

Identificação dos expoentes de Fourier em Funções Quase-Periódicas

Gustavo Simões Araujo
gustavo.simoes1@gmail.com

Resumo. Funções do tipo quase-periódicas se manifestam frequentemente nas análises da propagação de ondas no mar e nas vibrações em vigas, placas e cascas. Em particular, tais funções aparecem na busca de fontes de ruídos em grandes estruturas. Assim a determinação dos parâmetros λ_n (expoente de Fourier), em geral relacionados com propriedades físicas ou geométricas como a localização de uma fonte, torna-se muito importante na execução de projetos.

O problema é que a recuperação desses parâmetros a partir do fenômeno físico observado é geralmente um problema “mal formulado”, no sentido que uma pequena perturbação experimental provoca um grande erro na estimação dos parâmetros, a ponto da informação ser por muitas vezes inutilizável. Neste artigo apresentamos um método estruturado na resolução de um sistema não linear de Vandermonde para determinação desses parâmetros.

Palavras chave: Funções Quase-Periódicas, Análises de Fourier, Sistemas não lineares, Matriz de Vandermonde

1. Introdução

Este artigo visa apresentar os estudos que foram desenvolvidos durante o projeto de conclusão de curso de tema: “Identificação dos expoentes de Fourier em funções quase-periódicas”.

Na primeira parte do texto será apresentado um breve resumo da teoria das funções quase-periódicas desenvolvida por Harald Bohr, além de alguns teoremas e propriedades essenciais para o projeto. Em seguida será abordado o problema da estimativa dos expoentes de Fourier, conjuntamente com algumas propriedades desses últimos, além de uma metodologia para obtenção destes parâmetros. Finalmente será apresentadas possíveis aplicações para este projeto em problemas físicos reais, como as vibrações de corpos e a concepção de navios.

2. Funções Quase-Periódicas

Antes de apresentarmos a teoria das funções quase-periódicas é necessário explicar o conceito de período de translação.

2.1. Período de Translação

Dada uma função arbitrária $f(x) = u(x) + iv(x) f: J \rightarrow X$ contínua, o número real τ ou $\tau(\varepsilon)$ é chamado período de translação correspondente a ε se a seguinte expressão é respeitada em todo intervalo:

$$\sup_{x \in J} |f(x + \tau) - f(x)| \leq \varepsilon \quad (1)$$

Para uma melhor compreensão deste conceito, vamos estudar o comportamento da função $f(x) = e^{i\psi_1 x} + e^{i\psi_2 x}$, para diferentes valores de ψ_1 e ψ_2 .

- Se ψ_1/ψ_2 for racional, existem n_1 e n_2 naturais tais que $\frac{n_1}{\psi_1} = \frac{n_2}{\psi_2}$. Assim tomemos τ igual à $\frac{2\pi n_1}{\psi_1} = \frac{2\pi n_2}{\psi_2}$, tal que:

$$\begin{aligned} |f(x + \tau) - f(x)| &= |e^{i\psi_1(x+\tau)} + e^{i\psi_2(x+\tau)} - e^{i\psi_1 x} - e^{i\psi_2 x}| \\ &= |e^{i\psi_1 x}(e^{i\psi_1 \tau} - 1) + e^{i\psi_2 x}(e^{i\psi_2 \tau} - 1)| \\ &= |e^{i\psi_1 x}(e^{i2\pi n_1} - 1) + e^{i\psi_2 x}(e^{i2\pi n_2} - 1)| = 0 \end{aligned}$$

Logo, temos que $|f(x + \tau) - f(x)| = 0$, conseqüentemente f é uma função periódica.

- Se ψ_1/ψ_2 for irracional, obviamente não existem n_1 e n_2 naturais tais que a igualdade $\frac{n_1}{\psi_1} = \frac{n_2}{\psi_2}$ seja verdadeira.

Porém podemos verificar que para qualquer ε positivo, podemos encontrar um $\tau \in J$ para qual a expressão (1) seja válida em \mathbb{R} ,

$$\begin{aligned} |f(x + \tau) - f(x)| &= |e^{i\psi_1(x+\tau)} + e^{i\psi_2(x+\tau)} - e^{i\psi_1 x} - e^{i\psi_2 x}| \\ |f(x + \tau) - f(x)| &= |e^{i\psi_1 x}(e^{i\psi_1 \tau} - 1) + e^{i\psi_2 x}(e^{i\psi_2 \tau} - 1)| \leq |(e^{i\psi_1 \tau} - 1)| + |(e^{i\psi_2 \tau} - 1)| \leq 2 + 2 = 4 \end{aligned}$$

Assim podemos afirmar que para todos os valores de $\varepsilon > 4$ qualquer $\tau \in J$ satisfaz a relação (1). Analisemos o caso de $0 < \varepsilon \leq 4$:

$$|f(x + \tau) - f(x)| = |e^{i\psi_1(x+\tau)} + e^{i\psi_2(x+\tau)} - e^{i\psi_1 x} - e^{i\psi_2 x}|$$

$$\begin{aligned}
&= |e^{i\psi_1 x}(e^{i\psi_1 \tau} - 1) + e^{i\psi_2 x}(e^{i\psi_2 \tau} - 1)| \leq |(e^{i\psi_1 \tau} - 1)| + |(e^{i\psi_2 \tau} - 1)| \\
&= |2 + 2 \cos(\psi_1 \tau)| + |2 + 2 \cos(\psi_2 \tau)| = 4 + 2[\cos(\psi_1 \tau) + \cos(\psi_2 \tau)] \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

Assim, para que a expressão seja válida, basta um valor de τ que satisfaça a inequação abaixo:

$$\begin{aligned}
\cos(\psi_1 \tau) + \cos(\psi_2 \tau) &\leq (\varepsilon - 4)/4 \\
\cos[1/2(\psi_1 + \psi_2)\tau] \cos[1/2(\psi_1 - \psi_2)\tau] &\leq (\varepsilon - 4)/4
\end{aligned}$$

Consequentemente constatamos que para qualquer valor de ε sempre existirá τ para o qual a expressão (1) é verificada.

2.3. Relativamente Denso

Antes de definirmos a noção de uma função quase-periódica, o conceito de conjunto “relativamente denso” também deve ser introduzido, isto é, a condição de existir um período de translação τ para um valor de $\varepsilon > 0$ não é suficiente. Assim seja E o conjunto dos números reais τ , este é chamado relativamente denso, se existe certo comprimento L , tal que em todo intervalo $\alpha \leq x \leq \alpha + L$, existe ao menos um valor de τ . Vejamos o exemplo abaixo a fim de melhor entender esta ideia.

O conjunto relativamente denso mais simples é formado por uma progressão aritmética $n\tau$ ($n = \pm 0, \pm 1, \dots, \pm p$), pois como vemos o maior intervalo entre dois valores de τ é p . Se analisarmos, porém, o conjunto formado por n^2 ($n = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), temos que $L = (n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$, isto é, o comprimento L é uma função crescente, logo não existe L_0 , tal que em todo intervalo $\alpha \leq x \leq \alpha + L_0$, existe ao menos um valor de τ .

2.4. Definição de Funções Quase-Periódicas

Uma função $f: J \rightarrow X$ contínua é dita quase-periódica se dado um $\varepsilon > 0$, existe um conjunto relativamente denso de períodos de translação τ de $f(x)$ correspondente à ε . Em outras palavras, se existe para todos os valores de $\varepsilon > 0$ um comprimento $L(\varepsilon)$, tal que cada intervalo deste comprimento, contenha ao menos um período de translação $\tau(\varepsilon)$.

$$\sup_{x \in J} |f(x + \tau) - f(x)| \leq \varepsilon$$

2.5. Séries de Fourier para Funções Quase-Periódicas

O teorema abaixo nos permitirá estender a teoria das séries de Fourier para as funções quase-periódicas, onde $M\{f(x)\}$ é o valor médio da função f , isto é, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \varphi dx$.

Teorema I: A função $a(\lambda) = M\{e^{-i\lambda x} f(x)\}$ é zero para todos os valores de λ , com exceção para um conjunto enumerável de números λ_n .

Prova: Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ números reais arbitrários e distintos e c_1, c_2, \dots, c_N números complexos arbitrários.

$$\begin{aligned}
M \left\{ \left| f(x) - \sum_{i=0}^N c_i e^{i\lambda_i x} \right|^2 \right\} &= M \left\{ \left[f(x) - \sum_{i=0}^N c_i e^{i\lambda_i x} \right] \left[\overline{f(x) - \sum_{i=0}^N c_i e^{i\lambda_i x}} \right] \right\} \\
&= M \left\{ \left[f(x) \overline{f(x)} - \overline{f(x)} \sum_{i=0}^N c_i e^{i\lambda_i x} - f(x) \sum_{i=0}^N \overline{c_i} e^{-i\lambda_i x} + \sum_{i=0}^N c_i \overline{c_i} \right] \right\} \\
&= M\{|f(x)|^2\} - \sum_{i=0}^N c_i M\{\overline{f(x)} e^{i\lambda_i x}\} - \sum_{i=0}^N \overline{c_i} M\{f(x) e^{-i\lambda_i x}\} + \sum_{i=0}^N c_i \overline{c_i} \\
&= M\{|f(x)|^2\} - \sum_{i=0}^N c_i \overline{a(\lambda_i)} - \sum_{i=0}^N \overline{c_i} a(\lambda_i) + \sum_{i=0}^N c_i \overline{c_i} = M\{|f(x)|^2\} - \sum_{i=0}^N |a(\lambda_i)|^2 + \sum_{i=0}^N |c_i - a(\lambda_i)|^2
\end{aligned}$$

Se por acaso escolhermos c_i igual à $a(\lambda_i)$, a fórmula será a seguinte:

$$M \left\{ \left| f(x) - \sum_{i=0}^N c_i e^{i\lambda_i x} \right|^2 \right\} = M\{|f(x)|^2\} - \sum_{i=0}^N |a(\lambda_i)|^2$$

Logo podemos garantir que $\sum_{i=0}^N |a(\lambda_i)|^2 \leq M\{|f(x)|^2\}$. Assim para um dado $P = M\{|f(x)|^2\}$, é possível afirmar que somente existe um conjunto de valores finitos λ , tal que para um valor h positivo, $|a(\lambda)| > h$. Isto é, para um valor

de $|a(\lambda)| > 1$ existem somente os valores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$. Da mesma maneira para o intervalo $1/m < |a(\lambda)| \leq 1$ teríamos somente os valores $\lambda_{q+1}, \lambda_{q+2}, \dots, \lambda_{q+p}$, e para o intervalo $1/k < |a(\lambda)| \leq 1/m$ os valores $\lambda_{q+p+1}, \lambda_{q+p+2}, \dots, \lambda_{q+p+s}$, e assim em diante, conseqüentemente provando o teorema I. Os valores de λ_n diferentes de zeros são normalmente chamados de expoentes de Fourier da função f . Logo dizemos que a série de Fourier da função f é igual $\sum_{n=1}^{\infty} a(\lambda_n) e^{i\lambda_n x}$.

As séries de Fourier de funções quase-periódicas possuem as mesmas propriedades das séries de Fourier de funções periódicas.

2.6. Teorema da Aproximação

Toda função $f: J \rightarrow X$ quase-periódica pode ser aproximada uniformemente pela soma finita $s(x)$ igual à $\sum_{i=0}^N a(\lambda_n) e^{i\lambda_n x}$, onde os valores λ_n são os expoentes de Fourier, isto é:

$$\sup_{x \in J} |f(x) - s(x)| \leq \varepsilon$$

Prova: Para qualquer valor de $\varepsilon > 0$ escolhamos $l = l(\varepsilon/8)$ e $\delta = \delta(\varepsilon/8)$, tal que existe um período de translação τ que satisfaz:

$$\begin{aligned} \sup_{x \in J} |f(x + \tau) - f(x)| &\leq \varepsilon/8 \quad \text{no intervalo } a \leq x \leq a + l \quad \text{e} \\ |f(x'') - f(x')| &\leq \varepsilon/8 \quad \text{para quaisquer } x', x'' \in J \text{ com } |x'' - x'| \leq \delta \end{aligned} \quad (2)$$

Dividamos J em intervalos $J_n = (nl, (n+1)l)$, ($n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$) tal que em cada intervalo J há um subintervalo $\Delta_n = (\tau_n - \delta, \tau_n + \delta)$, de período de translação $\varepsilon/4$, de tal maneira que para todo $\tau' \in \Delta_n$:

$$\sup_{t \in J} |f(t + \tau') - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

Definamos a função $K_\delta(s)$, $s \in J$, por:

$$K_\delta(s) = \begin{cases} l/2\delta & \text{se } s \in \Delta_n \\ 0 & \text{se } s \notin \Delta_n \end{cases}$$

Assim as seguintes propriedades abaixo, que serão utilizadas posteriormente, são válidas:

1- Para qualquer natural n

$$(1/2nl) \int_{-nl}^{nl} K_\delta(s) ds = 1 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots).$$

2- Para qualquer valor de $s \in J$ e qualquer natural m

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2ml}\right) \int_{-ml+s}^{ml+s} K_\delta(r) dr &= \left(\frac{1}{2ml}\right) \int_{-ml+s}^{-ml} + \int_{-ml}^{-(m-1)l} \dots \int_{ml}^{ml+s} K_\delta(r) dr \\ &= \left(\frac{1}{2ml}\right) \left(2ml + \int_{-ml+s}^{-ml} + \int_{ml}^{ml+s} K_\delta(r) dr\right) = 1 + \eta(s) \quad \text{onde } \eta(s) \leq 1/m \end{aligned}$$

3- Para qualquer valor fixo de δ o conjunto de funções

$$\phi_{\delta, T}(u) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T K_\delta(r) K_\delta(u+r) dr \quad T = T_n = nl, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (-\infty < u < \infty)$$

é uniformemente limitado e equicontínuo. Assim pelo clássico teorema de Arzela¹ nos podemos encontrar uma subsequência $T_k = T_{n_k}$ da sequência T_n tal que o limite

$$\phi_\delta(u) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_k} \int_{-T_k}^{T_k} K_\delta(r) K_\delta(u+r) dr$$

existe uniformemente em todo intervalo infinito.

¹ - Maiores informações sobre o teorema de Arzela consultar (Levitan & Zhikov 1978)

4- A função limite $\phi_\delta(u)$ é definida positiva.

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=1}^n \sum_{\sigma=1}^n \phi_\delta(u_\mu - u_\sigma) \xi_\mu \bar{\xi}_\sigma &= \sum_{\mu=1}^n \sum_{\sigma=1}^n \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_k} \int_{-T_k}^{T_k} K_\delta(s) K_\delta(u_\mu - u_\sigma + r) dr \xi_\mu \bar{\xi}_\sigma \\ &= \sum_{\mu=1}^n \sum_{\sigma=1}^n \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_k} \int_{-T_k}^{T_k} K_\delta(u_\sigma + r) K_\delta(u_\mu + r) dr \xi_\mu \bar{\xi}_\sigma = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_k} \int_{-T_k}^{T_k} \left| \sum_{\mu=1}^n K_\delta(u_\mu + r) \right|^2 dr \geq 0 \end{aligned}$$

Assim vemos que a função ϕ_u é contínua, definida positiva e $\phi_u(0) = 1$, logo satisfaz as três condições do teorema de Bochner-Khinchin², podendo ser representada da seguinte forma:

$$\phi_\delta(u) = \sum_{\sigma=1}^{+\infty} \alpha_\sigma \exp(i\lambda_\sigma u) + \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\lambda u) ds(\lambda) \quad (3)$$

onde $\alpha_\sigma > 0$, e $s(\lambda)$ é contínua, não decrescente e limitada.

Utilizando a relação (2) e as propriedades 1 e 2 das funções $K_\delta(u)$ temos que,

$$\sup_{t \in J} |f(t) - f_{\delta,m,n}(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\Gamma}{m} \quad (4)$$

onde $\Gamma = \sup_{t \in J} |f(t)|$.

Seja m e n números naturais arbitrários, definamos a função como

$$f_{\delta,m,n}(t) = \frac{1}{4mnl^2} \int_{-nl}^{nl} \int_{-ml+s}^{ml+s} K_\delta(s) K_\delta(r) f(t-s+r) dr ds$$

Se definirmos $nl = T$ e $ml = R$,

$$\begin{aligned} f_{\delta,m,n}(t) &= \frac{1}{4TR} \int_{-T}^T \int_{-R+s}^{R+s} K_\delta(s) K_\delta(r) f(t-s+r) dr ds \\ &= \frac{1}{2R} \int_{-R}^R \left[\frac{1}{2T} \int_{-T+s}^{T+s} K_\delta(s) K_\delta(u+s) ds \right] f(t+u) du = \frac{1}{2R} \int_{-R}^R \phi_{\delta,T}(u) f(t+u) du \end{aligned}$$

Utilizando as propriedades 3 e 4 das funções $K_\delta(s)$, e a igualdade (3), e impondo $T = T_k$ obtemos

$$\begin{aligned} f_{\delta,m}(t) &= \lim_{k \rightarrow \infty} f_{\delta,m,T_k}(t) = \frac{1}{2R} \int_{-R}^R f(t+u) \phi_\delta(u) du \\ &= \frac{1}{2R} \int_{-R}^R f(t+u) \left[\sum_{\sigma=1}^{+\infty} \alpha_\sigma \exp(i\lambda_\sigma u) + \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\lambda u) ds(\lambda) \right] du \\ &= \frac{1}{2R} \int_{-R}^R f(t+u) \left[\sum_{\sigma=1}^{+\infty} \alpha_\sigma \exp[i\lambda_\sigma(u+t-t)] + \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\lambda u) ds(\lambda) \right] du \\ &= \sum_{\sigma=1}^{+\infty} \alpha_\sigma \exp(-i\lambda_\sigma t) \frac{1}{2R} \int_{-R}^R f(t+u) \exp[i\lambda_\sigma(u+t)] du + \frac{1}{2R} \int_{-R}^R f(t+u) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\lambda u) ds(\lambda) du \\ f_{\delta,m}(t) &= \sum_{\sigma=1}^{+\infty} \alpha_\sigma A_{\sigma,R} \exp(-i\lambda_\sigma t) + \frac{1}{2R} \int_{-R}^R f(t+u) h(u) du \end{aligned}$$

Onde,

$$\begin{aligned} A_{\sigma,R} &= \frac{1}{2R} \int_{-R}^R f(t+u) \exp[i\lambda_\sigma(u+t)] du \\ A_\sigma &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R f(t+u) \exp[i\lambda_\sigma(u+t)] du \\ h(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\lambda u) ds(\lambda) \end{aligned}$$

Analisemos o segundo termo a direita do sinal de igualdade:

² - Maiores informações sobre o teorema de Bochner-Khinchin consultar (Levitan & Zhikov 1978)

$$C = \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2R} \int_{-R}^R f(t+u)h(u)du \right| \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2R} \int_{-R}^R \|f(t+u)\|du \right|^{1/2} \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2R} \int_{-R}^R |h(u)|^2 du \right|^{1/2} = 0 \quad (5)$$

pois sendo $h(u)$ a integral de Fourier-Stieltjes³ de uma distribuição contínua $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R |h(u)|^2 du = 0$.

Seja Γ tal que $\sum_{\sigma=N+1}^{+\infty} \alpha_\sigma < \varepsilon/2\Gamma$, temos que para todos os valores de $R > 0$,

$$\left| \sum_{\sigma=n+1}^{+\infty} \alpha_\sigma \frac{1}{2R} \int_{-R}^R f(t+u) \exp[i\lambda_\sigma(u+t)] du \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (6)$$

Utilizando as relações 4, 5 e 6 temos que:

$$\begin{aligned} \sup_{t \in J} \left| f(x) - \sum_{\sigma=1}^{n+1} \alpha_\sigma A_{\sigma,R} \exp(-i\lambda_\sigma t) \right| &\leq \sup_{t \in J} |f(x) - f_\delta(x)| + \left| \sum_{\sigma=n+1}^{+\infty} \alpha_\sigma A_{\sigma,R} \exp(-i\lambda_\sigma t) \right| \\ \sup_{t \in J} \left| f(x) - \sum_{\sigma=1}^{n+1} \alpha_\sigma A_{\sigma,R} \exp(-i\lambda_\sigma t) \right| &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

provando assim o teorema de aproximação.

3. Problemática

O objetivo desse projeto é a determinação dos expoentes de Fourier de uma função quase-periódica, dados seus coeficientes de Fourier, logo procuramos os valores de λ para qual a equação abaixo é diferente de zero.

$$a(\lambda) = M\{f(x)e^{-ix\lambda}\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \int_{-t}^t f(t)e^{-i\lambda t} dt \neq 0 \quad (7)$$

Como demonstrado no teorema I, o conjunto dos valores de λ que satisfazem esta equação é enumerável, porém pode ser infinito. Entretanto como em uma aproximação física de um problema não é necessário que obtenhamos um correspondente idêntico da função f , mas sim que saibamos qual o erro da estimativa é aceito no nosso projeto, trabalharemos assim sob um conjunto finito de λ_n , conforme mostrado pelo teorema de aproximação. Logo nosso propósito é que para um determinado erro de aproximação ε da função $f: J \rightarrow X$, calculemos os valores de $\tilde{\lambda}_n$ tal que a seguinte inequação seja válida para todo x :

$$\sup_{t \in J} \left| f(x) - \sum_{\sigma=1}^{n+1} \alpha_{(\lambda_i)} \exp(-i\lambda_\sigma t) \right| \leq \varepsilon \quad (8)$$

Porém não podemos nos esquecer que os valores de $\tilde{\lambda}_n$ serão estimativas dos valores reais dos expoentes de Fourier λ_n , logo temos que impor outra condição a estas estimativas, a fim de garantir a precisão deste cálculo:

$$|\lambda_i - \tilde{\lambda}_i| \leq \delta \quad \text{para } i = (1, 2, \dots, n) \quad (9)$$

Na resolução deste problema diversas abordagens são possíveis, consistindo a complexidade deste trabalho de conclusão de curso em encontrar qual metodologia proporciona um ponto ótimo entre resultados numéricos precisos e tempo de processamento.

3.1. Expoentes de Fourier e seus períodos de translação

No caso de uma função periódica, o período define de uma maneira única todos os expoentes de Fourier, isto é, se $p > 0$ for o período, todos os expoentes de Fourier são múltiplos de $2\pi/p$. Apesar de no caso das funções quase-periódicas não existir uma relação tão simples, também existe uma conexão entre o período de translação e os expoentes de Fourier.

³ - Maiores informações sobre a integral de Fourier-Stieltjes (Tatsuo Kawata. 1949)

Teorema II: Para qualquer $\delta > 0$ e para qualquer número natural N existe um $\varepsilon = \varepsilon(\delta, N) > 0$, tal que todo período de translação $\tau = \tau(\varepsilon)$ de uma função quase-periódica $f: J \rightarrow X$ satisfaz o sistema de inequações abaixo:

$$|\exp(i\lambda_n \tau) - 1| \leq \delta \quad (10)$$

Prova: Se $f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n t}$, temos que

$$a_n = M_t\{f(t)\exp(-i\lambda_n t)\} \text{ e } a_n \exp(i\lambda_n \tau) = M_t\{f(t + \tau)\exp(-i\lambda_n t)\}$$

Logo,

$$\begin{aligned} a_n \exp(i\lambda_n \tau) - a_n &= M_t\{[f(t + \tau) - f(t)]\exp(-i\lambda_n t)\} \\ \|a_n[\exp(i\lambda_n \tau) - 1]\| &= \|M_t\{[f(t + \tau) - f(t)]\exp(-i\lambda_n t)\}\| \\ &\leq \|M_t\{f(t + \tau) - f(t)\}\| = \varepsilon \\ |\exp(i\lambda_n \tau) - 1| &\leq \varepsilon/\|a_n\| \end{aligned}$$

Se $k = \min_{1 \leq n \leq N} \|a_n\|$, temos que:

$$|\exp(i\lambda_n \tau) - 1| \leq \varepsilon/k$$

Desta maneira, basta impor $\varepsilon = k\delta$ para satisfazer o sistema de equações.

Teorema III: Para todo $\varepsilon > 0$ e existe um número natural $N = N(\varepsilon)$ e um $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que qualquer número τ que satisfaça o sistema de inequações (10) é um período de translação ε de uma função quase-periódica $f: J \rightarrow X$

Prova: A partir do teorema de aproximação podemos definir um polinômio trigonométrico para um dado $\varepsilon > 0$:

$$P_\varepsilon(t) = \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} a_{n,\varepsilon} \exp(i\lambda_n \tau)$$

tal que, $\sup_{t \in J} |f(t) - P_\varepsilon(t)| \leq \varepsilon/3$.

Definindo $n = N_\varepsilon$ e $\delta = \varepsilon/3 \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} \|a_{n,\varepsilon}\|$, temos que para um valor de τ satisfaz as inequações de Kronecker:

$$\sup_{t \in J} |P_\varepsilon(t + \tau) - P_\varepsilon(t)| = \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} \|a_{n,\varepsilon}\| |\exp(i\lambda_n \tau) - 1| \leq \delta \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} \|a_{n,\varepsilon}\| \leq \varepsilon/3$$

Disto segue que:

$$\sup_{t \in J} |f(t + \tau) - f(t)| \leq \sup_{t \in J} |f(t + \tau) - P_\varepsilon(t + \tau)| + \sup_{t \in J} |P_\varepsilon(t + \tau) - P_\varepsilon(t)| + \sup_{t \in J} |P_\varepsilon(t) - f(t)| \leq \varepsilon$$

isto é, que τ é um período de translação ε de $f(t)$.

4. Sistema Não-Linear de Expoentes de Fourier

Definamos uma $f: J \rightarrow X$ função quase-periódica, apresentada abaixo, onde $a(\lambda_j)$ é um número pertence à \mathbb{R} , porém não nulo.

$$f(t) \sim \sum_{j=1}^n a(\lambda_j) e^{i\lambda_j t}$$

Supondo que essa função f é conhecida por amostragem em n instantes diferentes igualmente espaçados, $t = t_1, t_2, t_3, \dots$, onde $t_{i+1} - t_i = \delta$. Seja as constantes x_j definidas como sendo igual à $e^{i\lambda_j \delta}$, é possível reescrever a função f no ponto t_k como sendo igual à:

$$f(t_k) \sim \sum_{j=1}^n a(\lambda_j) e^{i\lambda_j t_k} = \sum_{j=1}^n a(\lambda_j) e^{i\lambda_j \delta k} = \sum_{j=1}^n a(\lambda_j) x_j^k$$

Logo podemos escrever o seguinte sistema de equações,

$$f(t_1) = \sum_{j=1}^n a(\lambda_j) x_j \dots f(t_2) = \sum_{j=1}^n a(\lambda_j) x_j^2 \dots f(t_n) = \sum_{j=1}^n a(\lambda_j) x_j^n$$

que rescrito em forma matricial tem a seguinte aparência,

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^m & x_2^m & \dots & \dots & x_n^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(\lambda_1) \\ a(\lambda_2) \\ \vdots \\ a(\lambda_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t_1) \\ f(t_2) \\ \vdots \\ f(t_m) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{m-1} & x_2^{m-1} & \dots & \dots & x_n^{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a(\lambda_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t_1) \\ f(t_2) \\ \vdots \\ f(t_m) \end{bmatrix}$$

$$V(x) \cdot A \cdot x = f$$

Podemos facilmente verificar que o sistema possui solução, afinal a matriz V é uma matriz de Vandermonde de determinante igual à $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_{i+1} - x_i)$, e como os valores de λ_i são diferentes entre si, temos que $\det(V) \neq 0$. Além do que os valores dos coeficientes de Fourier $a(\lambda_i)$ são conhecidos e diferente de zero também, afinal definimos que os únicos termos da função quase-periódica que são considerados expoentes de Fourier, são aqueles que possuem coeficientes de Fourier não nulos.

4. 1 Sistema de Equações Não-Lineares de Vandermonde

Em uma primeira reflexão podemos pensar que a melhor abordagem para o sistema linear acima seria a simples inversão da matriz de Vandermonde através de um processo iterativo, isto é, sendo os valores dos coeficientes de Fourier conhecidos $a(\lambda_i)$ e a partir de um valor inicial de x^0 , a matriz de Vandermonde $V(x^0)$ é calculada e assim sua inversa $V^{-1}(x^0)$, logo um valor x^1 pode ser estimado. Sendo esse procedimento repetido até que a diferença $x^{k+1} - x^k$ seja inferior ao parâmetro de convergência.

Entretanto em uma implementação numérica pode-se verificar que esta não é uma boa solução, sendo este processo extremamente instável numericamente.

Assim após a realização de uma pesquisa bibliográfica sobre o tema de resolução de sistema não-lineares de Vandermonde, decidimos implementar a metodologia proposta por (G. Trapp e W. Squire, 1976) que consiste da inclusão de um parâmetro de correção ε , conforme exposto abaixo:

$$V(x^k + \varepsilon) \cdot A \cdot (x^k + \varepsilon) = f$$

$$\begin{bmatrix} x_1 + \varepsilon_1 & x_2 + \varepsilon_2 & \dots & x_n + \varepsilon_n \\ (x_1 + \varepsilon_1)^2 & (x_2 + \varepsilon_2)^2 & \dots & (x_n + \varepsilon_n)^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (x_1 + \varepsilon_1)^n & (x_2 + \varepsilon_2)^n & \dots & (x_n + \varepsilon_n)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = f$$

Se desprezarmos os efeitos de todos valores de ε_i de ordem superior a um,

$$\begin{bmatrix} x_1 + \varepsilon_1 & \dots & x_n + \varepsilon_n \\ x_1^2 + 2x_1\varepsilon_1 & \dots & x_n^2 + 2x_n\varepsilon_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^n + nx_1^{n-1}\varepsilon_1 & \dots & x_n^n + nx_n^{n-1}\varepsilon_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = f$$

$$\left(\begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ x_1^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n & \dots & x_n^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_n \\ 2x_1\varepsilon_1 & \dots & 2x_n\varepsilon_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ nx_1^{n-1}\varepsilon_1 & \dots & nx_n^{n-1}\varepsilon_n \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = f$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 2x_1 & \dots & 2x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ nx_1^{n-1} & \dots & nx_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} = f$$

$$V(x^k)Ax^k + \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 2x_1 & \dots & 2x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ nx_1^{n-1} & \dots & nx_n^{n-1} \end{bmatrix} A\varepsilon^k = f \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} A\varepsilon^k = f - V(x^k)Ax^k$$

$$\begin{aligned} D \cdot V(x^k) \cdot A \cdot \varepsilon^k &= f - V(x^k)A \cdot x^k \\ V(x^k)A\varepsilon^k &= D^{-1} \cdot (f - V(x^k)A \cdot x^k) \\ \varepsilon^k &= A^{-1}V(x^k)^{-1}D^{-1} \cdot (f - V(x^k)A \cdot x^k) \end{aligned}$$

Onde a matriz D^{-1} é diagonal e definida por $d_{ii} = 1/i$, e a matriz A também é uma matriz diagonal, porém formada pelos coeficientes de Fourier. O procedimento de iteração vai ser realizado a fim de obter uma solução ao sistema de equação apresentado abaixo:

$$\begin{cases} V(x^k)A\varepsilon = D^{-1} \cdot (f - V(x^k)A \cdot x^k) \\ x^{k+1} = x^k + \varepsilon^k \end{cases}$$

A partir de um valor inicial x^0 , o parâmetro de correção ε^0 é calculado e conseqüentemente x^1 , este procedimento é repetido até que o valor de ε^k seja inferior ao valor de convergência pré-estabelecido.

No caso de valores reais de x_i um coeficiente de correção A é adicionado ao processo, conforme exposto abaixo:

$$\text{Se } |\varepsilon^k| \leq A|x^k| \rightarrow x^{k+1} = x^k + \varepsilon^k \text{ porém se, } |\varepsilon^k| > A|x^k| \rightarrow x^{k+1} = x^k + A\varepsilon^k|x^k|/|\varepsilon^k|$$

4.2 Sistema de Equações Não-Lineares de Vandermonde

A inversa de uma matriz de Vandermonde $V^{-1}(x)$ de ordem n , pode ser decomposta em duas matrizes L e U , triangulares superiores e inferiores respectivamente, conforme exposto abaixo:

- Matriz L :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{x_1 - x_2} & \frac{1}{x_1 - x_2} \frac{1}{x_1 - x_3} & \dots & \dots & \frac{1}{x_1 - x_2} \dots \frac{1}{x_1 - x_n} \\ 0 & \frac{1}{x_2 - x_1} & \frac{1}{x_2 - x_1} \frac{1}{x_2 - x_3} & \dots & \dots & \frac{1}{x_2 - x_1} \dots \frac{1}{x_2 - x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{x_3 - x_1} & \frac{1}{x_3 - x_1} \frac{1}{x_3 - x_2} & \dots & \frac{1}{x_3 - x_1} \dots \frac{1}{x_3 - x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \frac{1}{x_n - x_1} \dots \frac{1}{x_n - x_{n-1}} \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{cases} l_{11} = 1 \\ l_{ij} = 0, & \text{se } i > j \\ l_{ij} = 0 \end{cases}$$

- Matriz U :

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ -x_1 & 1 & 0 & \dots \\ x_1x_2 & -(x_1 + x_2) & 1 & \dots \\ -x_1x_2x_3 & x_1x_3 + x_1x_2 + x_2x_3 & -(x_1 + x_2 + x_3) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{cases} u_{ii} = 1 \\ u_{0j} = 0 \\ u_{ij} = 0, & \text{se } i < j \\ u_{ij} = u_{i-1j-1} - u_{ij-1} \cdot x_{j-1} \end{cases}$$

Logo a inversa da matriz de Vandermonde $V(x)$ pode ser expressa como sendo igual à $V^{-1}(x) = L \cdot U$.

4.3 Simulação da Metodologia de Trapp-Squire

Para testar a aplicação desta metodologia um código MatLab foi elaborado conforme a teoria exposta anteriormente, sendo a lógica iterativa deste apresentado brevemente abaixo:

- Enquanto erro < critério de convergência
 1. Construção da matriz de Vandermonde V a partir dos valores de x_k .
 2. Construção da matriz auxiliar L a partir dos valores de x_k .
 3. Construção da matriz auxiliar U a partir dos valores de x_k .
 4. Cálculo da inversa de V e do parâmetro de correção ϵ_k .
 5. Cálculo do novo valor de x_{k+1}

- No caso de uma matriz de Vandermonde de ordem 5 de valores $x = [1; 2; 3; 4; 5]$ e valores iniciais $x^0 = [-1; 0,1; 1,5; 3,5; 6]$, o número de iterações até a convergência foi de 8 iterações e a diferença $|x^{k+1} - x^k|^2 = 2.8419 \cdot 10^{-26}$. Se utilizamos valores iniciais mais dispersos, $x^0 = [-1; 0,5; 1,5; 8i; 60]$, há uma convergência na ordem de $2.8933 \cdot 10^{-19}$, após 63 iterações.

Quando trabalhamos com valores complexos de valores x_i , a metodologia se mostra ainda mais precisa e refinada. Por exemplo para uma matriz de Vandermonde de ordem 5 de valores $x = [-2i; -i; i; 2i; 5]$, quando a solução inicial é $x^0 = [-5i; -1,5i; 4i; 6i; 5]$ o número de iterações é de 10 e a diferença entre $|x^{k+1} - x^k|^2 = 1,8904 \cdot 10^{-31}$. Se utilizarmos $x^0 = [-20i; -3i; 4i; 80i; 5]$, isto é, valores relativamente dispersos, o número de iterações será de 28, e a o erro de convergência igual à $|x^{k+1} - x^k|^2 = 3,062 \cdot 10^{-21}$. Finalmente, para valores iniciais ainda piores x^0 igual à $[-500i; -38i; 24i; 600i; 6]$, a convergência nos resultados ocorre em 33 iterações.

Vejamos o caso de matrizes de Vandermonde de ordem maiores:

- $n = 10$ e $x = [-5i; -3i; -2i; -i; -5; i; 2i; 3i; 5i; 8]$:

- Se $x^0 = [-6i; -4i; -2,2i; -2i; -i; i; 1,2i; 2i; 3i; 1; 8]$ o número de iterações até a convergência foi de 264, e o erro de convergência $|x^{k+1} - x^k|^2$ foi igual à $2,045 \cdot 10^{-19}$.

- $n = 15$ e $x = [9i; 8i; 7i; 6i; 5i; 4i; 3i; 2i; 1i; 8; -1i; -2i; -3i; -5i; -6i]$:

- Se $x^0 = [-10i; -8i; -2,9i; 6i; 0; 1; 3; 6; 9i; 20i; 3,5i; 2,5i; -8,5i; -4; -6,9]$ o número de iterações até a convergência foi de 40907, e o erro de convergência $|x^{k+1} - x^k|^2$ igual à $4,1802 \cdot 10^{-20}$.

Assim podemos afirmar que quando os valores x_i são complexos a convergência é obtida, mesmo nos casos de soluções iniciais mal condicionadas, ou de sistemas de grande ordem.

Testemos agora a robustez do código para o caso de problemas onde a matriz A, definida anteriormente, é diferente da identidade, isto é, existe algum $a_{ij} \neq 1$.

- $n = 4$, $x = [1; 2; 3; 4]$ e $A = [1; 2; 3; 4]$:

- Para $x^0 = [0,9; 1,9; 2,9; 3,9]$ o número de iterações até a convergência foi de 5, e o erro de convergência $|x^{k+1} - x^k|^2$ foi igual à $1.2345 \cdot 10^{-27}$.
- Para $x^0 = [0,7; 1,8; 2,8; 4,5]$ o número de iterações até a convergência foi de 5, e o erro de convergência $|x^{k+1} - x^k|^2$ foi igual à $7.4922 \cdot 10^{-9}$.
- Quando $x^0 = [0,9; 1,9; 2,9; 3,5]$ o número de iterações até a convergência foi de 7, e a diferença $|x^{k+1} - x^k|^2$ igual à $7,2759 \cdot 10^{-24}$. Entretanto devido ao valor inicial mal condicionado a solução obtida foi $x_s = [0,9685; 3,2282; 2,2095; 3,9867]$, que podemos facilmente verificar também é uma solução ao sistema não linear proposto, porém não a desejada, isto é não satisfaz a condição definida pela expressão (9).

$$\begin{bmatrix} x_{s1} & x_{s2} & x_{s3} & x_{s4} \\ x_{s1}^2 & x_{s2}^2 & x_{s3}^2 & x_{s4}^2 \\ x_{s1}^3 & x_{s2}^3 & x_{s3}^3 & x_{s4}^3 \\ x_{s1}^4 & x_{s2}^4 & x_{s3}^4 & x_{s4}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 100 \\ 354 \\ 1300 \end{bmatrix}$$

- $n=5$ $x = [1; 2; 3; 4; 5]$ e $A = [1; 1; 1; 1; 1,1]$:

- Se para o mesmo $x^0 = [-1; 0,1; 1,5; 3,5; 6]$ tentarmos refazer o sistema de ordem 5 estudado anterior, porém desta vez com a matriz A definida acima o sistema não atinge a convergência, mesmo após 1984172 iterações.

- Se utilizarmos o mesmo valor $x^0 = [-1; 0,1; 1,5; 3,5; 6]$, mas porém desta vez definirmos a matriz A como sendo $A = [\pi^e; \pi^e; \pi^e; \pi^e; \pi^e]$ a convergência ocorre após 9 iterações apenas, com uma diferença $|x^{k+1} - x^k|^2$ igual à $2,3061.10^{-26}$.
- Se utilizarmos um valor de $x^0 = [0,9; 1,5; 2,7; 3,1; 4,5]$, isto é, melhor condicionado a convergência ocorre após 7 iterações apenas, com uma diferença $|x^{k+1} - x^k|^2$ igual à $1,6014.10^{-24}$.

Este comportamento demonstra que a convergência ocorre com robustez quando a matriz A é composta de valores a_{ii} iguais entre si, isto é, $a_{ii} \{i = 1,2,3 \dots\}$ igual à uma constante c, seja esta real ou complexa. Entretanto também demonstra que o sistema se mostra mais instável quando os valores de a_{ii} são diferentes entre si.

Assim esta metodologia se mostra amplamente aplicável na obtenção dos expoentes de Fourier, com a única ressalva do caso de matrizes A com valores fortemente dispersos. Acreditamos que para este tipo de problema melhores soluções seriam obtidas se este fosse reformulado para um conjunto de equações de polinômios simétricos, isto é, $\sum_{i=1}^n a_i x_i^k$. Outra possibilidade seria utilizar valores iniciais de A melhores condicionados inicialmente, sendo esses depois atualizados conforme o avanço do cálculo iterativo do vetor x desejado.

5. Aplicações

Existem inúmeros campos de aplicação das funções quase-periódicas: teoria do eletromagnetismo, teoria do plasma, mecânica do contínuo, mecânica quântica, sistemas dinâmicos, astronomia, vibrações, ondas do mar, etc. Essas duas últimas áreas de aplicação serão brevemente apresentadas abaixo:

Ondas do mar: Seakeeping consiste na verificação da capacidade do navio de sustentar a velocidade para a qual foi planejado, quando submetido aos efeitos de sua movimentação no mar: aceleração na proa, emersão do propulsor, incidência de água no convés e as solicitações do mar. Este método faz parte de uma das etapas da concepção de um navio, conjuntamente com a seleção do sistema propulsor, a análise da forma, compartimentos, etc. Entre os diversos parâmetros que devemos levar em conta neste estudo, o espectro de mar é o que mais nos interessa. Pois quando um navio está viajando pelo mar é excitado por ondas aleatórias, que podem ser representadas pela superposição de várias ondas regulares. Cada parcela destas ondas regulares contribui com uma parcela de energia, que é proporcional a amplitude daquela parcela de onda. Visto que não existe um valor único que defina todos os períodos de oscilação para essas ondas, $\lambda_n = \sqrt{n}$, a teoria clássica das funções periódicas não é suficiente para modelagem deste sistema dinâmico, logo o uso das funções quase-periódicas é necessário para um estudo robusto.

Outro exemplo da importância da aplicação das funções quase-periódicas em problemas físicos é na construção de plataformas em alto mar de extração de petróleo. Estas serão continuamente expostas aos efeitos das ondas do mar, logo um estudo do espectro do mar deve ser realizado a fim de que não haja nenhuma frequência de oscilação da estrutura que possa entrar em ressonância com as frequências de solicitação, o que poderia levar a estrutura inteira ao colapso.

Vibrações: Placas, cavidades, cascas e barras possuem modos de vibrações complexos que na maioria das vezes são modelados por funções quase-periódicas.

6. Referências

- Bohr H., 1933, "Almost Periodic Functions" Chelsea Publishing Company, pp-1-90
 Leitão A., 2005, "Topics in Inverse Problems" Department of Mathematics, UFSC, Brazil, pp-87-113
 Levitan B. M. e Zhikov V. V., 1978, "Almost Periodic functions and differential equations" Cambridge University Press, pp1-51
 Trapp G. E. e Squire W., 1973, "Solving nonlinear Vandermonde Systems" Department of Statistics and Computer Science, West Virginia University, Morgantown

O autor é o único responsável pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

Identification of Fourier exponent in almost periodic functions

Gustavo Simões Araújo
 gustavo.simoes1@gmail.com

Abstract. *Almost periodic functions are frequently present in the analysis of sea-waves and of vibrations in beams, plates and shells. In particular, such functions appear in the search for sources of noise in large structures. The parameters λ_n , Fourier exponent, are usually connected with geometric and physical properties, as the location of the source for examples. The problem is that the recovery of these parameters from the observed physical phenomenon is usually an ill-posed problem, in the sense that a small experimental perturbation might cause a large error in the estimation of parameters. In this paper we present a methodology structured in the Vandermonde matrix with the aim to determine these parameters.*

Keywords: *Almost Periodic Function, Non-Linear System, FourierAnalysis, Vandermonde Matrix*