

# Estudo de Bocal em escoamento compressível bidimensional usando as equações de Euler

**Alexandre Roitman Rosset**

Escola Politécnica da Universidade de São

E-mail : alexandre.rosset@gmail.com

**Resumo.** O presente trabalho discutirá técnicas computacionais que são utilizadas na simulação de um bocal convergente-divergente para escoamento bidimensional em escoamento compressível.

**Palavras chave:** Bocal, Euler, Bidimensionat, CFD, Escoamento Compressível.

## 1. Introdução

Atualmente, com o aumento exponencial da capacidade dos computadores ocorrido nas últimas duas décadas, técnicas computacionais utilizadas na resolução de problemas e projetos de engenharia estão se tornando cada vez mais frequentes, por permitir a construção de modelos cada vez complexos e a realização de simulações que auxiliam na compreensão dos fenômenos envolvidos.

Um exemplo dessas técnicas é a Dinâmica dos fluidos Computacional (CFD, do inglês Computational Fluid Dynamics), que permite o estudo da Mecânica dos Fluidos envolvida desde projetos simples de ventilação até sistemas complexos como a aerodinâmica de aeronaves de grande porte.

## 2. Objetivos

O objetivo deste trabalho de formatura é, através do uso de ferramentas computacionais, realizar um estudo sobre o comportamento de um bocal convergente-divergente em escoamento compressível bidimensional. Para isso será primeiramente utilizado um Solver Euler (programa computacional que resolve problemas de Mecânica dos Fluidos usando as equações Euler para escoamentos) desenvolvido pelo Núcleo de Dinâmica e Fluidos (NDF) da Escola Politécnica da USP. Feito este estudo, será usado o Fluent, um software de CFD disponível comercialmente desenvolvido pela Ansys Inc., para comparar os resultados e validar a solução obtida.

Como ponto de partida será adotado a geometria obtida pelo ex-aluno Gabriel Machado Ramalho em seu trabalho de formatura. A diferença, além do uso do Solver Euler, será a adoção de uma geometria em 2 dimensões do bocal que será gerada e estudada.

## 3. Descrição do problema

O bocal que será usado no estudo é uma modificação do criado por Ramalho, ilustrado na Fig. (1). O bocal teve que ser modificado pois suas paredes retas causavam o aparecimento de velocidades negativas no eixo X. Além da suavização das paredes, foram adicionadas seções quadradas de lado 10 mm para permitir o desenvolvimento completo do escoamento.

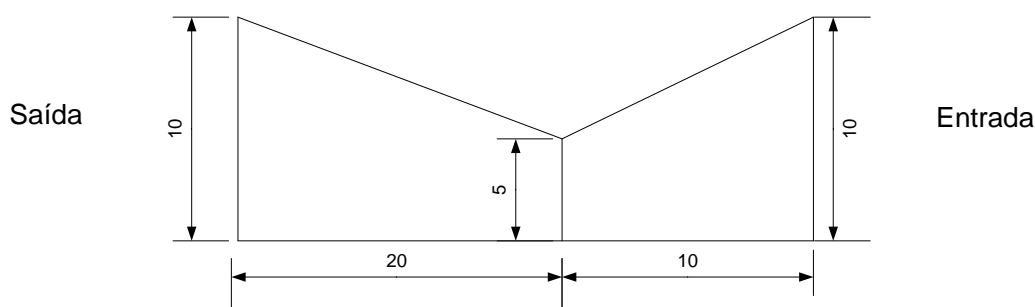


Figura 1: Geometria original do bocal com simetria horizontal.

O bocal modificado, junto com sua malha criada, é mostrado na Fig. (2).

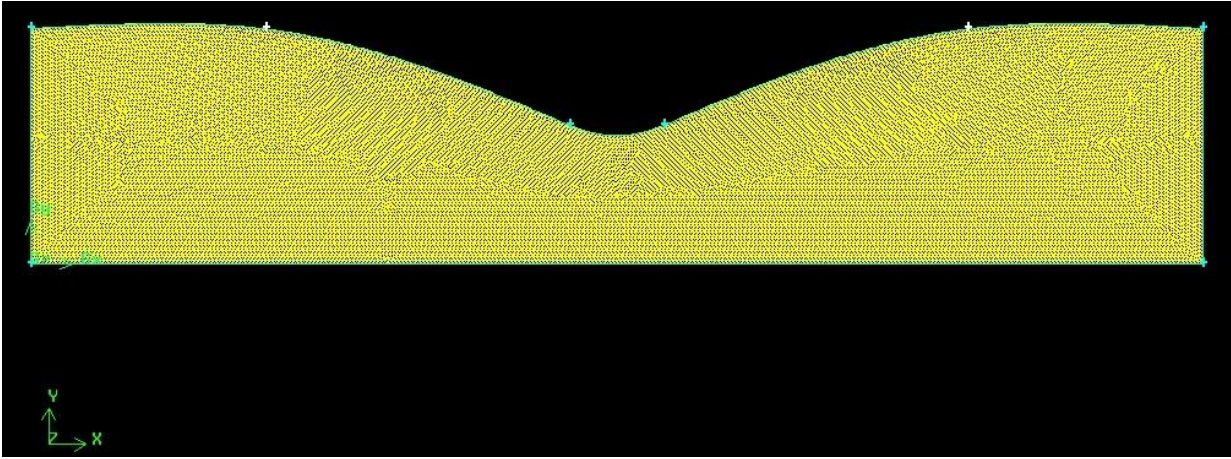


Figura 2: Bocal modificado usado nas simulações.

A malha foi criada usando elementos triangulares com tamanho escolhido após testes para garantir um bom equilíbrio entre precisão dos cálculos e uso computacional requerido. Como o Solver original foi desenvolvido para cálculos de aerofólios em escoamento externo, algumas modificações foram realizadas.

Para que o Solver pudesse ser usado em escoamentos internos em bocais, primeiramente o modo como ele realizava a leitura da malha teve que ser alterado, para que ele lesse e armazenasse a parede do bocal, seu eixo de simetria, a seção de entrada e a seção de saída, ao invés de somente as paredes de uma asa e o escoamento no infinito.

Feito isso, foi necessário fazer com que o Solver armazenasse as condições iniciais tanto da seção de entrada como a de saída, no caso a temperatura e pressão estática de ambos.

Após estas mudanças, a inicialização do Solver foi alterada, para que ele inicializasse os cálculos a partir da seção de entrada, pois nessa seção os valores de pressão e temperatura de estagnação seriam constantes e os mais altos de todo o escoamento.

Por último, conforme o escoamento era acelerado na seção divergente até velocidades supersônicas, o surgimento de ondas de choque nessa parte do bocal fazia necessário garantir que o Solver fixasse sempre a pressão na seção de saída como aquela definida nas condições iniciais para o caso de a saída ser subsônica. No caso de saída supersônica, não há condições de contorno naquela seção. Se após a onda de choque, quando a saída voltaria a ser subsônica, a pressão da saída não fosse fixada novamente na condição inicial, ocorreria que o escoamento não conseguiria se desenvolver completamente e “expulsar” a onda de choque, fazendo com que houvesse o surgimento de velocidades negativas no eixo X e um conseqüente erro no programa, que não conseguia terminar os cálculos.

#### 4. Metodologia Utilizada

Para a resolução do problema serão utilizadas as equação de Euler, que em sua forma conservativa são:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho \vec{V}) d\mathcal{V} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho \vec{V} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot p d\mathcal{V} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} e d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho H \vec{V}) d\mathcal{V} = 0 \quad (3)$$

Onde  $\rho$  é a massa específica do fluido com velocidade  $\vec{V}$ , sob pressão  $p$ , sujeito a forças externas  $\vec{f}_e$ , fluxo de calor  $\vec{q}$ , com entalpia total  $H$  e energia específica  $e$  em um volume  $\mathcal{V}$ , superfície  $S$  e o operador divergente  $\nabla$  é dado pela seguinte expressão:

$$\nabla \equiv \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (4)$$

Na sua forma integral para coordenadas cartesianas 2D, as equações de Euler podem ser escritas como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\mathcal{V}} Q dx dy + \int_S (E dy - F dx) = 0 \quad (5)$$

Onde  $\mathcal{V}$  representa a área do volume de controle e  $S$  sua superfície limitante. Os vetores  $Q$ ,  $E$  e  $F$  são definidos como:

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$E = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (e + p) \cdot u \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (e + p) \cdot v \end{bmatrix} \quad (8)$$

Sendo  $u$  e  $v$  as velocidades nos eixos X e Y, respectivamente e  $e$  a energia total do fluido.

Para poderem ser usados no algoritmo do programa, essas equação devem ser discretizadas. A seguinte técnica é descrita por Azevedo e Dourado(1991), que por sua vez basearam-se no trabalho de Jameson e Mavriplis(1986). Ela se baseia na construção de uma malha composta por elementos triangulares em torno do corpo a ser estudado. Feito isso, define-se um vetor médio de quantidades conservadas  $\bar{Q}$  em cada volume de controle  $i$  da malha de tal forma que:

$$\bar{Q}_i = \frac{1}{V_i} \iint_{V_i} Q dx dy \quad (9)$$

As equações de Euler para cada célula elementar  $i$  da malha podem então ser reescritas da seguinte forma (para simplificar a notação, será omitida a barra para designar as quantidades médias por célula, mas elas sempre serão mencionadas na indicação das propriedades de um volume  $i$ ).

$$\frac{\partial}{\partial t} (V_i Q_i) + \int_{S_i} (E dy - F dx) = 0 \quad (10)$$

Para computar os fluxos nas interfaces das células, é feita uma discretização no espaço da integral de superfície, que fornece a seguinte equação para o operador convectivo  $C(Q_i)$ ,

$$C(Q_i) = \sum_{k=1}^3 \left[ \frac{1}{2} (E_i + E_k) (y_{k1} - y_{k2}) - \frac{1}{2} (F_i + F_k) (x_{k1} - x_{k2}) \right] \quad (11)$$

Onde  $(y_{k1}, x_{k1})$  e  $(y_{k2}, x_{k2})$  são os vértices que definem a intersecção entre as células  $i$  e  $k$ , como representado na Fig. (3).

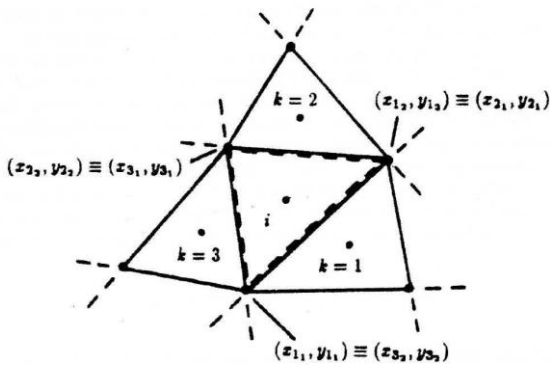


Figura 3: Representação esquemática da  $i$ -ésima célula.

Como oscilações perto de ondas de choques podem aparecer, é necessário utilizar alguma forma de dissipação artificial, chamado aqui de  $D(Q_i)$ .

O sistema de equações de Euler fica então:

$$\frac{DQ_i}{dt} = -\frac{1}{V_i} [C(Q_i) - D(Q_i)] \quad (12)$$

Esse sistema pode então ser resolvido por métodos de solução de Equações Diferenciais Ordinárias, no caso será utilizado o método de Runge-Kutta de 2ª ordem de precisão com 5 passos, conforme descrito por Hayashi (2009) em seu trabalho.

## 5. Resultados

Com o Solver devidamente adaptado, foram simulados dois casos e seus resultados comparados.

### 5.1. Caso 1

Neste primeiro caso a pressão e a temperatura estática eram de 500 kPa e 500 K na entrada e 100 kPa e 300 K na saída. O número de Mach inicial do escoamento era de  $M=0,7$ . Na Fig. (4) está a distribuição do número de Mach obtido pelo Solver e na Fig. (5) a obtida pelo Fluent.

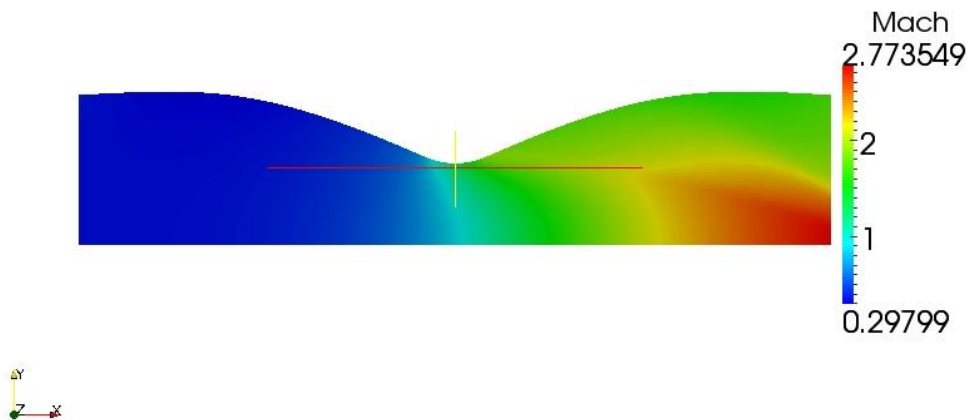


Figura 4: Distribuição do número de Mach calculada pelo Solver.

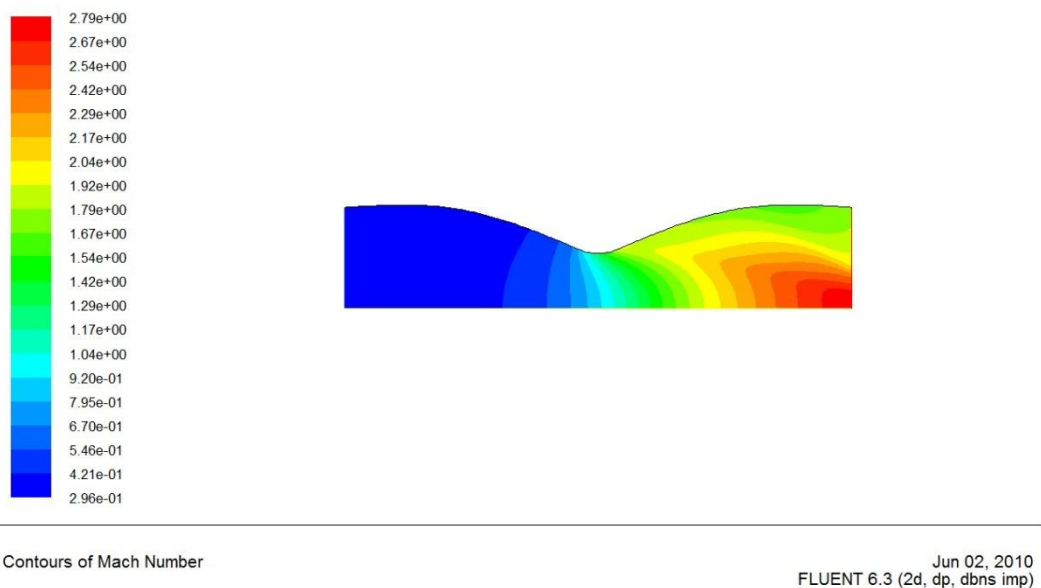


Figura 5: Distribuição do número de mach calculada pelo Fluent.

Dos resultados pode-se ver que a distribuição de Mach nos dois casos é igual, com o Bocal bloqueado (Mach=1 na garganta) em ambos os casos. A diferença de apenas 0,7% mostra que os resultados obtidos são válidos.

Para checar se não houve nenhum erro nos cálculos são calculadas a pressão de estagnação  $p_0$  e a temperatura de estagnação  $T_0$ , conforme as Eq. (13) e Eq. (14).

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (13)$$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \quad (14)$$

Com isso, tendo a pressão e a temperatura da entrada mais o Mach inicial conclui-se que  $p_0=693,6$  kPa e  $T_0=549$  K. A Fig. (6) mostra o cálculo da pressão de estagnação e a Fig. (7) o cálculo da temperatura de estagnação.

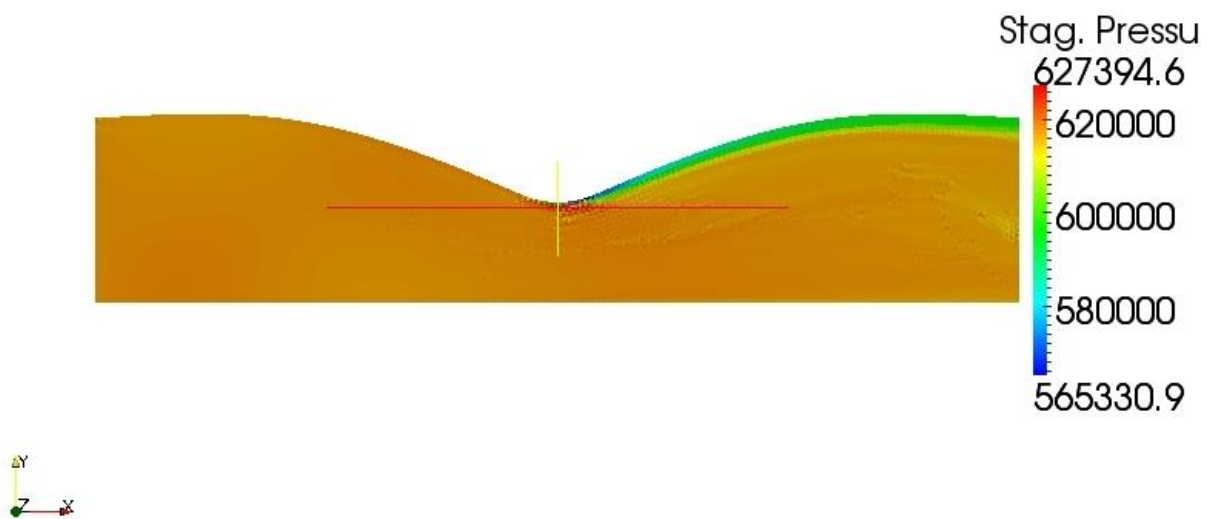


Figura 6: Pressão de estagnação calculada pelo Solver.

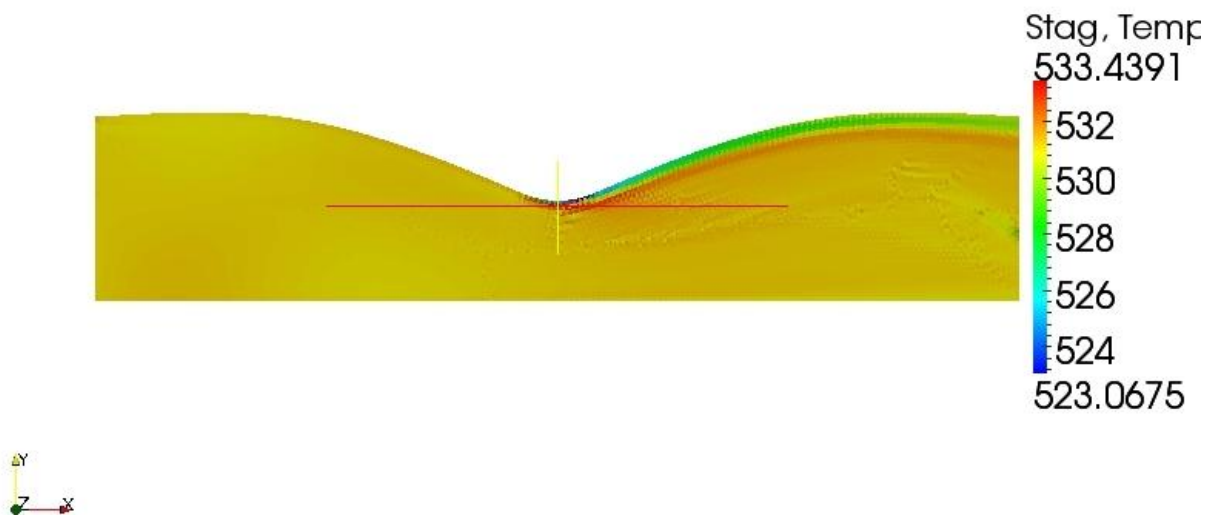


Figura 7: Temperatura de estagnação calculada pelo Solver.

Em ambos os casos, pode-se ver que os valores permanecem constantes por todo o escoamento, com exceção da parede da seção divergente do bocal. Isso é esperado, pois na região da parede é que os efeitos da aproximação por Euler são mais sentidos, visto que no caso viscoso valeria o princípio da aderência e as tensões viscosas físicas governariam o escoamento nessa região. No caso Euler, a viscosidade artificial fica mais alta nessa região, gerando essas variações. Por isso, essa diferença é aceitável como consequência da aproximação que é o uso das equações de

Euler. O fato de os valores máximos estarem abaixo dos valores teóricos calculado também é aceitável, pois deve se considerar que o Solver Euler não é tão preciso quanto o Fluent, por exemplo, que é um software que passou por várias atualizações durante anos de seu uso por usuários em todo o mundo.

## 5.2. Caso 2

No segundo caso a pressão e a temperatura estática eram de 1 MPa e 500 K na entrada e 100 kPa e 300 K na saída. O número de Mach inicial do escoamento era de  $M=0,7$ . Na Fig. (8) está a distribuição do número de Mach obtido pelo Solver e na Fig. (9) a obtida pelo Fluent.

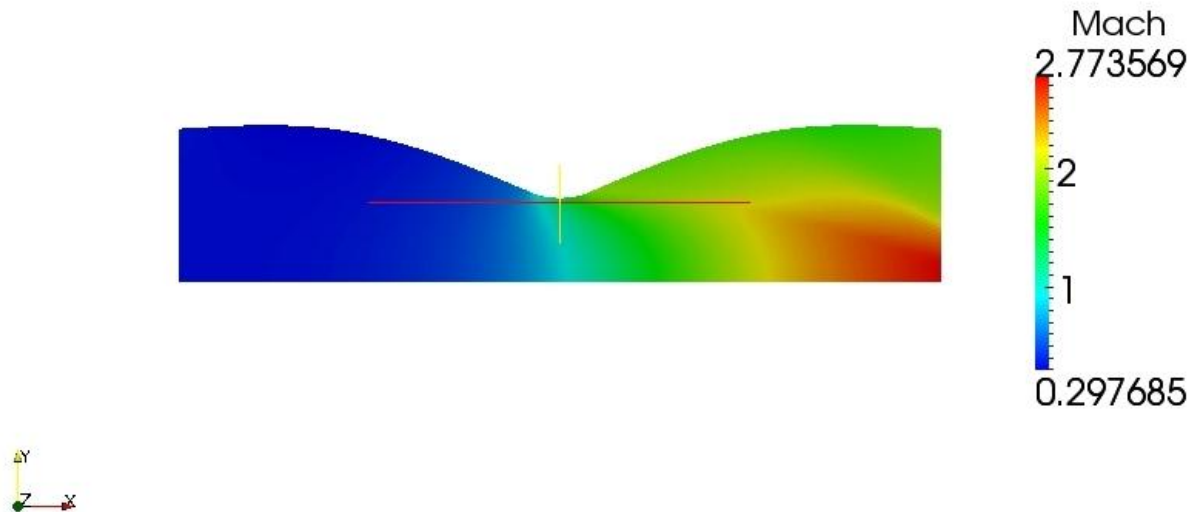
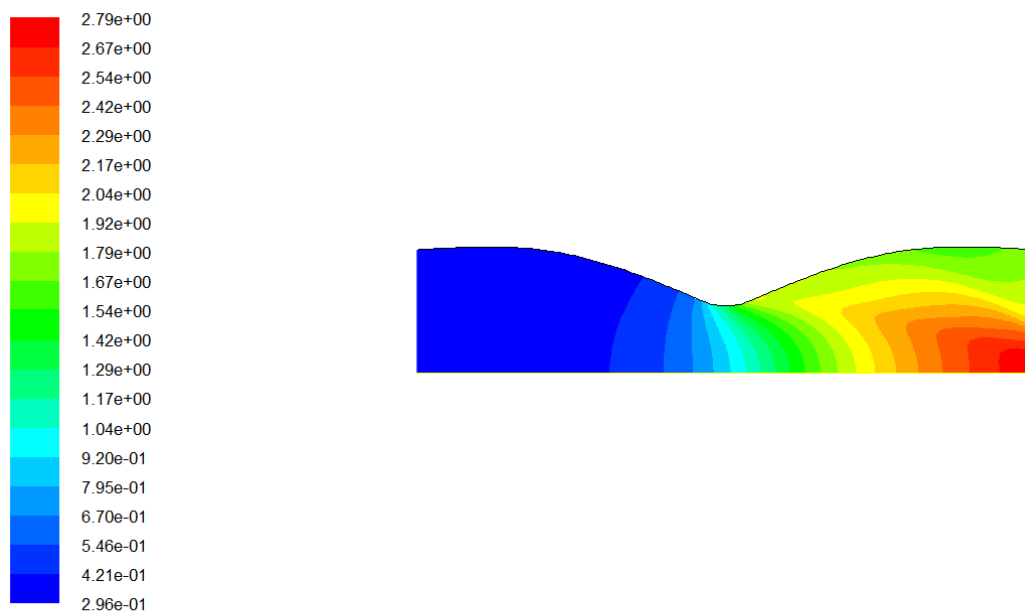


Figura 8: Número de Mach calculado pelo Solver para o caso 2.



Contours of Mach Number

Jun 02, 2010  
FLUENT 6.3 (2d, dp, dbns imp)

Figura 9: Número de Mach calculado pelo Fluent pelo caso 2.

Aqui os resultados obtidos são praticamente os mesmos do caso 1, o que é esperado, já que o número de Mach em qualquer seção do Bocal é função de sua geometria, e como o bocal não foi alterado, não poderia haver alterações nesses valores.

Foram também calculados os valores de estagnação para esse caso, que fornece  $p_0=1.387$  kPa e  $T_0=549$  K. A Fig. (10) mostra a pressão de estagnação e a Fig. (11) mostra a temperatura de estagnação, ambas calculadas pelo Solver.

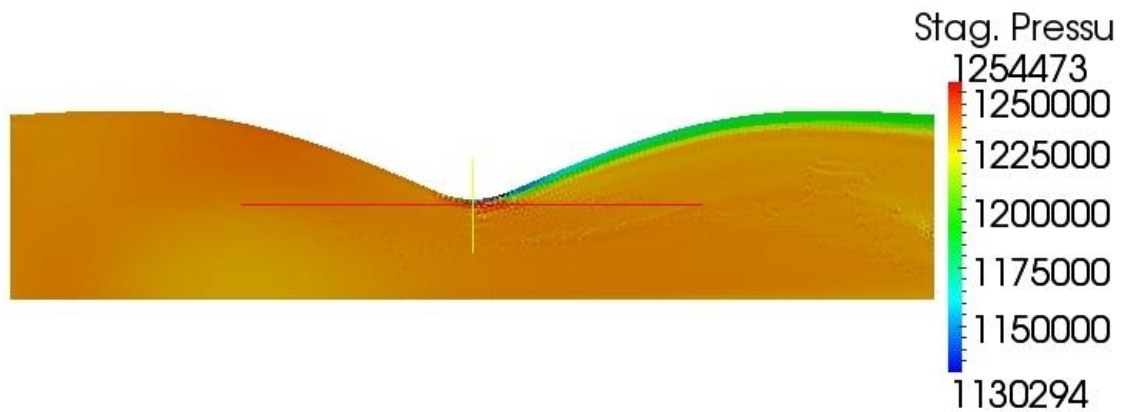


Figura 10: Pressão de estagnação do caso 2 calculada pelo Solver.

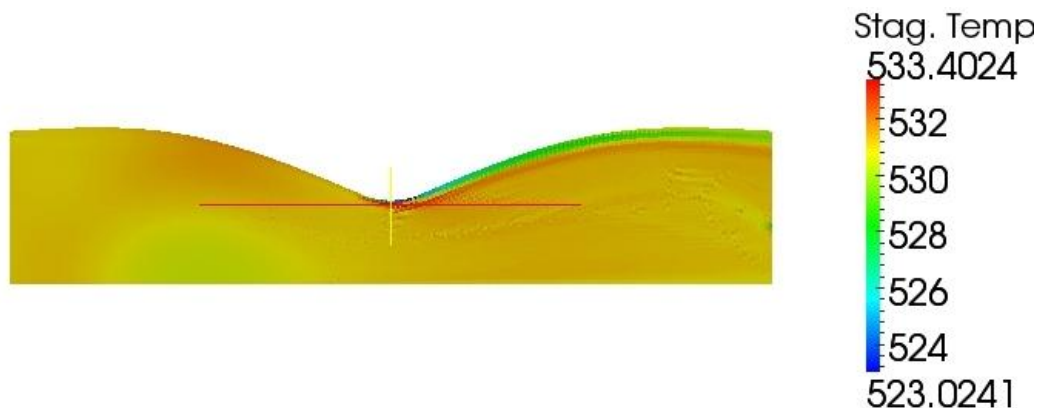


Figura 11: Temperatura de estagnação do caso 2 calculado pelo Solver.

Os resultados obtidos no segundo caso são equivalentes ao do primeiro, com as mesmas ressalvas mencionadas no primeiro caso presentes neste segundo caso. Os cálculos dos valores de estagnação do Fluent apresentaram menores variações, mas também foi observada uma diferença entre eles na região divergente da parede do bocal.

## 6. Conclusão

Como as simulações demonstraram, as equações de Euler são ótimas aproximações, pois permitem a resolução de problemas complexos na área da Engenharia Aeronáutica, nos casos que os efeitos de viscosidade e condutividade térmica podem ser desprezados. Por necessitarem menor poder computacional para serem implementadas numericamente do que as equações completas de Navier-Stokes, elas permitem a solução numérica de um grande número de problemas de aerodinâmica.

Já os resultados obtidos pelo Solver demonstram que mesmo um programa criado originalmente para o cálculo de escoamentos externos ao redor de aerofólios, quando devidamente adaptado, produz resultados satisfatórios. O fato de os resultados não serem mais próximos dos obtidos pelo Fluent é esperado, pois esse software já se encontra na sua 6ª edição e foi aperfeiçoado durante anos de uso por profissionais a ele dedicados e com o feedback recebido de milhares de clientes pelo mundo.

## 7. Referências

- Anderson, J.D. *Computational Fluid Dynamics*. McGraw Hill, 1995.  
 Anderson, J.D. *Modern Compressible Flow*. McGraw Hill, 2ª Edição, 1990.  
 Azevedo, J.L.F e Dourado, W.M.C. *Euler Solutions of Two Dimensional Flows Using Unstructured Meshes*, 3º COBEM, 1991.  
 Fabiani, L.F.v.R. *Simulação de Bocais em Escoamento Compressível*, Trabalho de formatura, EPUSP 2003.

Hayashi, M. T., *Estudo conceitual do problema adjunto baseado nas equações de Euler para aplicações de otimização aerodinâmica*, Tese de Mestrado, EPUSP, 2009.

Jameson, A. e Mavripilis, *Finite Volume Solution of the Two-Dimensional Euler Equations on a Regular Triangular Mesh*, AIAA Journal 1986.

Ramalho, G.M. *Otimização de Foguetes de Combustível Sólido Utilizando-se Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD)*, Trabalho de formatura, EPUSP 2005.

Telles, B. *Simulação e Otimização do uso de Foguetes de Combustível Sólido*, Trabalho de formatura, EPUSP 2003.

*Two dimensional study of Nozzles in compressible flow using Euler's equations.*

**Alexandre Roitman Rosset**

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

E-mail: alexandre.rosset@gmail.com

**Abstract.** The objective of this work is to discuss the use of computational tools in the simulation of a convergent-divergent nozzle in two dimensional compressible flow.

**Keywords:** *Nozzle, Euler, Two dimensional, CFD, Compressible Flow.*