

# Simulação de um tráfego veicular através de um modelo de 2 equações embasado na metodologia dos *Bond Graphs*

**Autor: Tiago de Freitas Silveira**  
**tiago.f.silveira@gmail.com**

Resumo. O presente trabalho de formatura tem como objetivo apresentar o uso dos Grafos de Ligação na modelagem de um problema de tráfego veicular, através da analogia com um escoamento compressível. Estudou-se o tráfego em uma via de mão única, cujas variáveis independentes são a velocidade e a densidade. Adotou-se neste trabalho a metodologia dos grafos de ligação, pelas vantagens que esta metodologia apresenta na modelagem de sistemas físicos, conduzindo a solução sempre sob a óptica da conservação da energia. O modelo utilizado neste caso foi um modelo de duas equações de estado, desacoplando as variáveis densidade e velocidade, fazendo com que a gama de possibilidades a serem estudadas pelo modelo aumentasse consideravelmente. Utilizou-se fundamentos do método de elementos finitos, discretizando a via em um número finito de elementos e usadas funções de forma lineares para a velocidade e a densidade, e função linear para a função de peso. O trabalho apresenta alguns resultados da simulação de um tráfego veicular, como propagações de distribuições de carros finitas, e também inicia uma abordagem em problemas de stop-and-go.

*Palavras-chaves: tráfego veicular, bond graphs, grafos de ligação, elementos finitos, escoamento compressível.*

## 1. Introdução

O formalismo dos *Bond Graphs* (BG) ou Grafos de Ligação possui várias vantagens no que se diz respeito a sistemas dinâmicos que transformam diferentes formas de energia, como é o caso dos fenômenos fluidicos, por possuir uma forte relação com a termodinâmica. Portanto o interesse em desenvolver um estudo aprofundado sobre essas duas áreas se justifica.

Até onde se sabe a primeira tentativa na aplicação da metodologia dos BG na resolução de problemas de CFD (*Computational Fluid Dynamics*), foi publicada por Fahrenthold [1]. Porém esta formulação não levou em conta os fenômenos de condução de calor, o que leva a problemas de convecção-difusão.

Especificamente sobre escoamentos compressíveis, Gandolfo [2], aplicou com sucesso a metodologia BG-CFD na resolução de problemas com tal comportamento, simulando o conhecido problema do “tubo de choque” (*shock tube*). Foi mostrado que essa metodologia pode modelar problemas não lineares complexos, levando em conta efeitos como compressibilidade, convecção, condução de calor e dissipação de energia. Neste cenário é possível verificar que alguns estudos já foram realizados com a aplicação da metodologia de grafos de ligação no estudo de escoamentos compressíveis.

O presente trabalho irá focar-se no problema do tráfego veicular, que possui algumas simplificações em relação ao problema original de escoamento compressível, pois não contabiliza as trocas de calor e não há dissipação de energia.

## 2. Grafos de ligação

Um sistema dinâmico pode ser sempre representado por elementos básicos que interagem com outros elementos através de portas, e essa interação deve-se a passagem de energia por tais portas. Como essa afirmação é verdadeira para todos os tipos de sistemas sejam eles eletromagnéticos, mecânicos, fluidicos, térmicos, dentre outros, é vantajoso classificar esses diferentes tipos de energia em variáveis generalizadas. Tais variáveis são: esforço ( $e$ ), fluxo ( $f$ ), momento ( $p$ ) e deslocamento ( $q$ ). No caso, as duas variáveis principais são esforço e fluxo, pois o momento nada mais é que a integral no tempo do esforço, e o deslocamento a integral no tempo do fluxo. Com isso, conseguimos generalizar naturalmente modelos dinâmicos que comutam diferentes tipos de energia, já que o que interessa é a energia transferida, e pouco importa sua forma para o formalismo dos Grafos de Ligação.

Através dos Grafos de Ligação, a interconexão de diversos elementos multiportas é feita através de um gráfico no qual um número finito de objetos representativos ligados uns aos outros por laços que representam um fluxo de energia, como mostrado na Fig (1).

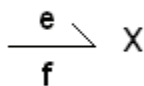


Figura (1). Exemplo de grafo de ligação.

Realizado este gráfico de objetos e laços, são atribuídas casualidades ao sistema, ou seja, determinar os sinais de entrada e saída, e assim a obtenção das equações de estado que regem o sistema dinâmico é trivial.

## 2.1 Multibonds

Os *multibonds* (ou multi uniões) são uma generalização das uniões e representam um agrupamento de várias uniões simples. Pode-se fazer uma analogia a eles como vetores multidimensionais. A representação desses multibonds pode ser visualizada na fig (2). Sua utilização se dá de diversas formar, seja para estudar fenômenos físicos de várias dimensões (coordenadas), ou no estudo de problemas físicos através de uma abordagem por elementos finitos, representando a discretização do problema em vários elementos.

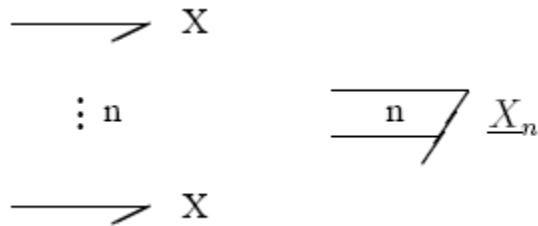


Figura (2). Exemplo de um *multibond*.

## 3. Modelo de tráfego veicular de duas equações

### 3.1 Equações do modelo

O modelo proposto, desenvolvido numa colaboração do professor orientador Jorge Baliño com a *Ecole Centrale de Lille* ( França), para o estudo de um tráfego veicular é composto pelas duas equações a seguir.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial(v)}{\partial x} = \frac{v_e}{\tau} + G - \frac{v}{\tau} \quad (2)$$

A primeira equação, trata-se de uma equação de continuidade (massa) e a segunda é a equação da velocidade, no qual  $v_e$  é a velocidade de equilíbrio,  $\tau$  é tempo de reação e  $G$  é um termo de fonte.

### 3.2 Discretização das variáveis de fluxo

Com o intuito de realizar a simulação do modelo proposto, foi feita uma abordagem discreta do problema, em que as variáveis de fluxo independentes foram discretizadas, assim como no Método dos Elementos Finitos [3], por um número finito de nós (elementos) e funções interpolantes. As Eq. (3) e Eq. (4) mostram esta etapa.

$$\rho(x,t) = \sum_{k=1}^{n_\rho} \rho_k(t) \varphi_{\rho k}(x) = \underline{\rho}^T \cdot \underline{\varphi}_\rho \quad (3)$$

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{n_v} v_k(t) \varphi_{vk}(x) = \underline{v}^T \cdot \underline{\varphi}_v \quad (4)$$

### 3.3 Grafo de ligação do modelo de tráfego e equações de estado

O grafo de ligação do modelo proposto foi obtido através do cálculo dos potenciais característicos relacionados com as variáveis independentes do problema, densidade e velocidade, e então através das equações de balanço, Eq. (1) e Eq. (2), obtiveram-se as relações entre os fluxos e esforços e suas derivadas / integrais, dando origem ao grafo representado pela Fig (3).

É valido notar que no grafo de ligação proposto, aparecem alguns elementos especiais. O primeiro deles é o transformador modulado, representado por MTF, que nada mais é que um elemento transformador, com razão de modulação variável. O segundo seria o campo indutivo capacitivo, representado por IC, que é um elemento multiportas, em que uma das portas funciona como um elemento indutivo, e a outra um elemento capacitivo. Os elementos  $S_e$  e  $S_f$  tratam-se respectivamente de fontes de esforço e fluxo.

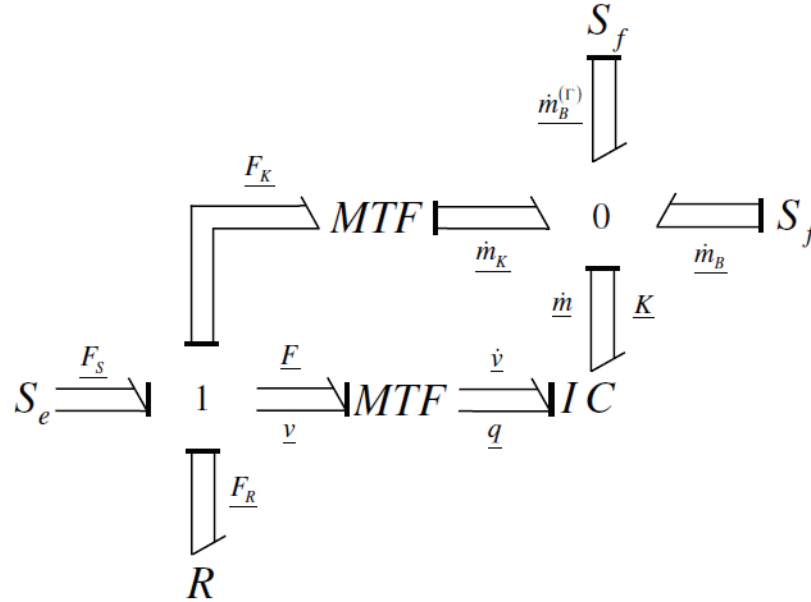


Figura (3). Grafo de ligação representativo do modelo de tráfego veicular proposto.

### 3.4 Equações de estado

Do grafo de ligação representado na Fig (3) é possível obter as equações de estado, mostradas nas Eq. (5) e Eq. (6).

$$\underline{K} \cdot \underline{\dot{m}} = \underline{W}_B^{(\Gamma)} + \underline{W}_B + \underline{W}_K \quad (5)$$

$$\underline{M} \cdot \underline{\dot{v}} = \underline{F}_S - \underline{F}_R - \underline{F}_K \quad (6)$$

Os termos apresentados nas equações Eq. (5) e Eq. (6), são obtidos pelas seguintes equações.

$$\underline{W}_B^{(\Gamma)} = -\left[ \left( \underline{w}_\rho \kappa \rho v \right)_L - \left( \underline{w}_\rho \kappa \rho v \right)_0 \right] \quad (7)$$

$$\underline{W}_B = \int_{\Omega} \frac{\partial w_{\rho}}{\partial x} \kappa \rho v dx \quad (8)$$

$$\underline{W}_k = \int_{\Omega} w_{\rho} \rho v^2 \frac{\partial v}{\partial x} dx \quad (9)$$

$$(K)_{kj} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \kappa w_{\rho k} \varphi_{\rho j} dx \quad (10)$$

$$\underline{m} = \Omega \cdot \underline{\rho} \quad (11)$$

$$\underline{F}_S = \int_{\Omega} \rho \left( \frac{v_e}{\tau} + G \right) \varphi_{\rho} dx \quad (12)$$

$$\underline{F}_R = \int_{\Omega} \rho \frac{v}{\tau} \varphi_{\rho} dx \quad (13)$$

$$\underline{F}_K = \int_{\Omega} \rho v \frac{\partial v}{\partial x} \varphi_{\rho} dx \quad (14)$$

$$(M)_{mn} = \int_{\Omega} \rho \varphi_{\rho m} \varphi_{\rho n} dx \quad (15)$$

## 4. Discretização

### 4.1 Funções interpolantes e de peso

Foram utilizadas funções de forma lineares, e também foram introduzidas funções de peso  $w_{\rho k}(x, t)$  de modo a satisfazer as trocas de potência no sistema através das condições de contorno, como também ponderar a importância de diferentes termos de potência em nós vizinhos.

A Fig(4) mostra as funções de peso e forma utilizadas em nós internos, a Fig(5) mostra as funções de peso e forma utilizadas no primeiro nó e a Fig(6) mostra as funções de peso e forma utilizadas no último nó.

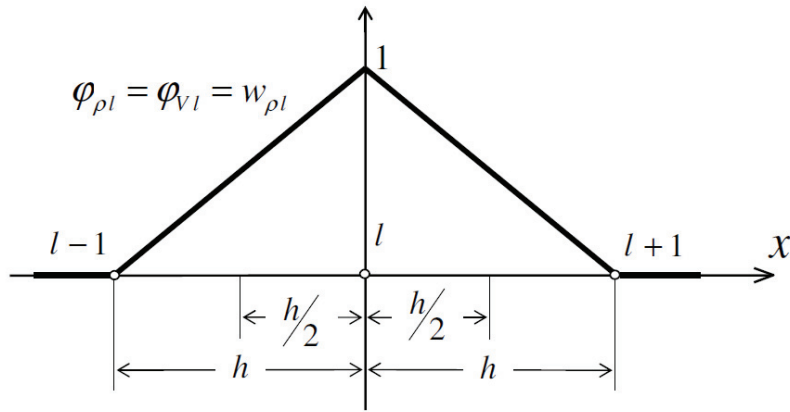


Figura (4). Funções de peso e forma em nós internos.

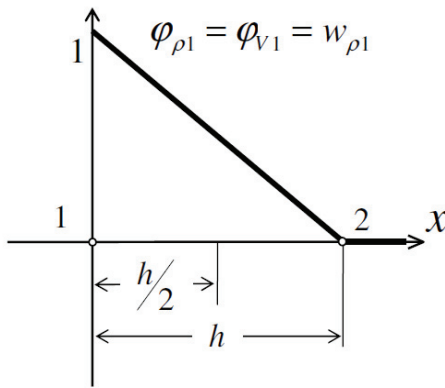


Figura (5). Funções de peso e forma no primeiro nó.

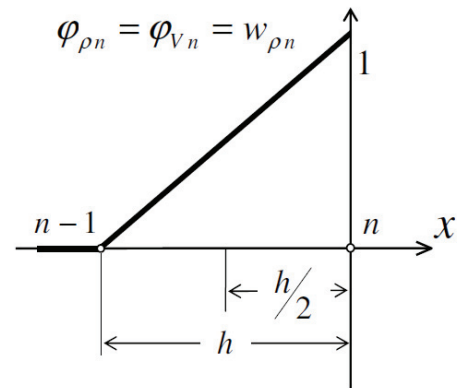


Figura (6). Funções de peso e forma no último nó.

#### 4.2 Método de integração numérica

O método utilizado para integrar numericamente as equações diferenciais obtidas, e por consequência iterar o sistema no tempo, foi o método preditor-corretor em conjunto com o método de suavização numérica, conforme utilizado por Beskos [4]. Este método implícito baseia-se em obter uma primeira aproximação através do método de Euler, e posteriormente sub-relaxar os valores obtidos por uma constante, recalculando todas as variáveis e suavizar as variáveis até que a convergência seja obtida em todos os nós. As Eq. (19) e Eq. (20) mostram a sistemática de cálculo das variáveis preditas e das variáveis corrigidas, considerando o método de suavização:

$$f_p^l = f(t) + g[f_c^{l-1}] \cdot \Delta t \quad (19)$$

$$f_c^l = f_{p,s}^{l-1} + \zeta \cdot [f_{p,s}^l - f_{p,s}^{l-1}] \quad (20)$$

As equações de estado mostradas nas Eq. (5) e Eq. (6) foram rearranjadas de modo a se ter um sistema linear, no qual as variáveis independentes são calculadas no tempo posterior, e termos não-lineares são linearizados supondo estes

dependentes das variáveis no tempo atual.

## 5. Resultados

### 5.1 Parâmetros do programa

Com o intuito de se simular numericamente o modelo proposto, foi desenvolvido um programa em Matlab2008b, que tem como objetivo calcular as variáveis do problema, e interar no tempo um modelo de um tráfego unidimensional. Os parâmetros utilizados para este programa foram:

Tabela (1). Parâmetros utilizados no programa.

Variável	Valor
Número de nós (n)	101
$\rho_{\max}$	0,2 veículos/m
$v_{\max}$	30 m/s
Comprimento do trecho (L)	20000m
$\tau$	10s
c	11m/s

### 5.1 Propagação de onda - degrau unitário

O primeiro caso estudado foi o de uma propagação de onda, sem restrições ao movimento nos extremos. A condição inicial para esta simulação foi de um degrau de carros unitário para a densidade, e para a velocidade a velocidade de equilíbrio para a respectiva densidade. Para este caso, a condição de contorno imposta nos dois extremos foi que a velocidade deveria ser a velocidade de equilíbrio para a densidade. Podemos observar a interação no tempo da densidade para este caso, na figura (7). As curvas observadas abaixo representam os valores nodais da densidade para os tempos 0 s, 133 s, 400 s, 666 s, 933 s, 1199 s e 1266 s.

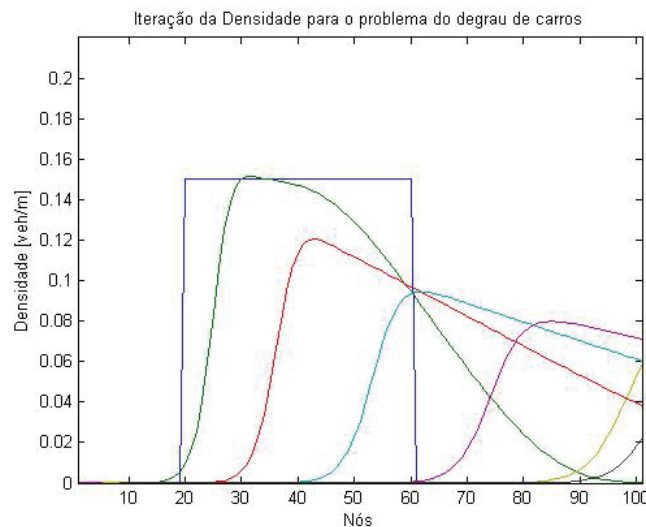


Figura (7). Interação no tempo da densidade (por nó), considerando como condição de contorno a velocidade de equilíbrio nos extremos. Curvas para os tempos 0s, 133s, 400s, 666s, 933s, 1199s e 1266s.

Pode-se notar a manutenção da densidade para os nós a montante da onda, resultado previamente esperado para tal experimento.

A interação da velocidade para este mesmo caso, pode ser verificado na figura (8).

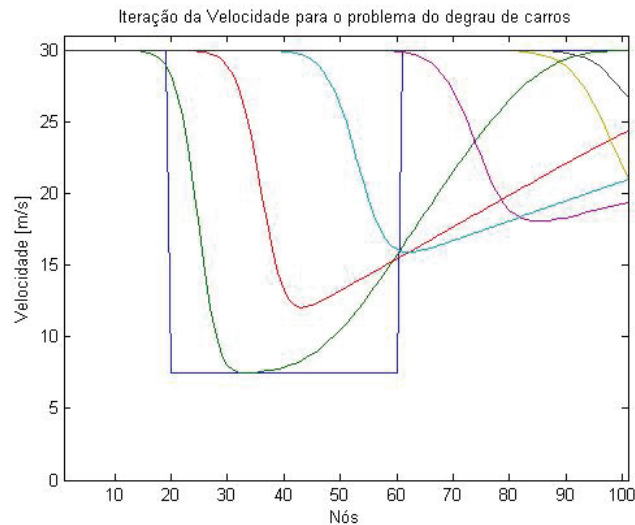


Figura (8). Interação no tempo da velocidade, considerando como condição de contorno a velocidade de equilíbrio nos extremos. Curvas para os tempos 0s, 133s, 400s, 666s, 933s, 1199s e 1266s.

### 5.2 Propagação de onda - rampa de carros

Neste segundo caso analisado, as condições de contorno foram mantidas, mas a condição inicial de carros foi modificada para uma rampa crescente de carros. A condição inicial para a velocidade foi mantida. Este exemplo foi estudado como forma de comparação com a simulação do exemplo anterior e também para verificar a formação de uma frente de onda a montante da rampa. A interação no tempo da densidade pode ser verificada na figura (9) e a da velocidade na figura (10).

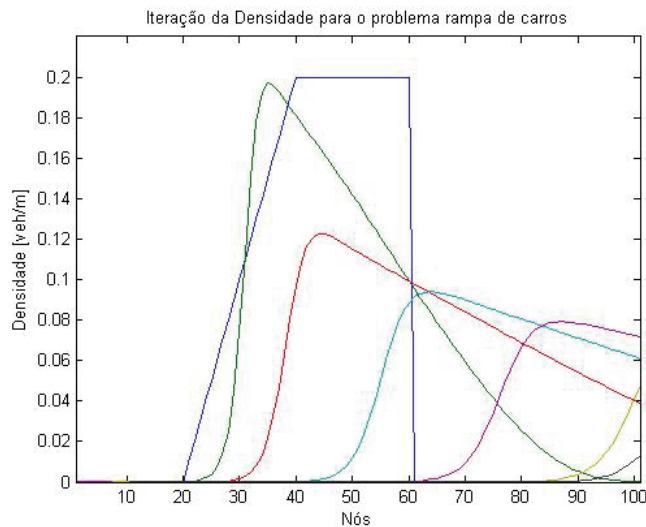


Figura (9). Interação no tempo da densidade (por nó), considerando como condição de contorno a velocidade de equilíbrio nos extremos. Curvas para os tempos 0s, 133s, 400s, 666s, 933s, 1199s e 1266s.

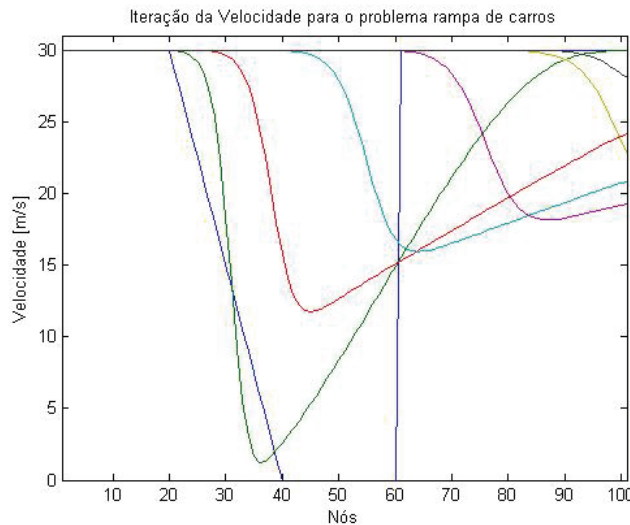


Figura (10). Interação no tempo da velocidade (por nó), considerando como condição de contorno a velocidade de equilíbrio nos extremos. Curvas para os tempos 0s, 133s, 400s, 666s, 933s, 1199s e 1266s.

Pode-se verificar neste caso estudado dois pontos, o primeiro é a propagação da frente de onda a jusante da rampa de carros, e o segundo é a formação de uma frente de onda a montante da rampa de carros. Isso acontece pelo fato de que os carros mais adiantados não encontram resistência ao movimento, porém os carros de trás encontram carros com velocidade baixa a frente, sendo forçados a pararem.

### 5.3 Problema de *stop-and-go*

O problema de stop-and-go consiste em para uma condição inicial de carros permitir o movimento livremente dos mesmos, e após certo tempo bloquear em certo trecho o movimento abruptamente. Deste modo foram simulados dois casos: ambos como condição inicial da densidade um degrau unitário de carros, porém variando a densidade superior, para o primeiro caso 0,15 veh/m e para o segundo caso 0,20 veh/m. Novamente a condição inicial da velocidade foi a velocidade de equilíbrio para a respectiva densidade. Como os resultados obtidos foram similares, abaixo somente está ilustrado o segundo caso. A condição de contorno empregada foi que a velocidade nos contornos deveria ser nula.

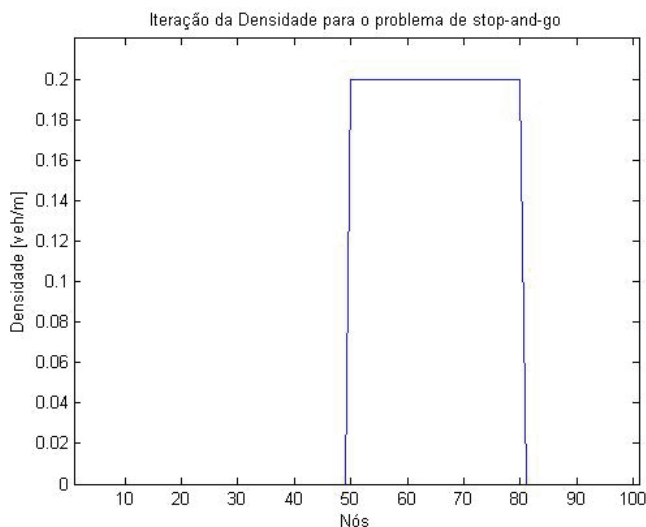


Figura (11). Interação no tempo da densidade (por nó) para o tempo 0 s.

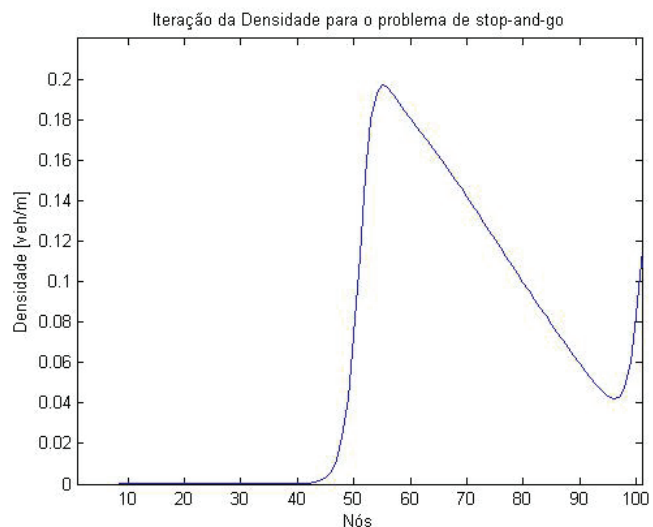


Figura (12). Interação no tempo (por nó) da densidade para o tempo 133 s.



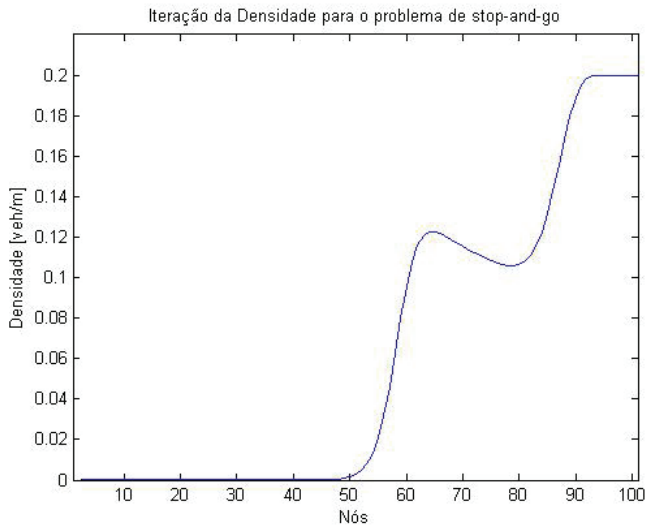


Figura (13). Interação no tempo da densidade (por nó) para o tempo 400 s.

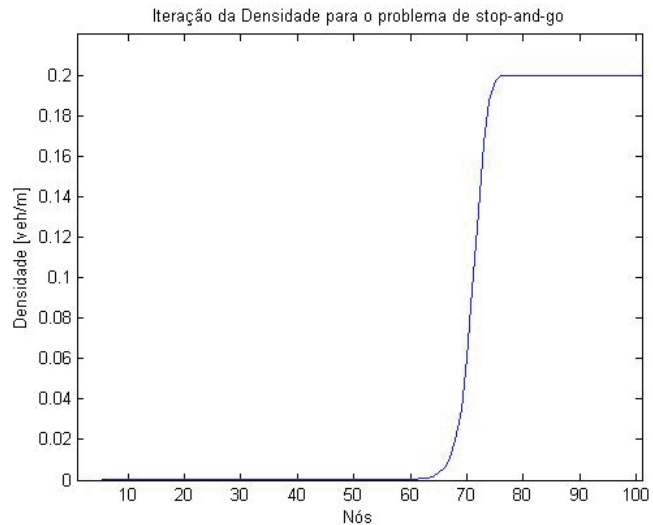


Figura (14). Interação no tempo (por nó) da densidade para o tempo 666 s.

Pode-se verificar nas figuras acima a formação do degrau ao final do trecho (decorrente da velocidade nula imposta) o que ilustra o problema de stop-and-go.

#### 5.4 Influência da viscosidade numérica

Com o intuito de se alcançar a convergência do sistema, foi introduzida no programa uma viscosidade numérica.

Tal artifício numérico foi utilizado por causa da natureza instável do sistema e por causa dos altos gradientes da densidade e da velocidade que se observaram nos exemplos simulados. Porém, em contra partida, tal artifício numérico acabou apresentando o fenômeno de difusividade numérica. A cada interação o programa acaba por dissipar carros, de modo que a conservação de carros não é respeitada.

Tal fenômeno pode ser mais bem visualizado na figura (15).

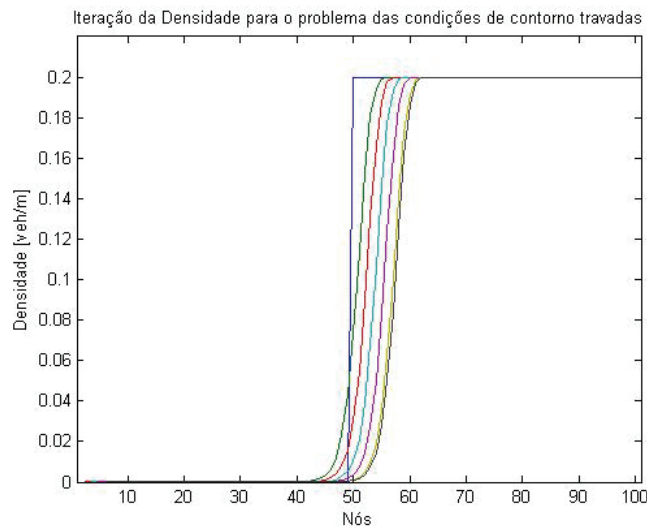


Figura (15). Propagação da densidade (por nó), para o caso das condições de contorno travadas. Curvas para os tempos 0s, 133s, 400s, 666s, 933s, 1199s e 1266s.

As condições de contorno impostas para este caso foram velocidades nulas nos dois extremos, ou seja, não deveria entrar nem sair nenhum carro. Entretanto pode-se observar uma propagação gradual da frente de onda. Isso é explicado pelo fato de que o método da viscosidade numérica acaba por suavizar os gradientes altos da velocidade e da densidade, fazendo

assim com que ocorra uma dissipação dos carros.

## 6. Conclusões

Em relação aos resultados obtidos, pode-se concluir que o objetivo deste trabalho de graduação alcançou os objetivos propostos, pois apresentou resultados de uma simulação de um tráfego veicular coerentes com o observado em outros trabalhos e com constatações empíricas de um tráfego veicular real.

Sobre a simulação de um tráfego em uma via, tendo como condição inicial um degrau de carros, pode-se observar a propagação da frente de onda a jusante do degrau de carros, e certa manutenção da frente de onda a montante do degrau de carros. Isso se deve ao fato de que a informação de ausência de carros à frente, chega primeiramente aos primeiros carros da fila, e esta informação vai se propagando passo a passo aos carros de trás, com certo delay. Deste modo, ao se iniciar a simulação, para os carros mais atrás do degrau, a informação presente é a existência de carros à frente, de modo que o movimento tarda a se propagar. Com o passar da simulação, alguns carros passam a sair da via, de modo que a frente de onda, até então com um formato de rampa, começa a ficar horizontal, pelo fato de o escoamento ficar mais homogêneo.

A respeito da segunda simulação, além dos aspectos já observados na primeira simulação, pode-se verificar a formação de uma frente de onda a montante da rampa de carros. Como os carros mais atrás possuem uma velocidade maior que a velocidade encontrada a frente, estes tendem a frear, fazendo com que a densidade ao se aproximar do grupo de carros tenda a densidade máxima admissível.

Em relação aos problemas de stop-and-go, foi possível se verificar inicialmente a propagação da frente de onda, e em seguida observou-se a concentração de carros ao final da via. De um modo geral, os resultados para estas simulações foram bem satisfatórios, pecando apenas no que tange a não conservação dos carros e ao formato “arredondado” do degrau unitário de carros. Ao final da simulação, as dissipações de carros observadas foram, respectivamente, 2,2% e 6,7%.

Um próximo passo para o estudo do problema de um tráfego veicular seria a obtenção de uma nova metodologia para a interação temporal do sistema, de modo que não se empregasse a viscosidade numérica para obter a convergência do programa, eliminando assim o problema de dissipação de carros, e as formas “arredondadas”.

## Agradecimentos

O autor agradece à FAPESP pelo apoio financeiro na realização do trabalho.

## Referências

- [1] E. P. Fahrenthold, M. Venkataraman, Eulerian bond graph for fluid continuum dynamics modeling , **ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control** **118** (1996) 48-57.
- [2] GANDOLFO RASO, E. F.; LARRETEGUY, A. E.; BALIÑO, J. L. Bond-Graph Modeling of 1-D Compressible Flows, **Second IEEE International Conference on System, Man and Cybernetics (SMC'02)**, Paper TA1B4 (in CD, IEEE No. 02CH37349C, ISBN 0-7803-7438-X), 6p., 2002.
- [3] CUVELIER, C., SEGAL, A. & VAN STEENHOVEN, A. A., **Finite Element Methods and Navier-Stokes Equations**, D. REIDEL PUBLISHING COMPANY, Holland, 1986.
- [4] BESKOS, D.E., MICHALOPOULOS, P.G. & LIN, J.K, Analysis of traffic flow by the finite element method, **Appl. Math. Modelling**, vol. 9, pp. 358-365, 1985.

## Simulation of a two-equation traffic flow model framed within the bond graph theory

**Author: Tiago de Freitas Silveira**  
**tiago.f.silveira@gmail.com**

**Abstract.** This paper presents the application of the bond graph methodology to model a traffic flow model, by means of an analogy with a compressible fluid flow. It was studied a traffic flow in a single way road, with car density and velocity as independent variables. The bond graph methodology was adopted because of the advantages it presents, related to the solution of the problem always from an energy point of view. In this work the two equation model was used, with different equations for density and velocity, providing many possibilities for simulations and analyses. The finite element method was used, with the description of the road in a finite number of elements. Linear shape functions for the density and velocity and linear function for the weight function were used. Some simulation results of a traffic flow are presented, related to propagation of finites distributions of vehicles. The approach to deal with stop-and-go problems is presented.

*Keywords: traffic flow, bond graphs, finite elements method, compressible flow.*