

**Bruno Galelli Chieregatti**  
**5174289**

## **Otimização aerodinâmica de aerofólios utilizando o método adjunto**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à  
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo  
como requisito para obtenção do título de  
graduação em Engenharia.

Área de Concentração: Engenharia Mecânica

Orientador: Ernani Vitillo Volpe

Professor Coordenador: Alberto Hernandez Neto

**São Paulo**  
**Novembro 2008**

## FICHA CATALOGRÁFICA

**Chierigatti, Bruno Galelli**

**Otimização aerodinâmica de aerofólios utilizando o método adjunto / B.G. Chierigatti. – São Paulo, 2008.**

**p. 44**

**Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.**

**1.Aerodinâmica (Simulação;otimização) 2.Dinâmica dos fluídos I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II.t.**

## AGRADECIMENTOS

Nestes 5 anos de Escola Politécnica, muitas pessoas contribuíram para a minha formação e amadurecimento pessoal e profissional. Para que eu não cometa nenhuma injustiça não citando alguma nos parágrafos seguintes, dedico esse primeiro parágrafo agradecendo a todos pelo apoio seja ele em um conselho, uma ajuda nos estudos ou até mesmo ajuda financeira.

Primeiramente agradeço meus pais que me apoiaram em todas as minhas decisões e estavam sempre presentes em momentos de dificuldade do curso e também nas glórias alcançadas.

Agradeço também a minha irmã Bianca que apesar de adolescente já tem maturidade para me dar conselhos importantes e até mesmo me acalmar em momentos difíceis. Agradeço também por todas as vezes que acordou de madrugada para abrir a porta de casa quando eu chegava tarde da faculdade! Dedico também este trabalho para meus dois primos João e Luís Fernando por serem irmãos mais velhos para mim e parceiros de todas as horas!

Na Poli, também existem pessoas que foram fundamentais para a minha formatura. Dedico a todos meus amigos de turma do Biênio, turma da mecânica e os companheiros de Aerodesign juntamente com o professor Antônio Mariani que ajudaram muito para que eu me tornasse um engenheiro!

Agradeço o Professor Ernani Vitillo Volpe que me apoiou desde o terceiro ano, me incentivando a pesquisar e desenvolver novos trabalhos, sendo na iniciação científica e neste trabalho final. Infelizmente o nosso país ainda não incentiva como merece profissionais como ele, que foram para o exterior, ficaram longe de suas famílias, trouxeram conhecimento para o país se desenvolver, mas ainda não possuem o apoio necessário. Eu estou com ele nessa luta para melhorarmos essa situação.

E por fim, gostaria de dedicar todos os meus esforços para essa formatura a uma pessoa muito especial que é meu Tio Walter que me apoiou sempre, e que está agora lá do céu me iluminando e certamente muito feliz por eu ter alcançado meu objetivo!

## RESUMO

A mecânica dos flúidos computacional tornou-se uma importante ferramenta de desenvolvimento de projetos, dando destaque ao projeto aeronáutico. Com os recursos computacionais mais poderosos, métodos mais sofisticados de análise vêm sendo desenvolvidos e inúmeros trabalhos de pesquisa estão sendo realizados ao redor do mundo.

Após três anos de estudo de alunos de graduação e pós-graduação, orientados pelo professor E.V. Volpe, este trabalho irá apresentar o desenvolvimento de um ciclo de otimização de aerofólios utilizando um método de otimização conhecido como método adjunto.

O trabalho está dividido nas quatro principais áreas do ciclo: gerador de geometria, gerador de malha computacional e “Solver” do escoamento, “Solver” de otimização adjunta e cálculo do gradiente com a geração da nova geometria.

No gerador de geometria, está apresentada a parametrização do aerofólio. A partir de coeficientes que multiplicam os polinômios de Bernstein [4], a geometria do extradorso e intradorso são caracterizadas.

O gerador de malha computacional, o “Solver” do escoamento e o “Solver” de otimização adjunta são apenas descritos em seus pontos principais, onde seus detalhes são apresentados em [9] e [10].

O cálculo do gradiente possui toda a sua dedução neste trabalho, desde a definição da medida de mérito até os cálculos de todos os termos referentes ao seu cálculo.

Por fim, diversos exemplos de validação são apresentados, além de exemplos de aplicações sendo um deles, aplicado na concepção de uma aeronave para a competição SAE Brasil Aerodesign.

## ABSTRACT

The Computational Fluid Dynamics (CFD) has become an important tool in aerodynamic design. In addition, the development of the powerful computers provides the resources needed for the optimization programs become more sophisticated. There is, nowadays, a worldwide effort to develop aerodynamics optimization methods.

As result of 3 years of studies under Professor E.V. Volpe supervision, this work presents an optimization loop for airfoils, using the so-called adjoint method. This method is considered the most promising approach to the problem because it dramatically reduces the cost of computing the sensitivity gradients.

The loop is divided in 4 parts: The geometry generator, the computational mesh generator and the flow Solver, the Adjoint Solver and the computation of the sensibility gradients.

A means of parametrizing the airfoil and a routine for computing the geometries were described by KULFAN [4]. This theory is based on the Bernstein polynomials. The control variables multiply these polynomials and the upper and lower surfaces are described.

The main features of the mesh generator, the flow solver and the adjoint solver are presented in these notes. The reader is referred to [9] and [10] for further details.

This work focuses on the sensibility gradient. Its derivation is discussed at length in what follows.

To close this work, some validation tests are presented and then, three applications are described one which was used in development of aircraft which represent the Polytechnic School in the SAE Aerodesign Competition.

# SUMÁRIO

<b><i>Lista de Figuras</i></b> _____	<b><i>1</i></b>
<b><i>Lista de Tabelas</i></b> _____	<b><i>3</i></b>
<b><i>Introdução</i></b> _____	<b><i>4</i></b>
<b><i>1.Revisão Bibliográfica</i></b> _____	<b><i>6</i></b>
1.1 Trabalhos anteriores _____	6
<b><i>2.Materiais e métodos</i></b> _____	<b><i>7</i></b>
2.1 Linguagem computacional _____	7
2.2 Estruturação do “Loop” _____	7
2.2.1 Gerador de malha _____	8
2.2.2 Solver _____	9
<b><i>3.Parametrização do aerofólio – Gerador de geometria</i></b> _____	<b><i>16</i></b>
<b><i>4.Aplicação da Teoria de Controle nas equações de Euler e obtenção da equação do gradiente</i></b> _____	<b><i>21</i></b>
4.1 O método adjunto e sua vantagem _____	21
4.2 Aplicação das equações de Euler como restrição ao problema _____	22
<b><i>5.Cálculo do gradiente</i></b> _____	<b><i>28</i></b>
5.1 Equação fundamental e suas variáveis _____	28
5.2 Obtenção dos termos para o cálculo da equação _____	29
5.2.1 Termos exclusivamente geométricos _____	30
5.2.2 Termos dependentes do escoamento e das soluções adjuntas _____	33
<b><i>6.Resultados do Método Adjunto</i></b> _____	<b><i>35</i></b>
<b><i>7.Conclusão</i></b> _____	<b><i>43</i></b>
<b><i>8.Bibliografia</i></b> _____	<b><i>45</i></b>

# Lista de Figuras

- Figura 2.1** - Estrutura do “Loop” e seus responsáveis.
- Figura 2.2** – Visão geral da malha gerada no GAMBIT
- Figura 2.3** – Detalhe da malha na região do aerofólio
- Figuras 2.4 e 2.5** – Resultado do escoamento para o perfil RAE2822 (Número de Mach)
- Figuras 2.6 e 2.7** – Resultado do escoamento para o perfil RAE2822 (Pressão)
- Figura 2.8** - Comparação dos resultados para o perfil NACA0012 (0º)
- Figura 2.9** - Comparação dos resultados para o perfil NACA0012 (1º)
- Figura 2.10** - Comparação dos resultados para o perfil RAE2822 (0º)
- Figura 2.11** - Comparação dos resultados para o perfil RAE2822 (1º)
- Figura 2.12** - Comparação dos resultados para o perfil RAE2822 (0º)
- Figura 2.13** - Comparação dos resultados para o perfil NACA0012(0º)
- Figura 2.14** - Comparação dos resultados para o perfil S1223(8º)
- Figura 2.15** - Comparação dos resultados para o perfil FX74 (3º)
- Figura 2.16** - Comparação dos resultados para o perfil Diamante (0º)
- Figura 3.1** - Avaliação do erro em função da ordem do polinômio em função do grau dos polinômios de Bernstein (Perfil RAE2822)
- Figura 3.2** - Resultado da parametrização com o grau do polinômio igual a 1 (Perfil RAE2822). Os pontos em preto são a geometria real do aerofólio e as curvas em azul (extradorso) e vermelho (intradorso) são a descrição pela parametrização.
- Figuras 3.3 e 3.4** - Parametrização com a ordem igual a três e detalhe do bordo de ataque.
- Figuras 3.5 e 3.6** - Parametrização com a ordem igual a oito e detalhe do bordo de ataque.
- Figuras 3.7 e 3.8** - Parametrização com a ordem igual a dezessete e detalhe do bordo de ataque.
- Figuras 3.9 e 3.10** - Aerofólio J5012 e o erro em função do grau da parametrização.
- Figuras 3.11 e 3.12** - Aerofólio S1223 e o erro em função do grau da parametrização.
- Figura 5.1** - Descrição das direções generalizadas (normal e tangencial)
- Figura 5.2** - Derivada da curva do aerofólio em relação a x (Perfil RAE2822).
- Figura 6.1** – Evolução da distribuição de  $C_p$  ao longo da corda

**Figura 6.2** - Evolução da geometria ao longo dos ciclos

**Figura 6.3** – Evolução da distribuição de  $C_p$  ao longo da corda

**Figura 6.4** – Evolução da geometria ao longo dos ciclos

**Figura 6.5** – Evolução da Distribuição de  $C_p$  ao longo da corda

**Figura 6.6** – Evolução da geometria ao longo dos ciclos

**Figura 6.7** – Evolução da Distribuição de  $C_p$  ao longo da corda

**Figura 6.8** – Evolução da geometria ao longo dos ciclos

**Figura 6.9** – Evolução da Distribuição de  $C_p$  ao longo da corda

**Figura 6.10** – Evolução da geometria ao longo dos ciclos

**Figura 6.11** – Evolução da Distribuição de  $C_p$  ao longo da corda (Azul: FX74, Magenta: Objetivo e Vermelho: 30º ciclo)

**Figura 6.12** – Evolução da geometria ao longo dos ciclos (Azul: FX74, Magenta: Objetivo e Vermelho: 30º ciclo)

## Lista de Tabelas

**Tabela 5.1** - Variáveis dependentes exclusivamente da geometria e variáveis dependentes da solução do escoamento de da solução adjunta.

# Introdução

A dinâmica dos fluidos computacional assume o papel cada vez mais relevante no projeto aerodinâmico. Sua função é especialmente importante na fase de concepção do projeto, por permitir que se analisem configurações alternativas a custos relativamente baixos.

Após os recentes desenvolvimentos do projeto inverso em métodos de otimização, abriram-se novas possibilidades dentro da indústria aeroespacial. A combinação desses novos recursos com o CFD<sup>1</sup> causa um grande impacto no desenvolvimento de projetos, diminuindo o custo operacional dos mesmos.

Dentro destes novos recursos, o método adjunto é freqüentemente citado como a mais promissora referência na abordagem do problema, pois reduz significativamente o custo computacional no cálculo dos gradientes.

A abordagem do método adjunto caracteriza-se pela busca dos extremos de funções pré-definidas que são conhecidas como medidas de mérito. As funções de mérito podem ser de diversas formas como integrais de sustentação e arrasto ou simplesmente uma comparação entre as distribuições de pressão de dois aerofólios, sendo esse último caso conhecido como o projeto inverso.

A teoria de controle de sistemas governados por equações diferenciais (LIONS [9]) proporciona os fundamentos conceituais e os formalismos necessários a essa atividade. O método proposto por JAMESON [6] faz uso desses recursos com dupla vantagem: A primeira se trata da imposição das equações da mecânica dos fluídos como restrições do problema variacional, o que limita as variações da medida de mérito ao universo de soluções realizáveis. Já a segunda é consequência da primeira, pois as restrições permitem uma grande simplificação no cálculo do gradiente de sensibilidade, reduzindo o custo computacional.

No cálculo do gradiente, o objetivo é otimizar uma função (no caso, a função que descreve a geometria do aerofólio) que é parametrizada por variáveis de controle que são os parâmetros do projeto. A direção de busca e o cálculo do passo da geometria são obtidos a partir da relação entre a solução do escoamento feita por um “solver” e as variáveis adjuntas calculadas.

---

<sup>1</sup> Sigla de “Computacional Fluid Dynamics”

Para se chegar ao gradiente, o presente trabalho passará por essas etapas que gerarão os parâmetros de entrada necessários além da parametrização da geometria, escopo desse trabalho juntamente com o gradiente. Vale ressaltar que o solver e o cálculo das variáveis adjuntas não são o foco deste trabalho e são os resultados de duas teses de mestrado elaboradas por M.T.Hayashi e a outra por M.A.B.Ceze, respectivamente.

Na finalização do trabalho, diversos testes de validação foram realizados buscando os limites do código. Serão apresentados os resultados de validação do Solver bidimensional e casos de aplicação do projeto inverso, para diferentes números de Mach, validando o Solver adjunto e o cálculo do gradiente.

# 1. Revisão Bibliográfica

## 1.1 Trabalhos anteriores

Inicialmente, o método adjunto foi estudado com bocais de empuxo e já foi escopo de trabalhos de formatura na universidade em anos anteriores. Dentre eles, pode-se citar FABIANI [1] e CONSTANTINO [2].

FABIANI [1] desenvolveu código em linguagem C que caracteriza um “Solver” do escoamento compressível no bocal (Escoamento unidimensional). Já CONSTANTINO [2] aprimorou o “Solver” e implementou o código de otimização através do método adjunto.

Conseqüentemente, foi desenvolvido um trabalho de iniciação científica (CHIEREGATTI [3]) pelo autor deste trabalho de graduação que alterou a parametrização anterior do bocal (parábola) pela parametrização proposta em KULFAN [4] que se baseia nos polinômios de Bernstein (seção 3.1). Essa mudança já foi feita visando obter o seu domínio para conseqüente uso em aerofólios.

O solver bidimensional foi elaborado a partir das equações de Euler e teve como base a fundamentação teoria presente em AZEVEDO [5]. Toda sua fundamentação está presente na tese de mestrado de M.T. Hayashi [10].

Para o escoamento bidimensional, a estruturação do método adjunto foi elaborada a partir de JAMESON [6] que apresenta as equações adjuntas e a dedução da equação do gradiente no caso tridimensional.

Partindo da mesma formulação, foi deduzido o método adjunto para o caso bidimensional, partindo da equação de Euler e aplicando a teoria de controle até chegar-se à equação do gradiente.

Com a equação do gradiente obtida, realizou-se a integração dos códigos elaborando o ciclo completo do método adjunto. Buscou-se então, a realização dos mesmos testes apresentados em CEZE [9] para total familiarização do código.

## 2. Materiais e métodos

### 2.1 Linguagem computacional

Todos os códigos necessários para a montagem do “loop” estão sendo feitos em linguagem C cujo conhecimento prévio foi obtido ao longo da graduação e com a plataforma Linux que proporciona um trabalho mais robusto e com liberdade de programação.

Para auxiliar a visualização dos resultados, contamos com os softwares Octave e Paraview, compatíveis com o Linux.

### 2.2 Estruturação do “Loop”

Após a pesquisa das referências sobre o método adjunto, foi elaborado um novo “loop” de projeto que possuiu a mesma estrutura do “loop” presente em CONSTANTINO[2] mas, no caso, a geometria foi um aerofólio (sendo uma curva caracterizando o extradorso e a outra o intradorso) e o “solver” foi de escoamento compressível bidimensional. Acrescentando esse loop, houve uma integração com um gerador de malhas que no caso será o software comercial GAMBIT®. A estrutura do “loop” e seus responsáveis estão apresentados na figura 2.1:

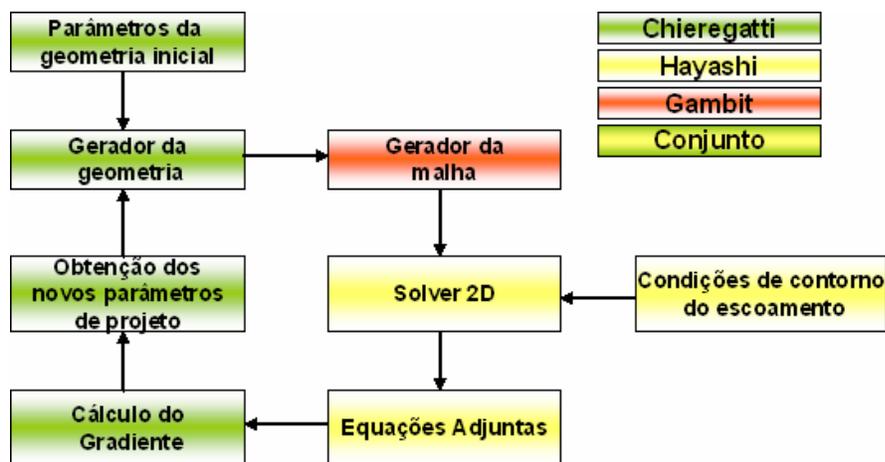


Figura 2.1 - Estrutura do “Loop” e seus responsáveis.

A comunicação entre os programas elaborados será feita através de arquivos de texto e sua leitura através de funções internas de cada programa. Essa separação do “loop” em diversas sub-rotinas facilitou a divisão de trabalho e também a localização de problemas nos testes já realizados. Outra vantagem dessa divisão é o constante aperfeiçoamento do código, sem a necessidade de se alterar todo o “loop” de projeto.

### 2.2.1 Gerador de malha

A geração da malha foi elaborada através do software GAMBIT<sup>®</sup> utilizando um script de geração automática. As malhas possuem elementos triangulares e são não estruturadas.

Para a geração automática, há uma comunicação entre o gerador de geometria e GAMBIT<sup>®</sup> através de um arquivo de texto, onde estão contidas as coordenadas dos pontos que definem o perfil. O Software executa a leitura do arquivo, gera a geometria, define o domínio externo e as condições de contorno e produz uma malha como apresenta as figuras abaixo:

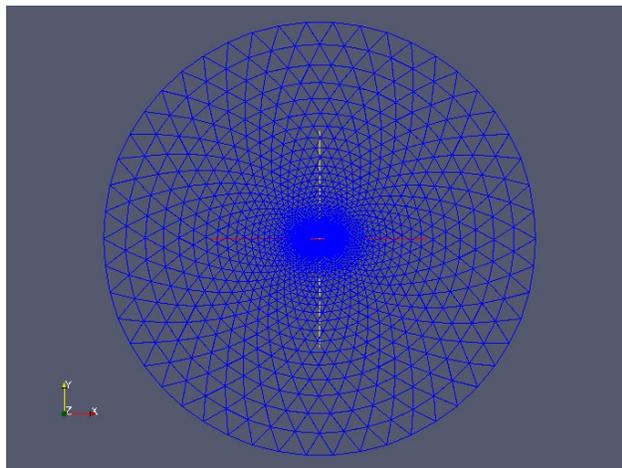


Figura 2.2 – Visão geral da malha gerada no GAMBIT

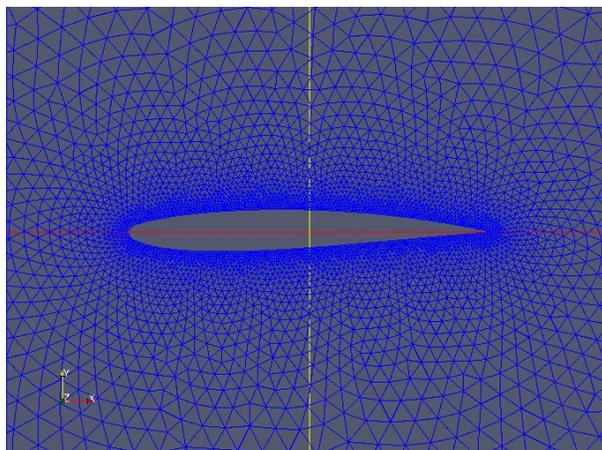
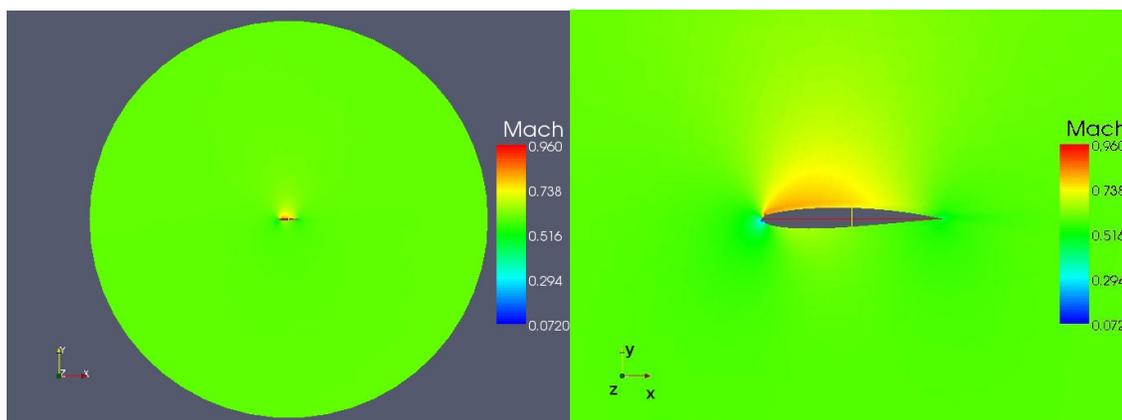


Figura 2.3 – Detalhe da malha na região do aerofólio

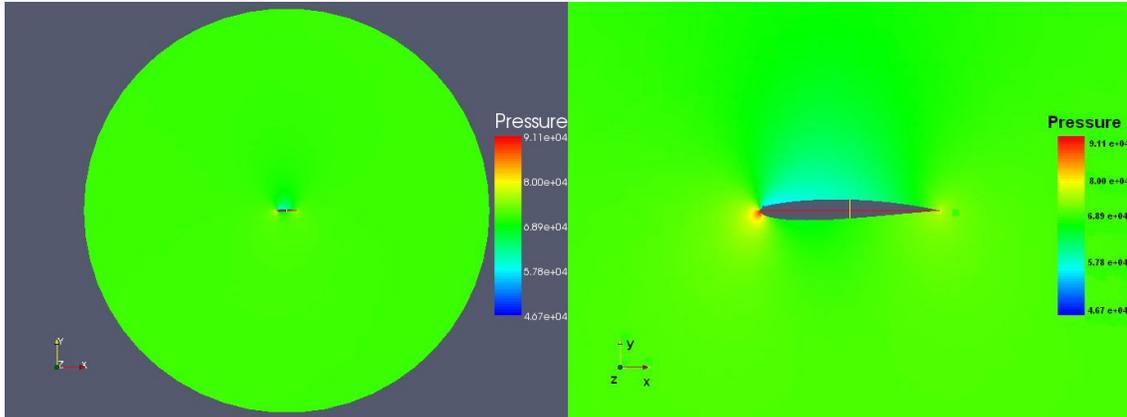
### 2.2.2 Solver

O Solver de escoamento bidimensional foi elaborado a partir das equações de Euler e a fundamentação presente em AZEVEDO [5]. Todos os resultados (exceto o caso 8 que foi feito neste trabalho) de validação do Solver foram retirados de CEZE [9] para um melhor entendimento do leitor, uma vez que o Solver não foi escopo deste trabalho.

Para a resolução do escoamento, obtém-se a malha gerada no GAMBIT e um arquivo de condições iniciais para o escoamento ao longe, como o número de Mach, massa específica, temperatura, pressão e velocidades. Após a resolução, os dados podem ser pós-processados para a verificação dos resultados. Abaixo, a solução de um escoamento do perfil RAE2822 apresentando a distribuição do número de Mach e de pressão:



Figuras 2.4 e 2.5 – Resultado do escoamento para o perfil RAE2822 (Número de Mach)



Figuras 2.6 e 2.7 – Resultado do escoamento para o perfil RAE2822 (Pressão)

A validação do programa de solução do escoamento foi realizada comparando os resultados obtidos com o software CFD++, desenvolvido pela *Metacomp Technologies*. Foram realizadas seis simulações para diferentes perfis e ângulos de ataque.

Os valores do número de Mach foram escolhidos para estarem na região transônica, área de muito interesse da indústria aeronáutica. Nesse tipo de regime, há a ocorrência de escoamento supersônico em algumas regiões do aerofólio. Isto pode ser observado a partir do cálculo do coeficiente de pressão crítico  $Cp^*$  (equação 2.1).

Para coeficientes de pressão local abaixo do valor crítico, caracteriza-se uma região supersônica. Outro ponto a ser observado, é a retratação das possíveis ondas de choque que podem aparecer no perfil.

$$Cp^* = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left[ \left( \frac{2\Psi_\infty}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right] \quad (2.1)$$

$$\text{onde } \Psi_\infty = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \quad (2.2)$$

### Caso 1: Perfil NACA0012

Mach: 0,8

Ângulo de ataque (AOA): 0°

Inicialmente buscou-se verificar a simetria da resolução do escoamento:

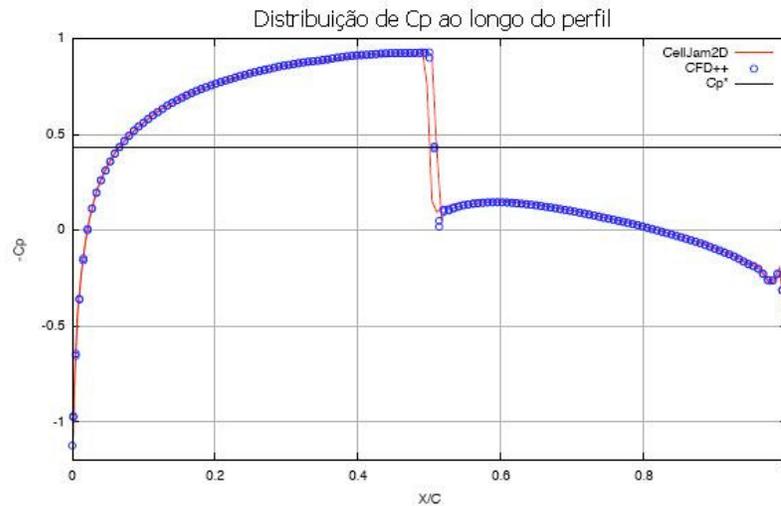


Figura 2.8 - Comparação dos resultados para o perfil NACA0012 (0°)

Observou-se uma grande proximidade entre as duas soluções, com boa retratação da onda de choque e a caracterização da região supersônica acima de  $Cp^*$ .

### Caso 2: Perfil NACA0012

Mach: 0,75

Ângulo de ataque (AOA): 1°

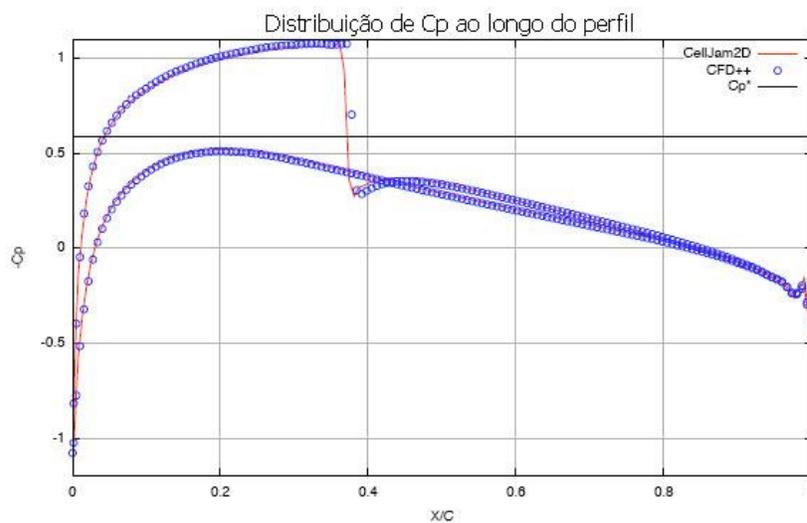


Figura 2.9 - Comparação dos resultados para o perfil NACA0012 (1°)

### Caso 3: Perfil RAE2822

Mach: 0,8

Ângulo de ataque (AOA): 0°

Passou-se para uma análise de um perfil assimétrico. O perfil RAE2822 é muito utilizado na pesquisa por ser um perfil público e seus resultados são muito difundidos:

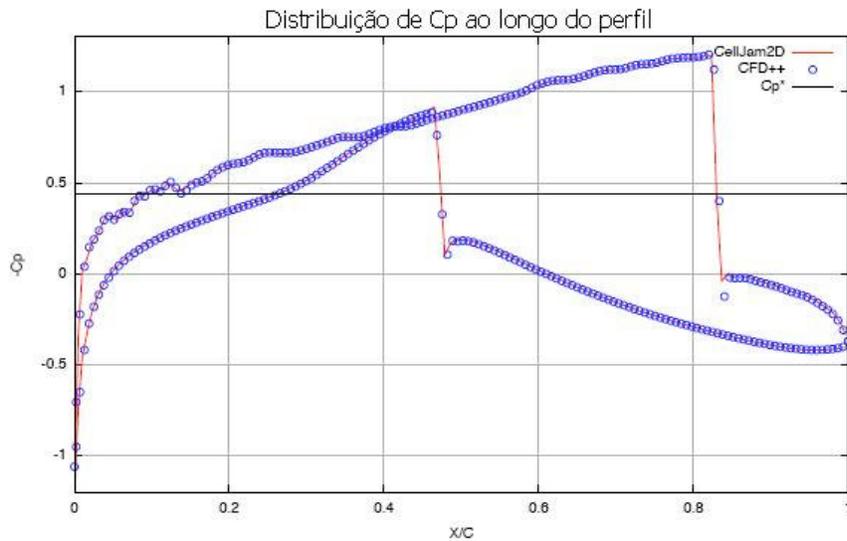


Figura 2.10 - Comparação dos resultados para o perfil RAE2822 (0°)

### Caso 4: Perfil RAE2822

Mach: 0,75

Ângulo de ataque (AOA): 1°

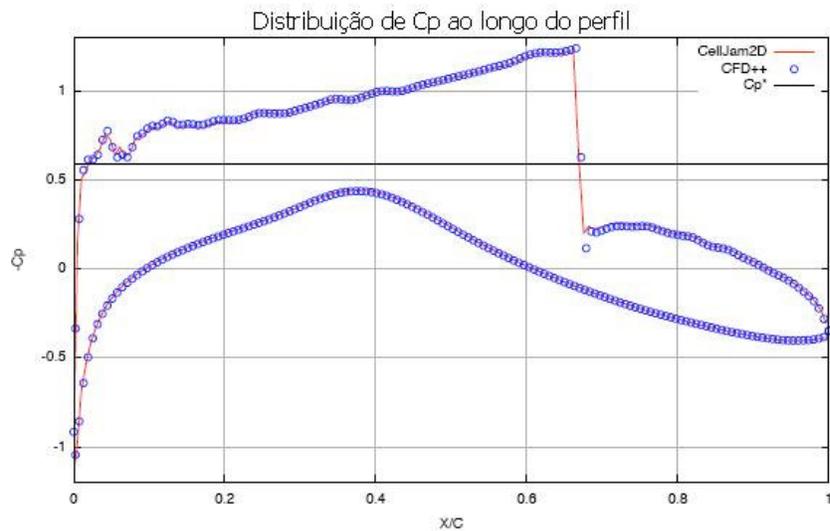


Figura 2.11 - Comparação dos resultados para o perfil RAE2822 (1°)

Os próximos resultados foram o comportamento do Solver em escoamentos de baixos números de Mach. Aos poucos, diminuiu-se o valor de Mach, verificando o comportamento dos resultados.

### Caso 5: Perfil RAE2822

Mach: 0,3

Ângulo de ataque (AOA): 0°

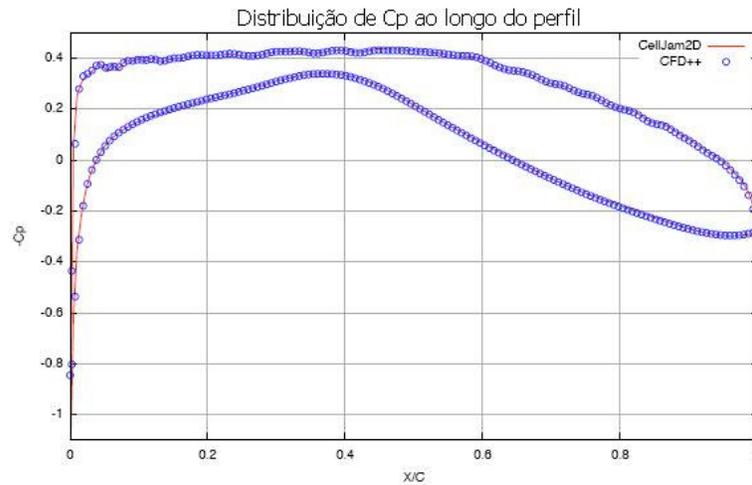


Figura 2.12 - Comparação dos resultados para o perfil RAE2822 (0°)

### Caso 6: Perfil NACA0012

Mach: 0,3

Ângulo de ataque (AOA): 0°



Figura 2.13 - Comparação dos resultados para o perfil NACA0012(0°)

Os casos 7 e 8 apresentam testes para número de Mach igual a 0,1. Os dois perfis analisados são muito aplicados na competição SAE Aerodesign e foram foco de estudo para uma aplicação do método adjunto apresentado na seção 6.

### Caso 7: Perfil S1223

Mach: 0,1

Ângulo de ataque (AOA): 8°

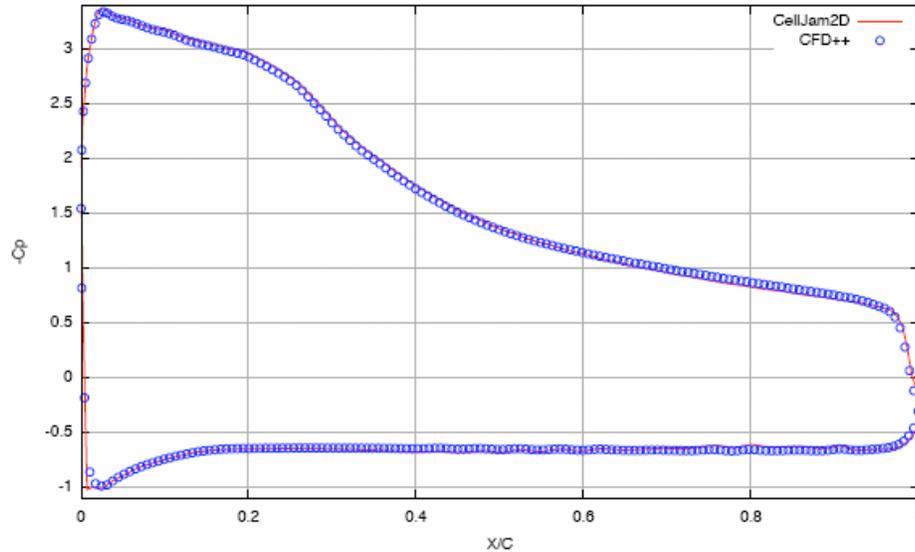


Figura 2.14 - Comparação dos resultados para o perfil S1223(8°)

### Caso 8: Perfil FX74

Mach: 0,1

Ângulo de ataque (AOA): 3°

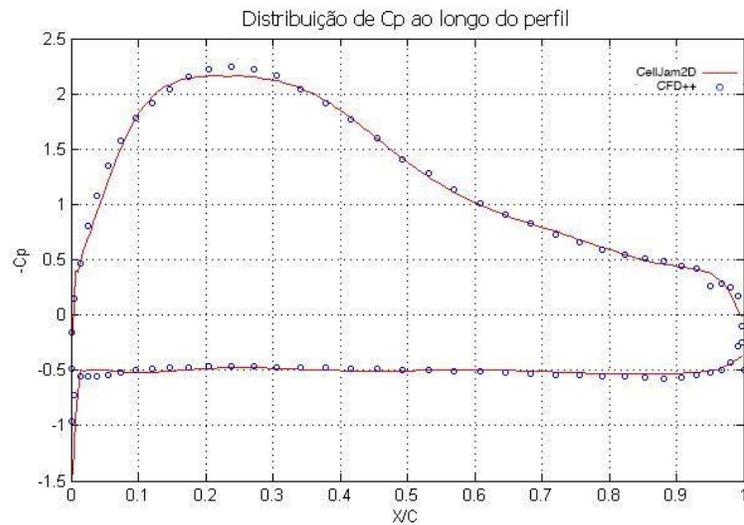


Figura 2.15 - Comparação dos resultados para o perfil FX74 (3°)

Também foi testado um caso supersônico, através do perfil diamante. O resultado está apresentado abaixo.

### Caso 9: Perfil Diamante

Mach: 1,5

Ângulo de ataque (AOA): 0°

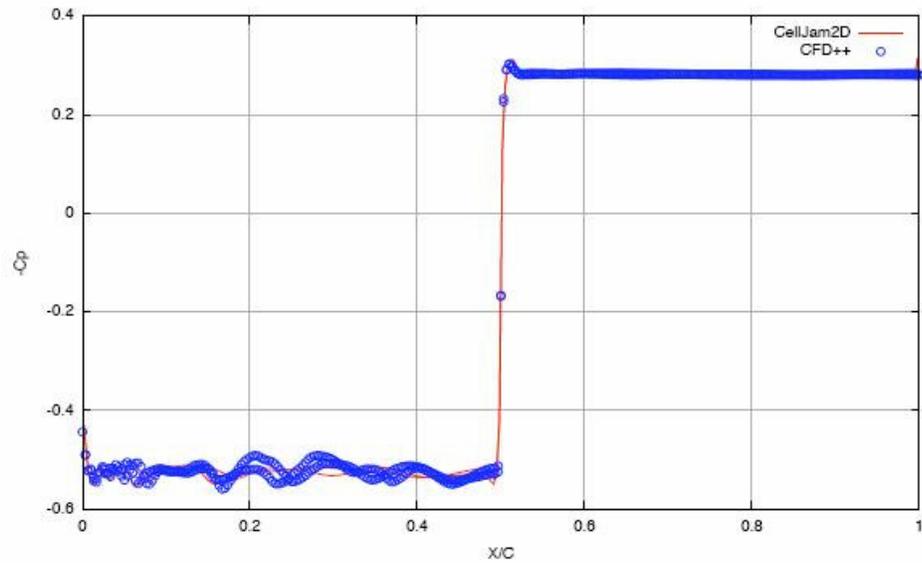


Figura 2.16 - Comparação dos resultados para o perfil Diamante (0°)

### 3. Parametrização do aerofólio – Gerador de geometria

A escolha da parametrização matemática do aerofólio que será utilizada em um processo de otimização interfere diretamente na velocidade de processamento do algoritmo e também na limitação quanto à descrição de geometrias mais complexas, ou seja, a parametrização deve ter a capacidade de reproduzir a geometria com um erro aceitável.

Os aerofólios são descritos por um arquivo de texto que contém uma grande quantidade de pontos e se utilizássemos cada um deles como variável de projeto, o custo computacional não seria demasiadamente alto, entretanto haveria uma necessidade de filtrar a solução, para evitar oscilações na geometria que provocariam alterações indesejadas na distribuição de pressão. Outro ponto a ser ressaltado é que os polinômios de Bernstein garantem a continuidade até a segunda derivada

A solução encontrada foi trabalhar o extradorso e o intradorso com duas equações diferentes e garantir a união das curvas no bordo de ataque e no bordo de fuga. A equação fundamental da parametrização está apresentada a seguir [4]:

$$\hat{y}(\hat{x}) = C(\hat{x}) \cdot B(\hat{x}) + \hat{x} \cdot \Delta\hat{y} \quad (3.1)$$

Onde:

$\hat{y}(\hat{x})$ : Representação da curva adimensionalizada na corda ( $0 \leq \hat{y} \leq 1$ )

$\hat{x}$ : Posição adimensionalizada ( $0 \leq \hat{x} \leq 1$ )

$C(\hat{x})$ : Função de classe definida como:  $C(\hat{x}) = (\hat{x})^{N_1} (1 - \hat{x})^{N_2}$  (3.2).

$N_1$  e  $N_2$  são expoentes que determinam a geometria a ser estudada. No caso de aerofólios, será usado  $N_1 = 0.5$  e  $N_2 = 1.0$  (KULFAN[4]).

$B(\hat{x})$ : Função de forma, que será caracterizada pelos polinômios de Bernstein definidos como sendo:

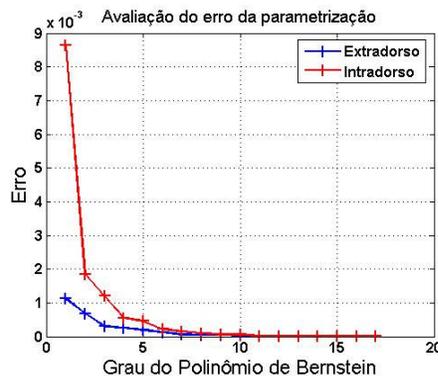
$$B(\hat{x}) = \sum_{i=0}^n ak_i \binom{n}{i} (1-\hat{x})^{n-i} (\hat{x})^i \quad (3.3)$$

$ak_i$  : Coeficientes dos polinômios (Parâmetros de controle do projeto)

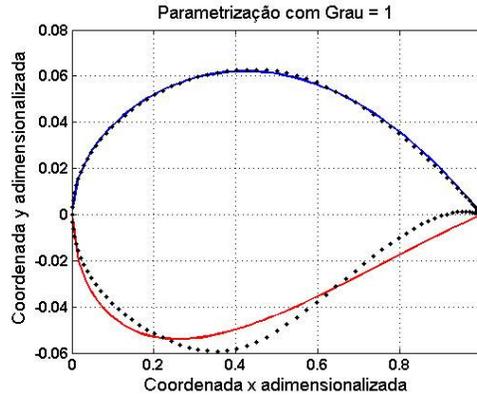
$n$  : Grau máximo dos polinômios

$\Delta\hat{y}$  : Espessura da saída da curva. No caso, utilizaremos apenas aerofólios com a essa espessura tendo o valor nulo.

O problema foi atacado da seguinte maneira: Utilizando a equação presente em KULFAN[4] e através do método dos mínimos quadrados é possível obter os parâmetros de controle  $ak_i$ . Assim, basta apenas esses parâmetros para se identificar um perfil ao invés de uma centena de pontos. Considerando que para 6 parâmetros de controle (grau cinco da parametrização) o erro já está na ordem de  $10^{-3}$ , conclui-se que a parametrização é adequada para se descrever os perfis que serão utilizados no “loop”. Abaixo, estão os resultados dessa parametrização para diferentes graus e os erros em função da ordem do polinômio de Bernstein:

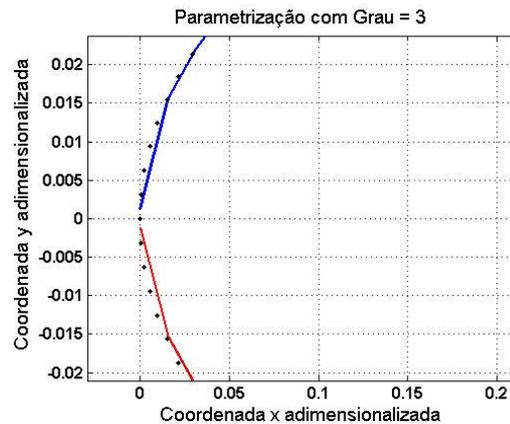
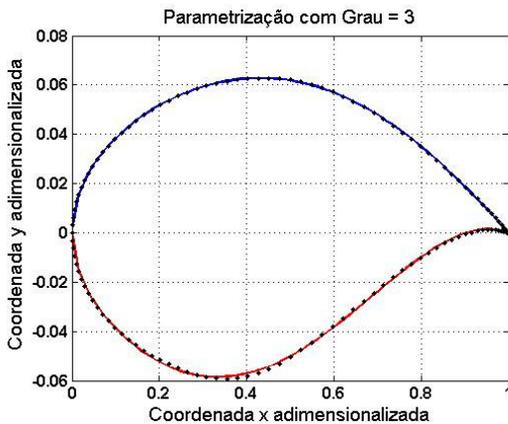


**Figura 3.1 - Avaliação do erro em função da ordem do polinômio em função do grau dos polinômios de Bernstein (Perfil RAE2822)**

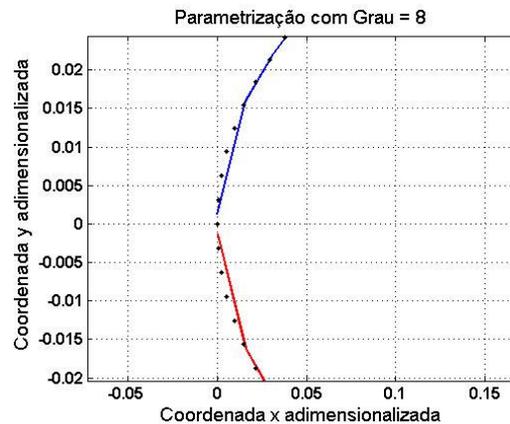
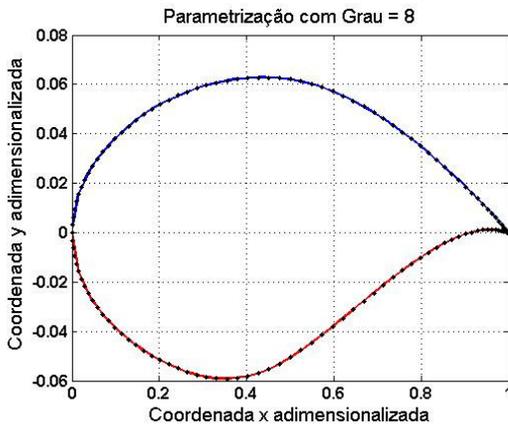


**Figura 3.2 - Resultado da parametrização com o grau do polinômio igual a 1 (Perfil RAE2822). Os pontos em preto são a geometria real do aerofólio e as curvas em azul (extradorso) e vermelho (intradorso) são a descrição pela parametrização.**

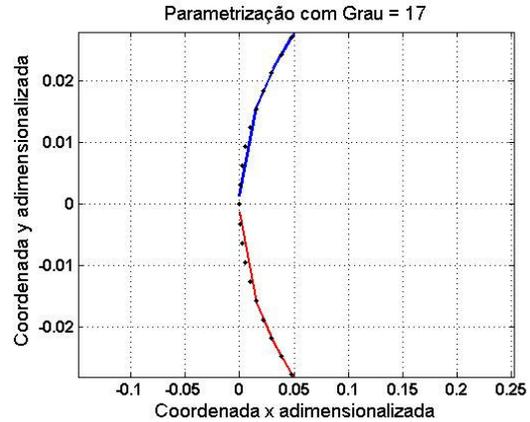
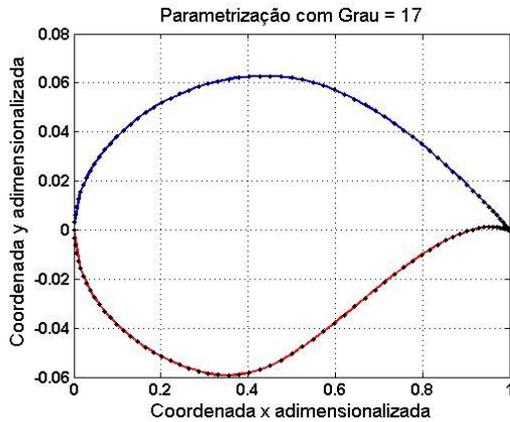
Para ordens maiores que três, a parametrização já se torna bem próxima do aerofólio, apenas na região do bordo de ataque que ocorrem as maiores diferenças. As figuras abaixo apresentam a parametrização e o detalhe do bordo de ataque para os graus três, oito e dezessete (Perfil RAE2822):



**Figuras 3.3 e 3.4 - Parametrização com a ordem igual a três e detalhe do bordo de ataque.**



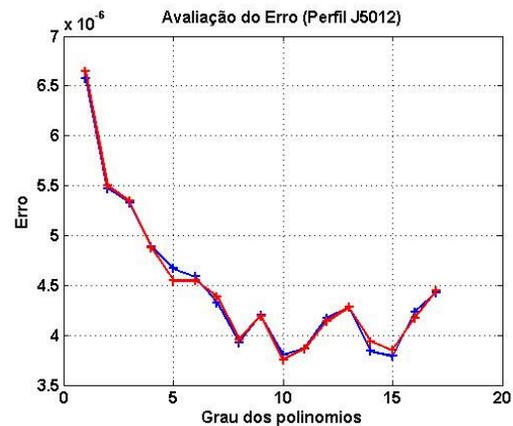
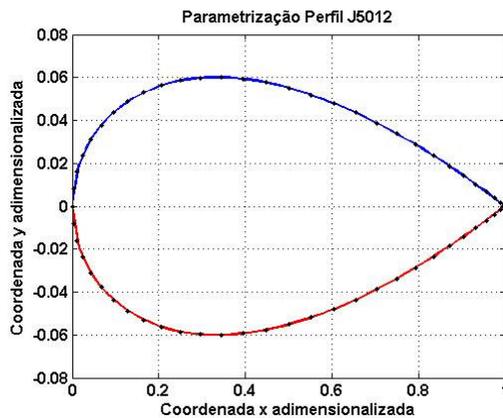
**Figuras 3.5 e 3.6 - Parametrização com a ordem igual a oito e detalhe do bordo de ataque.**



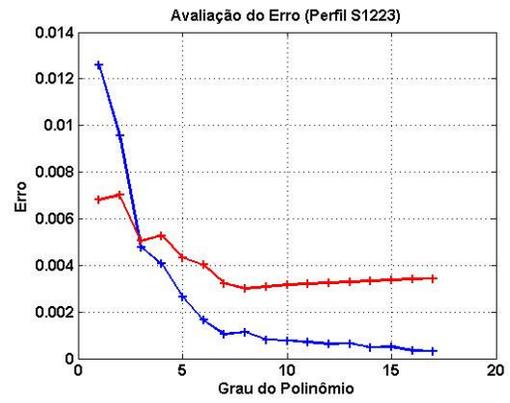
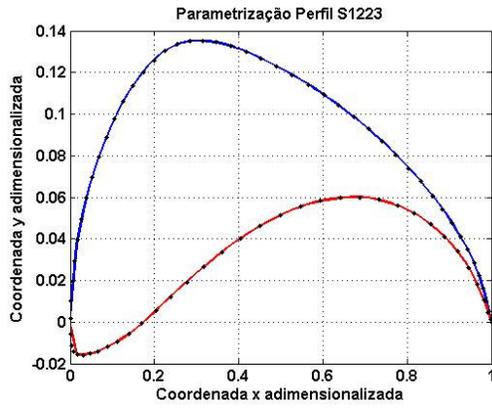
**Figuras 3.7 e 3.8- Parametrização com a ordem igual a dezessete e detalhe do bordo de ataque.**

Para se conseguir erros menores que  $10^{-4}$  (que considerando uma corda de 1 metro, seria um erro de décimo de milímetro), teria que aumentar demasiadamente o grau do polinômio, o que dificultaria na programação principalmente no cálculo dos binomiais que ficaram com ordens de grandeza muito elevada.

Os perfis transônicos como o RAE2822 apresentado acima possui curvaturas mais suaves, facilitando a parametrização. Aerofólios simétricos como o J5012 também são bem representados. A parametrização também foi satisfatória em aerofólios subsônicos como o S1223 que possui uma geometria mais complexa, entretanto os erros foram maiores que os outros perfis como era esperado. As figuras a seguir apresentam a parametrização do J5012 e do S1223:



**Figuras 3.9 e 3.10 - Aerofólio J5012 e o erro em função do grau da parametrização.**



Figuras 3.11 e 3.12 - Aerofólio S1223 e o erro em função do grau da parametrização.

## 4. Aplicação da Teoria de Controle nas equações de Euler e obtenção da equação do gradiente

### 4.1 O método adjunto e sua vantagem

Inicialmente parte-se de uma medida de mérito que será a base de minimização (ou maximização) do problema:

$$I = \int_C g(V) ds \quad (4.1)$$

Neste trabalho, será adotada uma medida de mérito definida como a diferença entre a distribuição de pressão na superfície do aerofólio e a distribuição de pressão desejada:

$$I = \int_C g(V) ds = \frac{1}{2} \int_C (p - p_t)^2 d\xi \quad (4.2)$$

Portanto, a medida de mérito também será função das variáveis de estado  $Q$  e da geometria  $F$  como a equação de Euler apresentada abaixo:

$$R(Q, F) = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (4.3)$$

e sua variação sendo:

$$\delta R = \frac{\partial R}{\partial Q} \delta Q + \frac{\partial R}{\partial F} \delta F = 0 \quad (4.4)$$

Para ligar a medida de mérito com as equações de Euler, introduz-se a mesma como uma restrição do problema através dos multiplicadores de Lagrange:

$$\delta I = \frac{\partial I^T}{\partial Q} \delta Q + \frac{\partial I^T}{\partial F} \delta F - \psi^T \left( \frac{\partial R}{\partial Q} \delta Q + \frac{\partial R}{\partial F} \delta F \right) \quad (4.5)$$

Rearranjando os termos:

$$\delta I = \left( \frac{\partial I^T}{\partial Q} - \psi^T \frac{\partial R}{\partial Q} \right) \delta Q + \left( \frac{\partial I^T}{\partial F} - \psi^T \frac{\partial R}{\partial F} \right) \delta F \quad (4.6)$$

A grande vantagem do método adjunto é justamente a possibilidade de executar um ciclo de otimização sem ter dependência do escoamento, ou seja, independente de  $\delta Q$ , para isso, escolhe-se  $\psi$  para zerar o primeiro termo da equação (4.6):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R}{\partial Q} \end{bmatrix}^T \psi = \frac{\partial I}{\partial Q} \quad (4.7)$$

Logo, tem-se que:

$$\delta I = \left( \frac{\partial I^T}{\partial F} - \psi^T \frac{\partial R}{\partial F} \right) \delta F = G \delta F \quad (4.8)$$

Com a parametrização desenvolvida na seção 3, os parâmetros  $ak_i$  se tornam os parâmetros de controle de projeto, de tal forma que esses valores seriam ajustados de forma a minimizar (ou maximizar) o problema. O foco do problema irá se concentrar então no cálculo de  $\frac{\partial I}{\partial ak}$ , que é o gradiente de sensibilidade, obtido a partir da equação (4.8).

Observa-se então que se houvesse a dependência do escoamento na resolução da otimização, haveria a necessidade de se calcular também o gradiente de sensibilidade  $\frac{\partial Q}{\partial ak}$  que custaria mais de uma resolução do escoamento. Para um eventual aumento do número de parâmetros, o custo computacional torna-se muito alto.

## 4.2 Aplicação das equações de Euler como restrição ao problema

Com as equações de Euler em coordenadas generalizadas na forma estacionária, a restrição do problema fica a seguinte:

$$I_C = \int_D \psi_\alpha \frac{\partial F^k}{\partial \zeta^k} d\mathcal{V} = 0 \quad (4.9)$$

E a sua variação escrita da seguinte forma:

$$\delta I_C = \int_D \psi_\alpha \frac{\partial(\delta F_\alpha^k)}{\partial \zeta^k} dV = \int_D \frac{1}{J} \left( J \psi_\alpha \frac{\partial(\delta F_\alpha^k)}{\partial \zeta^k} \right) dV \quad (4.10)$$

Onde J é o Jacobiano de mudança de coordenada cartesiana para a generalizada. Utilizando a regra do produto das derivadas:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta^k} (J \psi_\alpha \delta F_\alpha^k) = J \psi_\alpha \frac{\partial(\delta F_\alpha^k)}{\partial \zeta^k} + \delta F_\alpha^k \frac{\partial(J \psi_\alpha)}{\partial \zeta^k} \quad (4.11)$$

E substituindo na equação (4.10), tem-se que:

$$\begin{aligned} \delta I_C &= \int_D \psi_\alpha \frac{\partial(\delta F_\alpha^k)}{\partial \zeta^k} dV = \int_D \frac{1}{J} \left( \frac{\partial}{\partial \zeta^k} (J \psi_\alpha \delta F_\alpha^k) - \delta F_\alpha^k \frac{\partial(J \psi_\alpha)}{\partial \zeta^k} \right) dV = \\ &= \int_D \frac{1}{J} \left( \frac{\partial}{\partial \zeta^k} (J \psi_\alpha \delta F_\alpha^k) \right) dV - \int_D \frac{1}{J} \left( \delta F_\alpha^k \frac{\partial(J \psi_\alpha)}{\partial \zeta^k} \right) dV = \\ &= \int_D \nabla \cdot (\psi_\alpha \delta F_\alpha^k) dV - \int_D \frac{1}{J} \left( \delta F_\alpha^k \frac{\partial(J \psi_\alpha)}{\partial \zeta^k} \right) dV \end{aligned} \quad (4.12)$$

Recorrendo novamente ao cálculo e aplicando o teorema de Gauss na primeira integral e passando ela para o contorno do domínio:

$$\delta I_C = \int_{\partial D} \psi_\alpha \delta F_\alpha^k n_k dV - \int_D \frac{1}{J} \left( \delta F_\alpha^k \frac{\partial(J \psi_\alpha)}{\partial \zeta^k} \right) dV \quad (4.13)$$

Sabe-se que a medida de mérito de uma forma geral é dada por:

$$I = \int_C g(V) dS \quad (4.14)$$

Aplicando a regra da cadeia:

$$\frac{\partial I}{\partial Q} = \int_C \frac{\partial g}{\partial V_\alpha} \frac{\partial V_\alpha}{\partial Q_\beta} dS = \int_C \frac{\partial g}{\partial Q_\beta} dS = \int_C \frac{\partial g}{\partial Q_\beta} \frac{dS}{\partial \xi} d\xi \quad (4.15)$$

Então finalmente a variação da medida de mérito ficará da forma:

$$\delta I = \int_C \frac{\partial g}{\partial Q} \delta Q \frac{dS}{d\zeta} d\zeta + \int_C g \delta \left( \frac{dS}{d\zeta} \right) d\zeta \quad (4.16)$$

Definindo a função objetivo aumentada  $I_A = I + I_C$  (4.17), sua variação será:

$$\delta I_A = \delta I + \delta I_C \quad (4.18)$$

Podem-se substituir as variações de (4.10) e (4.14) na equação (4.18) ficando com:

$$\begin{aligned} \delta I_A = & \int_C \frac{\partial g}{\partial Q} \delta Q \frac{dS}{d\zeta} d\zeta + \int_C g \delta \left( \frac{dS}{d\zeta} \right) d\zeta - \int_D \delta F_\alpha^k \frac{1}{J} \frac{\partial(J\psi_\alpha)}{\partial \zeta^k} d\zeta + \\ & - \int_C \psi_\alpha \delta G_\alpha d\zeta + \int_B \psi_\alpha \delta G_\alpha d\zeta + \left( - \int_B \psi_\alpha \delta F_\alpha d\eta + \int_C \psi_\alpha \delta F_\alpha d\eta \right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Onde:

$$\delta G_\alpha|_{(c)} = J \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} \delta p \\ \frac{\partial \eta}{\partial y} \delta p \\ 0 \end{Bmatrix} + P \begin{Bmatrix} 0 \\ \delta \left( J \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \\ \delta \left( J \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \delta I_A = & \int_C \frac{\partial g}{\partial Q} \delta Q \frac{dS}{d\zeta} d\zeta + \int_C g \delta \left( \frac{dS}{d\zeta} \right) d\zeta - \int_D C_{\alpha\beta}^k \frac{1}{J} \frac{\partial(J\psi_\alpha)}{\partial \zeta^k} \delta Q dV + \\ & - \int_D \delta \left( J \frac{\partial \zeta^k}{\partial x^{j'}} \right) \frac{F_\alpha^{j'}}{J} \frac{\partial(J\psi_\alpha)}{\partial \zeta^k} dV - \int_C \left[ \psi_2 \left( J \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \psi_3 \left( J \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right] \frac{\partial p}{\partial Q} \delta Q dV + \\ & - \int_C \left[ \psi_2 \delta \left( J \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \psi_3 \delta \left( J \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right] p d\zeta + \int_B \psi_\alpha C_{\alpha\beta}^{(2)} \delta Q d\zeta + \int_B \psi_\alpha \delta \left( J \frac{\partial \eta}{\partial x^{j'}} \right) F_\alpha^{j'} d\zeta \end{aligned} \quad (4.21)$$

Reagrupando os termos, obtém-se a expressão geral do método adjunto:

$$\begin{aligned} \delta I_A = & \int_C \left\{ \frac{\partial g}{\partial Q} \frac{dS}{d\zeta} - \left[ \psi_2 \left( J \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \psi_3 \left( J \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right] \frac{\partial p}{\partial Q} \right\} \delta Q d\zeta + \int_B \psi_\alpha C_{\alpha\beta}^{(2)} \delta Q d\zeta + \\ & - \int_D C_{\alpha\beta}^{(2)} \frac{\partial (J \psi_\alpha)}{\partial \zeta^k} \delta Q d\zeta d\eta + \int_C \left\{ g \delta \frac{dS}{d\zeta} - \left[ \psi_2 \delta \left( J \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \psi_3 \delta \left( J \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right] p \right\} d\zeta + \\ & \int_B \psi_\alpha \delta \left( J \frac{\partial \eta}{\partial x^{j'}} \right) F_\alpha^{j'} d\zeta - \int_D \delta \left( J \frac{\partial \zeta^k}{\partial x^{j'}} \right) F_\alpha^{j'} \frac{(J \psi_\alpha)}{\partial \zeta^k} d\zeta d\eta \end{aligned}$$

(4.22)

Observam-se seis termos na equação (4.22). Os três primeiros são dependentes de  $\delta Q$  e portanto, devem ser zerados. O terceiro termo é a própria equação adjunta que, por definição, é igual a zero. Aplicando-se condições de contorno adequadas, zera-se o primeiro e o segundo termo, que são as equações resolvidas na parede (fólio) e no farfield.

Na integral do farfield (segundo termo da equação), envolve-se o produto escalar entre as variáveis adjuntas e as variações do fluxo normais a fronteira do domínio do escoamento. Portanto, para se ter a anulação desse termo, as variáveis adjuntas deverão ser ortogonais a todas as variações de fluxo realizáveis, ou seja  $C_{\alpha\beta}^{(2)} \delta Q$ . Desta forma, as variáveis adjuntas  $\psi'$ s devem ser interpretadas como forças de restrição generalizadas que respeitam as equações de conservação de massa, quantidade de movimento e energia em todas as variações de fluxo ao longo da fronteira.

Da maneira como o problema variacional foi construído, a mesma interpretação das variáveis adjuntas poderia na realidade, ser empregada no domínio do escoamento. É importante ressaltar que  $\delta Q$  deve ser realizável, ou seja, deve resolver as equações de Euler, sendo assim, a única maneira de tornar nula a integral é obter  $\psi'$ s que solucionem as equações adjuntas.

A analogia que pode ser feita, é a de minimizar o trabalho virtual das forças generalizadas de vínculo  $\psi'$ s, assim assegurando que a trajetória do sistema no espaço de estado é sempre realizável.

Os outros três termos da equação (4.22) são os termos referentes ao cálculo do gradiente. Considerando que os três primeiros termos da equação serão nulos, ficamos então com a variação da função objetivo da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \delta I_A = & \int_C \left\{ g \delta \frac{dS}{d\zeta} - \left[ \psi_2 \delta \left( J \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \psi_3 \delta \left( J \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right] p \right\} d\zeta \\ & + \int_B \psi_\alpha \delta \left( J \frac{\partial \eta}{\partial x^{j'}} \right) F_\alpha^{j'} d\zeta - \int_D \delta \left( J \frac{\partial \zeta^k}{\partial x^{j'}} \right) F_\alpha^{j'} \frac{(J\psi_\alpha)}{\partial \zeta^k} d\zeta d\eta \end{aligned} \quad (4.23)$$

O segundo termo do gradiente (4.23) torna-se nulo, pois na região do farfield, tem-se que  $\delta \left( J \frac{\partial \eta}{\partial x^{j'}} \right) = 0$ , já que as mudanças mais significativas da malha ocorrem próximas ao aerofólio. Também observa-se que  $\frac{dS}{d\zeta} = 1$  na parede, e assim sua variação será nula. Logo, o gradiente reduz-se para:

$$\delta I_A = - \int_C \left\{ \left[ \psi_2 \delta \left( J \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \psi_3 \delta \left( J \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right] p \right\} d\zeta - \int_D \delta \left( J \frac{\partial \zeta^k}{\partial x^{j'}} \right) F_\alpha^{j'} \frac{(J\psi_\alpha)}{\partial \zeta^k} d\zeta d\eta \quad (4.24)$$

O próximo passo será uma manipulação matemática que irá mudar a integral do segundo termo que está em todo domínio apenas para uma integral na parede, ou seja, no aerofólio. O resultado que a dedução produz é o seguinte:

$$\begin{aligned} - \int_D \delta \left( J \frac{\partial \zeta^k}{\partial x^{j'}} \right) F_\alpha^{j'} \frac{(J\psi_\alpha)}{\partial \zeta^k} d\zeta d\eta = & - \int_B \psi_\alpha C_{\alpha\beta}^{(2)} \delta Q^* d\xi + \int_D C_{\alpha\beta}^i \frac{\partial}{\partial \zeta^i} (J\psi_\alpha) \delta Q d\zeta d\eta + \\ & \int_C \psi_\alpha \left( \delta S_{j'}^2 F_\alpha^{j'} + C_{\alpha\beta}^{(2)} \delta Q \right) d\zeta \end{aligned} \quad (4.25)$$

Os primeiros dois termos serão adicionados aos termos referentes ao farfield e a equação adjunta para também serem zerados. O terceiro termo estará incluso no cálculo do gradiente formando assim sua equação:

$$\delta I_A = \int_C \psi_\alpha (\delta S_{j'}^2 F_\alpha^{j'} + C_{\alpha\beta}^{(2)} \delta Q) d\zeta - \int_C \left\{ \left[ \psi_2 \delta \left( J \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \psi_3 \delta \left( J \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right] p \right\} d\zeta \quad (4.26)$$

Expandindo o primeiro termo, onde:

$$S_{j'}^2 = J \frac{\partial \eta}{\partial x^{j'}} \quad (4.27) \text{ e } \delta I_A = \frac{\partial I_A}{\partial a_k} \delta a_k \quad (4.28)$$

Obtém-se a equação fundamental do gradiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial a_k} = & \int_C \varphi_\alpha \left[ \frac{\partial}{\partial a_k} \left( J \frac{\partial \zeta^2}{\partial x^{j'}} \right) F_\alpha^{j'} + C_{\alpha\beta}^2 \frac{\partial Q}{\partial \zeta^p} \left( \frac{\partial \zeta^p}{\partial a_k} \right) \right] d\zeta^1 \\ & - \int_C p \left[ \varphi_2 \frac{\partial}{\partial a_k} \left( J \frac{\partial \zeta^2}{\partial x^{1'}} \right) + \varphi_3 \frac{\partial}{\partial a_k} \left( J \frac{\partial \zeta^2}{\partial x^{2'}} \right) \right] d\zeta^1 \end{aligned} \quad (4.29)$$

## 5. Cálculo do gradiente

### 5.1 Equação fundamental e suas variáveis

Utilizando-se de toda a fundamentação do método adjunto apresentada no capítulo 4, foi possível obter a equação que caracteriza a direção de busca para cada variável de projeto, ou seja, qual a variação desse parâmetro para se buscar o ponto de ótimo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial ak} = & \int_c \varphi_\alpha \left[ \frac{\partial}{\partial ak} \left( J \frac{\partial \zeta^2}{\partial x^{j'}} \right) F_\alpha^{j'} + C_{\alpha\beta}^2 \frac{\partial Q}{\partial \zeta^p} \left( \frac{\partial \zeta^p}{\partial ak} \right) \right] d\zeta^1 \\ & - \int_c p \left[ \varphi_2 \frac{\partial}{\partial ak} \left( J \frac{\partial \zeta^2}{\partial x^{1'}} \right) + \varphi_3 \frac{\partial}{\partial ak} \left( J \frac{\partial \zeta^2}{\partial x^{2'}} \right) \right] d\zeta^1 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Onde:

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} : \text{Variáveis adjuntas,}$$

$$\zeta = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} : \text{Coordenadas generalizadas (seção 5.2.1)}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \text{Coordenadas cartesianas, } F_\alpha = \begin{pmatrix} F_\alpha^x = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (e + p)u \end{pmatrix} \\ F_\alpha^y = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (e + p)v \end{pmatrix} \end{pmatrix} : \text{Vetor de fluxos}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix} : \text{Vetor de estado}$$

## 5.2 Obtenção dos termos para o cálculo da equação

A partir da equação fundamental descrita na seção 5.1, serão obtidos os termos para o cálculo da função em cada ponto para uma posterior integração numérica. Inicialmente será feito uma expansão dos termos compactados através de índices para apresentar a equação com todos os seus termos presentes. Partindo da equação fundamental (4.29):

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial ak} &= \int_c \varphi_\alpha \left[ \frac{\partial}{\partial ak} \left( J \frac{\partial \zeta^2}{\partial x^{j'}} \right) F_\alpha^{j'} + C_{\alpha\beta}^2 \frac{\partial Q}{\partial \zeta^p} \left( \frac{\partial \zeta^p}{\partial ak} \right) \right] d\zeta^1 \\ &- \int_c p \left[ \varphi_2 \frac{\partial}{\partial ak} \left( J \frac{\partial \zeta^2}{\partial x^{1'}} \right) + \varphi_3 \frac{\partial}{\partial ak} \left( J \frac{\partial \zeta^2}{\partial x^{2'}} \right) \right] d\zeta^1 \end{aligned}$$

Com os termos identificados na seção 4.1, a expansão pode ser feita resultando em:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial ak} &= \int_c \varphi_\alpha \left[ \frac{\partial}{\partial ak} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) F_\alpha^x + \frac{\partial}{\partial ak} \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) F_\alpha^y + C_{\alpha\beta}^2 \left( \frac{\partial Q}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial ak} \right) + \frac{\partial Q}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \eta}{\partial ak} \right) \right) \right] d\zeta + \\ &- \int_c p \left[ \varphi_2 \frac{\partial}{\partial ak} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \varphi_3 \frac{\partial}{\partial ak} \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right] d\zeta \end{aligned} \quad (5.1)$$

Aplicando a regra da cadeia no termo  $C_{\alpha\beta}^2 \left( \frac{\partial Q}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial ak} \right) + \frac{\partial Q}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \eta}{\partial ak} \right) \right)$  finalmente chegamos a equação fundamental do gradiente expandida:

$$\frac{\partial I}{\partial ak} = \int_c \varphi_\alpha \left[ \frac{\partial}{\partial ak} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) F_\alpha^x + \frac{\partial}{\partial ak} \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) F_\alpha^y + C_{\alpha\beta}^2 \left( \frac{\partial Q}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial ak} \right) + \frac{\partial Q}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial ak} \right) \right) \right] d\zeta +$$

$$- \int_c p \left[ \varphi_2 \frac{\partial}{\partial ak} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \varphi_3 \frac{\partial}{\partial ak} \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right] d\zeta \quad (5.2)$$

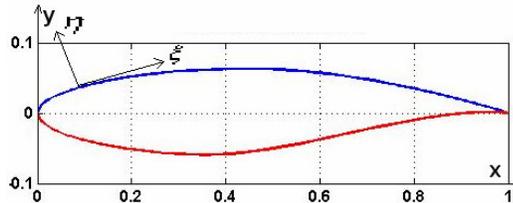
A tabela abaixo apresenta separadamente os termos que dependem exclusivamente da geometria e os termos que dependem também da resolução do escoamento e das equações adjuntas:

Exclusivamente geométricos (seção 5.2.1)	Dependentes do escoamento e da solução adjunta (seção 5.2.2)
$\frac{\partial}{\partial ak} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right), \frac{\partial}{\partial ak} \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right), \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial ak} \right), \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial ak} \right)$	$\varphi_\alpha, F_\alpha^x, F_\alpha^y, C_{\alpha\beta}^2, \frac{\partial Q}{\partial \zeta}, \frac{\partial Q}{\partial \eta}, p$

**Tabela 5.1. Variáveis dependentes exclusivamente da geometria e variáveis dependentes da solução do escoamento e da solução adjunta.**

### 5.2.1 Termos exclusivamente geométricos

Para os termos da tabela 5.1, calcularam-se todos os parâmetros necessários para a sua obtenção. A figura abaixo descreve as direções normal ( $\eta$ ) e tangencial ( $\xi$ ) do aerofólio e suas componentes nas direções x e y. Para as malhas não estruturadas, este sistema generalizado é um sistema cartesiano rotacionado por um ângulo finito  $\theta$  como apresentado na figura 5.1:



**Figura 5.1. Descrição das direções generalizadas (normal e tangencial)**

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\text{sen}\theta & \text{cos}\theta \\ \text{cos}\theta & \text{sen}\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

A partir dessas relações acima, pode-se verificar através de decomposição vetorial que:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\text{sen } \theta$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \text{cos } \theta \quad (5.4)$$

Para a obtenção do seno e do cosseno do ângulo  $\theta$ , utilizam-se as relações geométricas com a tangente de  $\theta$  que é a derivada da curva do aerofólio em relação a  $x$ , logo:

$$\text{tg } \theta = \frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{x}} = C'(\hat{x})B(\hat{x}) + C(\hat{x})B'(\hat{x}) \quad (5.5)$$

Onde  $C'(\hat{x})$  é a derivada da função de classe e  $B(\hat{x})$  é a derivada dos polinômios de Bernstein e suas equações estão apresentadas a seguir:

$$C'(\hat{x}) = N_1(\hat{x})^{N1-1}(1-\hat{x})^{N2} - N_2(\hat{x})^{N1}(1-\hat{x})^{N2-1} \quad (5.6)$$

$$B'(\hat{x}) = \sum_{i=0}^n ak_i \binom{n}{i} \left[ -(n-i)(1-\hat{x})^{n-i-1}(\hat{x})^i + i(1-\hat{x})^{n-i}(\hat{x})^{i-1} \right] \quad (5.7)$$

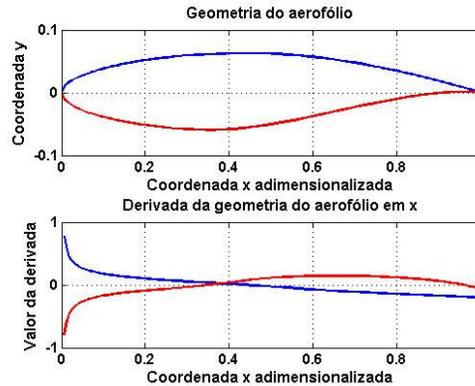


Figura 5.2. Derivada da curva do aerofólio em relação a  $x$  (Perfil RAE2822).

Obtida a derivada da curva, pode-se finalmente calcular o seno e cosseno de  $\theta$  a partir de:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta &= \frac{\operatorname{tg} \theta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \theta}} = -\frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \operatorname{cos} \theta &= \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \theta}} = \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Para facilidade de apresentação das equações, será adotado que  $u = \frac{\partial y}{\partial x} = \operatorname{tg} \theta$ . Os próximos termos a serem obtidos serão  $\frac{\partial}{\partial a k_i} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)$  e  $\frac{\partial}{\partial a k_i} \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)$ . Do conjunto de equações (5.8), obtém-se as equações:

$$\frac{\partial}{\partial a k_i} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = -\frac{\partial u}{\partial a k_i} \frac{1}{(1+u^2)^{1.5}} \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial a k_i} \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = -\frac{\partial u}{\partial a k_i} \frac{u}{(1+u^2)^{1.5}} \quad (5.10)$$

O termo  $\frac{\partial u}{\partial a k_i}$  pode ser facilmente obtido a partir da equação (5.7), resultando

em:

$$\frac{\partial u}{\partial a k_i} = C'(\hat{x}) \binom{n}{i} (1-\hat{x})^{n-i} (\hat{x})^i + C(\hat{x}) \left[ -(n-i)(1-\hat{x})^{n-i-1} (\hat{x})^i + i(1-\hat{x})^{n-i} (\hat{x})^{i-1} \right] \quad (5.11)$$

Da mesma forma, pode-se obter  $\frac{\partial y}{\partial a k_i}$  a partir da equação (3.1):

$$\frac{\partial y}{\partial a k_i} = C(\hat{x}) \binom{n}{i} (1-\hat{x})^{n-i} (\hat{x})^i \quad (5.12)$$

A equação (5.12) será utilizada para o cálculo dos produtos  $\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial ak}\right)$  e  $\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial ak}\right)$ . Geometricamente, pode-se verificar que  $\frac{\partial \zeta}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x}$ , e assim, obter todos os termos geométricos pertinentes.

## 5.2.2 Termos dependentes do escoamento e das soluções adjuntas

Os outros parâmetros presentes na equação do gradiente dependem além da geometria do aerofólio, das propriedades do fluido que são obtidas na resolução do escoamento no “solver” e também da resolução das equações adjuntas. Os termos  $F_\alpha^x, F_\alpha^y$  e  $p$  são obtidos diretamente das propriedades calculadas e  $\varphi_\alpha$  é a solução da equação adjunta e também é obtida diretamente. Já  $C_{\alpha\beta}^2, \frac{\partial Q}{\partial \zeta}, \frac{\partial Q}{\partial \eta}$  são obtidos a partir dos procedimentos explicados abaixo.

O termo  $C_{\alpha\beta}^2$  é obtido da equação a seguir:

$$C_{\alpha\beta}^2 = \frac{\partial \eta}{\partial x} A_{\alpha\beta} + \frac{\partial \eta}{\partial y} B_{\alpha\beta} \quad (5.13)$$

Onde as matrizes  $A_{\alpha\beta}$  e  $B_{\alpha\beta}$  são dependentes exclusivamente do escoamento além de  $\frac{\partial \eta}{\partial x}$  e  $\frac{\partial \eta}{\partial y}$  que são obtidas na seção 5.2.1:

$$A_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5(\gamma-1)(u^2+v^2)-u^2 & -(\gamma-3)u & -(\gamma-1)v & (\gamma-1) \\ -uv & v & u & 0 \\ (\gamma-1)u(u^2+v^2)-\mu\left(\frac{e}{\rho}\right) & \gamma\left(\frac{e}{\rho}\right)-0.5(\gamma-1)(3u^2+v^2) & -(\gamma-1)uv & \mu \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

e

$$B_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -uv & v & u & 0 \\ 0.5(\gamma-1)(u^2+v^2)-v^2 & -(\gamma-1)u & -(\gamma-3)v & (\gamma-1) \\ (\gamma-1)v(u^2+v^2)-\gamma\left(\frac{e}{\rho}\right) & -(\gamma-1) & \gamma\left(\frac{e}{\rho}\right)-0.5(\gamma-1)(3u^2+v^2) & \gamma \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

As variáveis  $u, v, \rho, e, \gamma$  são respectivamente a velocidade na direção x, velocidade na direção y, massa específica, energia total e o índice de Mach.

Para os termos  $\frac{\partial Q}{\partial \zeta}$  e  $\frac{\partial Q}{\partial \eta}$ , utilizam-se novamente as relações geométricas entre as direções normal e tangencial com as direções x e y:

$$\frac{\partial Q}{\partial \zeta} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \frac{\partial Q}{\partial x} - \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) \frac{\partial Q}{\partial y} \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \eta} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) \frac{\partial Q}{\partial x} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \frac{\partial Q}{\partial y} \quad (5.17)$$

Onde:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial x} \\ \frac{\partial \rho}{\partial x} u + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial \rho}{\partial x} v + \rho \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial e}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (5.18) \quad \text{e} \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial y} \\ \frac{\partial \rho}{\partial y} u + \rho \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial \rho}{\partial y} v + \rho \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial e}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

As derivadas das propriedades do fluido em relação às direções x e y são obtidas a partir da resolução do escoamento através do “solver”.

## 6. Resultados do Método Adjunto

Com todos os códigos integrados, passou-se a validação do “loop”. Validou-se o projeto inverso aplicando como distribuição objetivo, uma curva conhecida de um aerofólio determinado. Para validar o código, o método deveria alterar a geometria para o aerofólio previamente especificado.

Adotaram-se geometrias públicas cujos dados são muito difundidos na literatura. Com isso, possuía-se material suficiente para a validação do código.

Três casos foram realizados para validação. Dois transônicos e um subsônico. Nos casos transônicos, utilizaram-se o RAE2822 e o NACA0012, alternando-os como geometria inicial e o objetivo. Já para o caso subsônico, buscou-se verificar o comportamento do código para dois perfis muito conhecidos: SD7062 e CLARK Y (aerofólio do DC-3, uma das aeronaves mais famosas da história).

De forma a mostrar aplicações com o código, outros três casos foram estudados. O primeiro tratou da otimização da distribuição de pressão do perfil supercrítico Whitcomb ISA, o segundo buscou eliminar o pico de sucção do perfil SD7062 e o terceiro foi a otimização do perfil FX74 para o uso na aeronave que representou a Escola Politécnica na competição SAE Aerodesign.

### **Caso 1: RAE2822 para NACA0012**

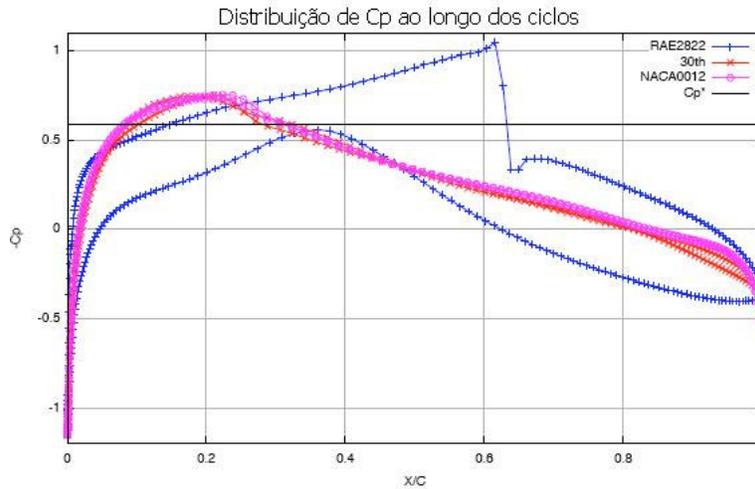
**Mach: 0,75**

**Ângulo de ataque: 0°**

Neste primeiro caso, partiu-se de uma geometria e distribuição de pressões assimétricas. Buscou-se avaliar no código a capacidade de se construir uma distribuição simétrica (Geometria e Pressão) já que o objetivo era o perfil NACA0012.

Outro ponto que foi observado foi a capacidade de eliminação das ondas de choque. Como o “solver” retratava as ondas de choque adequadamente, verificou-se então a capacidade do método adjunto na abordagem desse problema.

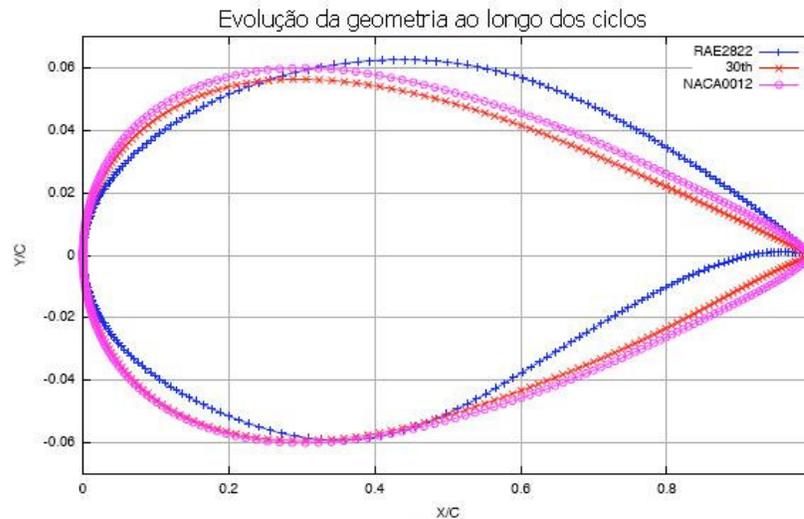
A figura 6.1 apresenta o resultado da distribuição de pressão ( $C_p$ ):



**Figura 6.1 – Evolução da distribuição de Cp ao longo da corda**

Verificou-se que o código recuperou a distribuição de Cp do aerofólio NACA0012 (curva em magenta em comparação com a vermelha) partindo do RAE2822 (curva em azul).

Para melhor ilustrar os resultados, apresenta-se a seguir a evolução da geometria do aerofólio mostrando que o código recuperou a geometria, inclusive com a simetria do perfil.



**Figura 6.2 Evolução da geometria ao longo dos ciclos**

Observou-se também uma dificuldade do código para modificação da geometria na região do bordo de fuga. Acredita-se que o motivo seja a baixa contribuição dessa região para o cálculo da integral da função de mérito, implicando em valores de gradientes mais baixos, tornando o processo de alteração mais lento.

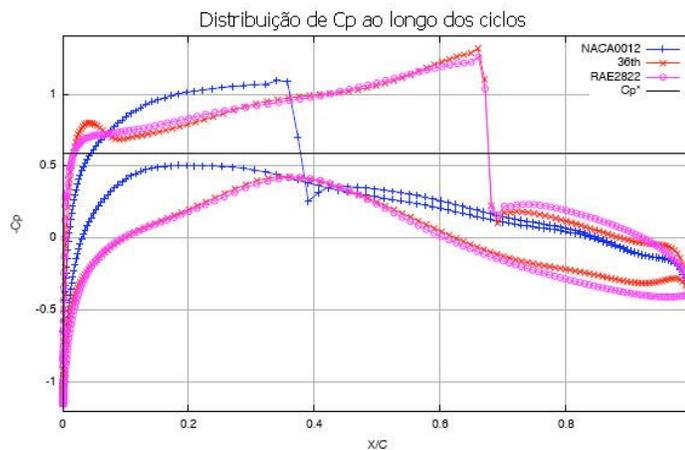
## Caso 2: NACA0012 para RAE2822

**Mach: 0,75**

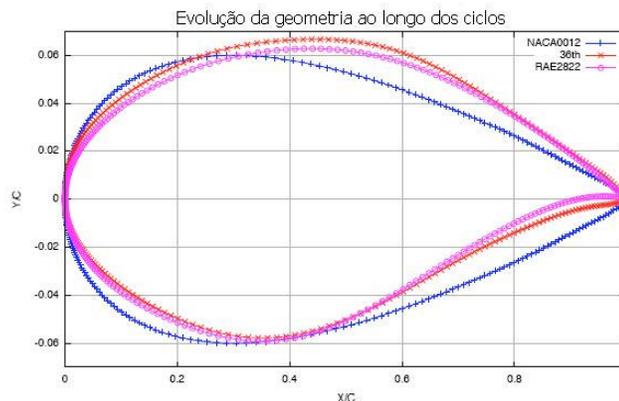
**Ângulo de ataque: 1°**

O teste seguinte realizou o caminho inverso do primeiro. Partiu-se de um perfil simétrico e buscou-se o RAE2822. O objetivo deste caso foi verificar a capacidade do método adjunto em posicionar a onda de choque. Para o ângulo de ataque de 1°, observou-se que o perfil NACA0012 possui uma onda de choque na parte anterior do aerofólio e o perfil RAE2822 na parte posterior.

Nessas condições, o método adjunto deverá posicionar a onda de choque na parte posterior, chegando ao perfil RAE2822. O caso em questão não apresenta nenhuma vantagem prática, já que irá chegar em uma onda de choque de intensidade maior. Entretanto este teste tem uma abordagem acadêmica importante, já que mostra que o método adjunto trata mais adequadamente a questão das ondas de choque em relação a outros métodos de otimização que apenas eliminam a onda de choque.



**Figura 6.3 – Evolução da distribuição de Cp ao longo da corda**



**Figura 6.4 – Evolução da geometria ao longo dos ciclos**

### Caso 3: CLARKY para SD7062

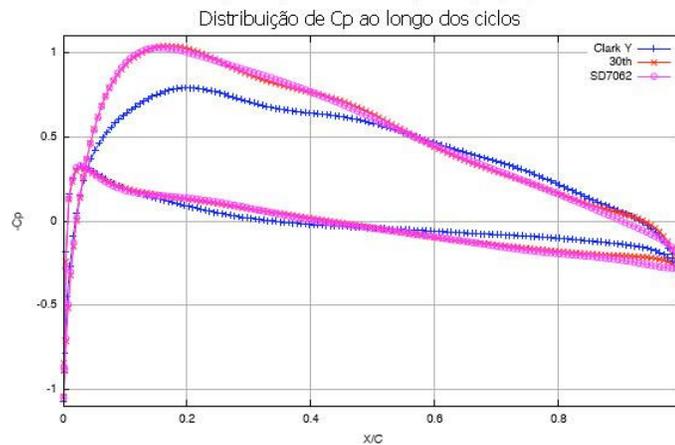
**Mach: 0,3**

**Ângulo de ataque: 0°**

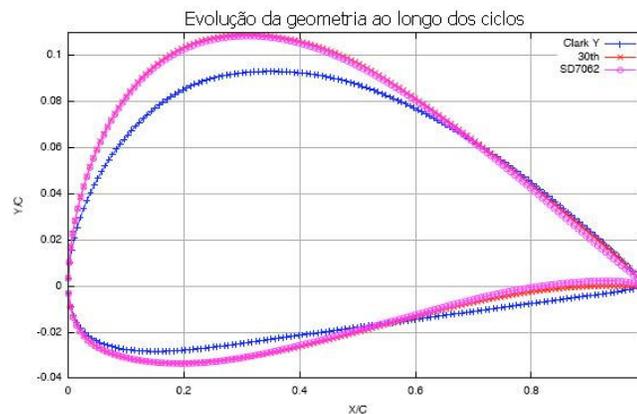
Este caso buscou uma validação para um número de Mach mais baixo no regime incompressível. Realizou-se então para Mach = 0,3 o projeto inverso entre o perfil CLARK Y e o SD7062.

Nesta faixa de número de Mach, já se percebe uma dificuldade na solução do problema devido a adimensionalização do código. A formulação das equações de Euler é mais adequada para números de Mach elevados, o que caracteriza então um mau condicionamento da matriz das variáveis de estado embora a teoria seja adequada para todos os regimes.

Em todas as simulações, o número de Mach não ultrapassou 0,43. Nesse regime os fatores referentes a compressibilidade são pouco importantes.



**Figura 6.5 – Evolução da Distribuição de Cp ao longo da corda**



**Figura 6.6 – Evolução da geometria ao longo dos ciclos**

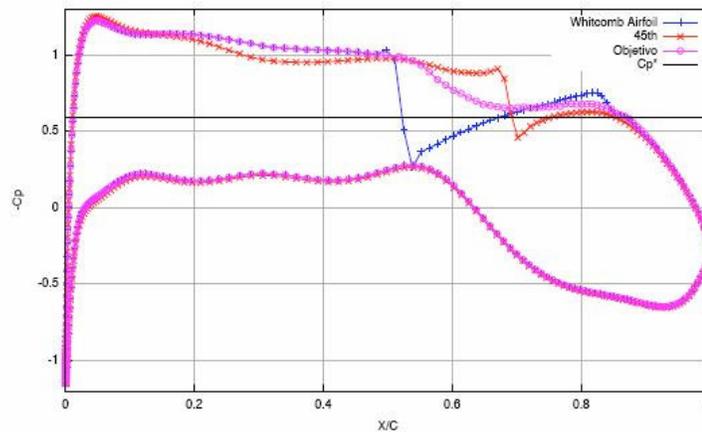
#### Caso 4: Whitcomb ISA

**Mach: 0,75**

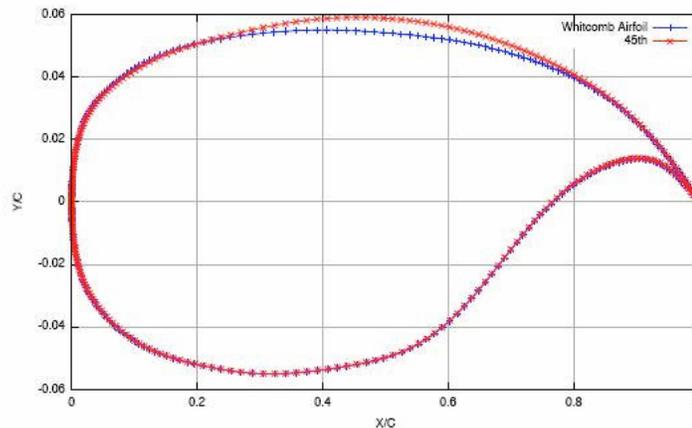
**Ângulo de ataque: 0°**

Iniciando uma primeira aplicação do método adjunto, analisou-se o perfil Whitcomb ISA a fim de diminuir a intensidade da onda de choque. Para isso, criou-se uma distribuição de pressão objetivo mais suavizada no extradorso, melhorando a recuperação de pressão na região.

Esta aplicação foi a primeira sem ter o conhecimento de que essa distribuição pudesse ser realizável, uma vez que não temos o perfil da distribuição objetivo. Esta análise é importante uma vez que será assim que o método será usado na indústria.



**Figura 6.7 – Evolução da Distribuição de  $C_p$  ao longo da corda**



**Figura 6.8 – Evolução da geometria ao longo dos ciclos**

Com essa suavização, duas vantagens foram vistas: a primeira foi à eliminação de parte do arrasto de onda produzido devido a diminuição da intensidade da onda de choque e a segunda foi o aumento do coeficiente de sustentação para o mesmo ângulo de ataque (de  $C_l = 0,8527$  para  $C_l = 0,8995$ ).

## Caso 5: SD7062

**Mach: 0,3**

**Ângulo de ataque: 0º**

Para o SD7062 foi realizada uma alteração na distribuição de pressão para diminuir o pico de sucção no intradorso, diminuindo assim o momento aerodinâmico do aerofólio. Essa mudança reduz o arrasto de trimagem da aeronave, uma vez que a força de sustentação necessária para a trimagem será menor.

Os valores do coeficiente de momento inicial e após as iterações são respectivamente  $C_{m0,25} = 0,00711$  e  $C_{m0,25} = -0,00027$  reduzindo portanto o momento produzido pela asa.

Nesta aplicação, observou-se que nem todo pico de sucção foi eliminado. Isso se deve a limitação do sistema de parametrização e não do método adjunto. Como a parametrização trata o extradorso e o intradorso separadamente, e conseqüentemente os valores da função de forma no bordo de ataque não são forçados a serem iguais ou próximos.

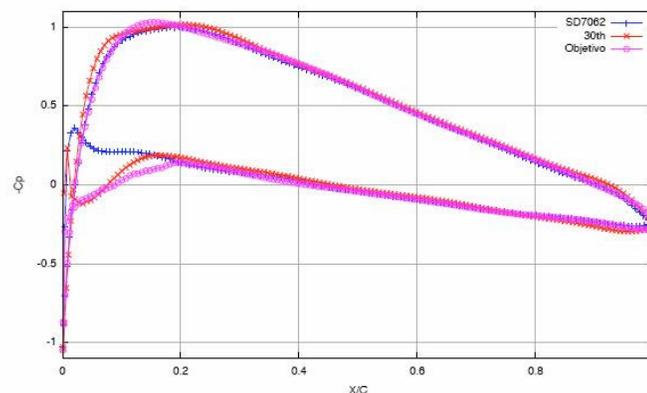


Figura 6.9 – Evolução da Distribuição de Cp ao longo da corda

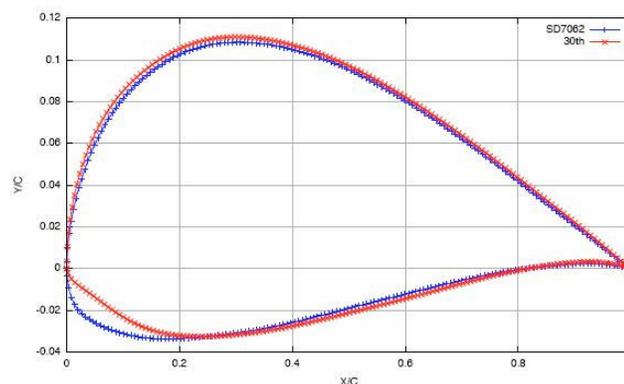


Figura 6.10 – Evolução da geometria ao longo dos ciclos

## Caso 6: FX74

Mach: 0,1

Ângulo de ataque: 3º

Nesta aplicação, foi verificada a capacidade do programa a um número de Mach mais baixo ( $M=0,1$ ). O objetivo foi à validação de uma análise preliminar que tinha sido feita pela equipe Poliacrive que representa a Escola Politécnica da USP na competição SAE Aerodesign.

A partir de softwares comerciais, projetou-se uma distribuição de  $C_p$  no ângulo desejado de tal maneira a melhorar as propriedades aerodinâmicas do aerofólio. Utilizando o método adjunto, verificou-se qual geometria teria aquela distribuição e comparou-se com o resultado dos métodos feitos anteriormente.

Observou-se que o método não conseguia recuperar totalmente a distribuição de pressão objetivo, principalmente o ponto de máxima sucção que ocorre na região de aproximadamente a 25% da corda. A resposta da geometria também teve diferenças especialmente no extradorso.

O que se verificou em análises posteriores é que o aerofólio projetado pelo método adjunto era mais eficiente do que as estimativas iniciais, e isso pode ser justificado que os métodos preliminares não eram eficazes em retratar uma distribuição de pressão em relação a uma certa geometria.

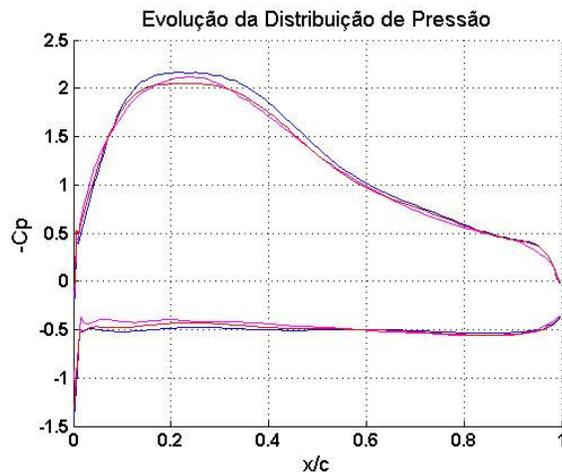
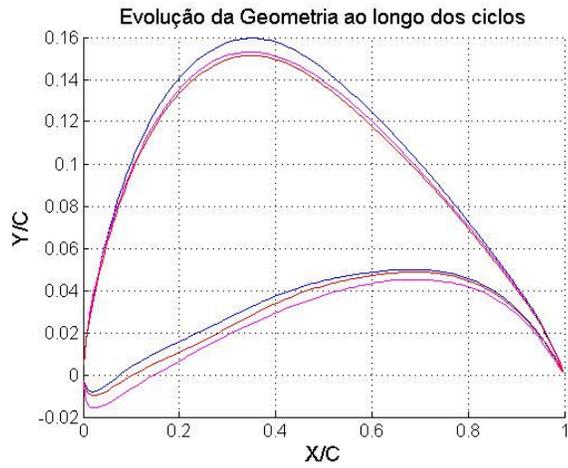


Figura 6.11 – Evolução da Distribuição de  $C_p$  ao longo da corda (Azul: FX74, Magenta: Objetivo e Vermelho: 30º ciclo)



**Figura 6.12 – Evolução da geometria ao longo dos ciclos (Azul: FX74, Magenta: Objetivo e Vermelho: 30º ciclo)**

## 7. Conclusão

A consolidação do método adjunto como uma ferramenta importante para o desenvolvimento de projetos aerodinâmicos é algo comprovado. Este método possui uma fundamentação teórica sólida e possui caráter multidisciplinar, passando pelas teorias de mecânica dos fluídos e termodinâmica, além de contar com o auxílio do cálculo diferencial e integral aliado a teoria de controle.

A fase de validação do código teve suas dificuldades, uma vez que lidar com programação computacional requer cuidados, sobretudo com um software com um código muito grande. A divisão do ciclo entre os membros do projeto global minimizou este problema, proporcionando validações intermediárias antes de certificar o ciclo como um todo.

Quanto à parametrização do aerofólio com os polinômios de Bernstein, ela se mostra muito eficaz para o problema em questão. Além de possuir erros muito pequenos na representação da geometria, ela se encaixa muito bem ao método adjunto, por possuir uma formulação relativamente simples de suas derivadas para o cálculo do gradiente. Outro ponto a se ressaltar é a condição de se parametrizar o aerofólio com poucos coeficientes, o que apenas maximiza a vantagem do método adjunto, por eliminar filtros para variações indesejadas da geometria.

Um ponto a ser analisado na parametrização é a criação de um vínculo entre os bordos de ataque do intradorso e do extradorso, garantindo que a segunda derivada na região seja contínua. Esse novo tipo de abordagem poderá implicar numa análise direta de um dos parâmetros mais importantes do aerofólio, que é o raio de curvatura do bordo de ataque.

No cálculo do gradiente, a formulação da parametrização proporcionou uma manipulação das equações que facilitou o cálculo de todos os termos do gradiente. Cada termo em questão possuía uma equação dependente apenas da geometria e das condições do escoamento, sendo necessário apenas substituir os valores. Logo, esta etapa do ciclo possui um custo computacional desprezível frente ao custo do código do escoamento e do código de solução das equações adjuntas.

As aplicações feitas para mostrar a capacidade do código confirmaram que seu uso na indústria pode ser viabilizado. Com a experiência prévia do projetista, é possível projetar uma distribuição de pressão realizável e o código trabalhar para se

chegar à geometria. É importante perceber que nem sempre uma distribuição de pressão é realizável e o código conseguirá apenas se aproximar do valor desejado.

O método adjunto também possui a versatilidade de se modificar a medida de mérito. Com isso, é possível maximizar outras relações, como maximização de  $C_l$ , minimização de  $C_d$ , maximização das relações  $C_l/C_d$  e  $C_l/C_m$ .

## 8. Bibliografia

- [1] FABIANI, L.F.V.R., 2003, "Simulação de bocais em escoamento compressível", EPUSP, S.Paulo, Brasil, 63p.
- [2] CONSTANTINO, C.A., 2006, "Análise e otimização aerodinâmica utilizando o método adjunto", EPUSP, S.Paulo, Brasil.
- [3] CHIEREGATTI, B.G., 2007, "Implementação do algoritmo de métrica variável na otimização aerodinâmica de bocais de empuxo para propulsão", 15 SIICUSP 2007 : anais São Carlos : Universidade de São Paulo, 2007, Brasil.
- [4] KULFAN, B.M., BUSSOLETTI, J.E., 2006, "Fundamental Parametric Geometry Representations for aircraft component shapes", Boeing Comercial Airplane group, Seattle, Washington, USA.
- [5] AZEVEDO, J. L. F.; DOURADO, W. M. C. Euler solutions of two dimensional flows using unstructured meshes. Anais do XI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica - XI COBEM, Azul, p. 189-192, Dez. 1991.
- [6] JAMESON, A., "Reduction of Adjoint Gradient Formula for Aerodynamic Shape Optimization Problems", Stanford University, Stanford, Califórnia, November 2003.
- [7] JAMESON, A.; MAVRIPLIS, D. Finite volume solution of the two-dimensional euler equations of gasdynamics. AIAA journal, v. 24, n. 4, p. 611-618, April 1986.
- [8] JAMESON, A.; SCHMIDT, W.; TURKEL, E. Numerical solutions of the euler equations by finite volume methods using runge-kutta time-stepping schemes. In: AIAA 14th Fluid and Plasma Dynamics Conference. Palo Alto, CA: [s.n.], 1981. AIAA Paper 81-1259
- [9] CEZE, M.A.B; Projeto inverso aerodinâmico utilizando o método adjunto aplicado as equações de Euler. Tese de mestrado, EPUSP, São Paulo, Brasil (2008).
- [10] HAYASHI, M.T; Projeto inverso aerodinâmico utilizando o método adjunto. Tese de mestrado, EPUSP, São Paulo, Brasil (2008).