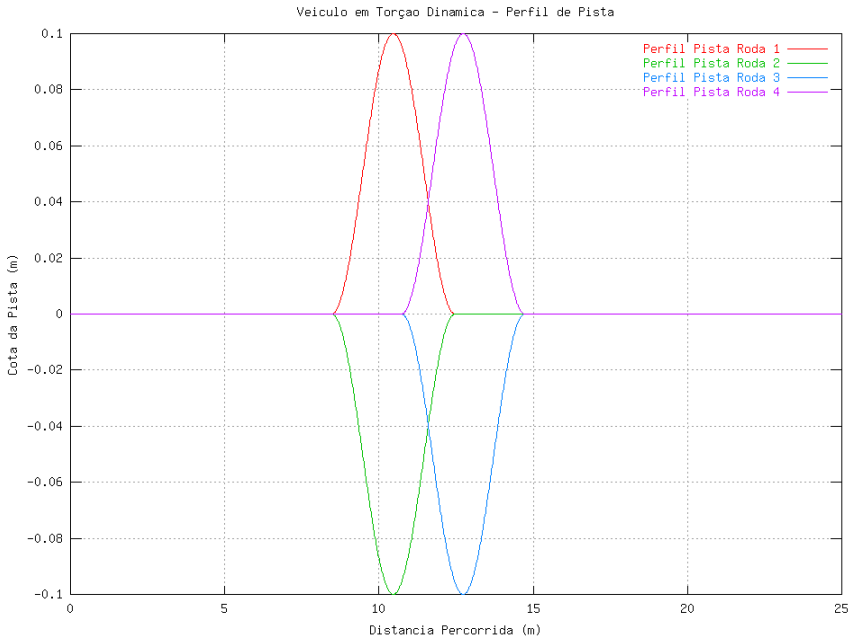

Fig. 31: Perfil de pista visto por cada uma das rodas quando o veículo trafega sobre o trecho de pista de torção dinâmica.

O gráfico da Fig. 32 mostra o deslocamento vertical de cada uma das rodas quando da passagem do veículo sobre o obstáculo de torção dinâmica. A partir deste gráfico nota-se que, diferentemente do caso de tráfego sobre lombada, neste caso não existe uma clara tendência de descolamento dos pneus em relação ao pavimento, já que os deslocamentos verticais são próximos e até mesmo inferiores às flechas da lombada e da vala do obstáculo. O primeiro conjunto de pico (roda 1) e vale (roda 2) se dá na passagem do eixo dianteiro pelo obstáculo, enquanto que o segundo conjunto de pico (roda 4) e vale (roda 3) acontece quando o eixo traseiro passa por ele.

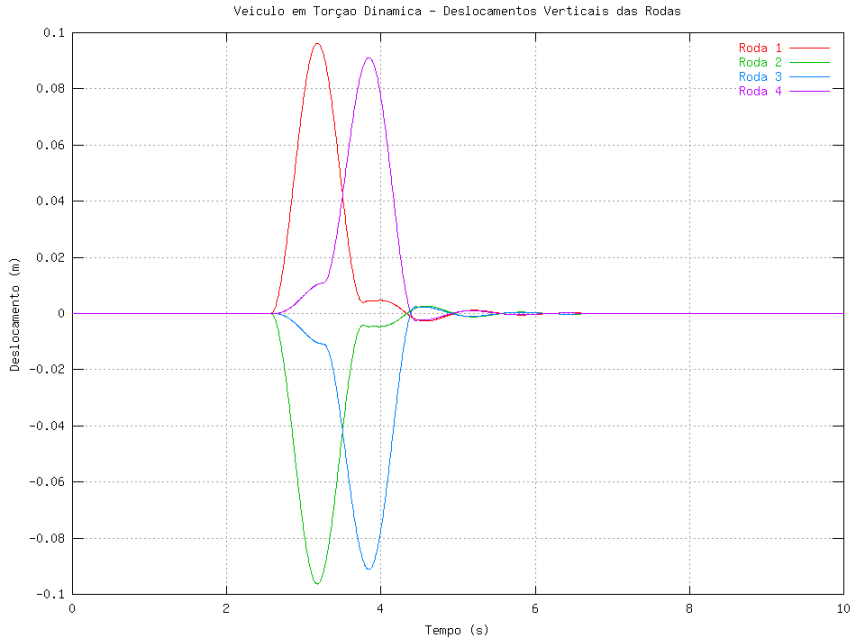

Fig. 32: Deslocamentos verticais de cada uma das rodas durante a simulação de tráfego sobre trecho de pista de torção dinâmica.

As Figs. 33 e 34 mostram, respectivamente, as forças nas suspensões e as forças de interação entre os pneus e pista para a simulação de tráfego sobre trecho de pista de torção dinâmica.

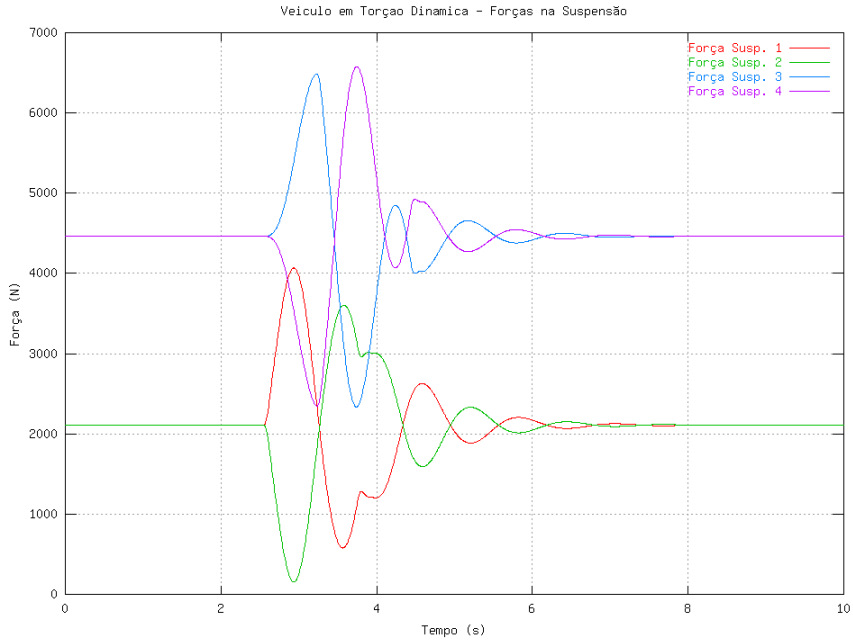

Fig. 33: Forças nas suspensões durante a simulação de tráfego sobre trecho de pista de torção dinâmica.

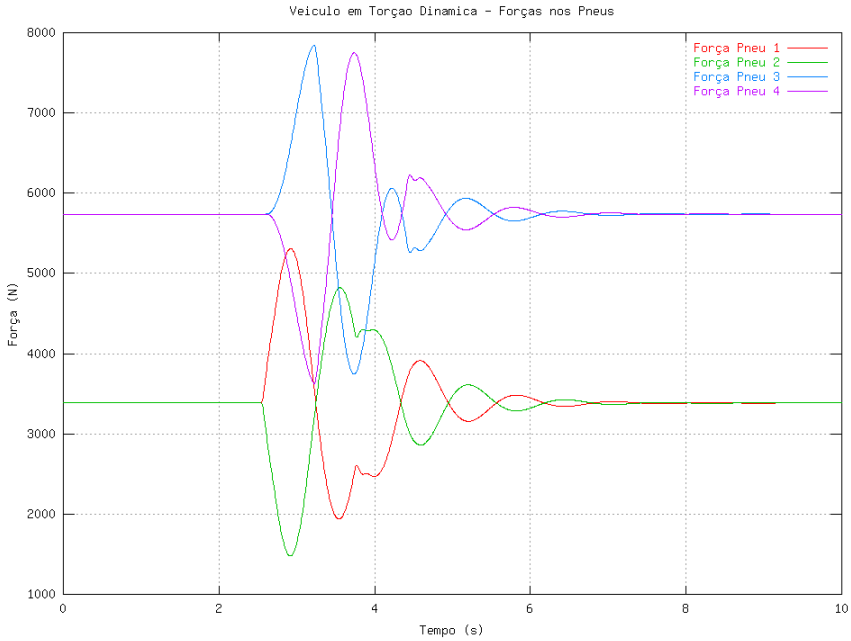

Fig. 34: Forças de interação entre pneu e pavimento durante a simulação de tráfego sobre trecho de pista de torção dinâmica.

É importante ressaltar que, assim como no caso estudado anteriormente, as forças variam em torno de valores constantes não-nulos devido ao peso próprio dos corpos que compõem o modelo. Além disso, as forças de interação entre pneu e solo são positivas ao longo de toda a simulação, estando os pneus, portanto, trabalhando sempre sob compressão, campo onde o modelo de multicorpos desenvolvido tem validade. O fato de as rodas pertencentes ao mesmo eixo apresentarem gráficos opostos entre si em relação aos valores de força estática já era esperado devido à característica anti-simétrica do trecho de pista estudado.

A menor tendência de descolamento entre os pneus e o solo levantada quando da análise do gráfico da Fig. 32 é confirmada pelo gráfico da Fig. 34. De acordo com ele, a mínima força de compressão à qual um dos pneus encontra-se submetido é de cerca de 1460 N. No caso anterior, onde a tendência de descolamento era nitidamente maior, esta força era de apenas 760 N.

Conforme já era esperado em função do tipo de perfil de pista analisado, o modelo, ao trafegar pela pista de torção dinâmica, apresentou deslocamento vertical da carroceria e ângulo de arfagem nulos ao longo de toda a simulação. Desta forma, tais gráficos são omitidos nesta seção. Tal resultado comprova que uma excitação do movimento de rolagem da carroceria, conforme proporcionado por uma pista de

torção dinâmica, não afeta os movimentos de translação vertical e de arfagem da carroceria. Já se havia chegado a esta conclusão no estudo de freqüências naturais e modos de vibração principais do sistema, em que ficou determinado que os únicos movimentos acoplados do veículo eram os movimentos de translação vertical e de arfagem da massa suspensa.

A Fig. 35 mostra o ângulo de rolagem da carroceria do veículo ao longo da simulação de tráfego sobre pista de torção dinâmica. Percebe-se uma inclinação máxima do chassis de 0,147 rad (8,4º) no sentido positivo da coordenada generalizada q_6 do sistema. Observando novamente a Fig. 12 nota-se que quando as rodas do lado esquerdo do veículo encontram-se sujeitas a elevações enquanto que as rodas do lado direito do veículo são submetidas a rebaixamentos, a tendência é, realmente, que a carroceria apresente valores positivos para o seu ângulo de rolagem.

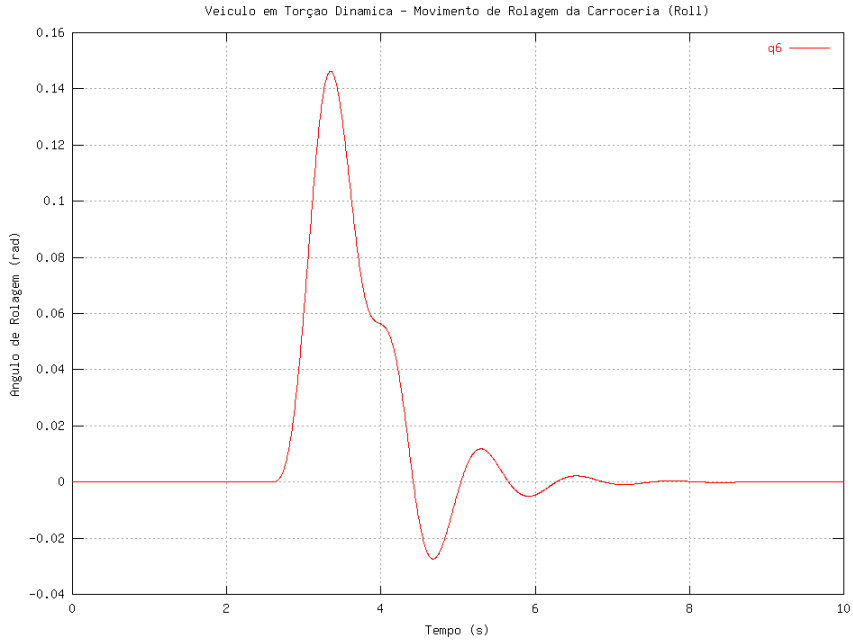

Fig. 35: Ângulo de rolagem da carroceria durante a simulação de tráfego sobre trecho de pista de torção dinâmica.

Os gráficos aqui exibidos demonstram resultados coerentes para a simulação de tráfego sobre pista de torção dinâmica, o que demonstra a correção do modelo de multicorpos desenvolvido para o estudo de dinâmica veicular vertical.

8. OBSERVAÇÕES E CONCLUSÕES

Realizado o levantamento bibliográfico sobre dinâmica veicular vertical e modelagem de veículos automotivos, que orientou a escolha de um modelo de carro a partir do qual o estudo de dinâmica veicular vertical pudesse ser feito, passou-se à fase de estudo da teoria de multicorpos e dos principais formalismos empregados no desenvolvimento das equações dinâmicas de um sistema mecânico. A partir de uma breve revisão dos métodos de Newton-Euler e de Lagrange, do Formalismo de Kane e do Princípio de Jourdain foi matematicamente comprovada a equivalência do Formalismo de Kane e do Princípio de Jourdain na geração das equações dinâmicas de um sistema de multicorpos.

Segundo Piedboeuf [21], Kane publicou um artigo em 1961 detalhando o seu formalismo e popularizando o seu método na área de modelagem de sistemas mecânicos e robótica. No entanto, no ano de 1909, Jourdain já havia publicado seu artigo estabelecendo o princípio da potência virtual, no qual são deduzidas equações equivalentes às do Formalismo de Kane. Independente destes fatos, a contribuição de Kane para a teoria de multicorpos é inegável já que o seu método, baseado nos conceitos de forças ativas generalizadas e forças de inércia generalizadas, é mundialmente conhecido e utilizado, podendo, inclusive, ser considerado uma reestruturação algébrica do princípio de Jourdain feita de uma forma fisicamente mais intuitiva por ser baseada em componentes das velocidades reais dos corpos do sistema.

A metodologia de análise de sistemas multicorpos utilizada neste trabalho mostrou-se adequada. Ela partiu da concepção física do modelo, prosseguindo à sua modelagem matemática e baseou-se nas funcionalidades do AUTOLEV, dentre as quais se destaca a sua associatividade ao MATLAB, que permite ao AUTOLEV utiliza-lo como integrador numérico das equações determinadas pelo formalismo de Kane. Definido o modelo físico e matemático do carro, a metodologia de análise incluiu, ainda, uma etapa de validação do modelo antes de sua liberação para as análises finais.

Durante a fase de desenvolvimento do modelo de multicorpos do veículo, o software AUTOLEV, apesar de não possuir uma interface gráfica para o pré-

processamento das análises, mostrou-se uma ferramenta bastante útil por permitir ao usuário o controle passo-a-passo do processo de formulação das equações dinâmicas de um sistema mecânico. Além disso, o software não apresenta qualquer tipo de restrição em relação ao tipo de sistema dinâmico a ser resolvido, permitindo que o usuário trabalhe com a mesma facilidade com sistemas uni, bi, ou tridimensionais, com vínculos holonômicos e não-holonômicos de cadeia fechada ou aberta. Por apresentar tais características e por exigir do usuário um certo conhecimento da teoria de multicorpos envolvida, diferentemente de softwares comerciais até mesmo mais avançados, o AUTOLEV mostrou-se uma ferramenta academicamente bastante interessante.

Utilizando o AUTOLEV, modelou-se matematicamente um veículo com sete graus de liberdade. A carroceria do veículo foi modelada como um corpo rígido ligado a quatro massas, representando as rodas e as partes móveis da suspensão, através de molas e amortecedores lineares. Estas massas podem se deslocar em relação ao chassis do automóvel, possuindo, portanto, um grau de liberdade de translação cada, e estão ligadas à superfície do pavimento através de molas e amortecedores, representando a rigidez mecânica e o coeficiente de amortecimento dos pneus. A carroceria rígida do veículo possui três graus de liberdade, podendo transladar verticalmente além de apresentar os movimentos de rolagem e arfagem. Os dados utilizados na modelagem foram retirados de um veículo *off-road* comercial de médio porte. As equações de movimento do modelo do veículo foram desenvolvidas a partir do formalismo de Kane através do próprio AUTOLEV e integradas através do MATLAB.

Definido o modelo do veículo, procurou-se validá-lo através da comparação de suas freqüências naturais com as freqüências naturais características de modelos analíticos simplificados que pudessem ser resolvidos manualmente. Para o estudo das freqüências naturais de vibração das rodas, foram utilizados sistemas massa-mola com um único grau de liberdade. Para a verificação das freqüências naturais da carroceria do veículo, modelos mais complexos de dois graus de liberdade adaptados de Vierck [27] e que permitiam movimentos acoplados foram empregados. Os resultados mostraram-se compatíveis, comprovando a representatividade do modelo de multicorpos desenvolvido. Através destas análises foi possível, ainda, notar o

acoplamento dos movimentos de translação vertical da carroceria e de arfagem da mesma, justificado pela assimetria do carro em relação a estes movimentos.

De acordo com Rolvag [8], um veículo de passeio apresenta, geralmente, freqüência natural de vibração vertical da carroceria entre 1,0 e 1,5 Hz. A carroceria do modelo de multicorpos elaborado apresentou freqüência natural de vibração vertical de 0,88 Hz. Para a freqüência natural de oscilação das rodas de um veículo de passeio, Rolvag [8] aponta a faixa entre 10,0 e 15,0 Hz. As rodas dianteiras do modelo de multicorpos apresentaram freqüência natural de 6,8 Hz, enquanto que as rodas traseiras, 6,6 Hz. É importante ressaltar que os intervalos de freqüências naturais apontados por Rolvag [8] refletem as características dinâmicas de veículos de passeio, que são consideravelmente diferentes das características do veículo *off-road* simulado. Assim, já era esperado que este veículo apresentasse uma suspensão mais macia, ou seja, freqüências naturais mais baixas e fora dos intervalos próprios de veículos de passeio.

O modelo do veículo apresentou, também, resultados coerentes nas análises de tráfego sobre trecho de pista com lombada e sobre trecho de pista de torção dinâmica, mostrando-se representativo para condições de baixa velocidade de avanço (até 20 km/h) e tráfego sobre pistas de topologia suave, onde se pode garantir contato contínuo dos pneus com o pavimento.

9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] LARSSON, T. **Multibody Dynamic Simulation in Product Development.** Division of Computer Aided Design – Department of Mechanical Engineering – Lulea University of Technology, Lulea, 2001.

[2] KORTÜM, W.; VACULÍN, O. **Is Multibody Simulation Software Suitable for Mechatronic Systems?** Vehicle System Dynamics Supplement, London, n. 40, p. 1 – 16, 2003.

[3] VACULÍN, O.; KRÜGER, W. R.; VALÁSEK, M. **Overview of Coupling of Multibody and Control Engineering Tools.** Vehicle System Dynamics, London, vol. 41, n. 5, p. 415 – 429, 2004.

[4] RAUH, J. **Virtual Development of Ride and Handling Characteristics for Advanced Passenger Cars.** Vehicle System Dynamics, London, vol. 40, n. 1 - 3, p. 135 – 155, 2003.

[5] WALLRAPP, O. **Review of Past Developments in Multibody System Dynamics at DLR – From FADYNA to SIMPACK.** Vehicle System Dynamics, London, vol. 41, n. 5, p. 339 – 348, 2004.

[6] REBELLO, A. L. F. **Modelagem e Simulação de um Veículo Automotivo Usando uma Metodologia de Sistemas Multicorpos Aproximada.** 1999. 124 p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 1999.

[7] STONE, R.; BALL J. K. **Automotive Engineering Fundamentals.** Warrendale: SAE International, 2004. 594 p.

[8] ROLVAG, T. **Design and Optimization of Suspension Systems and Components.** Department of Machine Design and Material Technology – Norwegian University of Science and Technology, 2004.

[9] SAYERS, M. W.; KARAMIHAS, S. M. **The Little Book of Profiling: Basic Information about Measuring and Interpreting Road Profiles.** University of Michigan, 1998.

[10] BLUNDELL, M.; HARTY, D. **The Multibody Systems Approach to Vehicle Dynamics.** Warrendale: SAE International, 2004. 518 p.

[11] ÖIJER F.; EDLUND, S. **Identification of Transient Road Obstacle Distributions and their Impact on Vehicle Durability and Driver Comfort.** Vehicle System Dynamics Supplement, London, n. 41, p. 744 – 753, 2004.

[12] IMINE, H.; DELANNE, Y.; M'SIRDI, N. K. **Road Profile Input Estimation in Vehicle Dynamics Simulation.** Vehicle System Dynamics, London, vol. 44, n. 4, p. 285 – 303, 2006.

[13] BARBOSA, R. S.; COSTA, A. N. **Safety Vehicle Traffic Speed Limit.** In: IX International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics (IX - DINAME), Florianópolis, 2001.

[14] CHENGJIAN, F.; DIHUA, G. **The Quantitative Analysis end Experimental Verification of Tire Static Enveloping Model Using Experimental Modal Parameters.** Vehicle System Dynamics, London, vol. 44, n. 9, p. 675 – 688, 2006.

[15] WATANABE, Y.; SAYERS, M. W. **The Effect of Nonlinear Suspension Kinematics on the Simulated Pitching and Rolling Dynamic Behavior of Cars.** Vehicle System Dynamics Supplement, London, n. 41, p. 23 – 32, 2004.

[16] COSTA, R. T. N. **Modelo Plano de Suspensão MacPherson Utilizando Transformadores Cinemáticos.** Departamento de Engenharia Mecânica do Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, 2002.

[17] COSTA, A. N.; JONES, R. P.; CHERRY, A. **Modelling Techniques and Simulation of the Canadian Jeep Iltis Using Multibody Systems (MBS).** In: III Congresso e Exposição Internacionais de Tecnologia da Mobilidade, São Paulo, 1994.

[18] COSTA, A. N. **Application of Multibody Systems (MBS) Techniques to Vehicle Modelling.** In: II Workshop CAE/CAD/CAM SAE Brasil, São José dos Campos, 1994.

[19] KANE, T. R.; LEVINSON, D. A. **Dynamics: Theory and Applications.** New York: McGraw-Hill, 1985. 379 p.

[20] HAGEDORN, P. **Rechnergestuetzte Simulation von Mehrkoerpersystemen – Vorlesung Skript.** Technische Universitaet Darmstadt – Institut fuer Mechanik, 2005.

[21] PIEDBOEUF, J. C. **Kane's Equations or Jourdain's Principle?** In: 36th Midwest Symposium on Circuits and Systems, Detroit, 1993.

[22] RILL, G. **Vehicle Modelling by Subsystems.** In: XI International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics (XI DINAME), Ouro Preto, 2005.

[23] RILL, G. **A Modified Implicit Euler Algorithm for Solving Vehicle Dynamic Equations.** Multibody System Dynamics, Springer Netherlands, vol. 15, n. 1, p. 1 – 24, 2006.

[24] SCHIEHLEN, W. (Ed.) **Multibody Systems Handbook.** New York: Springer-Verlag, 1990. 432 p.

[25] ONLINE DYNAMICS, INC. Sunnyvale. **AUTOLEV: a symbolic manipulator for statics, dynamics and mathematical.** Disponível em <http://www.autolev.com>. Acesso em 12 de agosto de 2007.

[26] KANE, T. R.; LEVINSON, D. A. **AUTOLEV 4 – User's Manual.** Sunnyvale: OnLine Dynamics, Inc., 2004. 159 p.

[27] VIERCK, R. K. **Vibration Analysis**. New York: Crowell, 1979. 511 p.

ANEXO A – PRINCIPAIS COMANDOS UTILIZADOS EM SIMULAÇÕES DINÂMICAS NO AUTOLEV

- **angvel (A, B)**: calcula o vetor velocidade do corpo A no sistema de referência B.
- **autoz on (ou off)**: permite (ou impede) a introdução automática de variáveis simbólicas intermediárias por parte do AUTOLEV. A opção autoz on torna mais rápidos os processos de formulação das equações e de integração numérica.
- **bodies A, B, C**: declara os corpos A, B e C, seus respectivos baricentros, pontos AO, BO e CO, e seus respectivos sistemas de coordenadas A, B e C.
- **code dynamics nome_do_arquivo.m**: gera um arquivo para MATLAB para a integração das equações dinâmicas obtidas. O mesmo comando pode ser usado para a geração de arquivos em linguagem C e Fortran inserindo-se as extensões .c e .for, respectivamente.
- **constants A, B, C**: declara as constantes A, B e C.
- **constrain (dependent [A, B, C])**: cria um sistema de equações de restrição a partir das expressões dependent [A], dependent [B] e dependent [C].
- **degrees on (ou off)**: determina se os argumentos das funções trigonométricas devem ser dados em graus ou em radianos.
- **dircos (A, B, body123, ANG1, ANG2, ANG3)**: forma a matriz de transformação entre os sistemas de coordenadas A e B. ANG1, ANG2 e ANG3 são os ângulos de rotação entre os sistemas A e B medidos em relação aos eixos X, Y e Z, respectivamente, do sistema A.
- **dot (A>, B>)**: calcula o produto escalar entre os vetores A> e B>.
- **dt (A)**: deriva a função A em relação ao tempo.
- **dt (A>, B)**: deriva o vetor A> em relação ao tempo no sistema de referência B.
- **explicit (A)**: recalcula a expressão A e a mostra de forma explícita.
- **force (A / B, C>)**: adiciona um par de forças de ação e reação a dois corpos do sistema. Uma força – C> é adicionada ao ponto A e uma força + C> é adicionada ao ponto B.

- **fr ( )**: retorna uma matriz com as forças ativas generalizadas do sistema.
- **frames A, B, C**: declara os sistemas de coordenadas A, B e C.
- **frstar ( )**: retorna uma matriz com as forças de inércia generalizadas do sistema.
- **gravity (A>)**: cria uma expressão para a força gravitacional de cada partícula e cada corpo do sistema de acordo com o vetor de campo gravitacional A>.
- **inertia A, I1, I2, I3**: define os momentos de inércia do corpo A nas direções X, Y e Z (I1, I2 e I3, respectivamente) de seu sistema de referência.
- **input A = 1, B = 2, C = 3**: impõe valores para as quantidades listadas nos arquivos de entrada para MATLAB e compiladores C ou Fortran.
- **kane ( )**: traz as equações dinâmicas para uma forma adequada para a integração numérica através do MATLAB ou de compiladores C ou Fortran.
- **kindiffs (A, B, body123, ANG1, ANG2, ANG3)**: elabora equações diferenciais cinemáticas entre os sistemas de referência A e B em termos dos ângulos de orientação ANG1, ANG2 e ANG3.
- **mass A = MA, B = MB, C = MC**: define os valores das massas dos corpos e partículas pertencentes ao sistema. MA é a massa do corpo A, MB é a massa do corpo B e MC, a massa do corpo C.
- **newtonian A**: declara o referencial A como um referencial newtoniano, isto é, inercial.
- **output A, B, C**: declara as quantidades A, B e C como saídas dos programas para MATLAB ou para compiladores C e Fortran.
- **particles A, B, C**: declara as partículas (corpos pontuais com massa mas sem momentos de inércia) A, B e C.
- **points A, B, C**: declara os pontos A, B e C.
- **simprot (A, B, 1, ANG1)**: forma a matriz de transformação entre os sistemas de coordenadas A e B associada a uma rotação simples de um sistema em relação ao outro. O número 1 representa o eixo X do sistema de coordenadas A, o 2 representa o eixo Y do sistema A e o 3, o eixo Z deste mesmo sistema. ANG1 representa o valor numérico da rotação simples mencionada.
- **specified A, B, C**: declara A, B e C como funções de constantes, do tempo, e/ou de variáveis do sistema.

- **unitsystem kg, m, seconds**: declara um sistema de unidades para conversão automática de unidades declaradas nos comandos input e output.
- **v2points (A, B, B1, B2)**: calcula a velocidade do ponto B2 no sistema de referência A sendo conhecida a velocidade do ponto B1 e dado que os pontos B1 e B2 pertencem ao mesmo corpo B.
- **variables A", B", C"**: declara as variáveis A, B e C, bem como suas primeiras e segundas derivadas temporais.

ANEXO B – CONTEÚDO DO ARQUIVO EXEMPLO.ALL

% Exemplo de Aplicação do Formalismo de Kane no AUTOLEV

% Partículas oscilando dentro do tubo

% De 0 a 10 segundos, as partículas oscilam em torno de suas posições de equilíbrio

% De 10 a 20 segundos, o tubo está sujeito a uma função tipo degrau que o leva de 0º (0 rad) a 60º (1,05 rad)

% De 20 a 30 segundos, as partículas oscilam em torno de suas novas posições de equilíbrio

% 1)

% Definição do sistema de unidades utilizado

degrees off

unitsystem kg,m,seconds

% Definição dos corpos e/ou partículas que constituem o sistema

% Neste caso, as partículas P1 e P2 são definidas

particles P{2}

% Definição dos sistemas de coordenadas envolvidos

% Neste caso, definem-se o referencial inercial N e o referencial móvel TUBO

newtonian N

frames TUBO

% Definição das constantes utilizadas

% MP1 e MP2 são as massas das partículas P1 e P2, respectivamente

% K1 e K2 são as constantes elásticas das molas SIGMA1 e SIGMA2, respectivamente

% L1 e L2 são os comprimentos de mola indeformados das molas SIGMA1 e SIGMA2, respectivamente

% G é a aceleração da gravidade no planeta Terra

constants MP1,MP2,K1,K2,L1,L2,G

% Definição das variáveis utilizadas

% A coordenada generalizada q1 é a posição da partícula P1 dentro do tubo em relação à condição indeformada da mola SIGMA1

% A coordenada generalizada q2 é a posição da partícula P2 dentro do tubo em relação à condição indeformada das molas SIGMA1 e SIGMA2

% A velocidade generalizada u1 é a velocidade da particula P1 dentro do tubo

% A velocidade generalizada u2 é a velocidade da particula P2 dentro do tubo

% A variável POS_P1 é a posição da partícula P1 dentro do tubo

% A variável POS_P2 é a posição da partícula P2 dentro do tubo

variables q{2}',u{2}',POS_P1,POS_P2

% Definição das funções matemáticas utilizadas

```
  % A função TETA é a entrada do sistema e representa o ângulo que o referencial móvel
TUBO forma com a vertical ao longo do tempo
  specified TETA"

  % 2)
  % Definição das equações cinemáticas diferenciais do sistema
  q1'=u1
-> Q1' = U1
  q2'=u2
-> Q2' = U2

  % 3)
  % Definição das posições, velocidades e acelerações angulares
  % Neste caso definem-se estas grandezas para o referencial móvel TUBO em relação ao
referencial inercial N
  simprot(N,TUBO,3,TETA)
-> N_TUBO = [COS(TETA), -SIN(TETA), 0; SIN(TETA), COS(TETA), 0; 0, 0, 1]
  W_TUBO_N>=TETA'*N3>
-> W_TUBO_N> = TETA'*TUBO3>
  ALF_TUBO_N>=dt(W_TUBO_N>,N)
-> ALF_TUBO_N> = TETA"*TUBO3>
  % Definição das posições, velocidades e acelerações lineares
  % Neste caso definem-se estas grandezas para as partículas em relação ao referencial móvel
TUBO
  P_NO_P1>=(L1+q1)*TUBO1>
-> P_NO_P1> = (L1+Q1)*TUBO1>
  P_NO_P2>=(L1+L2+q2)*TUBO1>
-> P_NO_P2> = (L1+L2+Q2)*TUBO1>
  V_P1_N>=dt(P_NO_P1>,N)
-> V_P1_N> = U1*TUBO1> + TETA'*(L1+Q1)*TUBO2>
  V_P2_N>=dt(P_NO_P2>,N)
-> V_P2_N> = U2*TUBO1> + TETA'*(L1+L2+Q2)*TUBO2>
  A_P1_N>=dt(V_P1_N>,N)
-> A_P1_N> = (U1'-TETA'^2*(L1+Q1))*TUBO1> + (TETA"*(L1+Q1)+2*TETA'*U1)*
  TUBO2>
  A_P2_N>=dt(V_P2_N>,N)
-> A_P2_N> = (U2'-TETA'^2*(L1+L2+Q2))*TUBO1> + (TETA"*(L1+L2+Q2)+2*TETA'*
  U2)*TUBO2>
```

```
% 4)
% Definição das propriedades de massa e inércia dos corpos e das partículas do sistema
% Neste caso são definidas as massas das partículas P1 e P2
mass P1=MP1,P2=MP2

% 5)
% Definição das forças atuantes sobre cada um dos corpos e partículas
% Neste caso são definidas as forças atuantes sobre as particulas P1 e P2 devido à existência das molas SIGMA1 e SIGMA2
FORCE_P1>=-K1*q1*TUBO1>
-> FORCE_P1> = -K1*Q1*TUBO1>
force(P1/P2,-K2*(q2-q1)*TUBO1>)
-> FORCE_P2> = K2*(Q1-Q2)*TUBO1>
-> FORCE_P1> = (-K1*Q1-K2*(Q1-Q2))*TUBO1>

% 6)
% Definição do campo gravitacional atuante
% Neste caso, as partículas estão sujeitas ao campo gravitacional da Terra
gravity(G*N1>)
-> FORCE_P1> = (-K1*Q1-K2*(Q1-Q2))*TUBO1> + G*MP1*N1>
-> FORCE_P2> = K2*(Q1-Q2)*TUBO1> + G*MP2*N1>

% 7)
% Inserção dos comandos para a montagem das equações dinâmicas do sistema
zero=FR()+FRSTAR()
-> ZERO[1] = G*MP1*COS(TETA) + MP1*(TETA'^2*(L1+Q1)-U1') - K1*Q1 - K2*(Q1-
Q2)
-> ZERO[2] = G*MP2*COS(TETA) + K2*(Q1-Q2) + MP2*(TETA'^2*(L1+L2+Q2)-U2')
kane()
-> ZERO[1] = G*MP1*COS(TETA) + MP1*TETA'^2*(L1+Q1) - K1*Q1 - K2*(Q1-Q2) -
MP1*U1'
-> ZERO[2] = G*MP2*COS(TETA) + K2*(Q1-Q2) + MP2*TETA'^2*(L1+L2+Q2) - MP2*
U2'

% 8)
% Definição das grandezas escalares que se pretende estudar
% POS_P1 é a posição da partícula P1 dentro do tubo
% POS_P2 é a posição da partícula P2 dentro do tubo
```

```
  POS_P1=L1+q1
-> POS_P1 = L1 + Q1
  POS_P2=L1+L2+q2
-> POS_P2 = L1 + L2 + Q2

  % 9)
  % Definição matemática das funções utilizadas como entradas para o sistema dinâmico
  % Neste caso, define-se a função que representa o ângulo que o referencial móvel TUBO forma com a vertical ao longo do tempo
  TETA=spline(step,t,10,20,0,1.05)
-> TETA = 0.525 + 0.3342254*ATAN(-95.46155+6.364103*T)

  % 10)
  % Especificação dos valores numéricos das constantes envolvidas na análise
  % Especificação das condições iniciais das variáveis em questão
  % Especificação do tempo total de simulação e do passo de integração a ser utilizado na resolução numérica
  input MP1=0.5 kg,MP2=0.5 kg,K1=50 N/m,K2=50 N/m,L1=0.2 m,L2=0.2 m,G=9.81 m/s^2
  input q1=0 m,q2=0 m,u1=0 m/s,u2=0 m/s
  input tfinal=30 s,integstp=0.01 s

  % 11)
  % Definição dos outputs da análise
  output t s,q1 m,q2 m,u1 m/s,u2 m/s,POS_P1 m,POS_P2 m,TETA rad

  % 12
  % Inserção dos comandos para a geração de um código-fonte em linguagem C, Fortran, ou script para Matlab para a integração numérica das equações
  % Neste caso, as equações serão integradas através do Matlab
  code dynamics() exemplo.m
-> TETA' = 2.127045/(1+40.50181*(-15+T)^2)
-> TETA" = -172.2983*(-15+T)/(1+40.50181*(-15+T)^2)^2
```

ANEXO C – CONTEÚDO DO ARQUIVO VEICULO.ALL

```
  % Modelo de veículo com 7 graus de liberdade
  % Configurações e declarações
  autoz on
  newtonian N
  degrees off
  unitsystem kg,m,seconds
  bodies C,R{4}
  points C{4}
  constants
LS1,LS2,LS3,LS4,L11,L12,L13,L21,L22,L23,L31,L32,L33,L41,L42,L43,g,IC{3},MC,MC1,MC2,M
C3,MC4,MR
  constants k_diant,k_tras,c_diant,c_tras,k_pneu,c_pneu,pi,v
  variables q{9}',u{9}',q1N,q2N,q3N,q4N,q5N,FS1,FS2,FS3,FS4,FP1,FP2,FP3,FP4
  specified funcao{4}

  % Equações cinemáticas diferenciais
  q1'=u1
-> Q1' = U1

  q2'=u2
-> Q2' = U2

  q3'=u3
-> Q3' = U3

  q4'=u4
-> Q4' = U4

  q5'=u5
-> Q5' = U5

  q6'=u6
-> Q6' = U6

  q7'=u7
-> Q7' = U7
```

```
  q8'=u8
-> Q8' = U8

  q9'=u9
-> Q9' = U9

  % Carroceria
  w_C_N>=u6*n1>+u7*n2>+u8*n3>
-> W_C_N> = U6*N1> + U7*N2> + U8*N3>

  dircos(N,C,body123,q6,q7,q8)
-> Z1 = COS(Q7)
-> Z2 = COS(Q8)
-> Z3 = Z1*Z2
-> Z4 = SIN(Q8)
-> Z5 = Z1*Z4
-> Z6 = SIN(Q7)
-> Z7 = COS(Q6)
-> Z8 = SIN(Q6)
-> Z9 = Z4*Z7 + Z2*Z6*Z8
-> Z10 = Z2*Z7 - Z4*Z6*Z8
-> Z11 = Z1*Z8
-> Z12 = Z4*Z8 - Z2*Z6*Z7
-> Z13 = Z2*Z8 + Z4*Z6*Z7
-> Z14 = Z1*Z7
-> N_C = [Z3, -Z5, Z6; Z9, Z10, -Z11; Z12, Z13, Z14]

  alf_C_N>=dt(w_C_N>,N)
-> ALF_C_N> = (Z3*U6'+Z9*U7'+Z12*U8')*C1> + (Z10*U7'+Z13*U8'-Z5*U6')*C2>
   + (Z6*U6'+Z14*U8'-Z11*U7')*C3>

  p_NO_CO>=q9*n1>-q5*n3>
-> P_NO_CO> = Q9*N1> - Q5*N3>

  v_CO_N>=dt(p_NO_CO>,N)
-> V_CO_N> = U9*N1> - U5*N3>

  a_CO_N>=dt(v_CO_N>,N)
```

-> A_CO_N> = U9'*N1> - U5'*N3>

% Pontos de fixação da suspensão à carroceria

p_CO_C1>=L11*c1>+L12*c2>-(L13+LS1)*c3>

-> Z15 = -L13 - LS1

-> P_CO_C1> = L11*C1> + L12*C2> + Z15*C3>

p_CO_C2>=L21*c1>-L22*c2>-(L23+LS2)*c3>

-> Z16 = -L23 - LS2

-> P_CO_C2> = L21*C1> - L22*C2> + Z16*C3>

p_CO_C3>=-L31*c1>-L32*c2>-(L33+LS3)*c3>

-> Z17 = -L33 - LS3

-> P_CO_C3> = -L31*C1> - L32*C2> + Z17*C3>

p_CO_C4>=-L41*c1>+L42*c2>-(L43+LS4)*c3>

-> Z18 = -L43 - LS4

-> P_CO_C4> = -L41*C1> + L42*C2> + Z18*C3>

v2pts(N,C,CO,C1)

-> Z19 = L11*Z5 + L12*Z3

-> Z20 = L12*Z9 - L11*Z10

-> Z21 = L12*Z12 - L11*Z13

-> Z22 = L11*Z6 - Z15*Z3

-> Z23 = L11*Z14 - Z15*Z12

-> Z24 = -L11*Z11 - Z15*Z9

-> Z25 = L12*Z11 + Z15*Z10

-> Z26 = Z15*Z13 - L12*Z14

-> Z27 = -L12*Z6 - Z15*Z5

-> V_C1_N> = (Z3*U9+Z25*U7+Z26*U8+Z27*U6-Z12*U5)*C1> + (Z22*U6+Z23*U8+Z24*U7-Z5*U9-Z13*U5)*C2> + (Z6*U9+Z19*U6+Z20*U7+Z21*U8-Z14*U5)*C3>

v2pts(N,C,CO,C2)

-> Z28 = L21*Z5 - L22*Z3

-> Z29 = -L21*Z10 - L22*Z9

-> Z30 = -L21*Z13 - L22*Z12

-> Z31 = L21*Z6 - Z16*Z3

-> Z32 = L21*Z14 - Z16*Z12

-> Z33 = -L21*Z11 - Z16*Z9

```
-> Z34 = L22*Z6 - Z16*Z5
-> Z35 = L22*Z14 + Z16*Z13
-> Z36 = Z16*Z10 - L22*Z11
-> V_C2_N> = (Z3*U9+Z34*U6+Z35*U8+Z36*U7-Z12*U5)*C1> + (Z31*U6+Z32*U8+Z33*
   U7-Z5*U9-Z13*U5)*C2> + (Z6*U9+Z28*U6+Z29*U7+Z30*U8-Z14*U5)*C3>

   v2pts(N,C,CO,C3)
-> Z37 = L31*Z10 - L32*Z9
-> Z38 = L31*Z13 - L32*Z12
-> Z39 = -L31*Z5 - L32*Z3
-> Z40 = L31*Z11 - Z17*Z9
-> Z41 = -L31*Z6 - Z17*Z3
-> Z42 = -L31*Z14 - Z17*Z12
-> Z43 = L32*Z6 - Z17*Z5
-> Z44 = L32*Z14 + Z17*Z13
-> Z45 = Z17*Z10 - L32*Z11
-> V_C3_N> = (Z3*U9+Z43*U6+Z44*U8+Z45*U7-Z12*U5)*C1> + (Z40*U7+Z41*U6+Z42
   *U8-Z5*U9-Z13*U5)*C2> + (Z6*U9+Z37*U7+Z38*U8+Z39*U6-Z14*U5)*C3>

   v2pts(N,C,CO,C4)
-> Z46 = L41*Z10 + L42*Z9
-> Z47 = L41*Z13 + L42*Z12
-> Z48 = L42*Z3 - L41*Z5
-> Z49 = L41*Z11 - Z18*Z9
-> Z50 = -L41*Z6 - Z18*Z3
-> Z51 = -L41*Z14 - Z18*Z12
-> Z52 = L42*Z11 + Z18*Z10
-> Z53 = Z18*Z13 - L42*Z14
-> Z54 = -L42*Z6 - Z18*Z5
-> V_C4_N> = (Z3*U9+Z52*U7+Z53*U8+Z54*U6-Z12*U5)*C1> + (Z49*U7+Z50*U6+Z51
   *U8-Z5*U9-Z13*U5)*C2> + (Z6*U9+Z46*U7+Z47*U8+Z48*U6-Z14*U5)*C3>

   % Rodas
   dircos(C,R1,space123,0,0,0)
-> C_R1 = [1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1]

   angvel(N,R1)
-> N_R1 = [Z3, -Z5, Z6; Z9, Z10, -Z11; Z12, Z13, Z14]
-> Z55 = Z4*Z6
```

-> Z56 = -Z2*Z8 - Z4*Z6*Z7

-> Z57 = -Z4*Z7 - Z2*Z6*Z8

-> Z58 = Z1*Z4*Z8

-> Z59 = Z1*Z4*Z7

-> Z60 = Z2*Z6*Z7 - Z4*Z8

-> Z61 = Z6*Z8

-> Z62 = Z6*Z7

-> Z63 = Z1*Z2*Z7

-> Z64 = Z2*Z6

-> Z65 = Z1*Z2*Z8

-> Z66 = Z6*Z55 + Z11*Z58 + Z14*Z59

-> Z67 = Z10*Z14 - Z11*Z56

-> Z68 = Z14*Z60 - Z3*Z6 - Z11*Z57

-> Z69 = Z1*Z3 + Z9*Z61 - Z12*Z62

-> Z70 = -Z9*Z14 - Z11*Z12

-> Z71 = Z5*Z64 + Z10*Z65 - Z13*Z63

-> Z72 = Z5^2 + Z10^2 + Z13^2

-> Z73 = Z9*Z13 + Z10*Z60

-> W_R1_N> = (Z66*U7+Z67*U6+Z68*U8)*R11> + (Z69*U7+Z70*U6)*R12> + (Z71*
U7+Z72*U8+Z73*U6)*R13>

p_C1_R1O>=-q1*c3>

-> P_C1_R1O> = -Q1*C3>

v_R1O_N>=dt(p_NO_R1O>,N)

-> Z74 = Z15 - Q1

-> Z75 = L12*Z11 + Z10*Z74

-> Z76 = -L12*Z6 - Z5*Z74

-> Z77 = Z13*Z74 - L12*Z14

-> Z78 = L11*Z6 - Z3*Z74

-> Z79 = -L11*Z11 - Z9*Z74

-> Z80 = L11*Z14 - Z12*Z74

-> V_R1O_N> = (Z75*U7+Z76*U6+Z77*U8)*C1> + (Z78*U6+Z79*U7+Z80*U8)*C2> + (
Z19*U6+Z20*U7+Z21*U8-U1)*C3> + U9*N1> - U5*N3>

a_R1O_N>=dt(v_R1O_N>,N)

-> Z81 = Z75*U7 + Z76*U6 + Z77*U8

-> Z82 = Z78*U6 + Z79*U7 + Z80*U8

-> Z83 = Z19*U6 + Z20*U7 + Z21*U8 - U1

```
-> Z84 = Z1*Z7*U6 - Z6*Z8*U7
-> Z85 = -Z2*Z8*U6 - Z4*Z7*U8 - Z1*Z4*Z8*U7 - Z2*Z6*Z8*U8 - Z4*Z6*Z7*U6
-> Z86 = L12*Z84 + Z74*Z85 - Z10*U1
-> Z87 = Z1*Z2*U8 - Z4*Z6*U7
-> Z88 = Z5*U1 - L12*Z1*U7 - Z74*Z87
-> Z89 = Z2*Z7*U6 + Z1*Z4*Z7*U7 + Z2*Z6*Z7*U8 - Z4*Z8*U8 - Z4*Z6*Z8*U6
-> Z90 = -Z1*Z8*U6 - Z6*Z7*U7
-> Z91 = Z74*Z89 - Z13*U1 - L12*Z90
-> Z92 = U6*Z88 + U7*Z86 + U8*Z91
-> Z93 = -Z1*Z4*U8 - Z2*Z6*U7
-> Z94 = Z3*U1 + L11*Z1*U7 - Z74*Z93
-> Z95 = Z2*Z7*U8 + Z1*Z2*Z8*U7 + Z2*Z6*Z7*U6 - Z4*Z8*U6 - Z4*Z6*Z8*U8
-> Z96 = Z9*U1 - L11*Z84 - Z74*Z95
-> Z97 = Z2*Z8*U8 + Z4*Z7*U6 + Z2*Z6*Z8*U6 + Z4*Z6*Z7*U8 - Z1*Z2*Z7*U7
-> Z98 = Z12*U1 + L11*Z90 - Z74*Z97
-> Z99 = U6*Z94 + U7*Z96 + U8*Z98
-> Z100 = L11*Z87 + L12*Z93
-> Z101 = L12*Z95 - L11*Z85
-> Z102 = L12*Z97 - L11*Z89
-> Z103 = U6*Z100 + U7*Z101 + U8*Z102
-> Z104 = Z92 + (Z11*U7-Z6*U6-Z14*U8)*Z82 - (Z5*U6-Z10*U7-Z13*U8)*Z83
-> Z105 = Z99 - (Z3*U6+Z9*U7+Z12*U8)*Z83 - (Z11*U7-Z6*U6-Z14*U8)*Z81
-> Z106 = Z103 + (Z3*U6+Z9*U7+Z12*U8)*Z82 + (Z5*U6-Z10*U7-Z13*U8)*Z81
-> A_R1O_N> = (Z75*U7'+Z76*U6'+Z77*U8'+Z104)*C1> + (Z78*U6'+Z79*U7'+Z80*
   U8'+Z105)*C2> + (Z19*U6'+Z20*U7'+Z21*U8'-U1'+Z106)*C3> + U9'*N1> - U5'
   *N3>

   dircos(C,R2,space123,0,0,0)
-> C_R2 = [1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1]

   angvel(N,R2)
-> N_R2 = [Z3, -Z5, Z6; Z9, Z10, -Z11; Z12, Z13, Z14]
-> Z107 = Z1*Z3
-> W_R2_N> = (Z14*Z89-Z6*Z87-Z11*Z85)*R21> + (Z107*U7+Z12*Z90-Z9*Z84)*R2
   2> + (Z10*Z95+Z13*Z97-Z5*Z93)*R23>

   p_C2_R2O>=-q2*c3>
-> P_C2_R2O> = -Q2*C3>
```

```
  v_R2O_N>=dt(p_NO_R2O>,N)
-> Z108 = Z16 - Q2
-> Z109 = Z10*Z108 - L22*Z11
-> Z110 = L22*Z6 - Z5*Z108
-> Z111 = L22*Z14 + Z13*Z108
-> Z112 = L21*Z6 - Z3*Z108
-> Z113 = -L21*Z11 - Z9*Z108
-> Z114 = L21*Z14 - Z12*Z108
-> V_R2O_N> = (Z109*U7+Z110*U6+Z111*U8)*C1> + (Z112*U6+Z113*U7+Z114*U8)*
  C2> + (Z28*U6+Z29*U7+Z30*U8-U2)*C3> + U9*N1> - U5*N3>

  a_R2O_N>=dt(v_R2O_N>,N)
-> Z115 = Z109*U7 + Z110*U6 + Z111*U8
-> Z116 = Z112*U6 + Z113*U7 + Z114*U8
-> Z117 = Z28*U6 + Z29*U7 + Z30*U8 - U2
-> Z118 = Z108*Z85 - Z10*U2 - L22*Z84
-> Z119 = Z5*U2 + L22*Z1*U7 - Z108*Z87
-> Z120 = L22*Z90 + Z108*Z89 - Z13*U2
-> Z121 = U6*Z119 + U7*Z118 + U8*Z120
-> Z122 = Z3*U2 + L21*Z1*U7 - Z108*Z93
-> Z123 = Z9*U2 - L21*Z84 - Z108*Z95
-> Z124 = Z12*U2 + L21*Z90 - Z108*Z97
-> Z125 = U6*Z122 + U7*Z123 + U8*Z124
-> Z126 = L21*Z87 - L22*Z93
-> Z127 = -L21*Z85 - L22*Z95
-> Z128 = -L21*Z89 - L22*Z97
-> Z129 = U6*Z126 + U7*Z127 + U8*Z128
-> Z130 = Z121 + (Z11*U7-Z6*U6-Z14*U8)*Z116 - (Z5*U6-Z10*U7-Z13*U8)*Z117
-> Z131 = Z125 - (Z3*U6+Z9*U7+Z12*U8)*Z117 - (Z11*U7-Z6*U6-Z14*U8)*Z115
-> Z132 = Z129 + (Z3*U6+Z9*U7+Z12*U8)*Z116 + (Z5*U6-Z10*U7-Z13*U8)*Z115
-> A_R2O_N> = (Z109*U7'+Z110*U6'+Z111*U8'+Z130)*C1> + (Z112*U6'+Z113*U7'+
  Z114*U8'+Z131)*C2> + (Z28*U6'+Z29*U7'+Z30*U8'-U2'+Z132)*C3> + U9'*N1>
  - U5'*N3>

  dircos(C,R3,space123,0,0,0)
-> C_R3 = [1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1]

  angvel(N,R3)
-> N_R3 = [Z3, -Z5, Z6; Z9, Z10, -Z11; Z12, Z13, Z14]
```

-> W_R3_N> = (Z14*Z89-Z6*Z87-Z11*Z85)*R31> + (Z107*U7+Z12*Z90-Z9*Z84)*R3
2> + (Z10*Z95+Z13*Z97-Z5*Z93)*R33>

p_C3_R3O>=-q3*c3>
-> P_C3_R3O> = -Q3*C3>

v_R3O_N>=dt(p_NO_R3O>,N)
-> Z133 = Z17 - Q3
-> Z134 = Z10*Z133 - L32*Z11
-> Z135 = L32*Z6 - Z5*Z133
-> Z136 = L32*Z14 + Z13*Z133
-> Z137 = L31*Z11 - Z9*Z133
-> Z138 = -L31*Z6 - Z3*Z133
-> Z139 = -L31*Z14 - Z12*Z133
-> V_R3O_N> = (Z134*U7+Z135*U6+Z136*U8)*C1> + (Z137*U7+Z138*U6+Z139*U8)*
C2> + (-U3+Z39*U6+Z37*U7+Z38*U8)*C3> + U9*N1> - U5*N3>

a_R3O_N>=dt(v_R3O_N>,N)
-> Z140 = Z134*U7 + Z135*U6 + Z136*U8
-> Z141 = Z137*U7 + Z138*U6 + Z139*U8
-> Z142 = Z37*U7 + Z38*U8 + Z39*U6 - U3
-> Z143 = Z133*Z85 - Z10*U3 - L32*Z84
-> Z144 = Z5*U3 + L32*Z1*U7 - Z133*Z87
-> Z145 = L32*Z90 + Z133*Z89 - Z13*U3
-> Z146 = U6*Z144 + U7*Z143 + U8*Z145
-> Z147 = Z9*U3 + L31*Z84 - Z133*Z95
-> Z148 = Z3*U3 - L31*Z1*U7 - Z133*Z93
-> Z149 = Z12*U3 - L31*Z90 - Z133*Z97
-> Z150 = U6*Z148 + U7*Z147 + U8*Z149
-> Z151 = L31*Z85 - L32*Z95
-> Z152 = L31*Z89 - L32*Z97
-> Z153 = -L31*Z87 - L32*Z93
-> Z154 = U6*Z153 + U7*Z151 + U8*Z152
-> Z155 = Z146 + (Z11*U7-Z6*U6-Z14*U8)*Z141 - (Z5*U6-Z10*U7-Z13*U8)*Z142
-> Z156 = Z150 - (Z3*U6+Z9*U7+Z12*U8)*Z142 - (Z11*U7-Z6*U6-Z14*U8)*Z140
-> Z157 = Z154 + (Z3*U6+Z9*U7+Z12*U8)*Z141 + (Z5*U6-Z10*U7-Z13*U8)*Z140
-> A_R3O_N> = (Z134*U7'+Z135*U6'+Z136*U8'+Z155)*C1> + (Z137*U7'+Z138*U6'+
Z139*U8'+Z156)*C2> + (Z37*U7'+Z38*U8'+Z39*U6'-U3'+Z157)*C3> + U9'*N1>
- U5'*N3>

```
  dircos(C,R4,space123,0,0,0)
-> C_R4 = [1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1]

  angvel(N,R4)
-> N_R4 = [Z3, -Z5, Z6; Z9, Z10, -Z11; Z12, Z13, Z14]
-> W_R4_N> = (Z14*Z89-Z6*Z87-Z11*Z85)*R41> + (Z107*U7+Z12*Z90-Z9*Z84)*R4
  2> + (Z10*Z95+Z13*Z97-Z5*Z93)*R43>

  p_C4_R4O>=-q4*c3>
-> P_C4_R4O> = -Q4*C3>

  v_R4O_N>=dt(p_NO_R4O>,N)
-> Z158 = Z18 - Q4
-> Z159 = L42*Z11 + Z10*Z158
-> Z160 = -L42*Z6 - Z5*Z158
-> Z161 = Z13*Z158 - L42*Z14
-> Z162 = L41*Z11 - Z9*Z158
-> Z163 = -L41*Z6 - Z3*Z158
-> Z164 = -L41*Z14 - Z12*Z158
-> V_R4O_N> = (Z159*U7+Z160*U6+Z161*U8)*C1> + (Z162*U7+Z163*U6+Z164*U8)*
  C2> + (Z48*U6+Z46*U7+Z47*U8-U4)*C3> + U9*N1> - U5*N3>

  a_R4O_N>=dt(v_R4O_N>,N)
-> Z165 = Z159*U7 + Z160*U6 + Z161*U8
-> Z166 = Z162*U7 + Z163*U6 + Z164*U8
-> Z167 = Z46*U7 + Z47*U8 + Z48*U6 - U4
-> Z168 = L42*Z84 + Z158*Z85 - Z10*U4
-> Z169 = Z5*U4 - L42*Z1*U7 - Z158*Z87
-> Z170 = Z158*Z89 - Z13*U4 - L42*Z90
-> Z171 = U6*Z169 + U7*Z168 + U8*Z170
-> Z172 = Z9*U4 + L41*Z84 - Z158*Z95
-> Z173 = Z3*U4 - L41*Z1*U7 - Z158*Z93
-> Z174 = Z12*U4 - L41*Z90 - Z158*Z97
-> Z175 = U6*Z173 + U7*Z172 + U8*Z174
-> Z176 = L41*Z85 + L42*Z95
-> Z177 = L41*Z89 + L42*Z97
-> Z178 = L42*Z93 - L41*Z87
-> Z179 = U6*Z178 + U7*Z176 + U8*Z177
```

```
-> Z180 = Z171 + (Z11*U7-Z6*U6-Z14*U8)*Z166 - (Z5*U6-Z10*U7-Z13*U8)*Z167
-> Z181 = Z175 - (Z3*U6+Z9*U7+Z12*U8)*Z167 - (Z11*U7-Z6*U6-Z14*U8)*Z165
-> Z182 = Z179 + (Z3*U6+Z9*U7+Z12*U8)*Z166 + (Z5*U6-Z10*U7-Z13*U8)*Z165
-> A_R4O_N> = (Z159*U7'+Z160*U6'+Z161*U8'+Z180)*C1> + (Z162*U7'+Z163*U6'+
   Z164*U8'+Z181)*C2> + (Z46*U7'+Z47*U8'+Z48*U6'-U4'+Z182)*C3> + U9'*N1>
   - U5'*N3>

   % Restrições
   dependent[1]=u8
-> DEPENDENT[1] = U8

   dependent[2]=v-u9
-> DEPENDENT[2] = V - U9

   constrain(dependent[u8,u9])
-> U8 = 0
-> U9 = V
-> U8' = 0
-> U9' = 0

   % Massas e inércias
   mass C=MC,R1=MR,R2=MR,R3=MR,R4=MR
   inertia C,IC1,IC2,IC3
-> I_C_CO>> = IC1*C1>*C1> + IC2*C2>*C2> + IC3*C3>*C3>

   inertia R1,0,0,0
-> I_R1_R1O>> = 0>*0>

   inertia R2,0,0,0
-> I_R2_R2O>> = 0>*0>

   inertia R3,0,0,0
-> I_R3_R3O>> = 0>*0>

   inertia R4,0,0,0
-> I_R4_R4O>> = 0>*0>
```

% Forças dinâmicas dos pneus

force_R1O>=-k_pneu*(dot(p_NO_R1O>+(L13+LS1)*c3>,n3>)-funcao1)*n3>-
c_pneu*(dot(v_R1O_N>,n3>))*n3>
-> Z183 = L13 + LS1 + Z15
-> Z184 = K_PNEU*(FUNCAO1+Q5-L11*Z12-L12*Z13-(Z183-Q1)*Z14) - C_PNEU*(Z12
*(Z75*U7+Z76*U6)+Z13*(Z78*U6+Z79*U7)-U5-Z14*(U1-Z19*U6-Z20*U7))

-> FORCE_R1O> = Z184*N3>

force_R2O>=-k_pneu*(dot(p_NO_R2O>+(L23+LS2)*c3>,n3>)-funcao2)*n3>-
c_pneu*(dot(v_R2O_N>,n3>))*n3>
-> Z185 = L23 + LS2 + Z16
-> Z186 = K_PNEU*(FUNCAO2+Q5+L22*Z13-L21*Z12-(Z185-Q2)*Z14) - C_PNEU*(Z12
*(Z109*U7+Z110*U6)+Z13*(Z112*U6+Z113*U7)-U5-Z14*(U2-Z28*U6-Z29*U7))

-> FORCE_R2O> = Z186*N3>

force_R3O>=-k_pneu*(dot(p_NO_R3O>+(L33+LS3)*c3>,n3>)-funcao3)*n3>-
c_pneu*(dot(v_R3O_N>,n3>))*n3>
-> Z187 = L33 + LS3 + Z17
-> Z188 = K_PNEU*(FUNCAO3+Q5+L31*Z12+L32*Z13-(Z187-Q3)*Z14) - C_PNEU*(Z12
*(Z134*U7+Z135*U6)+Z13*(Z137*U7+Z138*U6)-U5-Z14*(U3-Z37*U7-Z39*U6))

-> FORCE_R3O> = Z188*N3>

force_R4O>=-k_pneu*(dot(p_NO_R4O>+(L43+LS4)*c3>,n3>)-funcao4)*n3>-
c_pneu*(dot(v_R4O_N>,n3>))*n3>
-> Z189 = L43 + LS4 + Z18
-> Z190 = K_PNEU*(FUNCAO4+Q5+L41*Z12-L42*Z13-(Z189-Q4)*Z14) - C_PNEU*(Z12
*(Z159*U7+Z160*U6)+Z13*(Z162*U7+Z163*U6)-U5-Z14*(U4-Z46*U7-Z48*U6))

-> FORCE_R4O> = Z190*N3>

% Forças dinâmicas entre as rodas e a carroceria

force(C1/R1O,(k_diant*q1+c_diant*u1)*c3>)
-> Z191 = K_DIANT*Q1 + C_DIANT*U1
-> FORCE_R1O> = Z191*C3> + Z184*N3>
-> FORCE_C1> = -Z191*C3>

```
  force(C2/R2O,(k_diant*q2+c_diant*u2)*c3>)
-> Z192 = K_DIANT*Q2 + C_DIANT*U2
-> FORCE_R2O> = Z192*C3> + Z186*N3>
-> FORCE_C2> = -Z192*C3>

  force(C3/R3O,(k_tras*q3+c_tras*u3)*c3>)
-> Z193 = K_TRAS*Q3 + C_TRAS*U3
-> FORCE_R3O> = Z193*C3> + Z188*N3>
-> FORCE_C3> = -Z193*C3>

  force(C4/R4O,(k_tras*q4+c_tras*u4)*c3>)
-> Z194 = K_TRAS*Q4 + C_TRAS*U4
-> FORCE_R4O> = Z194*C3> + Z190*N3>
-> FORCE_C4> = -Z194*C3>
```

% Forças dinâmicas nas rodas

```
  explicit(force_R1O>)
-> FORCE_R1O> = (K_DIANT*Q1+C_DIANT*U1)*C3> + (K_PNEU*(FUNCAO1+Q5+Q1*COS(
  Q6)*COS(Q7)-L12*(SIN(Q6)*COS(Q8)+SIN(Q7)*SIN(Q8)*COS(Q6))-L11*(SIN(Q6)
  *SIN(Q8)-SIN(Q7)*COS(Q6)*COS(Q8)))-C_PNEU*((SIN(Q6)*COS(Q8)+SIN(Q7)*
  SIN(Q8)*COS(Q6))*((L11*SIN(Q7)+COS(Q7)*COS(Q8)*(L13+LS1+Q1))*U6-(L11*
  SIN(Q6)*COS(Q7)-(L13+LS1+Q1)*(SIN(Q8)*COS(Q6)+SIN(Q6)*SIN(Q7)*COS(Q8))
  )*U7)-U5-COS(Q6)*COS(Q7)*(U1-COS(Q7)*(L11*SIN(Q8)+L12*COS(Q8))*U6-(L12
  *(SIN(Q8)*COS(Q6)+SIN(Q6)*SIN(Q7)*COS(Q8))-L11*(COS(Q6)*COS(Q8)-SIN(
  Q6)*SIN(Q7)*SIN(Q8)))*U7)-(SIN(Q6)*SIN(Q8)-SIN(Q7)*COS(Q6)*COS(Q8))*((
  L12*SIN(Q7)-SIN(Q8)*COS(Q7)*(L13+LS1+Q1))*U6-(L12*SIN(Q6)*COS(Q7)-(L13
  +LS1+Q1)*(COS(Q6)*COS(Q8)-SIN(Q6)*SIN(Q7)*SIN(Q8)))*U7)))*N3>

  explicit(force_R2O>)
-> FORCE_R2O> = (K_DIANT*Q2+C_DIANT*U2)*C3> + (K_PNEU*(FUNCAO2+Q5+Q2*COS(
  Q6)*COS(Q7)+L22*(SIN(Q6)*COS(Q8)+SIN(Q7)*SIN(Q8)*COS(Q6))-L21*(SIN(Q6)
  *SIN(Q8)-SIN(Q7)*COS(Q6)*COS(Q8)))+C_PNEU*(U5-COS(Q6)*COS(Q7)*(COS(Q7)
  *(L21*SIN(Q8)-L22*COS(Q8))*U6-U2-(L22*(SIN(Q8)*COS(Q6)+SIN(Q6)*SIN(Q7)
  *COS(Q8))+L21*(COS(Q6)*COS(Q8)-SIN(Q6)*SIN(Q7)*SIN(Q8)))*U7)-(SIN(Q6)*
  COS(Q8)+SIN(Q7)*SIN(Q8)*COS(Q6))*((L21*SIN(Q7)+COS(Q7)*COS(Q8)*(L23+
  LS2+Q2))*U6-(L21*SIN(Q6)*COS(Q7)-(L23+LS2+Q2)*(SIN(Q8)*COS(Q6)+SIN(Q6)
  *SIN(Q7)*COS(Q8)))*U7)-(SIN(Q6)*SIN(Q8)-SIN(Q7)*COS(Q6)*COS(Q8))*((L22
  *SIN(Q7)+SIN(Q8)*COS(Q7)*(L23+LS2+Q2))*U6-(L22*SIN(Q6)*COS(Q7)+(L23+
  LS2+Q2)*(COS(Q6)*COS(Q8)-SIN(Q6)*SIN(Q7)*SIN(Q8)))*U7)))*N3>
```

```
  explicit(force_R3O>)
-> FORCE_R3O> = (K_TRAS*Q3+C_TRAS*U3)*C3> + (K_PNEU*(FUNCAO3+Q5+Q3*COS(
  Q6)*COS(Q7)+L32*(SIN(Q6)*COS(Q8)+SIN(Q7)*SIN(Q8)*COS(Q6))+L31*(SIN(Q6)
  *SIN(Q8)-SIN(Q7)*COS(Q6)*COS(Q8)))+C_PNEU*(U5+COS(Q6)*COS(Q7)*(U3+COS(
  Q7)*(L31*SIN(Q8)+L32*COS(Q8))*U6+(L32*(SIN(Q8)*COS(Q6)+SIN(Q6)*SIN(Q7)
  *COS(Q8))-L31*(COS(Q6)*COS(Q8)-SIN(Q6)*SIN(Q7)*SIN(Q8)))*U7)+(SIN(Q6)*
  COS(Q8)+SIN(Q7)*SIN(Q8)*COS(Q6))*((L31*SIN(Q7)-COS(Q7)*COS(Q8)*(L33+
  LS3+Q3))*U6-(L31*SIN(Q6)*COS(Q7)+(L33+LS3+Q3)*(SIN(Q8)*COS(Q6)+SIN(Q6)
  *SIN(Q7)*COS(Q8)))*U7)-(SIN(Q6)*SIN(Q8)-SIN(Q7)*COS(Q6)*COS(Q8))*((L32
  *SIN(Q7)+SIN(Q8)*COS(Q7)*(L33+LS3+Q3))*U6-(L32*SIN(Q6)*COS(Q7)+(L33+
  LS3+Q3)*(COS(Q6)*COS(Q8)-SIN(Q6)*SIN(Q7)*SIN(Q8)))*U7)))*N3>

  explicit(force_R4O>)
-> FORCE_R4O> = (K_TRAS*Q4+C_TRAS*U4)*C3> + (C_PNEU*(U5+COS(Q6)*COS(Q7)*(
  U4+COS(Q7)*(L41*SIN(Q8)-L42*COS(Q8))*U6-(L42*(SIN(Q8)*COS(Q6)+SIN(Q6)*
  SIN(Q7)*COS(Q8))+L41*(COS(Q6)*COS(Q8)-SIN(Q6)*SIN(Q7)*SIN(Q8)))*U7)+(
  SIN(Q6)*COS(Q8)+SIN(Q7)*SIN(Q8)*COS(Q6))*((L41*SIN(Q7)-COS(Q7)*COS(Q8)
  *(L43+LS4+Q4))*U6-(L41*SIN(Q6)*COS(Q7)+(L43+LS4+Q4)*(SIN(Q8)*COS(Q6)+
  SIN(Q6)*SIN(Q7)*COS(Q8)))*U7)+(SIN(Q6)*SIN(Q8)-SIN(Q7)*COS(Q6)*COS(Q8)
  )*((L42*SIN(Q7)-SIN(Q8)*COS(Q7)*(L43+LS4+Q4))*U6-(L42*SIN(Q6)*COS(Q7)-
  (L43+LS4+Q4)*(COS(Q6)*COS(Q8)-SIN(Q6)*SIN(Q7)*SIN(Q8)))*U7))-K_PNEU*(
  L42*(SIN(Q6)*COS(Q8)+SIN(Q7)*SIN(Q8)*COS(Q6))-FUNCAO4-Q5-Q4*COS(Q6)*
  COS(Q7)-L41*(SIN(Q6)*SIN(Q8)-SIN(Q7)*COS(Q6)*COS(Q8))))*N3>

  % Posição vertical das rodas e da carroceria em relação ao referencial inercial
  q1N=dot(p_NO_R1O>+(L13+LS1)*c3>,n3>)
-> Q1N = L11*Z12 + L12*Z13 + (L13+LS1+Z15-Q1)*Z14 - Q5

  q2N=dot(p_NO_R2O>+(L23+LS2)*c3>,n3>)
-> Q2N = L21*Z12 + (L23+LS2+Z16-Q2)*Z14 - Q5 - L22*Z13

  q3N=dot(p_NO_R3O>+(L33+LS3)*c3>,n3>)
-> Q3N = (L33+LS3+Z17-Q3)*Z14 - Q5 - L31*Z12 - L32*Z13

  q4N=dot(p_NO_R4O>+(L43+LS4)*c3>,n3>)
-> Q4N = L42*Z13 + (L43+LS4+Z18-Q4)*Z14 - Q5 - L41*Z12

  q5N=-q5
```

```
-> Q5N = -Q5

   % Forças totais na suspensão
   FS1=dot(force_C1>+MC1*g*n3>,c3>)
-> FS1 = G*MC1*Z14 - Z191

   FS2=dot(force_C2>+MC2*g*n3>,c3>)
-> FS2 = G*MC2*Z14 - Z192

   FS3=dot(force_C3>+MC3*g*n3>,c3>)
-> FS3 = G*MC3*Z14 - Z193

   FS4=dot(force_C4>+MC4*g*n3>,c3>)
-> FS4 = G*MC4*Z14 - Z194

   % Forças totais nos pneus
   FP1=(MC1+MR)*g-k_pneu*(dot(p_NO_R1O>+(L13+LS1)*c3>,n3>)-funcao1)-
c_pneu*(dot(v_R1O_N>,n3>))
-> FP1 = G*(MC1+MR) + K_PNEU*(FUNCAO1+Q5-L11*Z12-L12*Z13-(L13+LS1+Z15-Q1)
   *Z14) - C_PNEU*(Z12*(Z75*U7+Z76*U6)+Z13*(Z78*U6+Z79*U7)-U5-Z14*(U1-Z19
   *U6-Z20*U7))

   FP2=(MC2+MR)*g-k_pneu*(dot(p_NO_R2O>+(L23+LS2)*c3>,n3>)-funcao2)-
c_pneu*(dot(v_R2O_N>,n3>))
-> FP2 = G*(MC2+MR) + K_PNEU*(FUNCAO2+Q5+L22*Z13-L21*Z12-(L23+LS2+Z16-Q2)
   *Z14) - C_PNEU*(Z12*(Z109*U7+Z110*U6)+Z13*(Z112*U6+Z113*U7)-U5-Z14*(
   U2-Z28*U6-Z29*U7))

   FP3=(MC3+MR)*g-k_pneu*(dot(p_NO_R3O>+(L33+LS3)*c3>,n3>)-funcao3)-
c_pneu*(dot(v_R3O_N>,n3>))
-> FP3 = G*(MC3+MR) + K_PNEU*(FUNCAO3+Q5+L31*Z12+L32*Z13-(L33+LS3+Z17-Q3)
   *Z14) - C_PNEU*(Z12*(Z134*U7+Z135*U6)+Z13*(Z137*U7+Z138*U6)-U5-Z14*(
   U3-Z37*U7-Z39*U6))

   FP4=(MC4+MR)*g-k_pneu*(dot(p_NO_R4O>+(L43+LS4)*c3>,n3>)-funcao4)-
c_pneu*(dot(v_R4O_N>,n3>))
-> FP4 = G*(MC4+MR) + K_PNEU*(FUNCAO4+Q5+L41*Z12-L42*Z13-(L43+LS4+Z18-Q4)
   *Z14) - C_PNEU*(Z12*(Z159*U7+Z160*U6)+Z13*(Z162*U7+Z163*U6)-U5-Z14*(
   U4-Z46*U7-Z48*U6))
```

```
   % Equações dinâmicas
   zero=FR()+FRSTAR()
-> Z195 = L13 + LS1
-> Z196 = K_PNEU*(FUNCAO1+Q5+Q1*Z1*Z7-L12*(Z2*Z8+Z4*Z6*Z7)-L11*(Z4*Z8-Z2*
   Z6*Z7)) - C_PNEU*((Z2*Z8+Z4*Z6*Z7)*((L11*Z6+(Z195+Q1)*Z1*Z2)*U6-(L11*
   Z1*Z8-(Z195+Q1)*(Z4*Z7+Z2*Z6*Z8))*U7)-U5-Z1*Z7*(U1-Z1*(L11*Z4+L12*Z2)*
   U6-(L12*(Z4*Z7+Z2*Z6*Z8)-L11*(Z2*Z7-Z4*Z6*Z8))*U7)-(Z4*Z8-Z2*Z6*Z7)*((
   L12*Z6-(Z195+Q1)*Z1*Z4)*U6-(L12*Z1*Z8-(Z195+Q1)*(Z2*Z7-Z4*Z6*Z8))*U7))

-> Z197 = L23 + LS2
-> Z198 = K_PNEU*(FUNCAO2+Q5+Q2*Z1*Z7+L22*(Z2*Z8+Z4*Z6*Z7)-L21*(Z4*Z8-Z2*
   Z6*Z7)) + C_PNEU*(U5-Z1*Z7*(Z1*(L21*Z4-L22*Z2)*U6-U2-(L22*(Z4*Z7+Z2*
   Z6*Z8)+L21*(Z2*Z7-Z4*Z6*Z8))*U7)-(Z2*Z8+Z4*Z6*Z7)*((L21*Z6+(Z197+Q2)*
   Z1*Z2)*U6-(L21*Z1*Z8-(Z197+Q2)*(Z4*Z7+Z2*Z6*Z8))*U7)-(Z4*Z8-Z2*Z6*Z7)*
   ((L22*Z6+(Z197+Q2)*Z1*Z4)*U6-(L22*Z1*Z8+(Z197+Q2)*(Z2*Z7-Z4*Z6*Z8))*
   U7))

-> Z199 = L33 + LS3
-> Z200 = K_PNEU*(FUNCAO3+Q5+Q3*Z1*Z7+L32*(Z2*Z8+Z4*Z6*Z7)+L31*(Z4*Z8-Z2*
   Z6*Z7)) + C_PNEU*(U5+Z1*Z7*(U3+Z1*(L31*Z4+L32*Z2)*U6+(L32*(Z4*Z7+Z2*
   Z6*Z8)-L31*(Z2*Z7-Z4*Z6*Z8))*U7)+(Z2*Z8+Z4*Z6*Z7)*((L31*Z6-(Z199+Q3)*
   Z1*Z2)*U6-(L31*Z1*Z8+(Z199+Q3)*(Z4*Z7+Z2*Z6*Z8))*U7)-(Z4*Z8-Z2*Z6*Z7)*
   ((L32*Z6+(Z199+Q3)*Z1*Z4)*U6-(L32*Z1*Z8+(Z199+Q3)*(Z2*Z7-Z4*Z6*Z8))*
   U7))

-> Z201 = L43 + LS4
-> Z202 = C_PNEU*(U5+Z1*Z7*(U4+Z1*(L41*Z4-L42*Z2)*U6-(L42*(Z4*Z7+Z2*Z6*
   Z8)+L41*(Z2*Z7-Z4*Z6*Z8))*U7)+(Z2*Z8+Z4*Z6*Z7)*((L41*Z6-(Z201+Q4)*Z1*
   Z2)*U6-(L41*Z1*Z8+(Z201+Q4)*(Z4*Z7+Z2*Z6*Z8))*U7)+(Z4*Z8-Z2*Z6*Z7)*((
   L42*Z6-(Z201+Q4)*Z1*Z4)*U6-(L42*Z1*Z8-(Z201+Q4)*(Z2*Z7-Z4*Z6*Z8))*U7))
   - K_PNEU*(L42*(Z2*Z8+Z4*Z6*Z7)-FUNCAO4-Q5-Q4*Z1*Z7-L41*(Z4*Z8-Z2*Z6*
   Z7))

-> Z203 = -Z191 - Z14*Z196
-> Z204 = -Z192 - Z14*Z198
-> Z205 = -Z193 - Z14*Z200
-> Z206 = -Z194 - Z14*Z202
-> Z207 = -Z196 - Z198 - Z200 - Z202
```

-> Z208 = Z12*Z76*Z196 + Z12*Z110*Z198 + Z12*Z135*Z200 + Z12*Z160*Z202 +
Z13*Z78*Z196 + Z13*Z112*Z198 + Z13*Z138*Z200 + Z13*Z163*Z202 + Z14*Z19
*Z196 + Z14*Z28*Z198 + Z14*Z39*Z200 + Z14*Z48*Z202

-> Z209 = Z12*Z75*Z196 + Z12*Z109*Z198 + Z12*Z134*Z200 + Z12*Z159*Z202 +
Z13*Z79*Z196 + Z13*Z113*Z198 + Z13*Z137*Z200 + Z13*Z162*Z202 + Z14*Z20
*Z196 + Z14*Z29*Z198 + Z14*Z37*Z200 + Z14*Z46*Z202

-> Z210 = Z3*U6 + Z9*U7
-> Z211 = Z10*U7 - Z5*U6
-> Z212 = Z6*U6 - Z11*U7
-> Z213 = IC1*Z210
-> Z214 = IC2*Z211
-> Z215 = IC3*Z212
-> Z216 = IC1*Z3
-> Z217 = IC1*Z9
-> Z218 = IC2*Z10
-> Z219 = IC2*Z5
-> Z220 = IC3*Z6
-> Z221 = IC3*Z11
-> Z222 = Z210*Z214 - Z211*Z213
-> Z223 = Z212*Z213 - Z210*Z215
-> Z224 = Z211*Z215 - Z212*Z214
-> Z225 = MR*Z14
-> Z226 = MR*Z19
-> Z227 = MR*Z20
-> Z228 = MR*Z106
-> Z229 = MR*Z28
-> Z230 = MR*Z29
-> Z231 = MR*Z132
-> Z232 = MR*Z37
-> Z233 = MR*Z39
-> Z234 = MR*Z157
-> Z235 = MR*Z46
-> Z236 = MR*Z48
-> Z237 = MR*Z182
-> Z238 = MC + 4*MR
-> Z239 = MR*(Z12*Z76+Z12*Z110+Z12*Z135+Z12*Z160+Z13*Z78+Z13*Z112+Z13*Z1
38+Z13*Z163+Z14*Z19+Z14*Z28+Z14*Z39+Z14*Z48)

-> Z240 = MR*(Z12*Z75+Z12*Z109+Z12*Z134+Z12*Z159+Z13*Z79+Z13*Z113+Z13*Z1
37+Z13*Z162+Z14*Z20+Z14*Z29+Z14*Z37+Z14*Z46)

-> Z241 = MR*(Z12*Z104+Z12*Z130+Z12*Z155+Z12*Z180+Z13*Z105+Z13*Z131+Z13*
Z156+Z13*Z181+Z14*Z106+Z14*Z132+Z14*Z157+Z14*Z182)

-> Z242 = Z3*Z216 + Z5*Z219 + Z6*Z220 + MR*(Z19^2+Z76^2+Z78^2) + MR*(Z28^
2+Z110^2+Z112^2) + MR*(Z39^2+Z135^2+Z138^2) + MR*(Z48^2+Z160^2+Z163^2)

-> Z243 = Z3*Z217 + MR*(Z19*Z20+Z75*Z76+Z78*Z79) + MR*(Z28*Z29+Z109*Z110+
Z112*Z113) + MR*(Z37*Z39+Z134*Z135+Z137*Z138) + MR*(Z46*Z48+Z159*Z160+
Z162*Z163) - Z5*Z218 - Z6*Z221

-> Z244 = Z3*Z224 + Z6*Z222 + MR*(Z19*Z106+Z76*Z104+Z78*Z105) + MR*(Z28*
Z132+Z110*Z130+Z112*Z131) + MR*(Z39*Z157+Z135*Z155+Z138*Z156) + MR*(
Z48*Z182+Z160*Z180+Z163*Z181) - Z5*Z223

-> Z245 = Z9*Z216 + MR*(Z19*Z20+Z75*Z76+Z78*Z79) + MR*(Z28*Z29+Z109*Z110+
Z112*Z113) + MR*(Z37*Z39+Z134*Z135+Z137*Z138) + MR*(Z46*Z48+Z159*Z160+
Z162*Z163) - Z10*Z219 - Z11*Z220

-> Z246 = Z9*Z217 + Z10*Z218 + Z11*Z221 + MR*(Z20^2+Z75^2+Z79^2) + MR*(
Z29^2+Z109^2+Z113^2) + MR*(Z37^2+Z134^2+Z137^2) + MR*(Z46^2+Z159^2+Z1
62^2)

-> Z247 = Z9*Z224 + Z10*Z223 + MR*(Z20*Z106+Z75*Z104+Z79*Z105) + MR*(Z29*
Z132+Z109*Z130+Z113*Z131) + MR*(Z37*Z157+Z134*Z155+Z137*Z156) + MR*(
Z46*Z182+Z159*Z180+Z162*Z181) - Z11*Z222

-> ZERO[1] = Z203 + Z228 + Z226*U6' + Z227*U7' - MR*U1' - Z225*U5'
-> ZERO[2] = Z204 + Z231 + Z229*U6' + Z230*U7' - MR*U2' - Z225*U5'
-> ZERO[3] = Z205 + Z234 + Z232*U7' + Z233*U6' - MR*U3' - Z225*U5'
-> ZERO[4] = Z206 + Z237 + Z235*U7' + Z236*U6' - MR*U4' - Z225*U5'
-> ZERO[5] = Z207 + Z241 + Z239*U6' + Z240*U7' - Z238*U5' - Z225*U1' -
Z225*U2' - Z225*U3' - Z225*U4'
-> ZERO[6] = Z208 + Z226*U1' + Z229*U2' + Z233*U3' + Z236*U4' + Z239*U5'
- Z244 - Z242*U6' - Z243*U7'
-> ZERO[7] = Z209 + Z227*U1' + Z230*U2' + Z232*U3' + Z235*U4' + Z240*U5'

```
  - Z247 - Z245*U6' - Z246*U7'

  Kane()
-> Z248 = Z203 + Z228
-> ZERO[1] = Z248 + Z226*U6' + Z227*U7' - MR*U1' - Z225*U5'
-> Z249 = Z204 + Z231
-> ZERO[2] = Z249 + Z229*U6' + Z230*U7' - MR*U2' - Z225*U5'
-> Z250 = Z205 + Z234
-> ZERO[3] = Z250 + Z232*U7' + Z233*U6' - MR*U3' - Z225*U5'
-> Z251 = Z206 + Z237
-> ZERO[4] = Z251 + Z235*U7' + Z236*U6' - MR*U4' - Z225*U5'
-> Z252 = Z207 + Z241
-> ZERO[5] = Z252 + Z239*U6' + Z240*U7' - Z238*U5' - Z225*U1' - Z225*U2'
  - Z225*U3' - Z225*U4'
-> Z253 = Z208 - Z244
-> ZERO[6] = Z253 + Z226*U1' + Z229*U2' + Z233*U3' + Z236*U4' + Z239*U5'
  - Z242*U6' - Z243*U7'
-> Z254 = Z209 - Z247
-> ZERO[7] = Z254 + Z227*U1' + Z230*U2' + Z232*U3' + Z235*U4' + Z240*U5'
  - Z245*U6' - Z246*U7'

  % Perfil de pista
  funcao1=0
-> FUNCAO1 = 0

  funcao2=0
-> FUNCAO2 = 0

  funcao3=0
-> FUNCAO3 = 0

  funcao4=0
-> FUNCAO4 = 0

  % Entradas para a simulação
  input L11=1.535 m,L21=1.535 m,L31=0.725 m,L41=0.725 m,L12=0.515 m,L22=0.515
m,L32=0.515 m,L42=0.515 m,L13=0.265 m,L23=0.265 m,L33=0.265 m,L43=0.265 m,LS1=0.415
m,LS2=0.415 m,LS3=0.415 m,LS4=0.415 m
```

input MC=1340 kg,MC1=215 kg,MC2=215 kg,MC3=455 kg,MC4=455 kg,MR=130 kg,IC1=895 kg*m^2,IC2=3750 kg*m^2,IC3=3865 kg*m^2

input k_diant=38025 N/m,k_tras=28330 N/m,c_diant=3850 N*s/m,c_tras=3850 N*s/m,k_pneu=196250 N/m,c_pneu=50 N*s/m

input pi=3.1415927 rad,g=9.81 m/s^2,v=5 m/s

input q1=0 m,q2=0 m,q3=0 m,q4=0 m,q5=0 m,q6=0 rad,q7=0 rad,q8=0 rad,q9=0 m,u1=0 m/s,u2=0 m/s,u3=0 m/s,u4=0 m/s,u5=0 m/s,u6=0 rad/s,u7=0 rad/s

input tfinal=10 s,integstp=0.005 s

output t s,q1 m,q2 m,q3 m,q4 m,q5 m,q6 rad,q7 rad,q8 rad,q9 m,q1N m,q2N m,q3N m,q4N m,q5N m,FS1 N,FS2 N,FS3 N,FS4 N,FP1 N,FP2 N,FP3 N,FP4 N,funcao1 m,funcao2 m,funcao3 m,funcao4 m

% Gera código para Matlab

code dynamics() veiculo.m