

# OTIMIZAÇÃO AERODINÂMICA DE AEROFÓLIOS USANDO O MÉTODO ADJUNTO

**Bruno Galelli Chieregatti**

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo – Departamento de Engenharia Mecânica

[bruno.chieregatti@gmail.com](mailto:bruno.chieregatti@gmail.com)

**Resumo.** A dinâmica dos fluídos computacional assume o papel cada vez mais relevante no projeto aerodinâmico. Sua função é especialmente importante na fase de concepção de projeto, por permitir que se analisem configurações alternativas a custos relativamente baixos. Dentro destes novos recursos, o método adjunto é freqüentemente citado como a mais promissora referência na abordagem do problema, pois reduz significativamente o custo computacional no cálculo dos gradientes. O escopo desse trabalho é justamente a obtenção da equação do gradiente a partir da aplicação da teoria de controle e também a obtenção de uma parametrização do aerofólio adequada para se obter todos os termos que calcularão o gradiente.

**Palavras chave:** Otimização, Aerofólio, Adjunto, Aerodinâmica, Bernstein.

## 1. Introdução

Após os recentes desenvolvimentos do projeto inverso em métodos de otimização, abriram-se novas possibilidades dentro da indústria aeroespacial. A combinação desses novos recursos com o CFD (“Computational Fluid Dynamics”) causa um grande impacto no desenvolvimento de projetos, diminuindo o custo operacional dos mesmos.

A abordagem do método adjunto caracteriza-se pela busca dos extremos de funções pré-definidas que são conhecidas como medidas de mérito. As funções de mérito podem ser de diversas formas como integrais de sustentação e arrasto ou simplesmente uma comparação entre as distribuições de pressão de dois aerofólios, sendo esse último caso conhecido como o projeto inverso.

A teoria de controle de sistemas governados por equações diferenciais (LIONS [9]) proporciona os fundamentos conceituais e os formalismos necessários a essa atividade. O método proposto por JAMESON [6] faz uso desses recursos com dupla vantagem: A primeira se trata da imposição das equações da mecânica dos fluídos como restrições do problema variacional, o que sempre projetará a medida de mérito no universo de soluções realizáveis; já a segunda é consequência da primeira, pois as restrições permitem uma grande simplificação no cálculo do gradiente de sensibilidade, reduzindo o custo computacional.

No cálculo do gradiente, o objetivo é otimizar uma função (no caso, a função que descreve a geometria do aerofólio) que é parametrizada por variáveis de controle que são os parâmetros do projeto. A direção de busca e o cálculo do passo da geometria são obtidos a partir da relação entre a solução do escoamento feita por um “solver” e as variáveis adjuntas calculadas.

Para se chegar ao gradiente, o presente trabalho passará por essas etapas que gerarão os parâmetros de entrada necessários além da parametrização da geometria, escopo desse trabalho juntamente com o gradiente. Vale ressaltar que o solver e o cálculo das variáveis adjuntas não são o foco deste trabalho e são os resultados de uma tese de mestrado elaborada M.T.HAYASHI [10].

## 2. O loop de otimização

Evoluindo na pesquisa, foi elaborado um novo loop de projeto que possui a mesma estrutura do loop presente em CONSTANTINO[2] mas, no caso, a geometria será um aerofólio (sendo uma curva caracterizando o extradorso e a outra o intradorso) e o solver será de escoamento compressível bidimensional (Tese de mestrado em andamento). Acrescentando esse loop, haverá uma integração com um gerador de malhas que no caso será o software comercial GAMBIT®. A estrutura do loop e seus responsáveis estão apresentados na fig. 1:

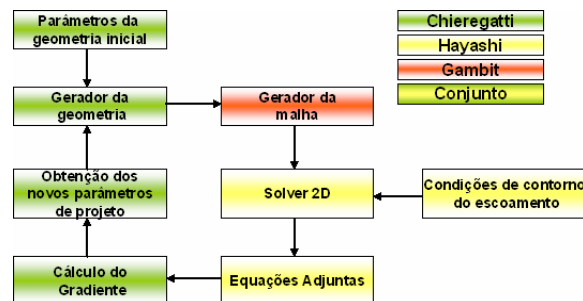
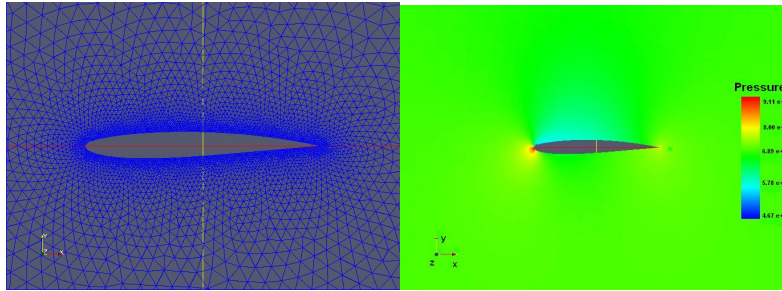


Figura 1. Estrutura do “loop” de otimização.

## 2.1. Gerador da malha e o solver

A geração da malha foi feita através de um script de geração automática do software GAMBIT® e está ligado ao código principal do loop. Após a geração de um arquivo texto com todos os pontos que compõe o aerofólio, o software produz a malha (fig. 2).

Seguindo no loop, passa-se para a resolução do escoamento através de um solver de escoamento bidimensional que foi elaborado pela tese de mestrado que está sendo elaborada em conjunto com este trabalho de graduação. A partir de um arquivo texto com as condições iniciais do escoamento, resolve-se o mesmo através de iterações, chegando a uma solução apresentada na fig. (3):



Figuras 2. Malha gerada no software GAMBIT®

Figuras 3. Visualização da Distribuição de pressão de um escoamento resolvido. (Perfil RAE2822).

## 3. Parametrização da geometria

A escolha da parametrização interfere diretamente na velocidade de resolução de todo o loop. Ela deve possuir equações simples e que também devem ter a vantagem de se obter facilmente todas as derivadas necessárias para o cálculo do gradiente (seção 5).

No trabalho de KULFAN [4], desenvolveu-se uma parametrização de fácil formulação que se utiliza dos polinômios de Bernstein que são multiplicados por coeficientes  $ak_i$  que serão as variáveis de controle do projeto. A curva  $\hat{y}(\hat{x})$  que descreve o extradorso e o intradorso de um perfil está caracterizada a seguir:

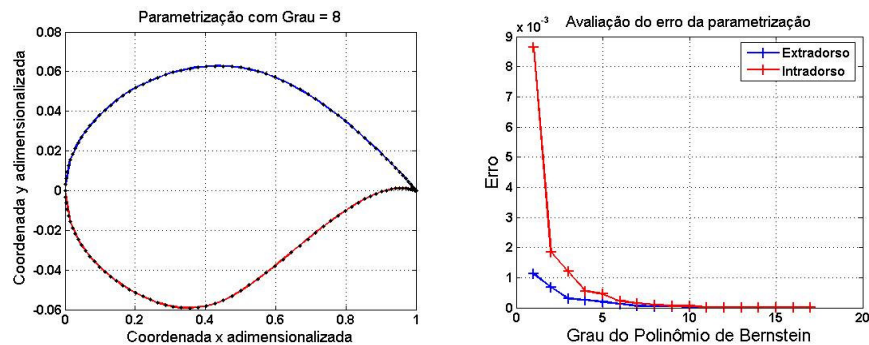
$$\hat{y}(\hat{x}) = C(\hat{x}) \cdot B(\hat{x}) + \hat{x} \cdot \Delta\hat{y} \quad (1)$$

Onde  $C(\hat{x})$  é a função de classe (eq.3) que possui a característica de acertar a curva dos polinômios de Bernstein (eq.2) com a geometria descrita;  $\Delta\hat{y}$  é a espessura do bordo de fuga e no presente trabalho, considera-se esse termo nulo:

$$B(\hat{x}) = \sum_{i=0}^n ak_i \binom{n}{i} (1-\hat{x})^{n-i} (\hat{x})^i \quad (2)$$

$$C(\hat{x}) = (\hat{x})^{0.5} (1-\hat{x})^{1.0} \quad (3)$$

Para validação da parametrização, desenvolveu-se um código presente no loop que interpola pelo método dos mínimos quadrados, os valores de  $ak_i$  correspondentes de cada aerofólio. Para se determinar o grau  $n$  dos polinômios, calculou-se o erro obtido da parametrização em função de cada grau, conforme apresentado abaixo:



Figuras 4. Representação da parametrização.

Figuras 5. Erro em função do grau dos polinômios.

Verificou-se que para graus maiores que 5 (cinco) a parametrização já representava adequadamente o aerofólio, mostrando claramente a vantagem dessa parametrização onde se utilizam poucos coeficientes para representar a curva e ao contrário das centenas de pontos.

#### 4. Aplicação da teoria de controle nas equações de Euler

Para a aplicação da teoria de controle nas equações de Euler, parte-se para a definição de uma medida de mérito  $I = I(Q, F)$  e com a introdução dos multiplicadores de Lagrange na sua variação  $\delta I$ , impõe-se a restrição das equações que regem o escoamento:

$$\delta I = \frac{\partial I^T}{\partial Q} \delta Q + \frac{\partial I^T}{\partial F} \delta F - \psi^T \left( \frac{\partial R}{\partial Q} \delta Q + \frac{\partial R}{\partial F} \delta F \right) \quad (4)$$

Rearranjando os termos:

$$\delta I = \left( \frac{\partial I^T}{\partial Q} - \psi^T \frac{\partial R}{\partial Q} \right) \delta Q + \left( \frac{\partial I^T}{\partial F} - \psi^T \frac{\partial R}{\partial F} \right) \delta F \quad (5)$$

A aplicação do método adjunto será justamente encontrar valores para os multiplicadores de Lagrange  $\psi$  que torne o termo multiplicado por  $\delta Q$  na equação (5) nulo. Com a parametrização descrita na seção 3, os parâmetros  $ak_i$ , que formam a curva F que descreve a geometria, se tornam os parâmetros de controle de projeto, de tal forma que esses valores serão ajustados de forma a minimizar (ou maximizar) o funcional. O foco do problema irá se concentrar então no cálculo de  $\frac{\partial I}{\partial ak}$ , que é o gradiente de sensibilidade.

Observa-se então que se houvesse a dependência do escoamento na resolução da otimização, haveria a necessidade de se calcular também o gradiente de sensibilidade  $\frac{\partial Q}{\partial ak}$  que custaria mais de uma resolução do escoamento. Para um eventual aumento do número de parâmetros, o custo computacional torna-se muito alto.

A partir das equações de Euler em coordenadas generalizadas:

$$I_C = \int_D \psi_\alpha \frac{\partial F_\alpha^k}{\partial \zeta^k} dV = 0 \quad (6)$$

E sua variação dada por:

$$\delta I_C = \int_D \psi_\alpha \frac{\partial (\delta F_\alpha^k)}{\partial \zeta^k} dV = \int_D \frac{1}{J} \left( J \psi_\alpha \frac{\partial (\delta F_\alpha^k)}{\partial \zeta^k} \right) dV \quad (7)$$

Finalizando a equação do gradiente, utilizando a forma geral da função de mérito e sua variação:

$$I = \int_C g(V) dS \quad (8)$$

$$\delta I = \int_C \frac{\partial g}{\partial Q} \delta Q \frac{dS}{d\zeta} d\zeta + \int_C g \delta \left( \frac{dS}{d\zeta} \right) d\zeta \quad (9)$$

$$\text{Define-se então a função objetivo aumentada } I_A = I + I_C \quad (10)$$

E assim, chegando a expressão geral do método adjunto por integração por partes:

$$\begin{aligned}
\delta I_A = & \int_c \left\{ \frac{\partial g}{\partial Q} \frac{dS}{d\zeta} - \left[ \psi_2 \left( J \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \psi_3 \left( J \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right] \frac{\partial p}{\partial Q} \right\} \delta Q d\zeta + \int_B \psi_\alpha C_{\alpha\beta}^{(2)} \delta Q d\zeta + \\
& - \int_D C_{\alpha\beta}^{(2)} \frac{\partial (J\psi_\alpha)}{\partial \zeta^k} \delta Q d\zeta d\eta + \int_c \left\{ g \delta \frac{dS}{d\zeta} - \left[ \psi_2 \delta \left( J \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \psi_3 \delta \left( J \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right] p \right\} d\zeta + \\
& \int_B \psi_\alpha \delta \left( J \frac{\partial \eta}{\partial x^{j'}} \right) F_\alpha^{j'} d\zeta - \int_D \delta \left( J \frac{\partial \zeta^k}{\partial x^{j'}} \right) F_\alpha^{j'} \frac{(J\psi_\alpha)}{\partial \zeta^k} d\zeta d\eta
\end{aligned} \tag{11}$$

Observam-se seis termos na equação (11). Os três primeiros são dependentes de  $\delta Q$  e portanto, devem ser zerados. O terceiro termo é a própria equação adjunta que, por definição, é igual a zero. Aplicando-se condições de contorno adequadas, zera-se o primeiro e o segundo termo, que são as equações resolvidas na parede (fólio) e no farfield.

Na equação do farfield, envolve-se o produto escalar entre as variáveis adjuntas e as variações do fluxo normais a fronteira do domínio do escoamento. Portanto, para se ter a anulação desse termo, as variáveis adjuntas deverão ser ortogonais a todas as variações de fluxo realizáveis, ou seja  $C_{\alpha\beta}^{(2)} \delta Q$ . Desta forma, as variáveis adjuntas  $\psi'$ s devem ser interpretadas como forças de restrição generalizadas que respeitam as equações de conservação de massa, quantidade de movimento e energia em todas as variações de fluxo ao longo da fronteira.

Da maneira como o problema variacional foi construído, a mesma interpretação das variáveis adjuntas poderia na realidade, ser empregada no domínio do escoamento. É importante ressaltar que  $\delta Q$  deve ser realizável, ou seja, deve resolver as equações de Euler, sendo assim, a única maneira de tornar nula a integral é obter  $\psi'$ s que solucionem as equações adjuntas.

A analogia que pode ser feita, é a de minimizar o trabalho virtual das forças generalizadas de vínculo  $\psi'$ s, assim assegurando que a trajetória do sistema no espaço de estado é sempre realizável.

Os outros três termos da equação (11) são os termos referentes ao cálculo do gradiente. Considerando que os três primeiros termos da equação serão nulos, obtém-se então com a variação da função objetivo da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\delta I_A = & \int_c \left\{ g \delta \frac{dS}{d\zeta} - \left[ \psi_2 \delta \left( J \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \psi_3 \delta \left( J \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right] p \right\} d\zeta \\
& + \int_B \psi_\alpha \delta \left( J \frac{\partial \eta}{\partial x^{j'}} \right) F_\alpha^{j'} d\zeta - \int_D \delta \left( J \frac{\partial \zeta^k}{\partial x^{j'}} \right) F_\alpha^{j'} \frac{(J\psi_\alpha)}{\partial \zeta^k} d\zeta d\eta
\end{aligned} \tag{12}$$

O segundo termo do gradiente (12) torna-se nulo, pois na região do farfield, tem-se que  $\delta \left( J \frac{\partial \eta}{\partial x^{j'}} \right) = 0$ , já que as mudanças mais significativas da malha ocorrem próximas ao aerofólio. Também observa-se que  $\frac{dS}{d\zeta} = 1$  na parede, e assim sua variação será nula. Logo, o gradiente reduz-se para:

$$\delta I_A = - \int_c \left\{ \left[ \psi_2 \delta \left( J \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \psi_3 \delta \left( J \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right] p \right\} d\zeta - \int_D \delta \left( J \frac{\partial \zeta^k}{\partial x^{j'}} \right) F_\alpha^{j'} \frac{(J\psi_\alpha)}{\partial \zeta^k} d\zeta d\eta \tag{13}$$

O próximo passo será uma manipulação matemática que irá mudar a integral do segundo termo que está em todo domínio apenas para uma integral na parede, ou seja, no aerofólio. A dedução matemática não está no escopo deste trabalho e estará apenas em anexo no trabalho final do segundo semestre. O resultado que a dedução produz é o seguinte:

$$\begin{aligned}
- \int_D \delta \left( J \frac{\partial \zeta^k}{\partial x^{j'}} \right) F_\alpha^{j'} \frac{(J\psi_\alpha)}{\partial \zeta^k} d\zeta d\eta = & - \int_B \psi_\alpha C_{\alpha\beta}^{(2)} \delta Q^* d\zeta + \int_D C_{\alpha\beta}^i \frac{\partial}{\partial \zeta^i} (J\psi_\alpha) \delta Q d\zeta d\eta + \\
& \int_c \psi_\alpha (\delta S_{j'}^2 F_\alpha^{j'} + C_{\alpha\beta}^{(2)} \delta Q) d\zeta
\end{aligned} \tag{14}$$

Os primeiros dois termos serão adicionados aos termos referentes ao farfield e a equação adjunta respectivamente para também serem zerados. O terceiro termo estará incluso no cálculo do gradiente formando assim sua equação:

$$\delta I_A = \int_C \psi_\alpha (\delta S_{j'}^2 F_\alpha^{j'} + C_{\alpha\beta}^{(2)} \delta Q) d\zeta - \int_C \left\{ \left[ \psi_2 \delta \left( J \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \psi_3 \delta \left( J \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right] p \right\} d\zeta \quad (15)$$

Expandindo o primeiro termo, onde:

$$S_{j'}^2 = J \frac{\partial \eta}{\partial x^{j'}} \quad (16)$$

$$\delta I_A = \frac{\partial I_A}{\partial a_k} \delta a_k \quad (17)$$

Obtém-se a equação fundamental do gradiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial a_k} = & \int_C \varphi_\alpha \left[ \frac{\partial}{\partial a k} \left( J \frac{\partial \zeta^2}{\partial x^{j'}} \right) F_\alpha^{j'} + C_{\alpha\beta}^2 \frac{\partial Q}{\partial \zeta^p} \left( \frac{\partial \zeta^p}{\partial a k} \right) \right] d\zeta^1 \\ & - \int_C p \left[ \varphi_2 \frac{\partial}{\partial a k} \left( J \frac{\partial \zeta^2}{\partial x^{1'}} \right) + \varphi_3 \frac{\partial}{\partial a k} \left( J \frac{\partial \zeta^2}{\partial x^{2'}} \right) \right] d\zeta^1 \end{aligned} \quad (18)$$

## 5. Cálculo do Gradiente

Expandindo todos os índices da equação (18), apresentam-se todos os termos pertinentes para o cálculo do gradiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial a k} = & \int_C \varphi_\alpha \left[ \frac{\partial}{\partial a k} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) F_\alpha^x + \frac{\partial}{\partial a k} \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) F_\alpha^y + C_{\alpha\beta}^2 \left( \frac{\partial Q}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial a k} \right) + \frac{\partial Q}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial a k} \right) \right] d\zeta + \\ & - \int_C p \left[ \varphi_2 \frac{\partial}{\partial a k} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \varphi_3 \frac{\partial}{\partial a k} \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right] d\zeta \end{aligned} \quad (19)$$

A tabela abaixo apresenta os termos que dependem exclusivamente da geometria do aerofólio e os que dependem da solução do escoamento e da solução adjunta:

Tabela 1. Variáveis dependentes exclusivamente da geometria e variáveis dependentes da solução do escoamento e da solução adjunta.

Exclusivamente geométricos	Dependentes do escoamento e da solução adjunta
$\frac{\partial}{\partial a k} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right), \frac{\partial}{\partial a k} \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right), \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial a k} \right), \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial a k} \right)$	$\varphi_\alpha, F_\alpha^x, F_\alpha^y, C_{\alpha\beta}^2, \frac{\partial Q}{\partial \zeta}, \frac{\partial Q}{\partial \eta}, p$

Para o cálculo de cada termo, apresentam-se todas as equações necessárias a seguir:

Inicia-se com as relações entre as coordenadas generalizadas e as cartesianas, além da derivada da curva do aerofólio em relação a x:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial x} &= -\text{sen } \theta & \text{tg } \theta &= \frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{x}} = C'(\hat{x})B(\hat{x}) + C(\hat{x})B'(\hat{x}) \\ \frac{\partial \eta}{\partial y} &= \text{cos } \theta & & \end{aligned} \quad (20,21)$$

As derivadas da função de classe e dos polinômios de Bernstein estão apresentadas abaixo:

$$C'(\hat{x}) = 0.5(\hat{x})^{-0.5}(1 - \hat{x})^{1.0} - 1.0(\hat{x})^{0.5} \quad (22)$$

$$B'(\hat{x}) = \sum_{i=0}^n a k_i \binom{n}{i} \left[ -(n-i)(1-\hat{x})^{n-i-1}(\hat{x})^i + i(1-\hat{x})^{n-i}(\hat{x})^{i-1} \right] \quad (23)$$

Denotando  $u = tg\theta$  por facilidade de apresentação das equações, os termos  $\frac{\partial}{\partial ak} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)$  e  $\frac{\partial}{\partial ak} \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)$  ficam definidos como:

$$\frac{\partial}{\partial ak_i} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = - \frac{\partial u}{\partial ak_i} \frac{1}{(1+u^2)^{1.5}} \quad (24)$$

$$\frac{\partial}{\partial ak_i} \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = - \frac{\partial u}{\partial ak_i} \frac{u}{(1+u^2)^{1.5}} \quad (25)$$

A partir da equação (21), obtém-se  $\frac{\partial u}{\partial ak_i}$ :

$$\frac{\partial u}{\partial ak_i} = C'(\hat{x}) \binom{n}{i} (1-\hat{x})^{n-i} (\hat{x})^i + C(\hat{x}) \left[ -(n-i)(1-\hat{x})^{n-i-1} (\hat{x})^i + i(1-\hat{x})^{n-i} (\hat{x})^{i-1} \right] \quad (26)$$

E analogamente, obter  $\frac{\partial y}{\partial ak_i}$  a partir da equação (1):

$$\frac{\partial y}{\partial ak_i} = C(\hat{x}) \binom{n}{i} (1-\hat{x})^{n-i} (\hat{x})^i \quad (27)$$

A equação (27) será utilizada para o cálculo dos produtos  $\left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial ak} \right)$  e  $\left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial ak} \right)$ . Geometricamente, pode-se verificar que  $\frac{\partial \zeta}{\partial y} = - \frac{\partial \eta}{\partial x}$ .

Os outros parâmetros presentes na equação do gradiente dependem além da geometria do aerofólio, das propriedades do fluido que são obtidas na resolução do escoamento no “solver” e também da resolução das equações adjuntas. Os termos  $F_\alpha^x$ ,  $F_\alpha^y$  e  $p$  são obtidos diretamente das propriedades calculadas e  $\varphi_\alpha$  é a solução da equação adjunta e também é obtida diretamente. Já  $C_{\alpha\beta}^2$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial \zeta}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial \eta}$  são obtidos a partir dos procedimentos explicados a seguir.

$$F_\alpha = \begin{pmatrix} F_\alpha^x = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (e+p)u \end{pmatrix} \\ F_\alpha^y = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (e+p)v \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (28)$$

O termo  $C_{\alpha\beta}^2$  é obtido da equação a seguir:

$$C_{\alpha\beta}^2 = \frac{\partial \eta}{\partial x} A_{\alpha\beta} + \frac{\partial \eta}{\partial y} B_{\alpha\beta} \quad (29)$$

Onde as matrizes  $A_{\alpha\beta}$  e  $B_{\alpha\beta}$  são dependentes exclusivamente do escoamento além de  $\frac{\partial \eta}{\partial x}$  e  $\frac{\partial \eta}{\partial y}$  que são obtidas anteriormente:

$$A_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5(\gamma-1)(u^2+v^2)-u^2 & -(\gamma-3)u & -(\gamma-1)v & (\gamma-1) \\ -uv & v & u & 0 \\ (\gamma-1)u(u^2+v^2)-\gamma\left(\frac{e}{\rho}\right) & \gamma\left(\frac{e}{\rho}\right)-0.5(\gamma-1)(3u^2+v^2) & -(\gamma-1)uv & \gamma \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$e \quad B_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -uv & v & u & 0 \\ 0.5(\gamma-1)(u^2+v^2)-v^2 & -(\gamma-1)u & -(\gamma-3)v & (\gamma-1) \\ (\gamma-1)v(u^2+v^2)-\gamma\left(\frac{e}{\rho}\right) & -(\gamma-1) & \gamma\left(\frac{e}{\rho}\right)-0.5(\gamma-1)(3u^2+v^2) & \gamma \end{bmatrix} \quad (31)$$

As variáveis  $u, v, \rho, e, \gamma$  são respectivamente a velocidade na direção x, velocidade na direção y, massa específica, energia total e o índice de Mach.

Para os termos  $\frac{\partial Q}{\partial \zeta}$  e  $\frac{\partial Q}{\partial \eta}$ , utilizam-se novamente as relações geométricas entre as direções normal e tangencial com as direções x e y:

$$\frac{\partial Q}{\partial \zeta} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \frac{\partial Q}{\partial x} - \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) \frac{\partial Q}{\partial y} \quad (32)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \eta} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) \frac{\partial Q}{\partial x} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \frac{\partial Q}{\partial y} \quad (33)$$

Onde:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial x} \\ \frac{\partial \rho}{\partial x} u + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial \rho}{\partial x} v + \rho \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial e}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (34) \quad \text{e} \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial y} \\ \frac{\partial \rho}{\partial y} u + \rho \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial \rho}{\partial y} v + \rho \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial e}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (35)$$

As derivadas das propriedades do fluido em relação às direções x e y são obtidas a partir da resolução do escoamento através do “solver”.

## 6. Validações do código

Com todos os códigos integrados, passou-se a validação do “loop”. Validou-se o projeto inverso aplicando como distribuição objetivo, uma curva conhecida de um certo aerofólio. Para validar o código, o método deveria alterar a geometria para o aerofólio previamente conhecido.

Adotaram-se geometrias públicas cujos dados são muito difundidos na comunidade aeronáutica. Com isso, possuía-se material suficiente para a validação do código.

Três casos foram realizados para validação. Dois transônicos e um subsônico. Nos casos transônicos, utilizou-se o RAE2822 e o NACA0012, alternando-os como geometria inicial e o objetivo. Já para o caso subsônico, buscou-se verificar o comportamento do código para dois perfis muito conhecidos: SD7062 e CLARK Y (aerofólio do DC-3, uma das aeronaves mais famosas da história).

De forma a mostrar aplicações com o código, outros três casos foram estudados. O primeiro tratou da otimização da distribuição de pressão do perfil supercrítico Whitcomb ISA, o segundo buscou eliminar o pico de sucção do perfil SD7062 e o terceiro foi a otimização do perfil FX74 para o uso na aeronave que representou a Escola Politécnica na competição SAE Aerodesign (seção 7: Aplicações do código).

No primeiro caso, partiu-se de uma geometria e distribuição de pressões assimétricas. Buscou-se avaliar no código a capacidade de se construir uma distribuição simétrica (Geometria e Pressão) já que o objetivo era o perfil NACA0012.

Outro ponto que foi observado foi a capacidade de eliminação das ondas de choque. Como o “solver” retratava as ondas de choque adequadamente, verificou-se então a capacidade do método adjunto na abordagem desse problema:

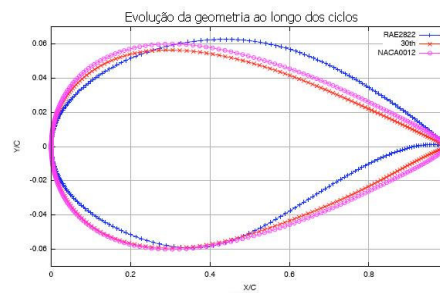
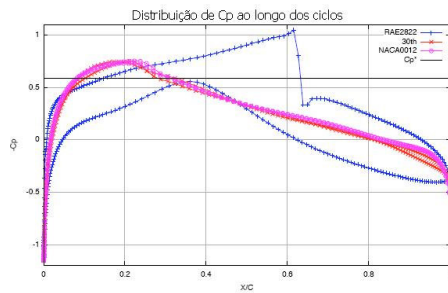


Figura 6 - Evolução da distribuição de Cp  
 Figura 7 – Evolução da geometria ao longo da corda

Verificou-se que o código recuperou a distribuição de Cp do aerofólio NACA0012 (curva em magenta em comparação com a vermelha) partindo do RAE2822 (curva em azul).

O teste seguinte realizou o caminho inverso do primeiro. Partiu-se de um perfil simétrico e buscou-se o RAE2822. O objetivo deste caso foi verificar a capacidade do método adjunto em posicionar a onda de choque. Para o ângulo de ataque de 1°, observou-se que o perfil NACA0012 possui uma onda de choque na parte anterior do aerofólio e o perfil RAE2822 na parte posterior.

Nessas condições, o método adjunto deverá posicionar a onda de choque na parte posterior, chegando ao perfil RAE2822. O caso em questão não apresenta nenhuma vantagem prática, já que irá chegar em uma onda de choque de intensidade maior. Entretanto este teste tem uma abordagem acadêmica importante, já que mostra que o método adjunto trata mais adequadamente a questão das ondas de choque em relação a outros métodos de otimização que apenas eliminam a onda de choque.

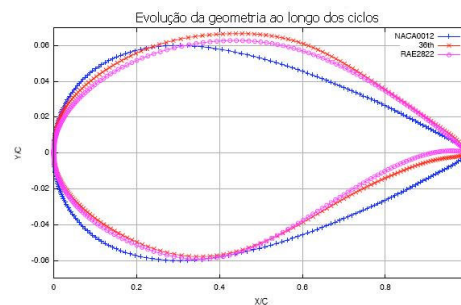
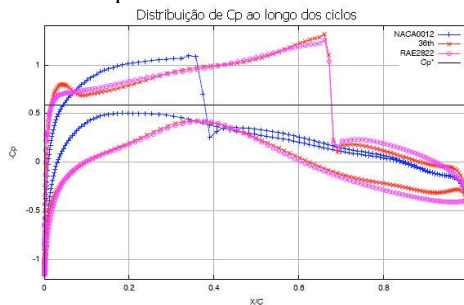


Figura 8 - Evolução da distribuição de Cp  
 Figura 9 – Evolução da geometria ao longo da corda

No terceiro caso buscou uma validação para um número de Mach mais baixo no regime incompressível. Realizou-se então para Mach = 0,3 o projeto inverso entre o perfil CLARK Y e o SD7062.

Nesta faixa de número de Mach, já se percebe uma dificuldade na solução do problema devido a adimensionalização do código. A formulação das equações de Euler é mais adequada para números de Mach elevados, o que caracteriza então um mau condicionamento da matriz das variáveis de estado embora a teoria seja adequada para todos os regimes.

Em todas as simulações, o número de Mach não ultrapassou 0,43. Nesse regime os fatores referentes a compressibilidade são pouco importantes.

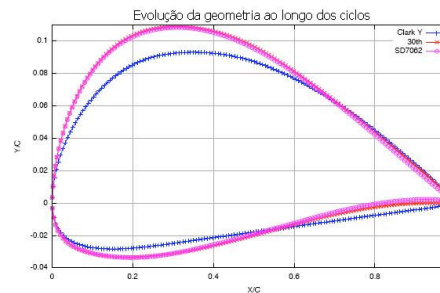
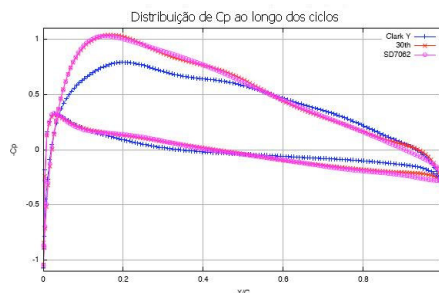


Figura 10 - Evolução da distribuição de Cp  
 Figura 11 – Evolução da geometria ao longo da corda



## 7. Aplicações do código

Iniciando uma primeira aplicação do método adjunto, analisou-se o perfil Whitcomb ISA a fim de diminuir a intensidade da onda de choque. Para isso, criou-se uma distribuição de pressão objetivo mais suavizada no extradorso, melhorando a recuperação de pressão na região.

Esta aplicação foi a primeira sem ter o conhecimento de que essa distribuição pudesse ser realizável, uma vez que não temos o perfil da distribuição objetivo. Esta análise é importante uma vez que será assim que o método será usado na indústria.

Com essa suavização, duas vantagens foram vistas: a primeira foi à eliminação de parte do arrasto de onda produzido devido a diminuição da intensidade da onda de choque e a segunda foi o aumento do coeficiente de sustentação para o mesmo ângulo de ataque (de  $C_l = 0,8527$  para  $C_l = 0,8995$ ).

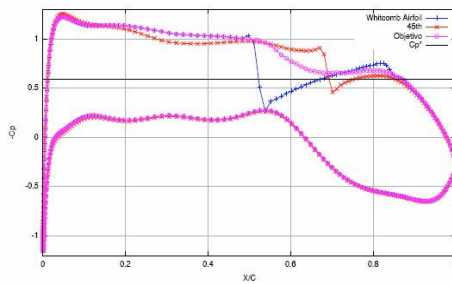


Figura 12 - Evolução da distribuição de Cp

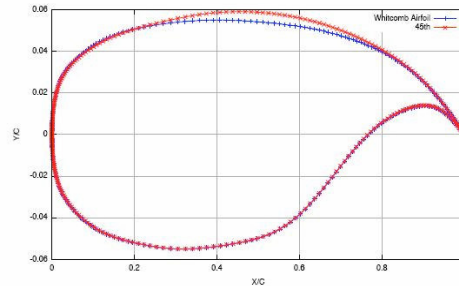


Figura 13 – Evolução da geometria ao longo da corda

Para a aplicação com o SD7062 foi realizada uma alteração na distribuição de pressão para diminuir o pico de sucção no intradorso, diminuindo assim o momento aerodinâmico do aerofólio. Essa mudança reduz o arrasto de trimagem da aeronave, uma vez que a força de sustentação necessária para a trimagem será menor.

Os valores do coeficiente de momento inicial e após as iterações são respectivamente  $C_{m0.25} = 0,00711$  e  $C_{m0.25} = -0,00027$  reduzindo portanto o momento produzido pela asa.

Nesta aplicação, observou-se que nem todo pico de sucção foi eliminado. Isso se deve a limitação do sistema de parametrização e não do método adjunto. Como a parametrização trata o extradorso e o intradorso separadamente, e conseqüentemente os valores da função de forma no bordo de ataque não são forçados a serem iguais ou próximos.

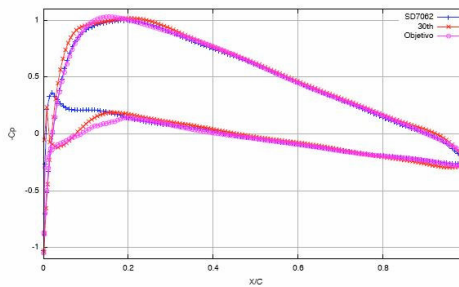


Figura 14 - Evolução da distribuição de Cp

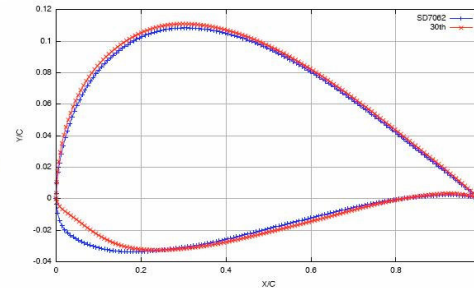


Figura 15 – Evolução da geometria ao longo da corda

Na última aplicação deste trabalho, foi verificada a capacidade do programa a um número de Mach mais baixo ( $M=0,1$ ). O objetivo foi à validação de uma análise preliminar que tinha sido feita pela equipe Poliaclive que representa a Escola Politécnica da USP na competição SAE Aerodesign.

A partir de softwares comerciais, projetou-se uma distribuição de Cp no ângulo desejado de tal maneira a melhorar as propriedades aerodinâmicas do aerofólio. Utilizando o método adjunto, verificou-se qual geometria teria aquela distribuição e comparou-se com o resultado dos métodos feitos anteriormente.

Observou-se que o método não conseguia recuperar totalmente a distribuição de pressão objetivo, principalmente o ponto de máxima sucção que ocorre na região de aproximadamente a 25% da corda. A resposta da geometria também teve diferenças especialmente no extradorso.

O que se verificou em análises posteriores é que o aerofólio projetado pelo método adjunto era mais eficiente do que as estimativas iniciais, e isso pode ser justificado que os métodos preliminares não eram eficazes em retratar uma distribuição de pressão em relação a uma certa geometria.

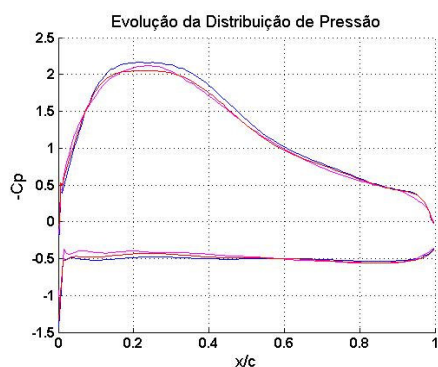


Figura 16 – Evolução da Distribuição de Cp (Azul: FX74, Magenta: Objetivo e Vermelho: 30º ciclo)

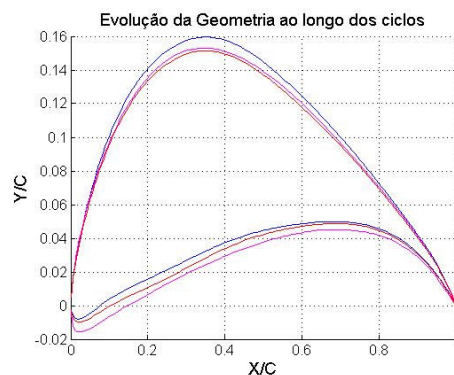


Figura 17 – Evolução da geometria ao longo da corda (Azul: FX74, Magenta: Objetivo e Vermelho: 30º ciclo)

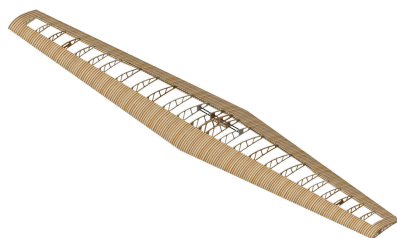


Figura 18 – Concepção da asa com o perfil otimizado em CAD



Figura 19 – Foto da aeronave construída

## 8. Conclusão

A consolidação do método adjunto como uma ferramenta importante para o desenvolvimento de projetos aerodinâmicos é algo comprovado. Este método possui uma fundamentação teórica sólida e possui caráter multidisciplinar, passando pelas teorias de mecânica dos fluidos e termodinâmica, além de contar com o auxílio do cálculo diferencial e integral aliado a teoria de controle.

A fase de validação do código teve suas dificuldades, uma vez que lidar com programação computacional requer cuidados, sobretudo com um software com um código muito grande. A divisão do ciclo entre os membros do projeto global minimizou este problema, proporcionando validações intermediárias antes de certificar o ciclo como um todo.

Quanto à parametrização do aerofólio com os polinômios de Bernstein, ela se mostra muito eficaz para o problema em questão. Além de possuir erros muito pequenos na representação da geometria, ela se encaixa muito bem ao método adjunto, por possuir uma formulação relativamente simples de suas derivadas para o cálculo do gradiente. Outro ponto a se ressaltar é a condição de se parametrizar o aerofólio com poucos coeficientes, o que apenas maximiza a vantagem do método adjunto, por eliminar filtros para variações indesejadas da geometria.

Um ponto a ser analisado na parametrização é a criação de um vínculo entre os bordos de ataque do intradorso e do extradorso, garantindo que a segunda derivada na região seja contínua. Esse novo tipo de abordagem poderá implicar numa análise direta de um dos parâmetros mais importantes do aerofólio, que é o raio de curvatura do bordo de ataque.

No cálculo do gradiente, a formulação da parametrização proporcionou uma manipulação das equações que facilitou o cálculo de todos os termos do gradiente. Cada termo em questão possuía uma equação dependente apenas da geometria e das condições do escoamento, sendo necessário apenas substituir os valores. Logo, esta etapa do ciclo possui um custo computacional desprezível frente ao custo do código do escoamento e do código de solução das equações adjuntas.

As aplicações feitas para mostrar a capacidade do código confirmaram que seu uso na indústria pode ser viabilizado. Com a experiência prévia do projetista, é possível projetar uma distribuição de pressão realizável e o código trabalhar para se chegar à geometria. É importante perceber que nem sempre uma distribuição de pressão é realizável e o código conseguirá apenas se aproximar do valor desejado.

O método adjunto também possui a versatilidade de se modificar a medida de mérito. Com isso, é possível maximizar outras relações, como maximização de  $C_l$ , minimização de  $C_d$ , maximização das relações  $C_l/C_d$  e  $C_l/C_m$ .

## 9. Referências

- [1] FABIANI, L.F.V.R., 2003, “Simulação de bocais em escoamento compressível”, EPUSP, S.Paulo, Brasil, 63p.
- [2] CONSTANTINO, C.A., 2006, “Análise e otimização aerodinâmica utilizando o método adjunto”, EPUSP, S.Paulo, Brasil.
- [3] CHIEREGATTI, B.G., 2007, “Implementação do algoritmo de métrica variável na otimização aerodinâmica de bocais de empuxo para propulsão”, 15 SIICUSP 2007 : anais São Carlos : Universidade de São Paulo, 2007, Brasil.
- [4] KULFAN, B.M., BUSSOLETTI, J.E., 2006, “‘Fundamental’ Parametric Geometry Representations for aircraft component shapes”, Boeing Commercial Airplane group, Seattle, Washington, USA.
- [5] AZEVEDO, J. L. F.; DOURADO, W. M. C. Euler solutions of two dimensional flows using unstructured meshes. Anais do XI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica - XI COBEM, Azul, p. 189-192, Dez. 1991.
- [6] JAMESON, A., “Reduction of Adjoint Gradient Formula for Aerodynamic Shape Optimization Problems”, Stanford University, Stanford, Califórnia, November 2003.
- [7] JAMESON, A.; MAVRIPLIS, D. Finite volume solution of the two-dimensional euler equations of gasdynamics. AIAA journal, v. 24, n. 4, p. 611-618, April 1986.
- [8] JAMESON, A.; SCHMIDT, W.; TURKEL, E. Numerical solutions of the euler equations by finite volume methods using runge-kutta time-stepping schemes. In: AIAA 14th Fluid and Plasma Dynamics Conference. Palo Alto, CA: [s.n.], 1981. AIAA Paper 81-1259
- [9] CEZE, M.A.B; Projeto inverso aerodinâmico utilizando o método adjunto aplicado as equações de Euler. Tese de mestrado, EPUSP, São Paulo, Brasil (2008).
- [10] HAYASHI, M.T; Projeto inverso aerodinâmico utilizando o método adjunto. Tese de mestrado, EPUSP, São Paulo, Brasil (2008).

### AERODYNAMIC OPTIMIZATION OF AIRFOILS USING ADJOINT METHOD

**Bruno Galelli Chieregatti**

University of São Paulo – Polytechnic School – Department of Mechanical Engineering

[bruno.chieregatti@gmail.com](mailto:bruno.chieregatti@gmail.com)

**Abstract:** The Computational Fluid Dynamics (CFD) plays an important role in aerodynamic design. It provides invaluable tools in the conceptual design phase because it enables one to perform a host of different analysis at low costs. Among those new methods, the so-called adjoint method is frequently considered as the most promising approach to the problem because it dramatically reduces the costs of computing sensitivity gradients. The purpose of this paper is use the control theory to obtain the equation of sensitivity gradient.

**Keywords.** *Optimization, Airfoil, Adjoint, Aerodynamic, Bernstein.*