

# ESTUDO DA ESTABILIDADE SECUNDÁRIA DO ESCOAMENTO AO REDOR DE UM AEROFÓLIO

Stergios Pericles Tsiloufas

tsiloufas@gmail.com

Julio R. Meneghini

jmeneg@usp.br

**Resumo.** Este trabalho se preocupa com as instabilidades tridimensionais do escoamento ao redor de um aerofólio. O objetivo é investigar como o escoamento se torna instável na esteira, estudando a influência do número de Reynolds baseado na corda  $Re$  e do ângulo de ataque  $\alpha$ . Para cada  $Re$  e  $\alpha$ , realiza-se uma análise de estabilidade do campo base bidimensional com respeito a perturbações tridimensionais infinitesimais, usando a teoria de estabilidade de Floquet. O campo base periódico é calculado usando-se o método dos elementos espectrais. Os resultados são curvas do módulo dos multiplicadores de Floquet em função dos números de onda das perturbações, mostrando os comprimentos característicos na direção da envergadura dos modos tridimensionais. É possível usar esses resultados para realizar simulações quase-tridimensionais do escoamento ao redor de asas uniformes, com grande economia de recursos computacionais e pouca perda de resolução na física do fenômeno. Neste trabalho se encontram resultados para ângulos de ataque variando entre  $5^\circ$  e  $20^\circ$ , com número de Reynolds entre 400 e 1800.

**Palavras chave:** Transição secundária na esteira, Análise de Floquet, Escoamento em aerofólios

## 1. INTRODUÇÃO

Aerofólios são objetos projetados para gerar uma força de sustentação quando imersos, com movimento relativo, em algum fluido. Aplicações destes corpos são amplamente encontrados na indústria aeronáutica, automobilística, de energia, naval, entre outros. Diversos estudos buscando otimizar a forma dos perfis de modo a aumentar a sustentação e reduzir o arrasto estão disponíveis na literatura. Entretanto, a preocupação com os aspectos fundamentais do escoamento, como as instabilidades na esteira, ainda não foram abordadas com a atenção devida.

A preocupação deste trabalho é com a transição na esteira. A transição primária se dá quando o escoamento deixa de se comportar em regime permanente para então apresentar estruturas dependentes no tempo, sendo estas periódicas ou não. Um exemplo clássico de transição primária amplamente estudado na literatura é o início do desprendimento de vórtices no cilindro circular fixo, que ocorre para número de Reynolds baseado no diâmetro da ordem de 150 Williamson (1988). Já a transição secundária, o foco deste trabalho, é quando o escoamento, mesmo em corpos com comprimento infinito na direção da envergadura, i.e. sem efeitos de ponta, passa a ter componentes de velocidade nessa direção. É a transição do escoamento bidimensional para o tridimensional.

Esse trabalho se preocupa em estudar as estruturas tridimensionais que aparecem no escoamento a partir desta transição, determinando seus modos e comprimentos de onda  $\lambda$  característicos. Além do  $Re$ , outro parâmetro avaliado neste trabalho será o ângulo de ataque  $\alpha$ . A geometria de aerofólio escolhida para o estudo foi o NACA 0012.

Barkley e Henderson (1996) utilizaram a teoria de Floquet para estudar a transição para o caso do cilindro circular fixo e obteve dois modos instáveis. O modo A não apresenta uma quebra da simetria espaço-temporal, tem um comprimento característico de 4 diâmetros e ocorre primeiro para  $Re = 188$ . O modo B apresenta uma quebra da simetria espaço-temporal, tem comprimento característico de 0,8 diâmetros e ocorre primeiro para  $Re = 259$ .

Theofilis e Sherwin (2001) analisam a estabilidade do escoamento ao redor de um perfil de aerofólio NACA 0012. Os parâmetros principais são  $Re = 1000$  e  $\alpha = 5^\circ$ . A preocupação principal é a bolha de separação formada no bordo de fuga, não a transição na esteira.

Blackburn, Marques e Lopez (2005) prosseguiram a investigação no caso do cilindro circular fixo para  $Re$  mais altos e encontraram um modo quase-periódico para  $Re = 377$ , com comprimento característico  $\lambda \approx 1,8D$ .

Abdessemed (2007) trata da análise de estabilidade do escoamento ao redor de uma pá de turbina de baixa pressão. As instabilidades primárias na esteira ocorrem para  $Re = 905$  e as instabilidades secundárias analisadas são indiferentes à mudança de parâmetros.

Carmo et al. (2008) fez um estudo similar para o caso de dois cilindros fixos de diâmetro  $D$  em arranjo desalinhados, com separação na direção do escoamento fixa em  $5D$  e separação na direção transversal ao escoamento variando de  $0$  a  $3D$ . A influência do segundo cilindro faz com que o padrão de desprendimento de vórtices mude, e o escoamento apresenta modos instáveis diferentes daqueles observados para a geometria do cilindro fixo. Modos subharmônicos podem ser notados na transição secundária da esteira.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira. A Sec. 2 mostra uma breve descrição dos métodos utilizados neste estudo. Na Sec. 3 o teste de convergência realizado é apresentado, junto com a malha bidimensional para cálculo do campo base. Tanto os resultados aerodinâmico quanto os de estabilidade são mostrados na Sec. 4, e as conclusões e comentários podem ser encontrados na Sec. 5.

## 2. METODOLOGIA

### 2.1 Simulações numéricas do campo base

Consideramos o escoamento de um fluido viscoso ao redor um aerofólio NACA 0012. Assume-se que o fluido tenha viscosidade dinâmica  $\mu$  e massa específica  $\rho$ . O escoamento incompressível depende de três parâmetros: a corda do aerofólio  $c$ , a velocidade do escoamento ao longe  $U$  e da viscosidade cinemática  $\nu = \mu/\rho$ , então pode-se tomar o número de Reynolds baseado na corda  $Re = cU/\nu$  como parâmetro de controle do problema. Para qualquer instante de tempo  $t$ , o estado do escoamento é determinado pelo campo de velocidades  $\mathbf{u}(x, y, z, t)$  e do campo de pressões  $p(x, y, z, t)$ . Usando  $U$  e  $c$  como valores de referência para velocidade e comprimento, podemos escrever as equações de Navier-Stokes na forma adimensional.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

Karniadakis e Sherwin (1999) descreve o método dos elementos espectrais, o qual é usado para resolver numericamente as equações incompressíveis de Navier-Stokes.

### 2.2 Simulações quase-tridimensionais

Simulações quase-tridimensionais são efetuadas neste trabalho utilizando uma expansão espectral na direção da envergadura. O primeiro passo é reduzir o problema do infinito para uma dimensão finita  $L$  nesta direção. Serão considerados os escoamentos que satisfaçam a Eq. (3). O escoamento tridimensional  $\mathbf{u}$  pode ser escrito em termos de modos bidimensionais de Fourier  $\hat{\mathbf{u}}_q$  por meio de uma transformada de Fourier, e inversamente, podemos escrever o campo tridimensional como uma composição de modos bidimensionais utilizando a transformada inversa de Fourier, já mostrada na forma discretizada na Eq. (4):

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{u}(x, y, z + L, t) \quad (3)$$

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{u}}_q(x, y, t) e^{i(2\pi/L)qz} \quad (4)$$

Substituindo a expansão nos modos de Fourier nas equações de Navier-Stokes, obtemos equações para cada modo de Fourier:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_q}{\partial t} = -\mathbf{N}_q - \tilde{\nabla} \hat{p}_q + \frac{1}{Re} \tilde{\nabla}^2 \hat{\mathbf{u}}_q \quad (5)$$

$$\tilde{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{u}}_q = 0 \quad (6)$$

onde  $\beta_q = (2\pi/L)q$ ;  $\tilde{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, i\beta_q)$ ;  $\tilde{\nabla}^2 = (\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, -\beta_q^2)$ .

O acoplamento entre os modos se dá pelo termo convectivo  $\mathbf{N}_q$ , que pode ser escrito como na Eq. (7), e a representação do campo final de velocidades é dado por da expansão truncada mostrada na Eq. (8).

$$\mathbf{N}_q = \frac{1}{L} \int_0^L [(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}] e^{-i(2\pi/L)qz} dz \quad (7)$$

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \sum_{-m}^m \hat{\mathbf{u}}_q(x, y, t) e^{i(2\pi/L)qz} \quad (8)$$

Computacionalmente é mais vantajoso calcular a evolução temporal dos modos bidimensionais de Fourier  $\hat{\mathbf{u}}_q(x, y, t)$  do que do campo completo de velocidades  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , devido à facilidade para paralelização dos cálculos. Como o campo  $\mathbf{u}$  é real, os modos de Fourier satisfazem uma condição de simetria  $\hat{\mathbf{u}}_{-q} = \hat{\mathbf{u}}_q^*$ , sendo apenas metade do espectro necessário.

### 2.3 Teoria de estabilidade de Floquet

Em análises de estabilidade da transição secundária, o escoamento é tomado como uma composição de um campo base  $\mathbf{U}(x, y, t)$  e uma perturbação tridimensional  $\mathbf{u}'(x, y, z, t)$ , com  $\mathcal{O}(\mathbf{u}') \ll \mathcal{O}(\mathbf{U})$ . Portanto, podemos linearizar as equações de Navier-Stokes, obtendo:

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} = -(\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{u}' - (\mathbf{u}' \cdot \nabla)\mathbf{U} - \nabla p' + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}' \quad (9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0 \quad (10)$$

onde  $p'$  é a perturbação de pressão. A condição de contorno para a perturbação é  $\mathbf{u}' = 0$  nas fronteiras.

A teoria de Floquet lida com a estabilidade de campos base T-periódicos, e uma descrição mais detalhada pode ser encontrada em Iooss e Joseph (1990). Monta-se o operador linear periódico  $\mathbf{L}$ , função de  $\mathbf{U}$ , que evolui a perturbação de um instante  $t$  para o instante  $t + T$ . Deste modo, podemos entender a Eq. (9) como o autoproblema mostrado na Eq. (11), com as restrições da Eq. (10).

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} = \mathbf{L}(\mathbf{u}') \quad (11)$$

Os autovalores do operador  $\mathbf{L}$  são os chamados expoentes de Floquet  $\sigma$ . As soluções T-periódicas da Eq. (11) são uma composição de soluções do tipo  $\tilde{\mathbf{u}}(x, y, z, t) e^{\sigma t}$ . Normalmente, a estabilidade é analisada com respeito aos multiplicadores de Floquet  $\mu \equiv e^{\sigma T}$ . Se  $|\mu| < 1$ , então a perturbação é amortecida e vai para zero assintoticamente; se  $|\mu| > 1$ , então o modo é instável, e a perturbação cresce no escoamento.

Outra simplificação pode ser feita: assumir que o problema é homogêneo na direção da envergadura, de modo que possamos escrever as perturbações usando a integral de Fourier, como mostrado na Eq. (12).

$$\mathbf{u}'(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{u}}(x, y, t) e^{i\beta z} d\beta \quad (12)$$

Modos de diferentes números de onda  $\beta$  não se acoplam e  $\mathbf{U}$  é bidimensional, logo perturbações da forma

$$\mathbf{u}'(x, y, z, t) = (\hat{\mathbf{u}} \cos \beta z, \hat{\mathbf{v}} \cos \beta z, \hat{\mathbf{w}} \cos \beta z) \quad (13)$$

$$p'(x, y, z, t) = \hat{p} \cos \beta z \quad (14)$$

permanecem da mesma forma quando submetidas ao operador  $\mathbf{L}$ .

As componentes de velocidade e pressão da perturbação são funções de  $x$ ,  $y$  e  $t$ , então o problema tridimensional se torna diversos problemas bidimensionais, cada um com um comprimento de onda característico  $\lambda = 2\pi/\beta$ . O código numérico usado para efetuar a análise de Floquet computa os autovalores da matriz correspondente ao operador linear  $\mathbf{L}$  sobre um período. O método de Arnoldi é usado para avaliar os autovalores, computados no espaço de Krylov, tomado com dimensão 20 em todos os casos deste trabalho. O uso do espaço de Krylov reduz a ordem da matriz sem mudança significativa do maior multiplicador de Floquet, o qual determina a estabilidade do sistema.

A preocupação deste trabalho recai nos picos da curva  $|\mu| \times \beta$ , os quais são os modos mais instáveis, aqueles que governam o crescimento das perturbações do sistema linearizado. Estamos interessados na transição secundária da esteira, i.e. os números de Reynolds críticos para os quais o escoamento se torna tridimensional.

## 2.4 Análise não-linear

A análise de estabilidade de Floquet é linear e prediz com eficácia o valor de Reynolds no qual ocorre a transição secundária, bem como o comprimento de onda das instabilidades e a topologia do modo instável. Como são utilizadas as equações de Navier-Stokes linearizadas (Eq. (9)), os resultados são válidos para pequenas perturbações comparadas ao campo base. Porém, quando essas perturbações são instáveis pela teoria de Floquet, elas tendem a crescer exponencialmente atingindo um ponto em que não são mais desprezíveis frente ao escoamento base. Deste modo, para avaliar a evolução dessas instabilidades, efeitos não-lineares devem ser levados em conta utilizando as simulações quase-tridimensionais.

Uma maneira de quantificar a evolução das instabilidades é pela amplitude complexa  $A(t)$  do modo considerado. A equação de Landau tem sido utilizada com sucesso para modelar o comportamento de sistemas hidrodinâmicos próximos a bifurcações de estabilidade (para exemplos, consultar Henderson (1997)). A idéia por trás da equação é que para pequenas perturbações o termo linear rege o comportamento de  $dA/dt$ , e conforme a amplitude  $A$  vai crescendo, novos termos se tornam importantes. A Eq. (15) mostra a equação truncada até o termo de terceira ordem.

$$\frac{dA}{dt} = (\sigma + i\omega)A - l(1 + ic)|A|^2 A + \dots \quad (15)$$

O termo  $(\sigma + i\omega)$  é o autovalor do modo instável obtido na análise linear. A parte real  $\sigma$  é a taxa de crescimento das perturbações a cada período para aproximações de primeira ordem, logo o modo é estável para  $\sigma < 0$  e vice-versa. Ainda em primeira aproximação, as perturbações oscilam com frequência angular dada pela parte complexa  $\omega$ .

O parâmetro  $l$  é a parte real do termo de terceira ordem e o seu sinal define a classificação da transição. Caso  $l > 0$ , a transição é dita supercrítica, não apresentando histerese, e deve ser propriamente descrita pela equação de Landau de terceira ordem. A explicação é que quando  $l$  é positivo, então a parte real do coeficiente de terceira ordem é negativo e contra-balanceia o crescimento dado pelo termo linear, fazendo com que  $dA/dt$  decresça até o momento que a amplitude da perturbação sature em um patamar. Se  $l < 0$ , será necessário no mínimo um termo de quinta ordem na

equação de Landau, visto que o termo de terceira ordem vai contribuir para aumentar ainda mais a taxa de crescimento das perturbações, e observações numéricas e experimentais indicam que a amplitude deve saturar em algum ponto. Neste caso, a transição é dita subcrítica. Já o coeficiente  $c$  é chamado de constante de Landau e modela a frequência de oscilação na saturação.

Para obter os valores de  $l$  e  $\sigma$ , escreve-se a amplitude complexa na forma polar  $A(t) = \rho(t) e^{i\Phi(t)}$ . Deste modo, as partes real e imaginária da Eq. (15) podem ser escritas como:

$$\frac{d \log(\rho)}{dt} = \sigma - l\rho^2 \quad (16)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \omega - lc\rho^2 \quad (17)$$

Se plotarmos os valores de  $d \log |A|/dt$  por  $|A|^2$ , então a Eq. (16) pode ser usada e temos que  $\sigma$  é o valor em que a curva intercepta o eixo  $y$  e  $-l$  é igual à inclinação da curva. Se o gráfico é linear, temos que a equação de Landau truncada no termo de terceira ordem é suficiente para modelar o crescimento das perturbações, caso contrário será necessário no mínimo o uso da equação de Landau de quinta ordem.

Por fim, a amplitude de oscilação deve ser definida em termos das variáveis do escoamento. Neste trabalho usou-se a definição de Carmo et al. (2008), que define a amplitude como:

$$|A(t)| = \sqrt{\int_{\Omega} |\hat{\mathbf{u}}_1(x, y, t)|^2} \quad (18)$$

onde  $\Omega$  é uma seção transversal do domínio considerado e  $\hat{\mathbf{u}}_1(x, y, t)$  é o coeficiente do modo de Fourier correspondente à perturbação investigada.

### 3. TESTE DE CONVERGÊNCIA

Um teste de convergência para a geometria NACA 0012 foi realizado para confiabilidade dos resultados e de modo a otimizar a malha para as simulações aerodinâmicas bidimensionais. A metodologia utilizada se baseia em Carmo et al. (2008). Os parâmetros testados foram a extensão do domínio computacional, variando o comprimento a jusante e nas laterais, e a ordem da função base de interpolação em cada célula. Foram usados os valores médios e RMS dos coeficientes de sustentação e arrasto,  $\overline{C}_L$ ,  $C'_L$ ,  $\overline{C}_D$ ,  $C'_D$ , e o número de Strouhal baseado na corda  $St = f c/U$  como valores de comparação. O  $St$  foi calculado usando FFT do sinal temporal do  $C_L$ .

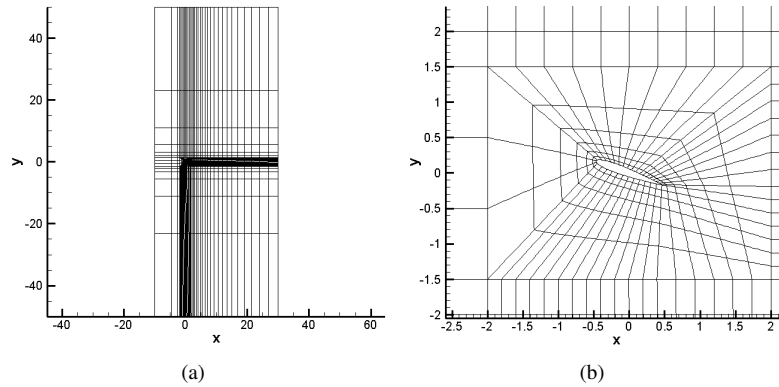


Figura 1. Malha para simulações do NACA 0012,  $\alpha = 20^\circ$ . (a) Domínio computacional. (b) Detalhe.

A malha resultante tem extensão de  $10c$  a montante,  $30c$  a jusante e  $50c$  em cada lateral, com aproximadamente 950 células quadrilaterais e um polinômio interpolador de nona ordem como função base. A Fig. 1 mostra o domínio computacional para o ângulo de ataque  $20^\circ$ . Nas fronteiras a montante e nas laterais foi imposta uma velocidade unitária. A condição de *outflow* foi aplicada no contorno a jusante, i.e. zero todas as derivadas normais à fronteira. Considera-se no fôlio um bordo de fuga com espessura finita de  $0,005c$  e a condição de contorno em todo seu contorno é de parede viscosa, satisfazendo a condição de aderência.

## 4. RESULTADOS

### 4.1 Simulações do campo base

Para efetuar a análise de estabilidade de Floquet, deve-se partir de um campo base periódico. Os ângulos de ataque estudados foram  $5^\circ$ ,  $10^\circ$  e  $20^\circ$ . O passo de tempo foi tomado como  $\Delta t = 0,0002$  unidades de tempo, de modo a baixar o número de Courant-Friedrich-Lewis (CFL) a valores menores que 1, garantido convergência do método.

### 4.1.1 Simulações para $\alpha = 5^\circ$

Para  $\alpha = 5^\circ$  o escoamento se comporta como em geometrias afiladas, se distanciando do comportamento corpos rombudos como o cilindro. Deste modo, espera-se que não haja desprendimento de vórtices na proximidade do aerofólio. De fato, um comportamento interessante é notado.

Para  $Re = 1000$ , a esteira ainda não passou pela transição primária, ou seja, formam-se duas camadas de vorticidades opostas que não se misturam. Para  $Re = 1200$  há um início de oscilação da esteira, mas não suficiente para iniciar o desprendimento de vórtices. Quando  $Re = 1500$ , a esteira ao longe se desestabiliza, desprendendo vórtices. Essa flutuação é pouco sentida na sustentação do fôlio, pois as instabilidades primárias do escoamento acontecem em uma região ao longe do fôlio, tendo pouca influência nas regiões mais próximas. Além disso, essas flutuações não são periódicas. O valor de Reynolds indica um início de turbulência na esteira, sendo esta um típico fenômeno aleatório. Deste modo, não há como efetuar a análise de Floquet para este caso.

### 4.1.2 Simulações para $\alpha = 10^\circ$

Para  $\alpha = 10^\circ$ , simulações foram efetuadas com valores de  $Re$  iguais a 1000, 1100 e 1200. A Fig. 2 mostra uma visualização do escoamento para  $Re = 1200$ , junto com o sinal temporal do  $C_L$ , mostrando a periodicidade do escoamento, viabilizando a aplicação da teoria de Floquet.

O que ocorre é que o escoamento se descola da parede do fôlio, no fenômeno conhecido como estol. Normalmente, o estol ocorre para ângulos de ataques maiores, porém, na situação de baixo Reynolds, em comparação com aplicações aeronáuticas, o fluido tem menos energia para vencer o gradiente adverso de pressões gerado pela inclinação do fôlio.

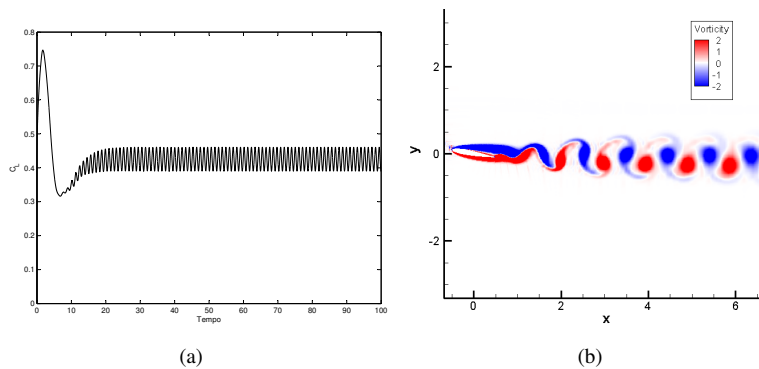


Figura 2. NACA0012,  $Re = 1200$ ,  $\alpha = 10^\circ$ . (a) Curva temporal do  $C_L$ . (b) Contornos instantâneos de  $\omega_z$ .

### 4.1.3 Simulações para $\alpha = 20^\circ$

Para este caso, a gama de  $Re$  investigada para este ângulo de ataque variou de 400 a 650. O escoamento deve ser periódico, ou então a aplicação da teoria de Floquet torna-se impraticável. Pode-se notar se essa condição é cumprida olhando o sinal temporal do coeficiente de sustentação e os contornos da componente  $z$  da vorticidade  $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$ , ambos mostrados na Fig. 3 para  $Re = 500$ .

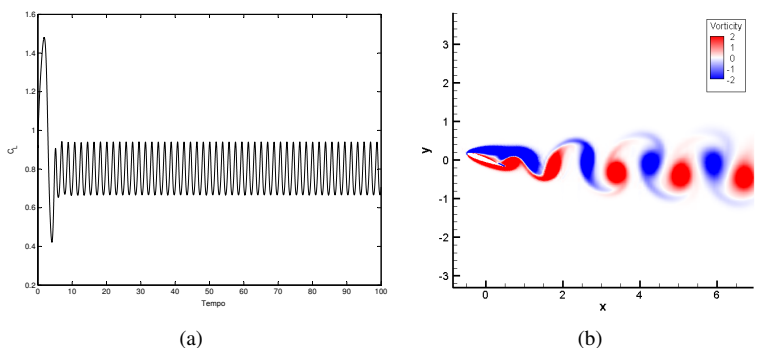


Figura 3. NACA 0012,  $Re = 500$ ,  $\alpha = 20^\circ$ . (a) Sinal temporal do  $C_L$ . (b) Contornos instantâneos de  $\omega_z$ .

O padrão de desprendimento de vórtices é o mesmo para outros valores de  $Re$ . Dada a periodicidade do campo base, pode-se proceder para a aplicação da análise de estabilidade de Floquet neste caso.

## 4.2 Análise de estabilidade

Na análise de estabilidade, a perturbação é evoluída durante um período do campo base, e a taxa de crescimento do modo é determinada pelos autovalores do operador linear  $\mathbf{L}$ , como visto na Sec. 2.3

O estudo consiste em encontrar os módulos dos multiplicadores de Floquet ( $|\mu|$ ) para cada valor de comprimento de onda  $\beta = 2\pi/\lambda$ .  $|\mu| > 1$  determina um modo instável.

### 4.2.1 Simulações para $\alpha = 10^\circ$

Para  $\alpha = 10^\circ$ , não foram encontrados modos instáveis na faixa de Re estudada. Simulações para Re maiores não foram efetuadas devido à não periodicidade do campo base nestes casos, tornando impossível a análise de estabilidade de Floquet. Obviamente, um estudo posterior para maiores valores de Reynolds será necessário, mesmo que empregando outros métodos de análise de estabilidade, o que foge ao escopo deste trabalho.

### 4.2.2 Simulações para ângulo de ataque $\alpha = 20^\circ$

O resultado para os número de Reynolds estudados é mostrado na Fig. 4(a), que apresenta a curva dos módulos dos multiplicadores de Floquet  $|\mu|$  pelo número de onda  $\beta$  das instabilidades, além da curva de estabilidade neutra.

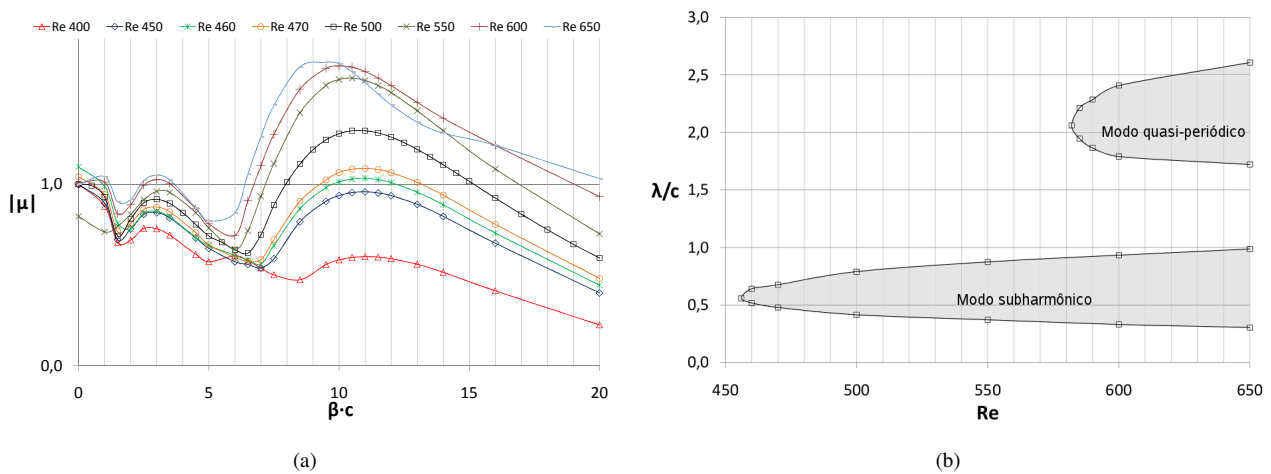


Figura 4. NACA 0012,  $\alpha = 20^\circ$ . (a) Espectro dos multiplicadores de Floquet. (b) Curva de estabilidade neutra.

Analisando a Fig. 4(a), notamos que o primeiro modo instável aparece para  $Re \approx 460$  e tem comprimento de onda na direção da envergadura  $\lambda \approx 0,57c$ . Nota-se claramente outro pico na curva, correspondendo a um modo de comprimento de onda maior ( $\lambda \approx 2,1c$ ), com valor de Reynolds crítico próximo a 585. A curva de estabilidade neutra, mostrada na Fig. 4(b), retrata as regiões instáveis no mapa dos comprimentos de onda  $\lambda$  pelo número de Reynolds  $Re$ . As regiões dentro das curvas correspondem aos modos instáveis, detalhados a seguir.

- Modo subharmônico

A bifurcação do primeiro modo instável ocorre para  $Re = 456$ . Para melhor caracterizar este modo, pode-se remontar o campo 3D de velocidades e pressão do escoamento utilizando-se o campo base bidimensional e o campo de perturbações tridimensional gerado pela análise dos autovalores, este último calculado na direção da envergadura por meio de uma expansão senoidal. O resultado pode ser visualizado na Fig. 5, para  $\beta = 11$  ( $\lambda = 0,57c$ ).

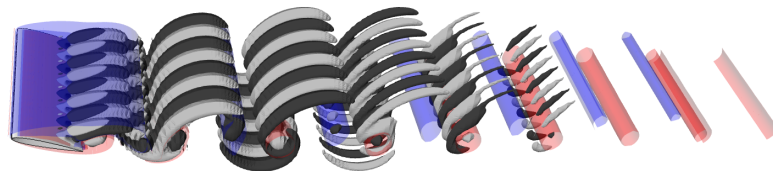


Figura 5. Escoamento remontado a partir do campo base bidimensional e das perturbações tridimensionais. As iso-superfícies translúcidas são de  $\omega_z$ . As iso-superfícies sólidas escuras e claras representam valores de  $\omega_x$  negativos e positivos, respectivamente. NACA 0012,  $Re = 500$ ,  $\alpha = 20^\circ$ ,  $\beta = 11$ .

Percebe-se claramente que as tridimensionalidades não são mais fortes nos núcleos dos vórtices principais, mas sim nas regiões que os interligam (*braids*). As instabilidades se formam na região próxima à esteira e decaem rapidamente. Também pode-se notar que o modo tridimensional tem período  $2T$ , consequência do multiplicador de Floquet ser um real negativo, ou seja, de fase igual a  $\pi$ . Tal modo recebe o nome de subharmônico, e tem o seguinte tipo de simetria:

$$\omega_x(x, y, z, t) = \omega_x(x, y, z, t + 2T) \quad (19)$$

Uma outra maneira de visualizar a característica de dobrar o período desse modo é analisando como se comporta no tempo a vorticidade na direção do escoamento em uma estação fixa na esteira do fôlio, como mostrado na Fig. 6. Percebe-se claramente que o modo tridimensional se repete a cada dois períodos  $T$ , caracterizando o modo subharmônico.

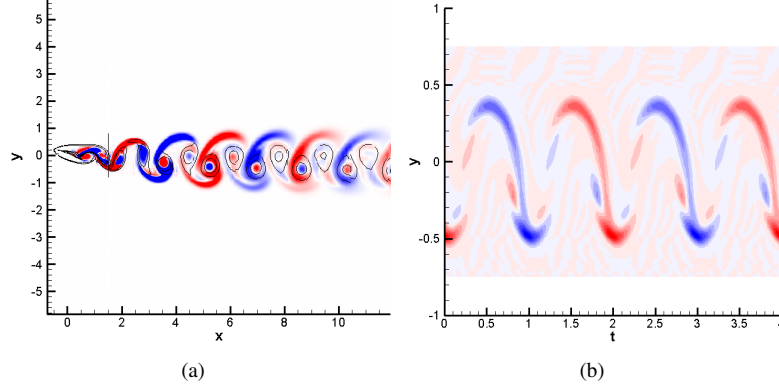


Figura 6. NACA 0012,  $\alpha = 20^\circ$ ,  $Re = 500$ . Contornos de  $\omega_x$ . (a) Posição da estação de aquisição de dados de  $\omega_x$  em  $x = 1,5c$ . Linhas tracejadas e pontilhadas mostram valores de  $\omega_z$  iguais a  $-2$  e  $2$ , respectivamente. (b) Contornos de  $\omega_x$  do modo instável para  $x = 1,5c$ . O tempo foi adimensionalizado usando o período de desprendimento de vórtices.

Um aerofólio com ângulo de ataque elevado começa a se comportar como corpo rombudo. No entanto, a transição secundária na geometria estudada difere consideravelmente do fenômeno que ocorre na esteira de um cilindro circular fixo, a começar pela assimetria causada pelo ângulo de ataque. Isso faz com que a vorticidade na direção  $x$  não seja simétrica em relação ao eixo  $Ox$ , como visto na Fig. 6(b).

- Modo quase-periódico

Um segundo modo instável surge para  $Re = 582$ , com comprimento de onda característico  $\lambda \approx 2,1c$  - correspondente a  $\beta = 3$ . Investigar este modo torna-se interessante devido ao seu maior comprimento de onda, o que implica na necessidade de um maior domínio na direção da envergadura para perfeita caracterização do modo em uma simulação quase-tridimensional.

Este modo apresenta multiplicadores de Floquet complexos, i.e. é um modo quase-periódico. Esta característica faz com que as componentes tridimensionais do escoamento apresentem um período característico diferente do período  $T$  de desprendimento de vórtices do campo base, o que pode ser visto no escoamento como uma onda estacionária ou propagante na direção da envergadura. Este tipo de modo pode ser representado por:

$$\omega_x(x, y, z, t) = \omega_x(x, y, z + k_z, t + T) \quad (20)$$

Analogamente ao modo subharmônico, podemos remontar o campo 3D de velocidades do modo quase-periódico utilizando o campo base bidimensional e as perturbações geradas na análise de Floquet. O resultado pode ser visualizado na Fig. 7, para  $\beta = 3$  ( $\lambda = 2,09c$ ).

Na bifurcação quase-periódica, duas soluções distintas podem aparecer simultaneamente, uma correspondendo a uma onda propagante e outra correspondendo a uma onda estacionária, ambas moduladas pelo campo base bidimensional. No entanto, a diferenciação entre estes dois comportamentos não é possível utilizando apenas a teoria de estabilidade linear de Floquet, sendo necessário simulações tridimensionais para fazer esta verificação.

### 4.3 Simulações quase-tridimensionais e análise não-linear: NACA 0012

Nesta seção, são apresentados os resultados de simulações quase-tridimensionais efetuadas para a geometria NACA 0012 com ângulo de ataque igual a  $\alpha = 20^\circ$ . Essas simulações são diretas (DNS), mas com uma decomposição em modos de Fourier na direção da envergadura. Sendo assim, as mesmas malhas utilizadas nas simulações bidimensionais podem ser usadas, sendo necessário informar apenas o tamanho do domínio computacional na direção da envergadura. O número de modos  $N$  é escolhido segundo a recomendação de Henderson (1997):

$$N = \frac{L}{c} \sqrt{Re} \quad (21)$$

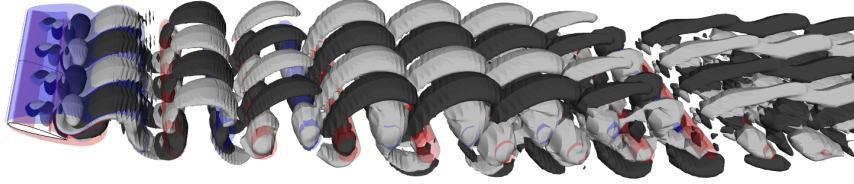


Figura 7. Escoamento remontado a partir do campo base bidimensional e das perturbações tridimensionais. As iso-superfícies translúcidas são de  $\omega_z$ . As iso-superfícies sólidas escuras e claras representam valores de  $\omega_x$  negativos e positivos, respectivamente. NACA 0012,  $Re = 590$ ,  $\alpha = 20^\circ$ ,  $\beta = 3$ .

onde  $L$  é o comprimento do domínio computacional na direção da envergadura,  $c$  é o comprimento característico - no caso a corda do fôlio - e  $Re$  é o número de Reynolds baseado nesse comprimento. As condições iniciais das simulações efetuadas foram os campos remontados a partir das simulações bidimensionais e das análises de Floquet.

### 4.3.1 Modo subharmônico

Para o estudo do modo subharmônico, a simulação efetuada teve como parâmetros  $Re = 500$  e comprimento  $L$  do domínio computacional na direção da envergadura igual ao comprimento característico da perturbação investigada  $\lambda = (2\pi/11)c = 0,57c$ . A Fig. 8(a) mostra os resultados do crescimento da amplitude do modo instável obtido de três modos: simulações quase-tridimensionais, aplicação da equação de Landau e análise linear de Floquet.

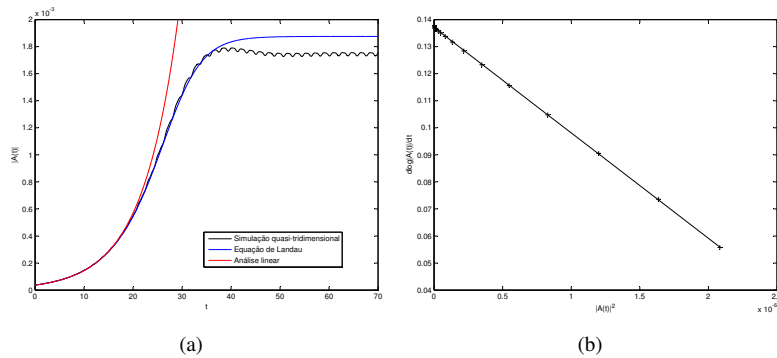


Figura 8. Resultados obtidos no estudo do modo subharmônico. NACA 0012,  $Re = 500$ ,  $\alpha = 20^\circ$ . (a) Crescimento e saturação da amplitude da perturbação tridimensional correspondente. Em preto resultado da simulação quase-tridimensional, em azul a equação de Landau, em vermelho resultado derivado da análise linear de Floquet. (b) Derivada do logaritmo da amplitude em função do quadrado da amplitude. + Resultados numéricos. - Reta que melhor aproxima os dados.

Os coeficientes da equação de Landau foram tirados a partir da Fig. 8(b), usando a metodologia mostrada na Sec. 2.4. Não se preocupou-se com os parâmetros  $\omega$  e  $c$  que modelam a parte imaginária da amplitude complexa  $A$  pois eles não dizem nada a respeito do crescimento do modo, apenas trazem informações sobre a frequência de oscilação das instabilidades. Como o modo é subharmônico, sabe-se que essa frequência é igual a metade da frequência de desprendimento de vórtices do escoamento base.

Temos que  $l > 0$  neste caso, o que indica um modo supercrítico, que pode ser descrito pela equação de Landau de terceira ordem. Outra evidência é que a curva  $d \log |A| / dt$  em função de  $|A|^2$  apresenta um caráter muito linear até próximo à saturação. O termo que descreve o crescimento da amplitude em primeira ordem é  $\sigma$ , e pode-se comparar o resultado da análise de Floquet com a equação de Landau, como mostrado na Tab. 1.

Tabela 1. Comparação entre valores da taxa de crescimento  $\sigma$ ,  $\alpha = 20^\circ$ ,  $Re = 500$ .

Caso	$\sigma$
Análise de Floquet	0,1377
Equação de Landau	0,1371

A grande proximidade entre os valores indica que em primeira ordem a análise de estabilidade de Floquet realmente traz resultados confiáveis. Analisando a Fig. 8(a), percebe-se que a curva correspondente à análise linear (Floquet)



acompanha o crescimento real até certo ponto, a partir do qual o termo de terceira ordem da equação de Landau passa a ser importante. A equação de Landau acerta o crescimento das perturbações e o momento da saturação, porém superestima o patamar dessa estabilização. Deste modo, o termo de quinta ordem, que seria o próximo da equação, deve ser negativo de modo a compensar esse erro e aproximar os dois resultados. Os três resultados também tendem a se aproximar para simulações com valores de  $Re$  mais próximos da bifurcação,  $Re_{critico} = 456$ .

### 4.3.2 Modo quase-periódico

Como visto na Sec. 4.2.2 um segundo modo instável aparece a partir de  $Re = 582$ . Para estudar esse modo, partiu-se da solução da análise de Floquet para  $Re = 585$ , com comprimento do domínio computacional na direção da envergadura igual a  $L = (2\pi/3)c = 2,09c$ , o mesmo da perturbação instável do modo quase-periódico.

A Fig. 9(a) mostra como a amplitude desse modo instável evolui no tempo. De acordo com a análise de estabilidade de Floquet, este modo deveria ser instável, mas pelo gráfico percebemos que a amplitude da perturbação tem uma tendência de subida mas depois é amortecida e tende a zero no escoamento. Uma possível explicação é que a energia do modo decai devido à interação com as perturbações de outros comprimentos de onda.

Como visto na Sec. 2.2 a maneira como são feitas as simulações quase-tridimensionais utilizando a expansão de Fourier na direção da envergadura faz com que sejam calculadas as energias de cada modo de Fourier independentemente. O primeiro modo, correspondente à Fig. 9(a), tem comprimento de onda igual a  $L$ . Podemos verificar o que ocorre com outros modos e buscar alguma indicação de que a interação entre esses modos inibe o crescimento da perturbação correspondente ao modo quase-periódico. A escolha óbvia é analisar o terceiro modo de Fourier, aquele que tem comprimento de onda correspondente ao modo subharmônico,  $\lambda = L/3 = 0,70c$ , que é instável para esse valor de  $Re$ , como visto na Fig. 4(b). A evolução temporal da amplitude deste modo é mostrada na Fig. 9(b).

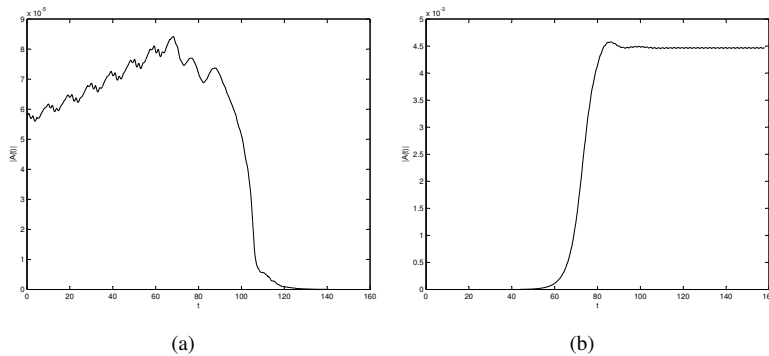


Figura 9. Resultados obtidos no estudo do modo quase-periódico. NACA 0012,  $Re = 585$ ,  $\alpha = 20^\circ$ . (a) Evolução da amplitude da perturbação com comprimento de onda  $L = (2\pi/3)c = 2,09c$ . (b) Evolução da amplitude da perturbação com comprimento de onda  $L/3 = (2\pi/9)c = 0,70c$ .

Comparando as duas figuras, é interessante notar que a amplitude do modo subharmônico começa a crescer justamente quando a amplitude do modo quase-periódico inicia o decaimento. A conclusão é que, embora ambos os modos individualmente tenham características instáveis para esse valor de  $Re$ , a interação entre eles faz com que o modo subharmônico absorva a energia do modo quase-periódico, amortecendo este último e fazendo sua amplitude tender a zero.

A aproximação pela equação de Landau não pode ser efetuada para o modo quase-periódico, visto que a amplitude da perturbação não se comporta da maneira esperada. Para o modo subharmônico também não se usou a aproximação por Landau, pois  $Re$  está, nesse caso, bem acima do Reynolds crítico da bifurcação.

## 5. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Os resultados presentes mostram que a transição na esteira para o aerofólio em configuração de estol é diferente do caso do cilindro fixo, a começar pela assimetria da geometria, mesmo que ambas apresentem desprendimento de vórtices.

No NACA 0012, para ângulos de ataque  $\alpha$  iguais a  $5^\circ$  e  $10^\circ$  não foi possível efetuar a análise de estabilidade de Floquet, pois para os valores de  $Re$  nos quais a bifurcação deveria ocorrer o escoamento base não se mostrou periódico devido ao surgimento de pequenas flutuações, que podem ser devidas às escalas turbulentas que aparecem para esses valores de Reynolds. Outros métodos de análise de estabilidade devem ser utilizados para estudar esses casos. Já para  $\alpha = 20^\circ$  a transição secundária foi estudada tanto pela análise de Floquet quanto por análises não-lineares.

O primeiro modo instável para  $\alpha = 20^\circ$  é subharmônico, surge para  $Re = 456$ , tem origem na região próxima a esteira e é mais intenso nos *braids*. Esse modo apresenta nenhuma semelhança com os modos A e B descritos por Barkley e Henderson (1996) para o cilindro circular fixo, mas divide a característica de dobrar o período com o modo C encontrado por Carmo et al. (2008) no escoamento ao redor de dois cilindros circulares desalinhados. Por meio de análises não-lineares, verificou-se que esse modo é supercrítico. Além disso, a taxa de crescimento da amplitude encontrada usando a

teoria de Floquet é a mesma que a da análise não-linear, o que mostra a validade da análise, pelo menos na determinação das características básicas dos modos e do valor de  $Re$  crítico.

O segundo modo instável encontrado na análise de Floquet é quasi-periódico e surge para  $Re = 582$ . Ele se assemelha ao modo subharmônico por se originar na região próxima à esteira e ser mais intenso nos *braids*. No escoamento ao redor de cilindros circulares fixos, um modo com características similares aparece para  $Re$  mais elevados que os valores críticos dos modos A e B, como visto em Blackburn, Marques e Lopez (2005). Um resultado importante encontrado utilizando a análise não linear foi que o modo quasi-periódico não consegue se desenvolver no escoamento, mesmo para valores de  $Re$  maiores que 582. Isso ocorre devido à competição com o modo subharmônico, de comprimento característico menor, cuja amplitude cresce exatamente quando o outro modo decai. Isso ocorre pelo acoplamento entre os modos e pela cascata de energia, segundo a qual a energia se transfere no escoamento das maiores para as menores escalas.

Enquanto os modos A e B do cilindro possuem o mesmo período do campo base bidimensional, os modos instáveis encontrados para o fôlio apresentam o período igual ao dobro do campo base (subharmônico) ou com uma frequência desacoplada (quasi-periódico). É a quebra de simetria da esteira provocada pelo ângulo de ataque que é responsável pelo surgimento desses modos.

## 6. REFERÊNCIAS

- Abdessemed, N., 2007, "Stability analysis of the flow past a low-pressure turbine blade", Ph.D. thesis, Imperial College of Science, Technology and Medicine.
- Barkley, D., Henderson, R. D., 1996, "Three-dimensional Floquet stability analysis of the wake of a circular cylinder", *Journal of Fluid Mechanics* 322, 215–241.
- Blackburn, H. M., Marques, F., Lopez, J. M., 2005, "Symmetry breaking of two-dimensional time-periodic wakes", *Journal of Fluid Mechanics*, 522, 395–411.
- Carmo, B. S., Sherwin, S. J., Bearman, P. W., Willden, R. H. J., 2008, "Wake transition in the flow around two circular cylinders in staggered arrangements", *Journal of Fluid Mechanics* 597, 1–29.
- Henderson, R. D., 1997, "Nonlinear dynamics and pattern formation in turbulent wake transition", *Journal of Fluid Mechanics*, 352, 65–112.
- Iooss, G., Joseph, D. D., 1990, "Elementary stability and bifurcation theory", 2nd Edition, Springer-Verlag.
- Karniadakis, G. E., Sherwin, S. J., 1999, "Spectral/hp element methods for computational fluid dynamics", 2nd Edition, Oxford University Press.
- Theofilis, V., Sherwin, S. J., 2001, "Global instabilities in trailing-edge laminar separated flow on a naca 0012 airfoil", In: *International Symposium on Air Breathing Engines (ISABE)*.
- Williamson, C. H. K., 1988, "The existence of two stages in the transition to three-dimensionality of a cylinder wake", *Physics of Fluids*, 31, 11, 3165–3168.

## 7. Direitos autorais

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

## SECONDARY STABILITY STUDY OF THE FLOW PAST AN AIRFOIL

**Stergios Pericles Tsiloufas**  
tsiloufas@gmail.com

**Julio R. Meneghini**  
jmeneg@usp.br

**Abstract.** *This work is concerned with the three-dimensional instabilities of the flow around an airfoil profile in stalled configuration. The goal is to investigate how the flow becomes unstable in the wake, studying the influence of the Reynolds number based on the chord ( $Re$ ) and the angle of attack ( $\alpha$ ). For each  $Re$  and  $\alpha$ , the stability analysis of the two-dimensional flow is carried out with respect to three-dimensional infinitesimal perturbations, using the Floquet stability theory. The time-periodic base flow is computed with the spectral/hp element method. The results are the modulus of the Floquet multiplier versus the wavelength of the perturbation, showing the characteristic spanwise length of the three-dimensionality. It is possible to use these results in order to perform quasi-three-dimensional simulations of the flow past uniform wings, with great computational time saving and low resolution loss on the physics of the phenomena.*

**Keywords:** *Secondary transition in wake, Floquet analysis, Airfoil flows*