

# APLICAÇÃO DOS GRAFOS DE LIGAÇÃO A ESCOAMENTOS UNIDIMENSIONAIS INCOMPRESSÍVEIS EM DUTOS

Sérgio de Paula Pellegrini

sergio.pellegrini@gmail.com

**Resumo.** Este artigo apresenta um exemplo de aplicação de uma teoria recente, nomeada BG-CFD.

Essa teoria integra aspectos de modelagem em grafos de ligação – bond graphs – e dinâmica dos fluidos computational, para a discretização do meio contínuo.

Escoamentos incompressíveis unidimensionais em dutos de paredes rígidas são explorados, desde o modelo em grafos de ligação até a simulação do comportamento do sistema.

Finalmente, são apresentados resultados e sugestões para o desenvolvimento futuro da área de pesquisa.

**Palavras chave:** BG-CFD, Grafos de ligação, Dinâmica dos fluidos computational, escoamento incompressível.

## 1. Introdução

A importância do estudo de escoamentos incompressíveis é indiscutível para a engenharia moderna. Isso pois, de acordo com White (2002), a maioria dos escoamentos de líquidos pode ser analisada como incompressível.

A dificuldade da obtenção de soluções algébricas para a solução de Navier-Stokes e para a equação de transmissão do calor — levando em conta os efeitos de convecção e difusão, além da perda de pressão de forma irreversível que acopla as duas equações — e o desenvolvimento vertiginoso da computação digital impulsionaram o desenvolvimento de métodos de discretização espacial.

Com relação à modelagem de sistemas físicos, uma teoria recente nomeada grafos de ligação (*bond graphs*), permite a representação simples e sem perda de generalidades de sistemas dinâmicos de parâmetros concentrados, mesmo para sistemas que envolvem diferentes domínios energéticos.

Além disso, a teoria dos grafos de ligação permite, através de um procedimento ordenado, a atribuição de condições de contorno de uma forma unívoca, proporcionando a obtenção de um conjunto de equações que sempre representará um problema que coordenará as condições de contorno de forma coerente, condição necessária para que o problema seja bem posto, de acordo com Fletcher (1991).

Tendo em vista que a modelagem com grafos de ligação permite uma representação compacta de sistemas complexos, uma metodologia que integre aspectos de grafos de ligação e métodos de discretização poderia ser útil, principalmente para aplicações em que mais de uma forma de trabalho deva ser levada em consideração para a obtenção de modelos com comportamentos realistas.

Baliño (2005) apresentou a teoria que será usada como principal ferramenta neste trabalho.

No entanto, pesquisadores da área de dinâmica dos fluidos computational – CFD, na sigla inglesa – tendem a se fechar quanto ao uso de uma nova ferramenta de modelagem. Por outro lado, tendo em vista que a teoria dos grafos de ligação é tipicamente usada para sistemas de parâmetros concentrados, a aplicação a sistemas com parâmetros distribuídos ainda é vista com ressalvas pelos usuários dos grafos.

Nesse sentido, este trabalho se propõe a, partindo de um modelo em grafos de ligação, gerar um programa computacional que simule o comportamento de escoamentos unidimensionais incompressíveis em dutos de paredes rígidas.

Os aspectos teóricos dos grafos de ligação podem ser vistos em Karnopp et al (2000) e Borutzky (2004).

## 2. O escoamento incompressível unidimensional em um duto

O modelo em grafos de ligação para o escoamento unidimensional em um duto é apresentado na Fig. 1. O modelo ainda não tem causalidade completamente atribuída.

A atribuição de causalidade é a determinação de quais variáveis são dependentes e quais são independentes para cada elemento conectado no modelo. De uma forma prática, é com esse procedimento que se determina a inserção das condições de contorno.

### 2.1 O equacionamento – causalidade integral completa

A Fig. 2 mostra a junção do tipo 1 em causalidade integral. Dessa parte do modelo, duas equações podem ser obtidas: a conservação de massa e a conservação de momento linear.

A equação da conservação de massa é denotada pelo próprio fato de a junção ser do tipo 1: todos os elementos conectados a ela tem a mesma vazão. Portanto, para a vazão:

$$Q(x, t) = Q(t) \tag{1}$$

Já a equação de conservação do momento linear é obtida uma vez que na junção 1 os esforços – pressões, no caso –

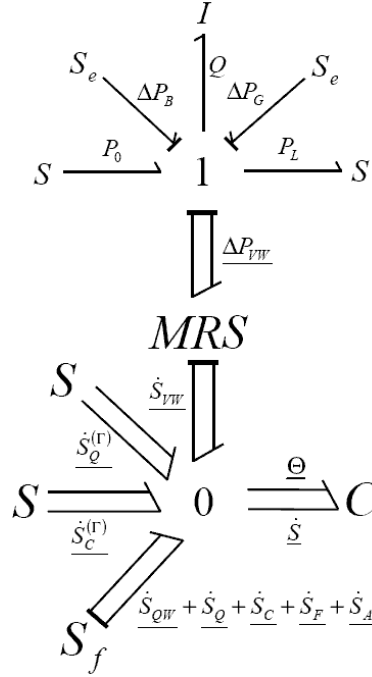


Figura 1. Grafo de ligação para escoamento incompressível unidimensional em duto sem causalidade completamente atribuída (figura extraída de Baliño (2005))

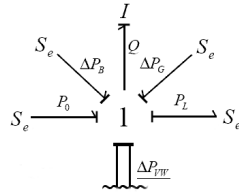


Figura 2. Porto de pressão em causalidade integral

somados algebricamente resultam em zero. Em linguagem matemática:

$$0 = -I \frac{dQ}{dt} + P_0 - P_L + \Delta P_G + \Delta P_B - \Delta P_{VW} \quad (2)$$

Definindo cada termo de acordo, esta equação representa o balanço de momento linear, apresentado na Eq. (3). É considerado unitário o fator de peso dos fluxos de momento linear ou energia cinética através da área de passagem e são desprezadas tensões viscosas normais. A equação ainda é multiplicada pela velocidade e integrada no domínio.

$$\frac{\rho_0}{A} \dot{Q} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho_0 G_x - \frac{\rho_0 Q^2}{A} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{A} \right) - \tau_{wx} \frac{P_w}{A} \quad (3)$$

Na junção 0, as uniões múltiplas – *multibonds* – apresentam uma notação compacta, onde o modelo é igual para cada elemento. A Fig. 3 mostra esse porto em causalidade integral completa.

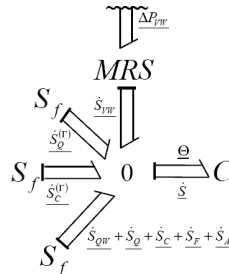


Figura 3. Porto de entropia em causalidade integral completa

O balanço de energia térmica pode ser obtido através da soma de esforços em cada junção 0. Como diversos elementos estão sendo modelados, será utilizado um tratamento vetorial. A equação resultante pode ser escrita como:

$$\underline{0} = -\underline{\Theta} \cdot \underline{\dot{S}} - \underline{W}_Q^{(\Gamma)} - \underline{W}_C^{(\Gamma)} - \underline{W}_{QW} + \underline{W}_Q + \underline{W}_C + \underline{W}_F + \underline{W}_A + \underline{W}_{VW} \quad (4)$$

Cada termo é definido de uma forma particular. Entretanto, como essas definições já foram apresentadas anteriormente, será dito apenas que serão utilizados uma discretização no formato apresentado na Eq. (5) e funções de peso para a entropia,  $w_{Sl}(x, t)$ , de forma similar ao formalismo de Petrov-Galerkin para o método de elementos finitos.

$$s_v(x, t) = \sum_{l=1}^n s_{vl}(t) \varphi_{Sl}(x) = \underline{s}_v^T \cdot \underline{\varphi}_S \quad (5)$$

A Eq. (6) modela a conservação de energia térmica na forma diferencial, considerando novamente unitário o fator de peso dos fluxos de momento linear ou energia cinética através da área de passagem e desprezando tensões viscosas normais.

$$\theta \frac{\partial s_v}{\partial t} = -q_w \frac{P_h}{A} - \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (q_x A) - \frac{Q}{A} \frac{\partial}{\partial x} (\theta s_v) + \rho_0 \Phi + \frac{Q}{A} s_v \frac{\partial \theta}{\partial x} + \tau_{wx} Q \frac{P_w}{A^2} \quad (6)$$

Para a obtenção da Eq. (4), deve-se multiplicar a Eq. (6) pelas funções de peso  $w_{Sl}(x, t)$ , integrar no domínio em análise e aplicar o Teorema de Gauss.

É interessante ressaltar que há ainda um outro passo intermediário, já que o equacionamento que deriva do grafo refletiria a soma algébrica de fluxos de entropia. Esse passo intermediário consiste em multiplicar a equação por  $\underline{\Theta}$  e está embutido na própria definição dos termos parciais.

## 2.2 O equacionamento – outras causalidades

O porto de pressão também pode assumir causalidade derivativa, em que seriam impostos a vazão em um contorno e uma pressão de referência em outro. Há, portanto, duas possibilidades de causalidade derivativa. Ambas alternativas de atribuição de causalidade nessa parte do grafo são apresentadas na Fig. 4.

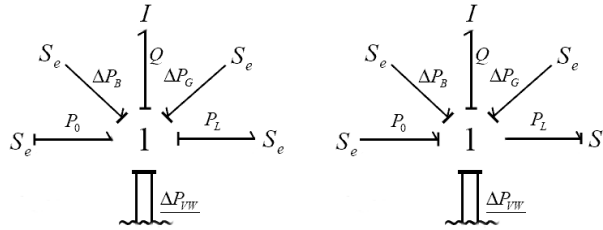


Figura 4. Porto de inércia do modelo para escoamento incompressível em duto com as duas possibilidades de causalidades derivativas

A pressão no contorno em que a vazão é imposta é determinada por uma relação algébrica válida tempo a tempo. Isto configura o comportamento de um sistema instantâneo.

Já o porto de entropia pode assumir causalidades mistas, em que um dos nós resulta em causalidade integral e outro em causalidade derivativa.

O nó em causalidade integral será equacionado da forma apresentada anteriormente.

O nó em causalidade derivativa tem um comportamento análogo ao apresentado pelo porto de pressão quando em causalidade derivativa, isto é, ele também passa a ser um sistema instantâneo, em que a temperatura é fixada e a taxa de entropia é determinada.

Para o porto de entropia, o caso com causalidade derivativa nos dois contornos do duto não faz muito sentido fisicamente. Isso representaria fixar as temperaturas na entrada e na saída do duto.

## 3. Funções de teste

Para o problema em estudo, duas funções de teste devem ser selecionadas: uma função de forma e uma função de peso, ambas para a análise discreta da entropia.

Foi escolhida a função de forma constante para a entropia, pelo fato de ser a mais simples possível. Já a função de peso tem um parâmetro de *upwind* que desloca verticalmente por partes uma função inicialmente linear. Ambas as funções de teste são representadas na Fig. 5, plotadas para um elemento  $l$ .

O parâmetro de *upwind*  $\beta$  mostrado na Eq. (7) foi desenvolvido por Raso (2006). O autor apresenta um esquema que é exato para o estudo de escoamentos de advecção-difusão unidimensionais em regime permanente.

$$\beta = \frac{e^{Pe} + 1}{2(e^{Pe} - 1)} - \frac{1}{Pe} \quad (7)$$

No entanto, frequentemente é colocado na bibliografia que o uso de exponenciais é custoso computacionalmente. Além disso, a função descrita na Eq. (7) apresentará erros numéricos, para valores de  $Pe$  muito próximos de zero, e impossibilidade de cálculo, para valores altos de  $Pe$ .

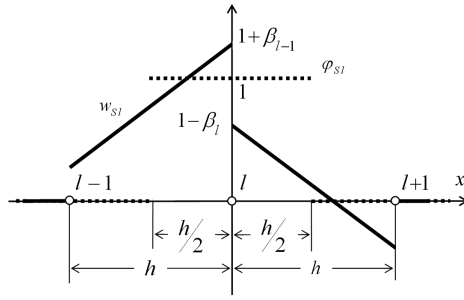


Figura 5. Funções de forma (em tracejado) e de peso (em linha contínua) escolhidas para a entropia (figura extraída de Raso (2006))

Assim como em Maliska (2004), buscou-se uma função estimadora para o esquema exponencial. No entanto, como o esquema de *upwind* apresentado na referência não é exatamente o da Eq. (7), foi necessário encontrar uma outra função estimadora.

Para isso, criou-se um código que, para um vetor com valores de  $Pe$  positivos e negativos, com módulo variando em milésimos de décadas logarítmicas, de  $10^{-6}$  a  $10^6$ , acha valores de  $a$  e  $b$ , parâmetros da função estimadora, que minimizam a variância do sinal discreto determinado por  $(\beta(\underline{Pe}) - \hat{\beta}(\underline{Pe}))$ . A função estimadora de beta,  $\hat{\beta}$ , tem sua forma mostrada na Eq. (8).

$$\hat{\beta} = \sigma(Pe) \frac{Pe^2}{a + b|Pe| + 2Pe^2} \quad (8)$$

Com esse algoritmo, obtêm-se uma variância de  $2,03 \cdot 10^{-5}$  para a função apresentada na Eq. (9), que é a que será efetivamente utilizada no desenvolvimento do programa.

$$\hat{\beta} = \sigma(Pe) \frac{Pe^2}{6,226 + 4,878|Pe| + 2Pe^2} \quad (9)$$

Um gráfico comparativo entre as funções de *upwind* estimadora *versus* exata é mostrado na Fig. 6

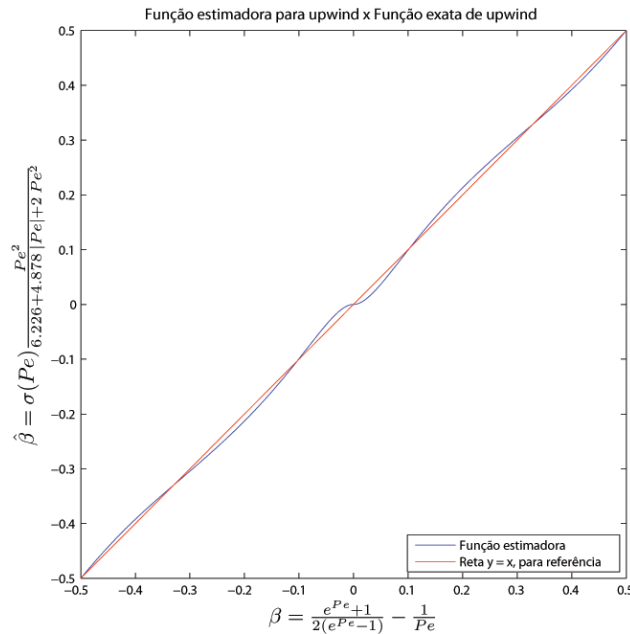


Figura 6. Comparação entre função exata e função estimadora para upwind, para todos os valores de  $\beta$

Se, por um lado, o escoamento no fluido está equacionado, seria também interessante definir um modelo físico para definir as condições de contorno.

#### 4. O modelo físico

Um modelo físico com alguma razoável generalidade tem um tanque a montante do duto e uma perda singular a jusante. A pressão a montante do duto é igual à pressão a jusante da perda singular.

A temperatura na entrada do duto é fixada – o fluido entra com a temperatura que tinha no tanque – e o fluxo de calor por condução axial na saída do duto é desprezível. As paredes do duto são mantidas a temperatura constante.

O modelo é representado na Fig. 7.



Figura 7. Modelo físico do primeiro problema a ser estudado

Dessas hipóteses segue que a pressão no contorno onde o fluido entra é calculada pela Eq. (10).

$$P_0 = P_{atm} + \rho g H - \frac{\rho}{2} \left( \frac{4Q}{\pi D_1^2} \right)^2 - K_e \frac{\rho}{2} \left( \frac{4Q}{\pi D_1^2} \right)^2 \quad (10)$$

Para o contorno em que o fluido sai, a pressão é calculada pela Eq. (11).

$$P_L = P_{atm} + K_v \frac{\rho}{2} \left( \frac{4Q}{\pi D_1^2} \right)^2 \quad (11)$$

## 5. Escoamento de água em regime de aquecimento

### 5.1 Definição do caso em estudo

O primeiro caso em estudo é definido com as seguintes condições:

- O fluido de trabalho é a água
- Temperatura do tanque constante, em  $25^\circ C$
- Temperatura da parede do duto é imposta e constante, em  $80^\circ C$
- Taxa de geração de calor por unidade de volume mantida nula
- à pressão atmosférica é atribuído o valor de  $1,013 \cdot 10^5 Pa$  e à aceleração da gravidade,  $9,807 \frac{m}{s^2}$ . Esses valores foram extraídos de Munson et al (2004)
- o coeficiente  $K_e$ , que modela perda de pressão de estagnação devido à mudança de seção no escoamento na entrada, é fixado em 0,5, valor válido para estricção com cantos vivos, de acordo com o mesmo autor
- o coeficiente  $K_v$ , modela a perda de pressão de estagnação na válvula na saída do duto. Para este caso, modelou-se uma válvula esfera totalmente aberta, que resulta em  $K_v = 0,05$ , de acordo com a mesma referência
- o duto tem diâmetro constante de  $50 mm$ , comprimento de  $20 m$ , diferença de cotas nula e rugosidade equivalente de  $0,26 mm$ , que de acordo com Munson et al (2004), equivale a um tubo novo de ferro fundido
- o tanque a montante do escoamento tem uma altura inicial de  $5 m$  de água e um diâmetro fixo de  $1 m$

Com relação às variáveis relativas ao método numérico:

- o fator de sub-relaxação para o método preditor corretor é de  $\zeta = 0,5$
- a precisão dos cálculos em geral é fixada em  $10^{-6}$
- a exceção é para a precisão imposta para o processo convergência por refinamento de malha, que foi fixada em  $10^{-3}$
- a simulação será realizada a partir de um instante chamado de  $t = 0 s$  – em que a condição de válvula aberta e o perfil de temperatura são impostos de forma equivalente a excitar o sistema com entradas do tipo degrau
- o tempo final de simulação é  $t = 18 s$  – em que já é obtida uma resposta em regime permanente
- como o caso é de vazão inicial nula, será necessário fixar um valor para o passo de tempo inicial. Assim o primeiro passo temporal é fixado em  $0,2 s$
- a temperatura de referência é fixada em  $273,15 K$

Esse conjunto de dados auxiliares – que determinam o modelo físico –, assim como as propriedades termofísicas do fluido, são informados ao código através de um conjunto de tabelas, externas ao código em si.

Para essas condições, começando com uma nodalização de  $n = 51$  elementos, o programa determina que devem ser usados no mínimo 201 elementos para obter a precisão desejada para a convergência de malhas.

## 5.2 Comparação com solução analítica

Com essa quantidade de elementos foi realizada, em primeiro lugar uma comparação com a solução analítica para o caso em estudo, apresentado por Incropera (2003).

A solução numérica usada para a comparação é obtida em regime permanente, com o nível do tanque tendo sido mantido constante. A Fig. 8 apresenta um gráfico comparativo.

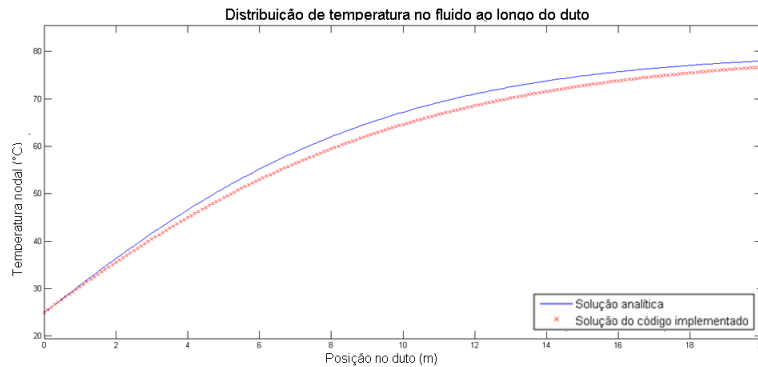


Figura 8. Comparação entre soluções analítica e numérica

## 5.3 Esvaziamento do tanque

Outros resultados foram obtidos, atualizando o nível do reservatório a cada tempo. Assim, pode ser analisado o esvaziamento do tanque.

Para o regime transiente, o código implementado permite a visualização do avanço de uma “onda fria”, isto é, de que forma fica a distribuição de temperaturas com o avanço da água fria que vem do tanque. Uma ilustração desses resultados é mostrada na Fig. 9.

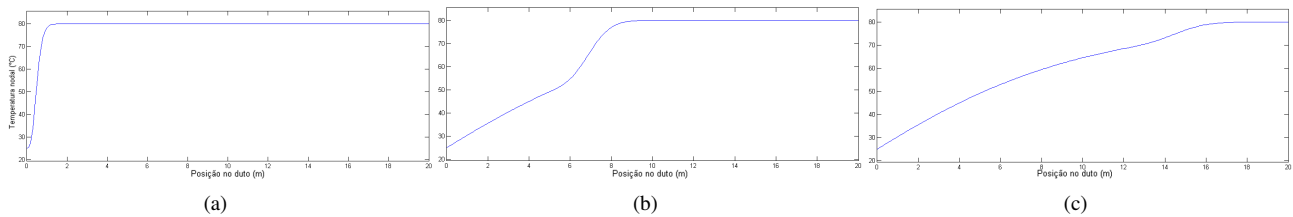


Figura 9. Gráficos para o caso em estudo, para os tempos: (a)  $t = 0,56$  s (b)  $t = 2,30$  s (c)  $t = 3,45$  s

Para o tempo final simulado, resulta o gráfico mostrado na Fig. 10. É interessante notar que, para esse caso, não é atingido um regime permanente, uma vez que o nível de água no tanque – e, por consequência, a vazão – vão diminuindo.

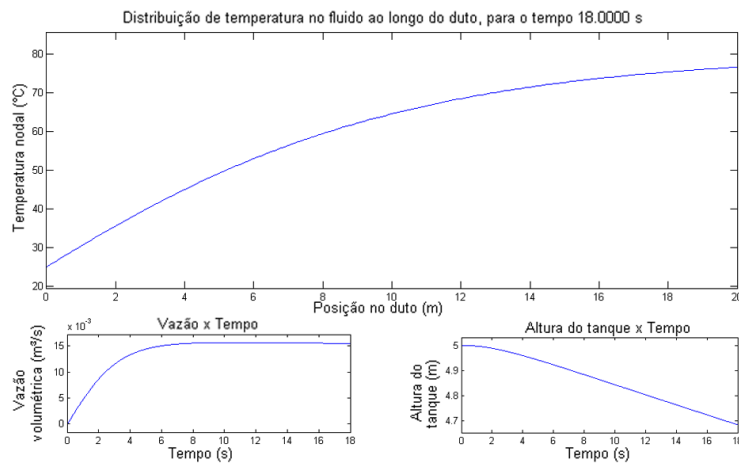


Figura 10. Gráfico para o caso em estudo, para o tempo final  $t = 18,00$  s

## 6. Escoamento de óleo em regime de aquecimento

### 6.1 Definição do caso em estudo

O segundo caso em estudo é definido com as seguintes condições:

- O fluido de trabalho é óleo virgem de motor
- Temperatura do tanque imposta
- Temperatura da parede do duto é imposta e constante, em  $140^{\circ}C$
- Taxa de geração de calor por unidade de volume mantida nula
- à pressão atmosférica é atribuído o valor de  $1,013 \cdot 10^5 Pa$  e à aceleração da gravidade,  $9,807 \frac{m}{s^2}$
- o coeficiente  $K_e$  novamente é fixado em 0,5
- o coeficiente  $K_v$ , modela-se a descarga em um tanque, com cantos vivos, resultando em  $K_v = 1,0$ , de acordo com Munson et al (2004)
- o duto tem diâmetro constante de  $50 mm$ , comprimento de  $10 m$ , diferença de cotas nula e rugosidade equivalente de  $0,26 mm$ , que de acordo com a mesma referência, equivale a um tubo novo de ferro fundido
- o tanque a montante do escoamento tem uma altura inicial de  $0,5 m$  de óleo

Com relação às variáveis relativas ao método numérico:

- o fator de sub-relaxação para o método preditor corretor é de  $\zeta = 0,3$ . O valor de sub-relaxação é diminuído com relação ao caso anterior, já que as não-linearidades são mais acentuadas – a viscosidade do óleo varia em ordens de grandeza na faixa de temperatura em estudo
- a precisão dos cálculos em geral é fixada em  $10^{-6}$
- a exceção é para a precisão imposta para o processo convergência por refinamento de malha, que foi fixada em  $10^{-4}$
- a simulação será realizada a partir de um instante chamado de  $t = 0 s$  – em que a condição de válvula aberta e o perfil de temperatura são impostos de forma equivalente a excitar o sistema com entradas do tipo degrau
- o tempo final de simulação é  $t = 150 s$  – em que já é obtida uma resposta em regime permanente
- como o caso é de vazão inicial nula, será necessário fixar um valor para o passo de tempo inicial. Assim o primeiro passo temporal é fixado em  $0,6 s$
- a temperatura de referência é fixada em  $293,15 K$

As propriedades termofísicas do fluido de trabalho, foram retiradas de Incropera (2003).

Com essas condições, e partindo de uma nodalização inicial de  $n = 6$  elementos, o programa determina que devem ser usados no mínimo 41 elementos para obter a precisão determinada. Com essa quantidade de elementos, são gerados os resultados que serão apresentados nas próximas seções.

A Fig. 11 mostra um gráfico com os resíduos entre uma malha e outra, com o dobro de elementos. É interessante notar que, conforme o número de nós é aumentado, é cada vez mais difícil obter menores resíduos.

### 6.2 Verificação da conservação de energia

Antes de proceder com continuação da exposição de resultados, será apresentado outro ponto de verificação do código gerado. Uma vez que o método dos elementos finitos não garante a conservação de energia por si só, é importante checar se o balanço de energia é respeitado.

Na verdade, o método dos elementos finitos assegura o balanço de energia térmica de forma fraca, isto é, que o balanço de energia será melhor respeitado quanto maior for o número de nós.

Um dos inconvenientes é que, com o aumento da nodalização, passa a ser necessário o uso de muito mais recursos computacionais. A Fig. 12 ilustra isso, mostrando, em azul, a verificação do balanço de energia no regime permanente e, em vermelho, uma indicação do custo computacional.

A abscissa do gráfico mostra o logaritmo do número de nós na base 2. O custo computacional descrito na figura é o tempo decorrido para efetuar os cálculos, em segundos. O balanço de energia ilustra valores absolutos, em módulo, resultantes da Eq. (12) analisada em regime permanente.

$$W_{entra} + W_{gerada} - W_{sai} \tag{12}$$

Para o sistema físico, no meio contínuo, o resultado da Eq. (12) deve ser nulo. Para o método numérico implementado, tendo em vista que a potência gerada é da ordem de  $17,5 kW$ , o uso de 41 nós gera um erro de menos de 2%.

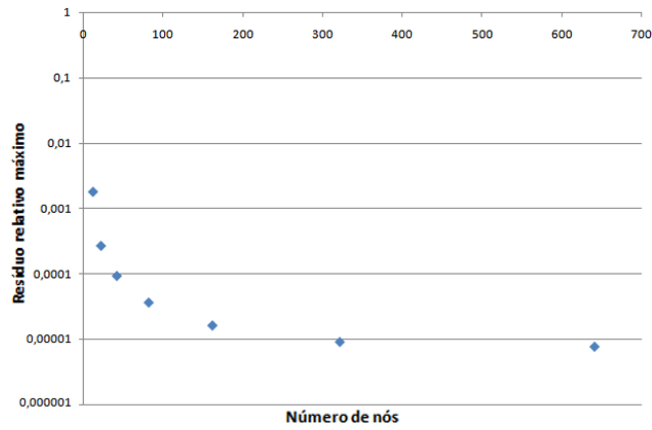


Figura 11. Máximo resíduo no processo de refinamento de malha *versus* número de nós

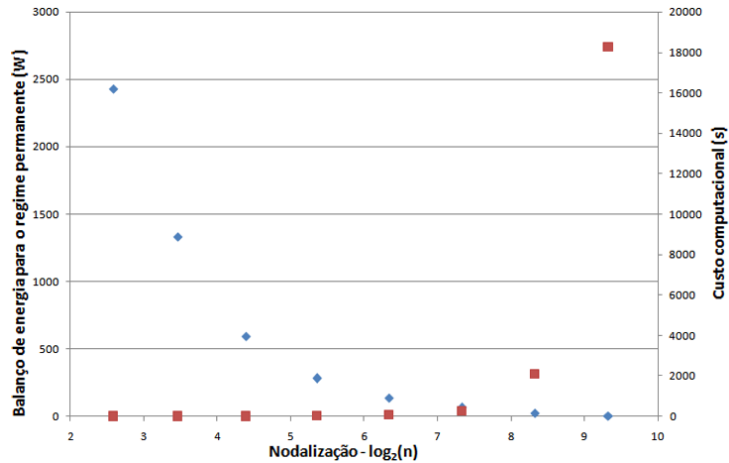


Figura 12. Balanço de energia e custo computacional com o refinamento de malha

### 6.3 Com temperatura de entrada constante

Inicialmente serão apresentados resultados de uma simulação que, de forma similar ao caso anterior, tem uma temperatura de entrada constante, agora fixada em 353 K.

O perfil de temperaturas para o regime permanente é mostrado na Fig. 13.

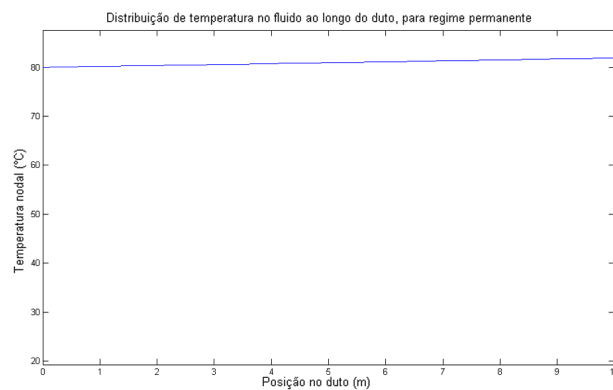


Figura 13. Perfil de temperaturas no regime permanente para escoamento de óleo em aquecimento

Percebe-se que há uma pequena variação entre a temperatura de saída e a temperatura de entrada do fluido no duto.

Uma característica central do escoamento em estudo é descrita pelos baixos valores para o número de Reynolds – variando de 0, no início, ao máximo de 2678, no regime permanente –, que caracterizam o escoamento em regime permanente como transicional.

Kays (1993) sugere uma correlação para a obtenção do número de Nusselt que seria válida também para essa faixa de Reynolds. Com o uso dessa correlação, obtém-se um coeficiente de convecção máximo de  $186,9 \frac{W}{m^2 K}$ , que acarreta em uma menor troca de calor com as paredes do duto.

Ainda para esse caso, a evolução temporal da vazão é mostrada na Fig. 14 e tem um comportamento similar ao do sistema do capítulo anterior, com água.



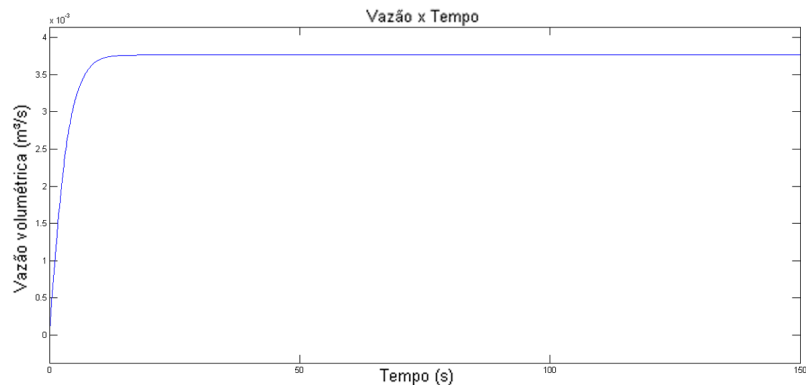


Figura 14. Vazão volumétrica *versus* tempo, para escoamento de óleo com temperatura de entrada constante

#### 6.4 Com temperatura de entrada variável

Tendo em vista que o fluido em estudo tem uma forte dependência da viscosidade dinâmica com a temperatura, passa a ser de interesse a análise sobre como a variação da temperatura média do escoamento influi no desenvolvimento da vazão para o sistema.

Para efetuar essa análise, foi desenvolvida uma sub-rotina, esta com o objetivo de permitir a variação temporal da condição de contorno térmica na entrada do duto.

A função deve atribuir uma forma para a variação da temperatura de entrada. Na verdade, para que a análise de interesse pudesse ser realizada, bastaria que a temperatura de entrada continuasse a variar após o tempo necessário para que a vazão volumétrica atinja seu valor de regime permanente. Mais do que isso, a forma atribuída pode ser qualquer e independe do modelo desenvolvido, para análise do escoamento no duto.

Decidiu-se implementar o comportamento de um sistema de primeira ordem. Para isso, a função interpola valores em uma tabela, com valores que caracterizam a resposta de um sistema de primeira ordem a uma entrada do tipo degrau, com uma constante de tempo  $k = 20$  s. As temperaturas de entrada resultantes são mostradas na Fig. 15.

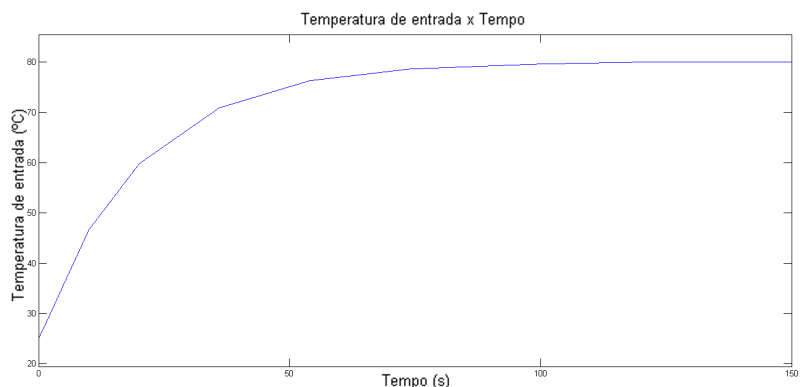


Figura 15. Evolução da temperatura de entrada ao longo do tempo, para a aplicação em especial

O gráfico que representa a evolução temporal da vazão volumétrica é mostrado na Fig. 16.

Para essa evolução temporal da temperatura de entrada, a vazão volumétrica continuará sendo alterada, até que o perfil de temperaturas atinja o regime permanente. Isso é uma consequência direta do fato de o fenômeno de dissipação viscosa ser acoplado pela viscosidade dinâmica, que é modulada pela temperatura.

#### 7. Conclusões

Este trabalho apresentou o desenvolvimento de um código numérico que simula o comportamento do escoamento de um fluido incompressível em um duto de paredes rígidas, desde uma leitura de seu ferramental teórico – recente – até a aplicação em casos particulares.

Estudos de convergência foram apresentados e os resultados gerados são coerentes com a realidade. Dessa forma, acredita-se que o objetivo inicial principal foi atingido.

Um desenvolvimento interessante para o trabalho pode ser na direção de otimizar o código numérico implementado. Imagina-se que a implementação do equacionamento com o uso de uma linguagem orientada a objetos, usando cada elemento do método de elementos finitos como um objeto, possa gerar um código ainda mais rápido e versátil.

Espera-se que o trabalho motive o desenvolvimento de outros modelos para sistemas de parâmetros distribuídos, especialmente modelos que considerem fenômenos acoplados, como por exemplo interações fluido-estrutura ou escoamentos magneto-hidrodinâmicos.

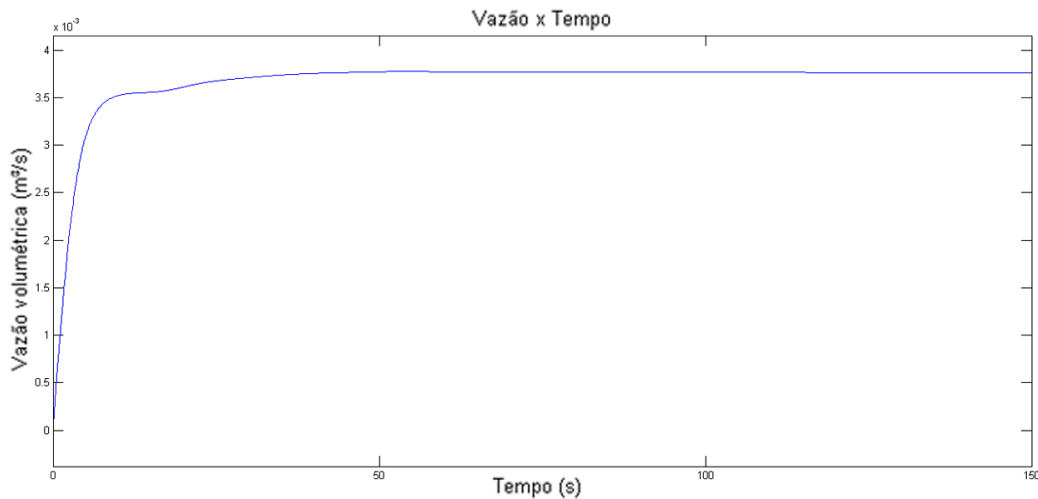


Figura 16. Evolução da vazão volumétrica ao longo do tempo, para escoamento de óleo com temperatura de entrada variante ao longo do tempo

## 8. Agradecimentos

Agradeço à Fapesp, pelo apoio financeiro.

## 9. Referências

- Baliño, J. L. Bond graph modeling of incompressible flows. In: 17th. IMACS World Congress, Scientific Computation, Applied Mathematics and Simulation (IMACS 2005). Paris: [s.n.], 2005.
- Borutzky, W. Bond Graphs: A methodology for modelling multidisciplinary dynamic systems. Erlangen: SCS, 2004. 440p.
- Fletcher, C. A. J. Computational Techniques for Fluid Dynamics 1: Fundamental and General Techniques. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 1991. 401 p.
- Incropera, F.P.; DeWitt, D.P. Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa. 5ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003. 698p.
- Karnopp, C. R.; Margolis, D. L.; Rosenberg, R. C. System Dynamics: Modeling and Simulation of Mechatronic Systems. 3rd. ed. New York: Wiley-Interscience, 2000. 507 p.
- Kays, W. M.; Crawford, M. E. Convective Heat and Mass Transfer. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1993. 601 p.
- Maliska, C. R. Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional. 2ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004. 453 p.
- Munson, B. R.; Young, D. F.; Okiishi, T. H. Fundamentos da Mecânica dos Fluidos. São Paulo: Edgard Blücher, 2004. 572 p.
- Raso, E. F. G. Desarrollo de una metodología basada en los *bond graphs* para problemas de fluidodinámica computacional. Tese (Doutorado) – Universidad Nacional de Cuyo, abril 2006.
- White, F. M. Mecânica dos fluidos. 4ª ed. Rio de Janeiro: McGraw-Hill, 2002. 570 p.

## 10. Direitos autorais

O autor é o único responsável pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

## APPLICATION OF BOND GRAPH BASED METHODOLOGY ON INCOMPRESSIBLE PROBLEMS OF COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS

**Sérgio de Paula Pellegrini**

sergio.pellegrini@gmail.com

**Abstract.** This article presents a practical example of use of a recent theory, called BG-CFD.

This theory integrate aspects of Bond Graph modeling and Computational Fluid Dynamics, for the discretization of the continuum.

One-dimensional incompressible flow in rigid walls ducts are explored, from the bond graph model to the simulation of the system behavior.

Results and suggestions for the future development of the area are presented.

**Keywords:** BG-CFD, Bond Graphs, CFD, incompressible flow.