

**ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**PROJETO DE ANÁLISE E SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE UM  
ESCOAMENTO COMPRESSÍVEL UNIDIMENSIONAL  
GENERALIZADO**

Relatório final para Disciplina de Projeto Integrado II  
junto ao Departamento de Engenharia Mecânica da  
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

Gabriel Victor de Paiva

Orientador:  
Prof. Dr. Marcos de Mattos Pimenta

São Paulo, 11 de dezembro

2009

## **FICHA CATALOGRÁFICA**

**Paiva, Gabriel Victor de**

**Projeto de Análise e Simulação Numérica de um escoamento Compressível Unidimensional Generalizado / G.V. de Paiva. - São Paulo, 2009.**

**45p.**

**Trabalho de formatura – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.**

**1. Escoamento (Estudo; Análise; Simulação) I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II. .t.**

## **RESUMO**

O objetivo deste Relatório é estudar, analisar e simular numericamente a combinação de um ou mais efeitos em um escoamento compressível unidimensional generalizado. Esse estudo das combinações dos efeitos do escoamento será feito através do método de Range-Kutta e com o auxílio do programa Mathworks MatLab 7.8.0.

Após o desenvolvimento do código de análise do escoamento unidimensional generalizado, serão feitos alguns estudos de caso com o intuito de verificar a validade da programação criada.

## **ABSTRACT**

The purpose of this graduation work is to study, analyze and numerically simulate the combination of one or more effects in a generalized one-dimensional compressible flow. The effect's study of these flow combinations will be done guided by the Range-Kutta method and with the assistance of the software Mathworks MATLAB 7.8.0.

Additionally, after the program code had been finished, it will be done some case's studies to verify the accuracy of the developed program.

# SUMÁRIO

<b>1.</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
<b>2.</b>	<b>CONCEITOS FUNDAMENTAIS .....</b>	<b>2</b>
2.1.	Nomenclatura .....	2
2.2.	Compressibilidade .....	3
2.3.	Hipóteses Fundamentais .....	5
2.4.	Equações e Definições .....	7
<b>3.</b>	<b>ESCOAMENTO UNIDIMENSIONAL GENERALIZADO .....</b>	<b>12</b>
3.1.	Coefficientes de Influência .....	14
3.2.	Escoamento com Calor Específico e Peso Molecular constantes .....	15
3.3.	Relações Integrais Úteis .....	18
<b>4.</b>	<b>ESTUDO DE CASO .....</b>	<b>20</b>
4.1.	Varição de área e Troca de calor .....	20
4.2.	Varição de área, troca de calor e adição de massa com atrito .....	25
<b>5.</b>	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>34</b>
<b>6.</b>	<b>APÊNDICE A .....</b>	<b>35</b>
<b>7.</b>	<b>APÊNDICE B .....</b>	<b>38</b>

## Lista de Figuras

Figura 2.1 - Superfície de Controle para escoamento infinitesimal .....	7
Figura 4.1 - Variação do Número de Mach.....	23
Figura 4.2 - Variação das Temperaturas .....	24
Figura 4.3 - Variação das Pressões .....	24
Figura 4.4 - Variação da Área .....	30
Figura 4.5 - Variação do Fluxo de Massa .....	31
Figura 4.6 - Variação do Número de Mach.....	31
Figura 4.7 - Variação das Temperaturas .....	32
Figura 4.8 - Variação das Pressões .....	32

## Lista de tabelas

Tabela 3.1 - Equações para Escoamentos Unidimensionais Simples .....	14
Tabela 3.2 - Fatores de Influência para Gases Perfeitos .....	17
Tabela 4.1 - Resultados para primeiro caso analisado .....	22

# 1. INTRODUÇÃO

Em boa parte das análises sobre o comportamento de escoamentos compressíveis, é comum que tal análise seja feita considerando apenas um escoamento simples, ou seja, um escoamento no qual apenas um único parâmetro independente pode variar.

Como alguns exemplos de escoamentos simples temos:

- Os efeitos da variação de área considerados isoladamente;
- Os efeitos do atrito considerados isoladamente e;
- Os efeitos da variação da temperatura de estagnação considerados isoladamente.

Na maioria dos problemas práticos, porém, essa simplificação não pode ser adotada, pois esses efeitos ocorrem simultaneamente. Além destes efeitos supracitados, podem também existir outros tipos de fenômenos como, por exemplo, reações químicas, mudanças de fase, injeção ou retirada de gases e mudanças do peso molecular e do calor específico. Neste caso, é comum denominar este escoamento como Escoamento Generalizado.

Como exemplos de onde Escoamentos Generalizados ocorrem, pode-se citar bocais de foguetes, motores de jato-êmbolo, câmaras de combustão para turbinas a gás e motores turbo-jato, injetores e ejetores, trocadores de calor e reatores nuclear refrigerados a gás.

Este presente trabalho visa, então, abordar como escoamentos onde diversos efeitos ocorrem simultaneamente podem ser analisados e, por fim, verificar, através de alguns estudos de caso, se estas análises estão de acordo com o esperado.

## 2. CONCEITOS FUNDAMENTAIS

### 2.1. Nomenclatura

A seguir, são exibidas as nomenclaturas adotadas no presente trabalho:

$A$	área	$s$	entropia
$A_w$	área molhada da parede	$T$	temperatura absoluta
$c$	velocidade do som	$V$	velocidade
$c_p$	calor específico à pressão constante	$V'$	velocidade do fluido injetado
$D$	diâmetro hidráulico médio	$W$	peso molecular
$f$	coeficiente de atrito	$W_x$	trabalho
$F$	função impulso	$X$	força de arrasto
$H$	entalpia total	$x$	coordenada cartesiana
$k$	condutividade térmica	$y$	$V'/V$
$L$	comprimento	$\rho$	densidade
$\dot{m}$	fluxo mássico	$\tau$	tensão de cisalhamento na parede
$M$	número de Mach	$( )_0$	estado de estagnação
$P$	pressão	$( )^*$	estado onde $M = 1$
$Q$	quantidade de calor	$( )_g$	gás injetado
$\mathcal{R}$	constante universal dos gases	$( )_L$	líquido evaporado

## 2.2. Compressibilidade

A compressibilidade de um fluido é, basicamente, uma medida da mudança de densidade que será produzida em um fluido por uma mudança específica na pressão. Em geral, gases são altamente compressíveis enquanto a maioria dos líquidos tem uma compressibilidade muito baixa.

No escoamento de um fluido, ocorrem normalmente mudanças na pressão associadas, por exemplo, com variações na velocidade do escoamento. Em geral, essas mudanças de pressão vão induzir a mudanças de densidade as quais terão influência no escoamento, ou seja, a compressibilidade do fluido envolvido terá influência no escoamento. Se essas variações de densidade são importantes, as variações de temperatura no escoamento que elevam devido a mudanças na energia cinética relacionadas com as mudanças de velocidade também, normalmente, influenciam o escoamento, ou seja, quando a compressibilidade é importante, as variações de temperatura no escoamento são normalmente importantes.

Apesar das variações de densidade em um escoamento serem normalmente importantes, existem diversas situações de importantes aplicações práticas nas quais essas variações de densidade e temperatura são desprezíveis. A mecânica dos fluidos incompressíveis clássica lida com diversos escoamentos nos quais as variações de pressão e de energia cinética são tão ínfimas que os efeitos de uma conseqüente variação de temperatura e densidade no escoamento do fluido são desprezíveis e, sendo assim, o fluido pode ser assumido como incompressível.

Entretanto, existe um número de escoamentos de grande importância prática nos quais essas suposições não são adequadas, as mudanças de pressão e temperatura são tão extensas que estas exercem uma influência importante no escoamento. Nesses casos, é necessário o estudo da termodinâmica do fluido simultaneamente com o estudo de sua dinâmica.

O conhecimento da teoria de escoamento de fluidos compressíveis é necessário para a aplicação e operação de diversos aparelhos usados na prática da Engenharia. São exemplos dessas aplicações:

- Turbinas a gás
- Turbinas a vapor
- Linhas de transmissão de gás natural
- Câmaras de combustão

Em boa parte das análises sobre escoamento compressível consideram-se os efeitos das variações de área, atrito e de transferência de calor separadamente. Entretanto, em geral esses efeitos são todos importantes no escoamento.

As combinações de escoamentos simples unidimensionais são chamadas de escoamentos unidimensionais generalizados. Um método flexível para estes escoamentos generalizados é o método dos coeficientes de influência, ou fatores de influência. Trata-se de um método ideal para o estudo de problemas de sistemas energéticos.

Entre os fatores que podem influenciar em um escoamento, podemos citar:

- Variações de Área
- Atritos com a parede
- Trocas de calor
- Reações químicas
- Mudança de fase (evaporação ou condensação, por exemplo)
- Variação no peso molecular e no calor específico ocasionado pela combustão, evaporação, injeção de gás, etc.
- Mistura de gases
- Arrasto de corpos internos

## 2.3. Hipóteses Fundamentais

Como se sabe, algumas hipóteses simplificadoras devem ser adotadas para serem feitas análises em um problema de Engenharia. Para esse trabalho, serão adotadas as seguintes hipóteses:

1. Gás contínuo: O movimento individual das moléculas não deve ser considerado.
2. Gás perfeito:
  - O gás obedece à lei dos gases perfeitos, ou seja:
$$\frac{P}{\rho} = RT$$
  - O fluido é perfeito caloricamente, sendo assim, o calor específico a pressão constante,  $c_p$ , e volume constante,  $c_v$ , são ambos constantes.
3. Não ocorre nenhuma mudança química no campo do escoamento
4. Efeitos gravitacionais desprezíveis
5. Efeitos elétricos e magnéticos são desprezíveis
6. Efeitos de viscosidade também são desprezíveis

Quando as hipóteses acima são assumidas, o campo do escoamento é completamente descrito conhecendo-se todas as seguintes variáveis em todos os pontos do campo de escoamento:

- Vetor velocidade,  $V$
- Pressão,  $p$
- Densidade,  $\rho$
- Temperatura,  $T$

E, para descrever o campo do escoamento, quatro equações envolvendo essas quatro variáveis devem ser obtidas. Essas equações são derivadas da aplicação dos seguintes princípios:

- Conservação de massa (Equação da Continuidade)
- Conservação do momento angular (Lei de Newton)
- Conservação de Energia (Primeira Lei da Termodinâmica)
- Equação de Estado

A seguir, trataremos de cada um desses assuntos com mais atenção.

## 2.4. Equações e Definições

Considera-se um escoamento em um duto entre duas seções possuindo uma distância infinitesimal  $dx$  entre (Figura 2.1). Nesse trecho de duto, gás é injetado no escoamento a uma taxa de fluxo mássico  $d\dot{m}_g$ , líquido evapora no escoamento a uma taxa de fluxo mássico de  $d\dot{m}_L$ , a quantidade  $dQ$  de calor é adicionada ao escoamento por fontes externas e os trabalhos realizados são representados por  $dW$ .

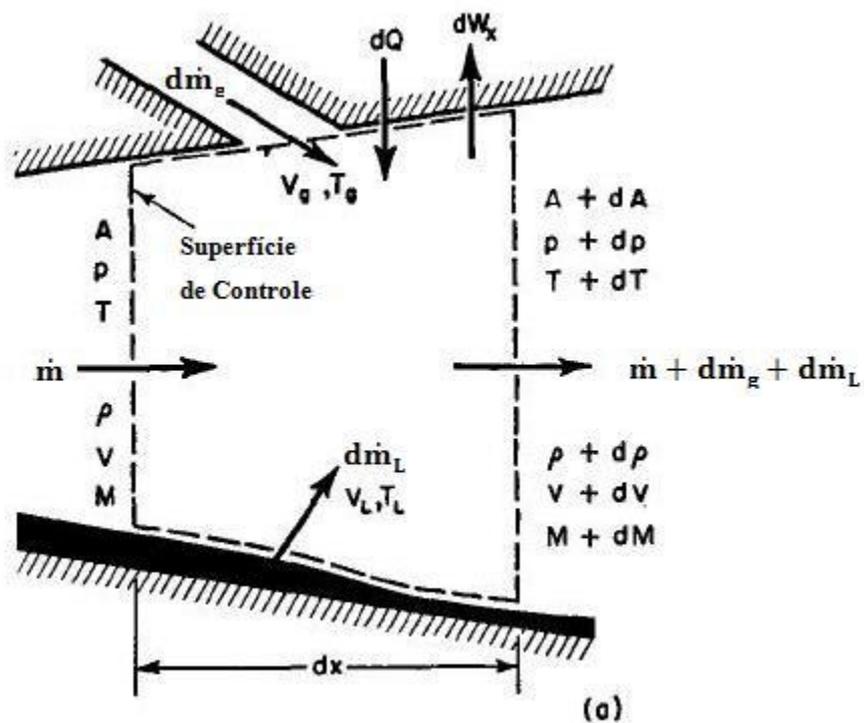


Figura 2.1 - Superfície de Controle para Escoamento Infinitesimal

As diversas equações físicas e definições serão expressas na forma logarítmica diferencial. Sabe-se que desta forma a separação das variáveis físicas se torna mais prática.

- **Equação de Estado**

A relação entre pressão, densidade e temperatura é dada por:

$$P = \rho \mathcal{R}T / W \quad (2.1)$$

Adotando a notação por algoritmos e diferenciando ambos os lados da equação, encontra-se que:

$$\frac{dP}{P} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} - \frac{dW}{W} \quad (2.2)$$

- **Velocidade do Som**

A expressão para a velocidade do som para um gás é dada por:

$$c^2 = k \mathcal{R}T / W \quad (2.3)$$

Ou ainda:

$$\frac{dc}{c} = \frac{1}{2} \left( \frac{dk}{k} + \frac{dT}{T} - \frac{dW}{W} \right) \quad (2.4)$$

- **Definição do Número de Mach**

Da definição do Número de Mach e da Equação (2.3), encontramos que:

$$M^2 = \frac{V^2}{c^2} = \frac{V^2 W}{k \mathcal{R}T} \quad (2.5)$$

Ou:

$$\frac{dM^2}{M^2} = \frac{dV^2}{V^2} + \frac{dW}{W} - \frac{dk}{k} - \frac{dT}{T} \quad (2.6)$$

- **Equação da Continuidade**

Aplicando a Equação da Continuidade, encontramos que o fluxo máximo do escoamento do fluido pode ser expresso como:

$$\dot{m} = \rho AV \quad (2.7)$$

Ou:

$$\frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} \quad (2.8)$$

- **Conservação de Energia**

Introduzindo a Equação da Conservação de Energia ao sistema analisado, encontramos que:

$$dQ - dW_x + dH = c_p dT + d\left(\frac{V^2}{2}\right) \quad (2.9)$$

Dividindo a Equação (2.9) por  $c_p dT$ , pode-se obter:

$$\frac{dQ - dW_x + dH}{c_p dT} = \frac{dT}{T} + \frac{k+1}{2} M^2 \left(\frac{dV^2}{V^2}\right) \quad (2.10)$$

- **Conservação da Quantidade de Movimento Linear**

Considerando as forças na mesma direção do escoamento agindo na superfície de controle da Figura 2.1e que os gases e líquidos injetados estão à mesma pressão da superfície de controle assim que eles cruzam a fronteira e que o ângulo de

divergência das paredes é pequeno, a Equação da Conservação da Quantidade de Movimento Linear pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} PA - PdA - (P + dP)(A + dA) - \tau dA_w - dX \\ = (m + d\dot{m}_g + d\dot{m}_L)(V + dV) - V'_g d\dot{m}_g - V'_L d\dot{m}_L - \dot{m}V \end{aligned} \quad (2.11)$$

Na expressão anterior,  $\tau$  representa a força de cisalhamento devida ao atrito agindo na parede do tubo de área  $dA_w$ ;  $dX$  é a soma do arrasto dos corpos estacionários imersos no escoamento contido na superfície de controle, do arrasto de gotículas ou filamentos líquidos percorrendo o trecho de tubulação mais devagar que o escoamento principal e a componente da gravidade atuando no material contido na superfície de controle na direção oposta a aquela do vetor velocidade;  $V'_g$  é a componente da velocidade  $V_g$  com a qual o gás injetado cruza a superfície de controle, e similarmente para  $V'_L$ .

A força de cisalhamento devida ao atrito está relacionada com o coeficiente de atrito,  $f$ , de acordo com a definição deste último:

$$\tau = \frac{f\rho V^2}{2} \quad (2.12)$$

É conveniente definirmos as quantidades:

$$y_g = \frac{V'_g}{V} \quad e \quad y_L = \frac{V'_L}{V} \quad (2.13)$$

Da definição do diâmetro hidráulico médio  $D$ , obtém-se:

$$\frac{dA_w}{A} = \frac{4dx}{D} \quad (2.14)$$

E, por fim, substituindo as equações (2.12), (2.13) e (2.14) na equação (2.11), encontramos, após rearranjarmos a expressão, que:

$$\frac{dP}{P} + \frac{kM^2}{2} \frac{dV^2}{V^2} + \frac{kM^2}{2} \left( 4f \frac{dx}{D} + \frac{dX}{\frac{1}{2}kPAM^2} \right) + kM^2(1-y) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = 0 \quad (2.15)$$

- **Definição da Função Impulso**

A função impulso, a qual é definida por:

$$F = PA + \rho AV^2 = PA(1 + kM^2) \quad (2.16)$$

é útil para avaliar o empuxo de sistemas de propulsão. O aumento nessa função representa a força total expelida pelo escoamento nas paredes internas do tubo agindo nas paredes do tubo em direção oposta ao escoamento. Na forma diferencial temos:

$$\frac{dF}{F} = \frac{dA}{A} + \frac{dP}{P} + \frac{kM^2}{1+kM^2} \frac{dM^2}{M^2} + \frac{kM^2}{1+kM^2} \frac{dk}{k} \quad (2.17)$$

- **Segunda Lei da Termodinâmica**

A aplicação da Segunda Lei da Termodinâmica é simplificada com o uso da entropia. Para um gás sem mudanças em sua composição química, a variação da entropia do escoamento de gás principal somente é:

$$\frac{ds}{c_p} = \frac{dT}{T} - \frac{(k-1)}{k} \frac{dP}{P} \quad (2.18)$$

### 3. ESCOAMENTO UNIDIMENSIONAL GENERALIZADO

No capítulo anterior, foram definidas oito relações independentes entre parâmetros diferenciais dadas pelas equações (2.2), (2.4), (2.6), (2.8), (2.10), (2.15), (2.17) e (2.18).

Como existem quatorze variáveis diferenciais, seis podem ser escolhidas como variáveis independentes e oito como variáveis dependentes. Para as variáveis independentes, é mais adequado a escolha das variáveis que são mais fáceis de controlar na prática:

Variáveis	
Independentes	Dependentes
$\frac{dA}{A}$	$\frac{dM}{M}$
$\frac{dQ - dW_x + dH}{c_p dT}$	$\frac{dV}{V}$
	$\frac{dc}{c}$
$4f \frac{dx}{D} + \frac{dX}{\frac{1}{2}kPAM^2} - 2y \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$	$\frac{d\rho}{\rho}$
	$\frac{dP}{P}$
$\frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$	$\frac{dF}{F}$
$\frac{dW}{W}$	$\frac{ds}{c_q}$
$\frac{dk}{k}$	$dT/T$

Os métodos usuais para solucionar sistemas de equações simultâneas, lineares, algébricas pode ser empregado para a obtenção de cada variável dependente em termos das seis variáveis independentes.

### 3.1. Coeficientes de Influência

Pode-se chamar os coeficientes das variáveis independentes de Coeficientes de Influência, desde que eles indiquem a influência de cada variável independente em cada parâmetro dependente. A Tabela 3.1 lista os Coeficientes de Influência encontrados pela solução das equações simultâneas supracitadas.

	<i>Variação Simples de Área</i>	<i>Escoamento Simples com Atrito</i>	<i>Escoamento Diabático Simples</i>	<i>Adição Simples de Massa (y = 0)</i>
$\frac{A}{A^*}$	$\frac{1}{M} \left[ \left( \frac{2}{k+1} \right) \psi \right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$	1	1	1
$\frac{T_0}{T_0^*}$	1	1	$\frac{2(k+1)M^2\psi}{(1+kM^2)^2}$	1
$\frac{4fL^*}{D}$	0	$\frac{1-M^2}{kM^2} + \left( \frac{k+1}{2k} \right) \ln \left\{ M^2 \left[ \left( \frac{2}{k+1} \right) \psi \right]^{-1} \right\}$	0	0
$\frac{\dot{m}}{\dot{m}^*}$	1	1	1	$\frac{M\sqrt{2(k+1)\psi}}{1+kM^2}$
$\frac{p}{p^*}$	$\left[ \left( \frac{2}{k+1} \right) \psi \right]^{\frac{-k}{k-1}}$	$\frac{1}{M} \left[ \left( \frac{2}{k+1} \right) \psi \right]^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{(k+1)}{(1+kM^2)}$	$\frac{k+1}{1+kM^2}$
$\frac{\rho}{\rho^*}$	$\left[ \left( \frac{2}{k+1} \right) \psi \right]^{\frac{-1}{k-1}}$	$\frac{1}{M} \left[ \left( \frac{2}{k+1} \right) \psi \right]^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1+kM^2}{(k+1)M^2}$	$\frac{2\psi}{1+kM^2}$
$\frac{T}{T^*}$	$\left[ \left( \frac{2}{k+1} \right) \psi \right]^{-1}$	$\left[ \left( \frac{2}{k+1} \right) \psi \right]^{-1}$	$\frac{(k+1)^2M^2}{(1+kM^2)^2}$	$\left[ \left( \frac{2}{k+1} \right) \psi \right]^{-1}$
$\frac{V}{V^*}$	$M \left[ \left( \frac{2}{k+1} \right) \psi \right]^{-\frac{1}{2}}$	$M \left[ \left( \frac{2}{k+1} \right) \psi \right]^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{(k+1)M^2}{(1+kM^2)}$	$M \left[ \left( \frac{2}{k+1} \right) \psi \right]^{-\frac{1}{2}}$
$\frac{p_0}{p_0^*}$	1	$\frac{1}{M} \left[ \left( \frac{2}{k+1} \right) \psi \right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$	$\frac{(k+1)}{(1+kM^2)} \left[ \left( \frac{2}{k+1} \right) \psi \right]^{\frac{k}{k-1}}$	$\frac{(k+1)}{(1+kM^2)} \left[ \left( \frac{2}{k+1} \right) \psi \right]^{\frac{k}{k-1}}$
$\frac{F}{F^*}$	$\frac{1+kM^2}{M\sqrt{2(k+1)\psi}}$	$\frac{1+kM^2}{M\sqrt{2(k+1)\psi}}$	1	1
$\frac{s-s^*}{c_p}$	0	$\ln \left\{ M^{\frac{k-1}{k}} \left[ \left( \frac{2}{k+1} \right) \psi \right]^{-\frac{k+1}{2k}} \right\}$	$\ln \left\{ M^2 \left( \frac{k+1}{1+kM^2} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right\}$	$\ln \left\{ \left[ \left( \frac{2}{k+1} \right) \psi \right]^{-1} \left( \frac{1+kM^2}{1+k} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right\}$

Tabela 3.1 - Equações para Escoamentos Unidimensionais Simples

## 3.2. Escoamento com Calor Específico e Peso

### Molecular constantes

Existem diversas circunstâncias onde as variações na peso molecular e no calor específico são de importância secundária e podem, assim, serem desprezados para simplificar o problema.

Sendo assim, as equações são simplificadas adotando-se:

$$dW = dc_p = dk = 0$$

e

$$W_1 = W_2; c_{p1} = c_{p2}; k_1 = k_2$$

Sabemos que as temperaturas e pressões de estagnação são parâmetros úteis para problemas de escoamentos unidimensionais. Entretanto, estas não foram usadas anteriormente pois não existia alguma relação algébrica conectando as propriedades locais com o caso geral de calor específico e peso molecular variável.

Porém, assumindo  $c_p$  e  $W$  constantes, nós podemos expressar a temperatura de estagnação como:

$$T_0 = T + \frac{V^2}{2c_p} = T \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \quad (3.1)$$

Ou, adotando a forma diferencial:

$$\frac{dT_0}{T_0} = \frac{dT}{T} + \frac{\frac{k-1}{2} M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \frac{dM^2}{M^2} \quad (3.2)$$

E, da combinação da equação (2.9) com a equação (3.2), encontramos:

$$\frac{dQ - dW_x + dH}{c_p T} = \left( 1 + \frac{k-1}{2} \frac{dT_0}{T_0} \right) \quad (3.3)$$

A equação (3.3) mostra que a variação em  $T_0$  é uma medida dos efeitos da energia total produzida pela transferência de calor, trabalho, reações químicas, mudança de fase, injeção de gases, etc.

Já a pressão de estagnação isentrópica é relacionada com a pressão local e com o número de Mach:

$$P_0 = P \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (3.4)$$

Ou na forma diferencial:

$$\frac{dP_0}{P_0} = \frac{dP}{P} + \frac{\frac{kM^2}{2}}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \frac{dM^2}{M^2} \quad (3.5)$$

Sendo assim, a variação da entropia, em termos de  $P_0$  e  $T_0$  é igual:

$$\frac{ds}{c_p} = \frac{dT_0}{T_0} - \frac{k-1}{k} \frac{dP_0}{P_0} \quad (3.6)$$

Com isso, as equações diferenciais são arranjadas em termos dos parâmetros independentes, coeficientes de influência e parâmetros dependentes. Por exemplo, podemos obter para  $dM/M$  a equação:

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} \frac{dM}{dx} = & -\frac{\psi}{1-M^2} \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} + \frac{kM^2\psi}{2(1-M^2)} \left[ \frac{4f}{D} + \frac{2}{kM^2} \frac{\delta d}{pA} \frac{dx}{dx} \right. \\ & \left. + \frac{(1+kM^2)\psi}{2(1-M^2)} \frac{1}{T_0} \frac{dT_0}{dx} + \frac{\psi[(1+kM^2) - ykM^2]}{1-M^2} \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Onde  $\psi = 1 + \frac{k-1}{2} M^2$ .

A tabela completa dos coeficientes de influência é dada pela Tabela 3.2:

	$\frac{dA}{A}$	$\left[ \left( \frac{4fdx}{D} \right) + \frac{2\delta d}{kM^2 pA} \right]$	$\frac{dT_0}{T_0}$	$\frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$
$\frac{dM}{M}$	$-\frac{\psi}{1-M^2}$	$\frac{kM^2\psi}{2(1-M^2)}$	$\frac{(1+kM^2)\psi}{2(1-M^2)}$	$\frac{\psi[(1+kM^2)-y kM^2]}{1-M^2}$
$\frac{dp}{p}$	$\frac{kM^2}{1-M^2}$	$-\frac{kM^2[1+(k-1)M^2]}{2(1-M^2)}$	$-\frac{kM^2\psi}{1-M^2}$	$-\frac{kM^2[2\psi(1-y)+y]}{1-M^2}$
$\frac{d\rho}{\rho}$	$\frac{M^2}{1-M^2}$	$-\frac{kM^2}{2(1-M^2)}$	$-\frac{\psi}{1-M^2}$	$-\frac{[(k+1)M^2-kyM^2]}{1-M^2}$
$\frac{dT}{T}$	$\frac{(k-1)M^2}{1-M^2}$	$-\frac{k(k-1)M^4}{2(1-M^2)}$	$\frac{\psi(1-kM^2)}{1-M^2}$	$-\frac{(k-1)M^2[(1+kM^2)-kyM^2]}{1-M^2}$
$\frac{dV}{V}$	$-\frac{1}{1-M^2}$	$-\frac{kM^2}{2(1-M^2)}$	$\frac{\psi}{1-M^2}$	$\frac{[(1+kM^2)-y kM^2]}{1-M^2}$
$\frac{dp_0}{p_0}$	0	$\frac{-kM^2}{2}$	$\frac{-kM^2}{2}$	$-kM^2(1-y)$
$\frac{dF}{F}$	$\frac{1}{1+kM^2}$	$-\frac{kM^2}{1+kM^2}$	0	$\frac{y kM^2}{1+kM^2}$
$\frac{ds}{c_p}$	0	$\frac{(k-1)M^2}{2}$	$\psi$	$(k-1)M^2(1-y)$

Tabela 3.2 - Fatores de Influência para Gases Perfeitos

### 3.3. Relações Integrais Úteis

Além das equações diferenciais resumidas na Tabela 3.1, um número de úteis relações integrais podem ser obtidas através das equações (2.1), (2.5), (2.7), (2.10) e (2.17). Tais equações podem ser escritas na forma:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_{02} \psi_1}{T_{01} \psi_2} \quad (3.8)$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{M_2}{M_1} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \quad (3.9)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\dot{m}_2 A_1 M_1}{\dot{m}_1 A_2 M_2} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \quad (3.10)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\dot{m}_2 A_1 V_1}{\dot{m}_1 A_2 V_2} \quad (3.11)$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{p_2 A_2 (1 + kM_2^2)}{p_1 A_1 (1 + kM_1^2)} \quad (3.12)$$

$$s_2 - s_1 + c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} \quad (3.13)$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_2}{p_1} \left[ \frac{\psi_2}{\psi_1} \right]^{k/(k-1)} \quad (3.14)$$

Essas fórmulas são derivadas das equações de Conservação de Energia e da Continuidade para duas seções do escoamento e pela introdução das definições de  $M$  e  $F$  juntos com as relações  $P = \rho \mathcal{R}T$  e  $c = \left( \frac{k\mathcal{R}T}{W} \right)^{\frac{1}{2}}$ .

Conhecidos os potenciais em função de  $x$ , podemos calcular suas contribuições e a equação (3.7) pode ser integrada como uma equação diferencial de valor inicial. O valor de  $M$  na estação inicial precisa ser especificado. Todas estas equações permitem um método simples para resolver qualquer situação de escoamento unidimensional, em regime permanente, generalizado.

O primeiro passo para a solução de um problema generalizado é definir as condições do início e as condições de contorno. Daí desenvolve-se as equações para os requisitos dos potenciais. A equação (3.7) para M pode ser integrada empregando-se qualquer algoritmo numérico para solução de equação diferencial de primeira ordem. Devido à precisão e simplicidade, um método de Runge-Kutta de 4ª. ordem é empregado frequentemente. A integração da equação para M dá um resultado de M(x), que com o auxílio das equações (3.8), (3.9), (3.10), (3.11), (3.12), (3.13) e (3.14) permite obter os resultados de todas as propriedades e variáveis.

O método de Runge-Kutta numa variação 4-5, que tem algoritmo de 4ª ordem com precisão de 5ª ordem, é dado por :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$$

que resolve a equação

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

e onde o passo é  $h$  na variável independente, com

$$m_1 = f(x_n, y_n)$$

$$m_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}m_1\right)$$

$$m_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}m_2\right)$$

$$m_4 = f(x_n + h, y_n + hm_3)$$

Neste presente trabalho, utilizou-se do software Mathworks MATLAB 7.8.0 como ferramenta para as simulações numéricas necessárias para encontrar as soluções dos escoamentos generalizados apresentados. Nesta ferramenta, implementou-se o uso da função “ode45”, a qual executa justamente o algoritmo de Range-Kutta numa variação 4-5.

## 4. ESTUDO DE CASO

### 4.1. Variação de área e Troca de calor

Ar entra em um combustor a  $T_0 = 1400$  R,  $P_0 = 335$  psia e  $M = 0.2$ . Energia é adicionada ao ar de tal modo que a temperatura de estagnação na saída seja igual a 2200 R. O combustor tem 2 ft de comprimento e seu diâmetro varia de 1ft para 10 in. O coeficiente de atrito é igual a 0.005. Desprezando os efeitos da adição de massa e assumindo as propriedades como as do ar, encontre  $M$ ,  $T$ ,  $T_0$ ,  $P$  e  $P_0$  em cada parte do tubo.

#### Solução

Este problema não se trata de um problema de escoamento simples, nele existe a troca de calor e a variação de área, por isso, usaremos o método dos coeficientes de influência para resolver este problema.

Sendo as condições de estagnação e o número de Mach conhecidos na entrada do tubo, as condições estáticas podem ser encontradas de maneira usual.

Já para o diâmetro, temos que ele varia de acordo com a seguinte formula:

$$D(x) = 1 - x/12$$

Onde  $x$  é expresso em pés (feet).

Temos, então, que a área é igual a:

$$A = \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{x}{12}\right)^2$$

E o potencial da variação da área é dado por:

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} = \frac{4}{x(1 - x/12)^2} \frac{\pi}{4} 2 \left(1 - \frac{x}{12}\right) \left(-\frac{1}{12}\right) = \frac{1}{6(1 - x/12)}$$

Considerando a variação da temperatura como linear, temos que:

$$\frac{dT_0}{dx} = 400 \frac{R}{ft}$$

E assim:

$$T_0(x) = 1400 + 400x$$

E o potencial causado pela adição de calor é:

$$\frac{1}{T_0} \frac{dT_0}{dx} = \frac{400}{1400 + 400x}$$

Sabendo que o fluxo de massa não varia, e substituindo os valores acima na equação (3.7), encontramos que:

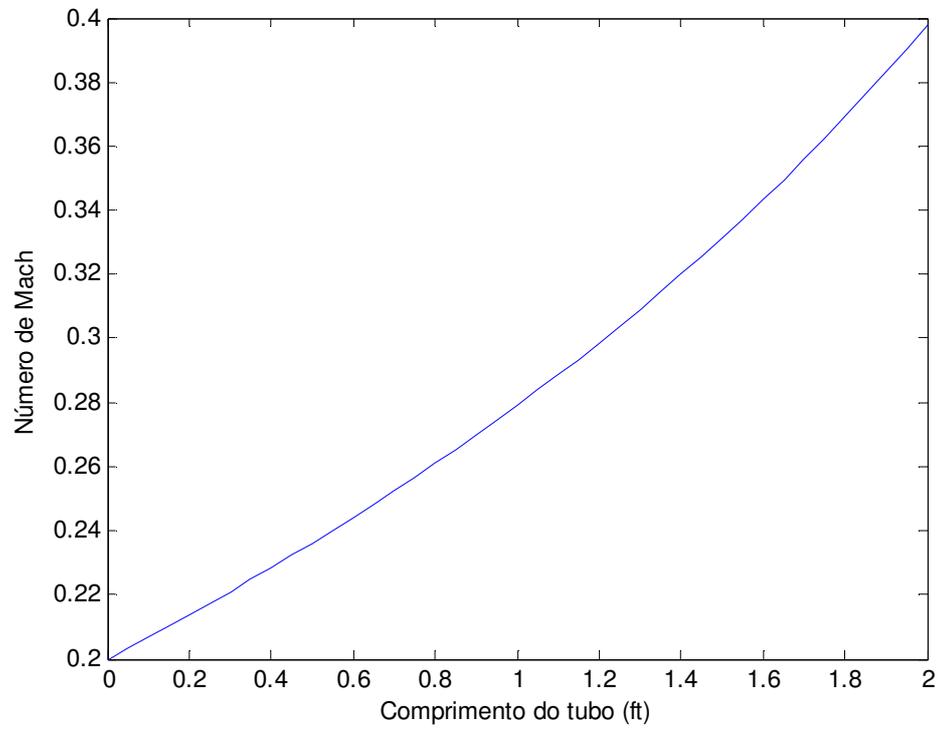
$$\frac{dM}{dx} = M \frac{\Psi}{1 - M^2} \left[ \frac{1}{6(1 - x/12)} + \frac{\gamma M^2}{2} \frac{4f}{1 - x/12} + \frac{(1 + \gamma M^2)}{2} \frac{400}{1400 + 400x} \right]$$

Em posse dessa formula, usamos o auxilio da função “ode45” do Matlab para encontrarmos os valores de Mach ao longo do duto e, tendo encontrado os números de Mach, podemos encontrar os valores da pressão e temperatura absolutas e também da pressão de estagnação através das relações integrais apresentadas anteriormente. Estes valores encontram-se, a seguir, na Tabela 4.1:

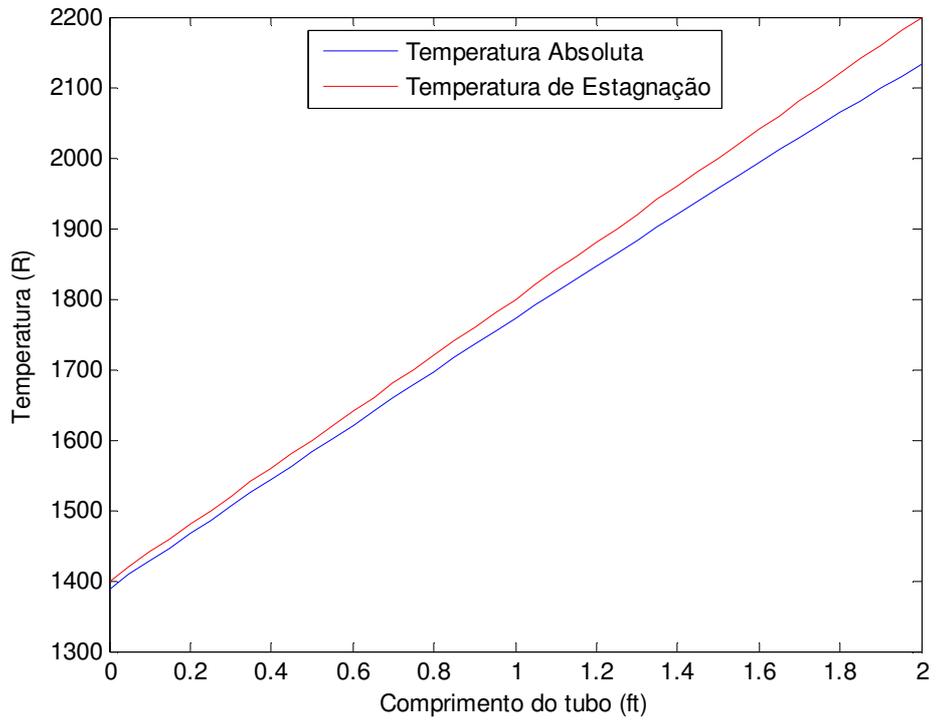
**Tabela 4.1 - Resultados para primeiro caso analisado**

<b>x(m)</b>	<b>Número de Mach</b>	<b>Pressão de Estagnação</b>	<b>Pressão Absoluta</b>	<b>Temperatura de Estagnação</b>	<b>Temperatura Absoluta</b>
0.00	0.20	335.00	325.79	1400.00	1388.90
0.05	0.20	334.86	325.34	1420.00	1408.40
0.10	0.21	334.71	324.88	1440.00	1427.80
0.15	0.21	334.56	324.41	1460.00	1447.20
0.20	0.21	334.40	323.92	1480.00	1466.60
0.25	0.22	334.25	323.42	1500.00	1486.00
0.30	0.22	334.09	322.91	1520.00	1505.30
0.35	0.22	333.92	322.39	1540.00	1524.60
0.40	0.23	333.75	321.85	1560.00	1543.90
0.45	0.23	333.58	321.29	1580.00	1563.10
0.50	0.24	333.41	320.72	1600.00	1582.40
0.55	0.24	333.23	320.13	1620.00	1601.50
0.60	0.24	333.05	319.53	1640.00	1620.70
0.65	0.25	332.86	318.90	1660.00	1639.80
0.70	0.25	332.67	318.26	1680.00	1658.90
0.75	0.26	332.48	317.60	1700.00	1677.90
0.80	0.26	332.28	316.92	1720.00	1696.90
0.85	0.27	332.08	316.22	1740.00	1715.90
0.90	0.27	331.87	315.50	1760.00	1734.80
0.95	0.27	331.66	314.76	1780.00	1753.60
1.00	0.28	331.44	314.00	1800.00	1772.40
1.05	0.28	331.22	313.21	1820.00	1791.20
1.10	0.29	330.99	312.39	1840.00	1809.90
1.15	0.29	330.75	311.56	1860.00	1828.50
1.20	0.30	330.51	310.69	1880.00	1847.10
1.25	0.30	330.27	309.80	1900.00	1865.60
1.30	0.31	330.02	308.87	1920.00	1884.00
1.35	0.31	329.76	307.92	1940.00	1902.40
1.40	0.32	329.50	306.93	1960.00	1920.70
1.45	0.33	329.22	305.92	1980.00	1938.90
1.50	0.33	328.95	304.86	2000.00	1957.00
1.55	0.34	328.66	303.77	2020.00	1975.10
1.60	0.34	328.37	302.65	2040.00	1993.00
1.65	0.35	328.07	301.48	2060.00	2010.90
1.70	0.36	327.76	300.27	2080.00	2028.60
1.75	0.36	327.44	299.02	2100.00	2046.20
1.80	0.37	327.11	297.72	2120.00	2063.70
1.85	0.38	326.78	296.37	2140.00	2081.10
1.90	0.38	326.43	294.97	2160.00	2098.40
1.95	0.39	326.08	293.52	2180.00	2115.50
2.00	0.40	325.71	292.00	2200.00	2132.40

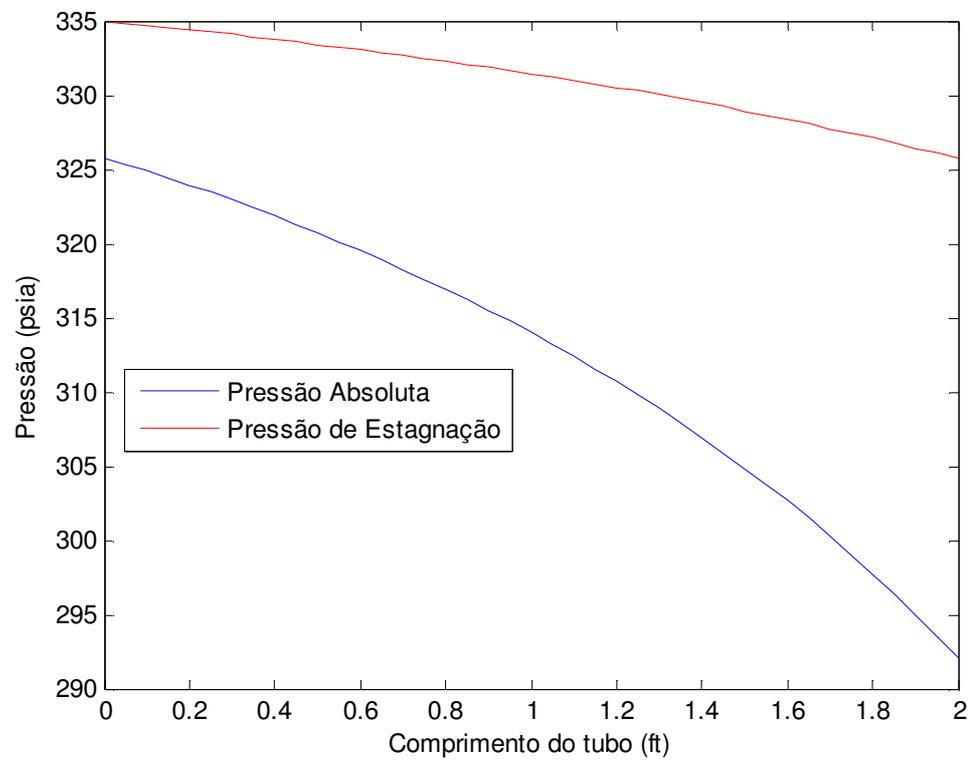
E, a seguir, temos os gráficos para o caso em questão:



**Figura 4.1 - Variação do Número de Mach**



**Figura 4.2 - Variação das Temperaturas**



**Figura 4.3 - Variação das Pressões**

## 4.2. Variação de área, troca de calor e adição de massa com atrito

Ar entra em um duto com um número de Mach igual a 2 e pressão e temperatura de estagnação iguais a 200 kPa e 1000 K, respectivamente. O duto de comprimento igual a 2 metros é composto de uma seção de diâmetro constante no primeiro metro, seguido de uma seção com um diâmetro que aumenta de acordo com uma função senoidal no segundo metro. O diâmetro inicial é igual a 0,2m e o final a 0,4m. O coeficiente de atrito é igual a 0.005. A temperatura de estagnação varia de forma linear de 1000 K na entrada até 600 K na saída. O fluxo mássico também varia, sendo que na saída, ele é 1,15 vezes maior que na entrada; a injeção deste fluxo é uniforme e perpendicular ao eixo. Uma onda de choque ocorre a 1,5 m da entrada do duto. Determine a distribuição, da área, fluxo de massa, do número de Mach e as temperaturas e pressões de estagnação e absolutas.

### Solução

O problema possui os potenciais de variação de área, atrito, troca de calor e adição de massa. Adicionalmente, uma onda de choque é especificada e a forma do duto envolve duas diferentes funções para seu diâmetro. Primeiramente, iremos avaliar os potenciais envolvidos. O diâmetro é dado por:

$$D(x) = \begin{cases} 0,2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0,3 - 0,1 \cos [\pi(x - 1)], & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

A variável  $x$  para todas as funções usadas para encontrar os potenciais do problema devem ter sua origem começando no início do duto. A função cosseno foi utilizada pois se adotou que o duto possuía uma saída na horizontal, ou seja,  $dD/dx$  igual a zero na saída do duto.

Com os diâmetros devidamente especificados, a área para o duto em questão é dada por:

$$A(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} (0,2)^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\pi}{4} [0,3 - 0,1 \cos[\pi(x - 1)]]^2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

E os potenciais relativos à variação da área levam a forma:

$$\frac{1}{A(x)} \frac{dA(x)}{dx} = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{0,2 \operatorname{sen}[\pi(x-1)]}{0,3 - 0,1 \cos[\pi(x-1)]}, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Os potências devido ao atrito, por sua vez, possuem as seguintes características:

$$\frac{4f}{D(x)} = \begin{cases} \frac{4f}{0,2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{4f}{0,3 - 0,1 \cos[\pi(x-1)]}, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Como a adição de massa não é função do diâmetro, apenas uma equação é necessária, e dado que:

$$\dot{m}_2 = 1,15\dot{m}_1$$

E assumindo que a injeção de massa é linear, encontramos que:

$$\dot{m}(x) = \dot{m}_1 + \frac{(\dot{m}_2 - \dot{m}_1)}{L} x = \dot{m}_1 + \frac{1,15\dot{m}_1 - \dot{m}_1}{2} x = \dot{m}_1 + 0,075\dot{m}_1 x$$

E, portanto, seu potencial é dado por:

$$\frac{1}{\dot{m}} \frac{d\dot{m}}{dx} = \frac{1}{\dot{m}_1 + 0,075\dot{m}_1 x} 0,075\dot{m}_1 = \frac{0,075}{1 + 0,075x}$$

Já para a temperatura de estagnação, sendo esta de variação uniforme, temos:

$$T_0(x) = 1000 - 200x$$

E, portanto, o potencial do calor que é retirado do sistema é igual a:

$$\frac{1}{T_0} \frac{dT_0}{dx} = -\frac{1}{5-x}$$

Analisados os potenciais, e considerando a onda de choque a 1,5 metro da entrada do duto, pode-se implementar um algoritmo em Matlab para solucionar o nosso problema.

Apenas lembrando que, para encontrar o número de Mach após a onda de choque, utiliza-se da equação:

$$M_2^2 = \frac{M_1^2 + 2/(k - 1)}{2k/((k - 1)M_1^2 - 1)}$$

O algoritmo utilizado encontra-se comentado no Apêndice B deste trabalho.

Através deste algoritmo, pode-se encontrar os valores do número de Mach, área, fluxo de massa, temperaturas de estagnação e absolutas e pressões de estagnação e absolutas. Estes valores são mostrados na

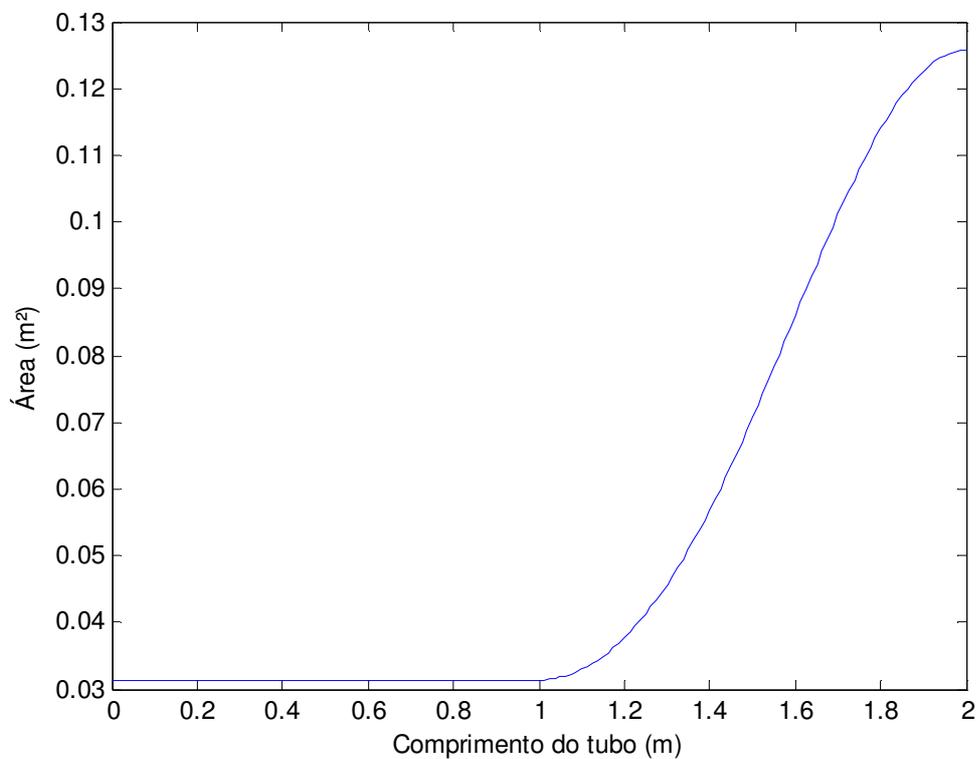
x(m)	A(m <sup>2</sup> )	Fluxo de Massa (kg/s)	Número de Mach	Temperatura de Estagnação (K)	Temperatura Absoluta (K)	Pressão de Estagnação (kPa)	Pressão Absoluta (kPa)
0.0000	0.0314	1.0000	2.0000	1000.0	555.56	200.00	25.56
0.0250	0.0314	1.0019	1.9966	995.0	553.61	198.57	25.51
0.0500	0.0314	1.0037	1.9934	990.0	551.62	197.16	25.46
0.0750	0.0314	1.0056	1.9903	985.0	549.59	195.79	25.41
0.1000	0.0314	1.0075	1.9873	980.0	547.53	194.45	25.35
0.1250	0.0314	1.0094	1.9845	975.0	545.42	193.14	25.29
0.1500	0.0314	1.0113	1.9818	970.0	543.27	191.86	25.23
0.1750	0.0314	1.0131	1.9792	965.0	541.09	190.61	25.16
0.2000	0.0314	1.0150	1.9768	960.0	538.86	189.38	25.09
0.2250	0.0314	1.0169	1.9745	955.0	536.60	188.18	25.02
0.2500	0.0314	1.0188	1.9724	950.0	534.30	187.02	24.95
0.2750	0.0314	1.0206	1.9704	945.0	531.96	185.87	24.88
0.3000	0.0314	1.0225	1.9685	940.0	529.58	184.76	24.80
0.3250	0.0314	1.0244	1.9668	935.0	527.16	183.67	24.72
0.3500	0.0314	1.0263	1.9652	930.0	524.71	182.60	24.64
0.3750	0.0314	1.0281	1.9638	925.0	522.23	181.56	24.55
0.4000	0.0314	1.0300	1.9625	920.0	519.70	180.55	24.46
0.4250	0.0314	1.0319	1.9613	915.0	517.14	179.56	24.37
0.4500	0.0314	1.0337	1.9603	910.0	514.55	178.60	24.28
0.4750	0.0314	1.0356	1.9594	905.0	511.92	177.66	24.18
0.5000	0.0314	1.0375	1.9587	900.0	509.25	176.74	24.09
0.5250	0.0314	1.0394	1.9581	895.0	506.55	175.85	23.99
0.5500	0.0314	1.0413	1.9577	890.0	503.82	174.98	23.88
0.5750	0.0314	1.0431	1.9574	885.0	501.05	174.14	23.78
0.6000	0.0314	1.0450	1.9573	880.0	498.24	173.31	23.67
0.6250	0.0314	1.0469	1.9573	875.0	495.41	172.51	23.56
0.6500	0.0314	1.0488	1.9575	870.0	492.54	171.74	23.45
0.6750	0.0314	1.0506	1.9578	865.0	489.64	170.98	23.33

<b>0.7000</b>	0.0314	1.0525	1.9583	860.0	486.70	170.25	23.22
<b>0.7250</b>	0.0314	1.0544	1.9589	855.0	483.74	169.54	23.10
<b>0.7500</b>	0.0314	1.0562	1.9597	850.0	480.74	168.86	22.97
<b>0.7750</b>	0.0314	1.0581	1.9607	845.0	477.71	168.19	22.85
<b>0.8000</b>	0.0314	1.0600	1.9618	840.0	474.65	167.55	22.72
<b>0.8250</b>	0.0314	1.0619	1.9631	835.0	471.56	166.93	22.60
<b>0.8500</b>	0.0314	1.0638	1.9645	830.0	468.44	166.33	22.46
<b>0.8750</b>	0.0314	1.0656	1.9661	825.0	465.29	165.75	22.33
<b>0.9000</b>	0.0314	1.0675	1.9679	820.0	462.10	165.20	22.20
<b>0.9250</b>	0.0314	1.0694	1.9698	815.0	458.89	164.67	22.06
<b>0.9500</b>	0.0314	1.0713	1.9719	810.0	455.65	164.16	21.92
<b>0.9750</b>	0.0314	1.0731	1.9742	805.0	452.38	163.67	21.78
<b>1.0000</b>	0.0314	1.0750	1.9766	800.0	449.08	163.21	21.63
<b>1.0000</b>	0.0314	1.0750	1.9766	800.0	449.08	163.21	21.63
<b>1.0125</b>	0.0314	1.0759	1.9789	797.5	447.24	162.99	21.53
<b>1.0250</b>	0.0315	1.0769	1.9830	795.0	445.02	162.77	21.36
<b>1.0375</b>	0.0316	1.0778	1.9890	792.5	442.43	162.56	21.13
<b>1.0500</b>	0.0318	1.0788	1.9969	790.0	439.49	162.36	20.85
<b>1.0625</b>	0.0320	1.0797	2.0066	787.5	436.22	162.16	20.51
<b>1.0750</b>	0.0323	1.0806	2.0181	785.0	432.61	161.98	20.13
<b>1.0875</b>	0.0326	1.0816	2.0314	782.5	428.70	161.80	19.69
<b>1.1000</b>	0.0330	1.0825	2.0463	780.0	424.51	161.63	19.22
<b>1.1125</b>	0.0334	1.0834	2.0628	777.5	420.04	161.48	18.72
<b>1.1250</b>	0.0339	1.0844	2.0808	775.0	415.34	161.34	18.18
<b>1.1375</b>	0.0344	1.0853	2.1003	772.5	410.41	161.21	17.62
<b>1.1500</b>	0.0349	1.0862	2.1212	770.0	405.28	161.09	17.04
<b>1.1625</b>	0.0355	1.0872	2.1434	767.5	399.98	160.99	16.45
<b>1.1750</b>	0.0362	1.0881	2.1668	765.0	394.52	160.91	15.85
<b>1.1875</b>	0.0369	1.0891	2.1914	762.5	388.93	160.84	15.25
<b>1.2000</b>	0.0377	1.0900	2.2171	760.0	383.23	160.79	14.64
<b>1.2125</b>	0.0385	1.0909	2.2438	757.5	377.44	160.76	14.04
<b>1.2250</b>	0.0394	1.0919	2.2714	755.0	371.58	160.75	13.44
<b>1.2375</b>	0.0403	1.0928	2.2999	752.5	365.66	160.77	12.86
<b>1.2500</b>	0.0413	1.0938	2.3292	750.0	359.70	160.80	12.29
<b>1.2625</b>	0.0423	1.0947	2.3593	747.5	353.73	160.86	11.73
<b>1.2750</b>	0.0434	1.0956	2.3900	745.0	347.74	160.95	11.18
<b>1.2875</b>	0.0445	1.0966	2.4213	742.5	341.77	161.06	10.66
<b>1.3000</b>	0.0457	1.0975	2.4532	740.0	335.81	161.20	10.15
<b>1.3125</b>	0.0469	1.0984	2.4856	737.5	329.89	161.37	9.66
<b>1.3250</b>	0.0482	1.0994	2.5184	735.0	324.00	161.57	9.19
<b>1.3375</b>	0.0495	1.1003	2.5517	732.5	318.17	161.80	8.74
<b>1.3500</b>	0.0509	1.1013	2.5853	730.0	312.39	162.07	8.31
<b>1.3625</b>	0.0523	1.1022	2.6193	727.5	306.68	162.37	7.90

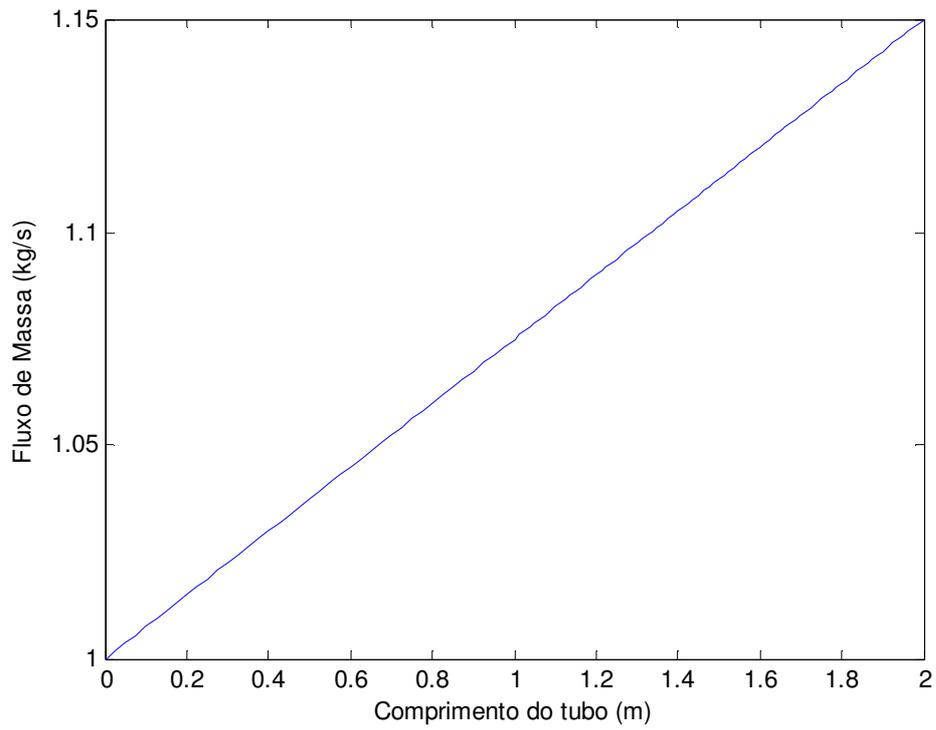
1.3750	0.0538	1.1031	2.6536	725.0	301.04	162.71	7.51
1.3875	0.0553	1.1041	2.6881	722.5	295.48	163.09	7.14
1.4000	0.0569	1.1050	2.7228	720.0	290.00	163.51	6.78
1.4125	0.0585	1.1059	2.7577	717.5	284.61	163.98	6.45
1.4250	0.0601	1.1069	2.7928	715.0	279.31	164.48	6.13
1.4375	0.0618	1.1078	2.8280	712.5	274.09	165.03	5.83
1.4500	0.0635	1.1088	2.8633	710.0	268.98	165.63	5.54
1.4625	0.0653	1.1097	2.8986	707.5	263.95	166.28	5.27
1.4750	0.0670	1.1106	2.9340	705.0	259.03	166.98	5.02
1.4875	0.0688	1.1116	2.9695	702.5	254.20	167.74	4.78
1.5000	0.0707	1.1125	3.0050	700.0	249.47	168.54	4.55
1.5000	0.0707	1.1125	0.4750	700.0	669.78	55.10	47.21
1.5125	0.0725	1.1134	0.4581	697.5	669.40	55.01	47.64
1.5250	0.0744	1.1144	0.4424	695.0	668.82	54.93	48.02
1.5375	0.0763	1.1153	0.4278	692.5	668.05	54.84	48.36
1.5500	0.0782	1.1163	0.4140	690.0	667.13	54.76	48.67
1.5625	0.0802	1.1172	0.4012	687.5	666.06	54.68	48.94
1.5750	0.0821	1.1181	0.3891	685.0	664.87	54.59	49.18
1.5875	0.0841	1.1191	0.3778	682.5	663.56	54.51	49.39
1.6000	0.0860	1.1200	0.3671	680.0	662.15	54.42	49.58
1.6125	0.0879	1.1209	0.3571	677.5	660.65	54.34	49.75
1.6250	0.0899	1.1219	0.3477	675.0	659.06	54.25	49.90
1.6375	0.0918	1.1228	0.3388	672.5	657.41	54.17	50.03
1.6500	0.0937	1.1238	0.3305	670.0	655.68	54.08	50.14
1.6625	0.0956	1.1247	0.3226	667.5	653.89	54.00	50.24
1.6750	0.0975	1.1256	0.3152	665.0	652.05	53.91	50.33
1.6875	0.0993	1.1266	0.3082	662.5	650.15	53.83	50.40
1.7000	0.1011	1.1275	0.3016	660.0	648.21	53.74	50.46
1.7125	0.1029	1.1284	0.2954	657.5	646.22	53.66	50.51
1.7250	0.1046	1.1294	0.2896	655.0	644.19	53.58	50.54
1.7375	0.1063	1.1303	0.2842	652.5	642.13	53.49	50.57
1.7500	0.1079	1.1313	0.2790	650.0	640.03	53.41	50.60
1.7625	0.1095	1.1322	0.2742	647.5	637.91	53.32	50.61
1.7750	0.1111	1.1331	0.2697	645.0	635.75	53.24	50.61
1.7875	0.1125	1.1341	0.2655	642.5	633.57	53.15	50.61
1.8000	0.1140	1.1350	0.2616	640.0	631.36	53.07	50.61
1.8125	0.1153	1.1359	0.2579	637.5	629.13	52.99	50.59
1.8250	0.1166	1.1369	0.2545	635.0	626.88	52.90	50.57
1.8375	0.1178	1.1378	0.2514	632.5	624.61	52.82	50.55
1.8500	0.1189	1.1387	0.2485	630.0	622.32	52.74	50.52
1.8625	0.1200	1.1397	0.2458	627.5	620.01	52.65	50.49
1.8750	0.1209	1.1406	0.2434	625.0	617.68	52.57	50.45
1.8875	0.1218	1.1416	0.2411	622.5	615.34	52.49	50.41

<b>1.9000</b>	0.1226	1.1425	0.2391	620.0	612.99	52.41	50.36
<b>1.9125</b>	0.1233	1.1434	0.2373	617.5	610.62	52.33	50.31
<b>1.9250</b>	0.1239	1.1444	0.2357	615.0	608.24	52.24	50.26
<b>1.9375</b>	0.1245	1.1453	0.2344	612.5	605.84	52.16	50.20
<b>1.9500</b>	0.1249	1.1463	0.2332	610.0	603.44	52.08	50.15
<b>1.9625</b>	0.1252	1.1472	0.2322	607.5	601.02	52.00	50.08
<b>1.9750</b>	0.1255	1.1481	0.2314	605.0	598.59	51.92	50.02
<b>1.9875</b>	0.1256	1.1491	0.2308	602.5	596.15	51.84	49.95
<b>2.0000</b>	0.1257	1.1500	0.2303	600.0	593.70	51.75	49.88

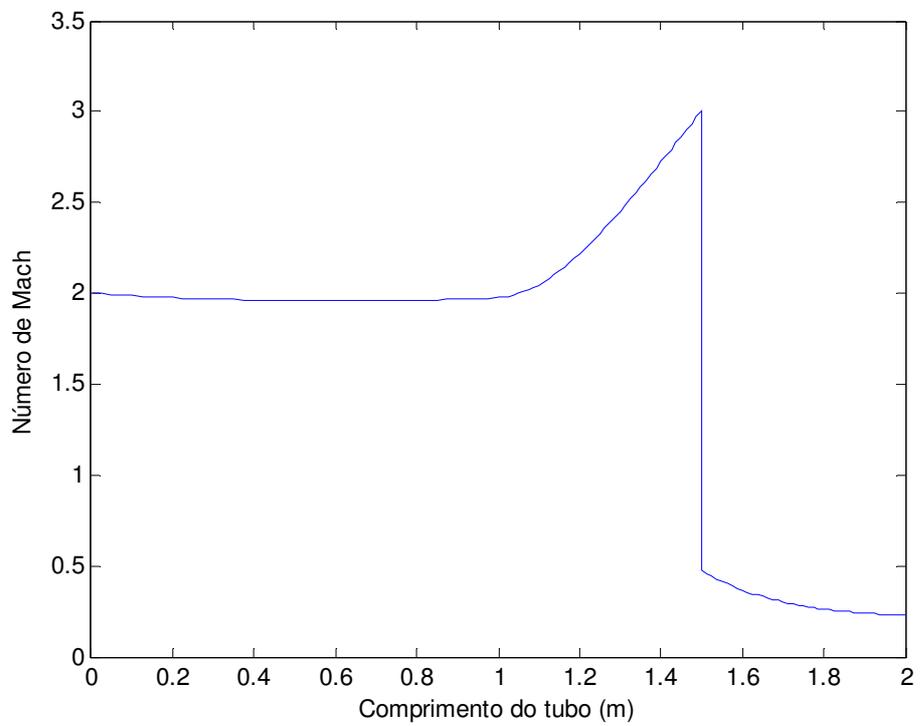
E, plotando esses resultados, encontra-se:



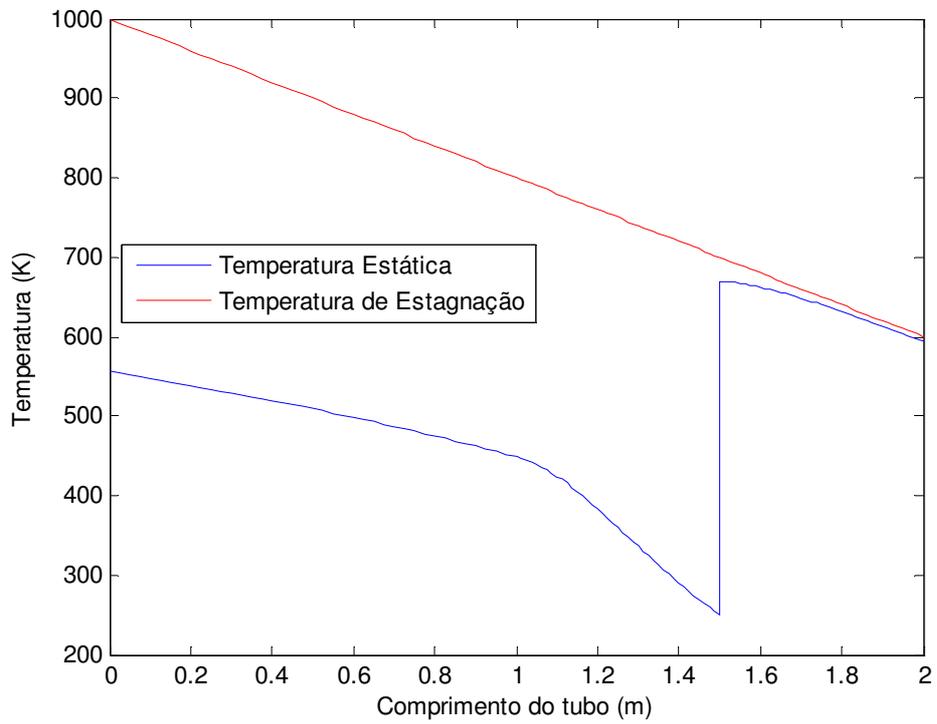
**Figura 4.4 - Variação da Área**



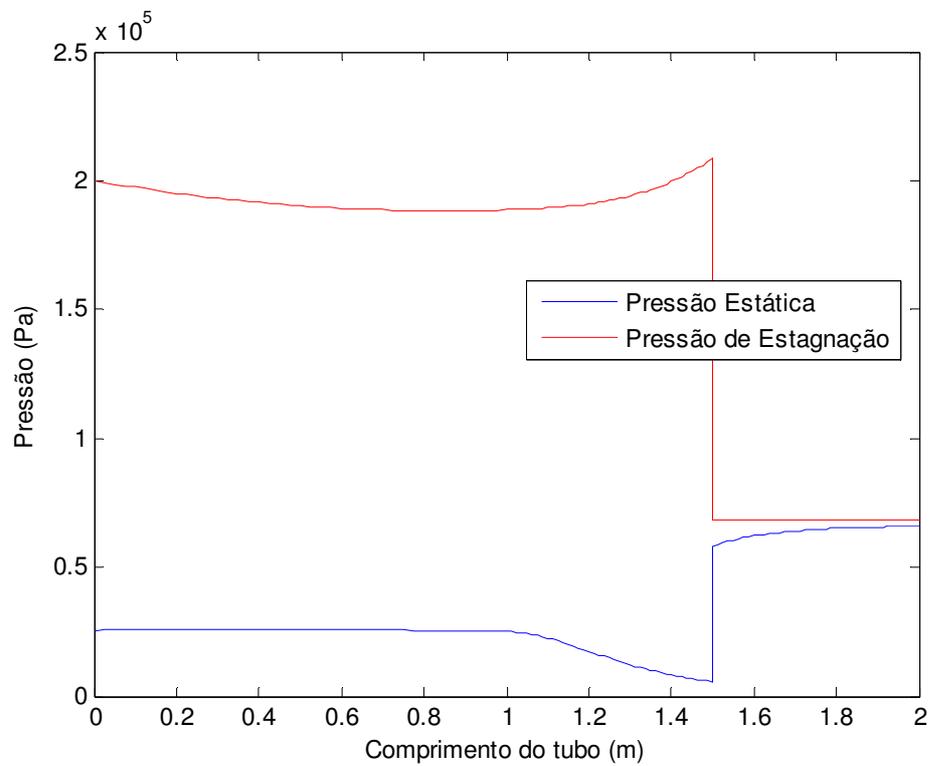
**Figura 4.5 - Variação do Fluxo de Massa**



**Figura 4.6 - Variação do Número de Mach**



**Figura 4.7 - Variação das Temperaturas**



**Figura 4.8 - Variação das Pressões**

Os efeitos da variação de área é evidente nos gráficos para o número de Mach e para as outras diversas propriedades, assim como o efeito dominante causado pela onda de choque.

Como resultado do baixo número de Mach na saída (0,2303), os valores das propriedades estáticas e de estagnação diferem apenas levemente.

O problema tratado neste caso é complexo, porém sua resolução é praticamente direta utilizando a metodologia implantada de Escoamentos Unidimensionais Generalizados.

## 5. REFERÊNCIAS

Hodge, B. K. (2003). *Using MathCad for Generalized One-Dimensional Compressible Flow in An Introductory Compressible Flow Course* . Fonte: [http://www.me.memphis.edu/menews/OneD\\_Flow.pdf](http://www.me.memphis.edu/menews/OneD_Flow.pdf)

Hodge, B. K., & Koenig, K. (1995). *Compressible Fluid Dynamics with Personal Computer Applications*. New Jersey: Prentice Hall.

MathWorks. (s.d.). *MATLAB Support*. Fonte: <http://www.mathworks.com/support/>

*MATLAB Central*. (s.d.). Fonte: <http://www.mathworks.com/matlabcentral/>

Oosthuizen, P. H., & Carscallen, W. E. (1997). *Compressible Fluid Flow*. New York: McGraw-Hill.

Shapiro, A. H. (1953). *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*. New York: Ronald Press Co.

Zucker, R. D., & Biblarz, O. (2002). *Fundamentals of Gas Dynamics*. New Jersey: John Wiley & Sons.

## 6. APÊNDICE A

A seguir, a programação usada em MATLAB para a resolução do primeiro

caso:

```
clear all;
clc;

%% Condições Iniciais %%

gama = 1.4;           % Condutividade térmica
TS(1) = 1400;        % Temperatura de Estagnação em R
PS(1) = 335;        % Pressão de Estagnação em psia
M(1) = 0.2;         % Número de Mach inicial
Tf = 2200;         % Temperatura de Estagnação final em R
L = 2;             % Comprimento do tubo ft
d0 = 1;            % Diâmetro inicial em ft
df = 10;           % Diâmetro final em in
at = .005;         % Coeficiente de atrito
dT_dx = (Tf - TS(1))/L; % Coeficiente linear da Temperatura de
Estagnação

%% Declaração das variáveis simbólicas para utilização da função
"diff"(derivada) do MATLAB %%

syms y Z;

TS = TS(1) + dT_dx*y; % definição da equação que rege o
comportamento da temperatura de estagnação

D = (1 - y/12);      % definição da equação que rege o
comportamento do diâmetro do tubo

A = pi*D.^2/4;      % definição da equação que rege o
comportamento da área do tubo

dAdx = diff(A);     % derivada dA/dx da área

%% Definição da equação (3.7) %%

dM = Z*(1+ (gama-1)*Z^2/2)/(1-Z^2)*((-dAdx/A)+
(gama*Z^2*4*at)/(2*D)+(1+gama*Z^2)/2*(dT_dx/TS));

%% "Jogada" para passar as variáveis simbólicas para numéricas %%

str = char(dM);
```

```

%% Tabela de conversão das variáveis numéricas para simbólicas %%

table={'y','x';...
      'Z','M'};

%% Execução da função que cria um novo arquivo .m contendo a equação
3.7 com variáveis numéricas para a primeira parte do tubo %%

syms2mcode('Polx5.m',str,table);% é criado o arquivo Polx5.m para a
equação (3.7)

%% Implementação do Método de Range Kutta para a primeira parte do
tubo %%

[x,M]=ode45('Polx5',[0 2],.2);

clear TS D A;

%% Redefinição das condições iniciais %%

K = (gama-1)/2;
TS(1) = 1400;
TS = TS(1) + dT_dx*x;
D = (1 - x/12);
A = pi*D.^2/4;

%% Cálculos dos valores de A, T, To, P e Po para todo o sistema %%

P(1) = PS(1)/(1+K*M(1)^2)^(gama/(gama-1));

for m = 1:length(M)
T(m) = TS(m)/(1+K*M(m)^2);
end

for k = 2:length(x)
    P(k)=P(k-1)*A(k-1)*M(k-1)/(A(k)*M(k))*(T(k)/T(k-1)).^5;
    PS(k)=PS(k-1)*P(k)/P(k-1)*(TS(k)*T(k-1)/(TS(k-
1)*T(k)))^(gama/(gama-1));
end

%% Plotagem dos gráficos

figure(1)
plot(x,M)
hold on;
xlabel('Comprimento do tubo (ft)')
ylabel('Número de Mach')

figure(2)
plot(x,T)
hold on;
hndl = plot(x,TS);

```

```

% set(hndl,'LineStyle','-.')
% set(hndl,'LineWidth',2)
set(hndl,'Color','red')
xlabel('Comprimento do tubo (ft)')
ylabel('Temperatura (R)')
legend('Temperatura Absoluta','Temperatura de Estagnação',0)

figure(3)
plot(x,P)
hold on;
hndl2 = plot(x,PS);
set(hndl2,'Color','red')
xlabel('Comprimento do tubo (ft)')
ylabel('Pressão (psia)')
legend('Pressão Absoluta','Pressão de Estagnação',0)

```

## 7. APÊNDICE B

A seguir, a programação usada em MATLAB para a resolução do segundo

caso:

```
clear all;
clc;

%% Condições Iniciais %%

gama = 1.4;
TS(1) = 1000;           % Temperatura de Estagnação em K
PS(1) = 200000;        % Pressão de Estagnação em Pa
M(1) = 2;               % Número de Mach
Tf = 600;              % Temperatura de Estagnação final em K
L = 2;                 % Comprimento do tubo em m
D0 = 0.2;              % Diâmetro inicial do tubo em m
Df = 0.2;              % Diâmetro final da primeira seção do tubo
em m
at = .005;             % Coeficiente de atrito
dT_dx = (Tf - TS(1))/L; % coeficiente linear da variação da
temperatura de estagnação
dD_dx = (Df - D0)/L;   % coeficiente linear da variação do diâmetro

%% Declaração das variáveis simbólicas para utilização da função
"diff"(derivada) do MATLAB %%

syms y Z m;           % respectivamente, variáveis x, M e mdot
provisórias

mdot(1) = m;
mf = 1.15*m;          % condição inicial do fluxo mássico
dm_dx = (mf - mdot(1))/L; % coeficiente linear do fluxo mássico

TS = TS(1) + dT_dx*y; % definição da equação que rege o
comportamento da temperatura de estagnação

D = D0 + dD_dx*y;     % definição da equação que rege o
comportamento do diâmetro da primeira parte do tubo

A = pi*D.^2/4;        % definição da equação que rege o comportamento da
área da primeira parte do tubo

mdot = mdot(1) + dm_dx*y; % definição da equação que rege o
comportamento do fluxo mássico

dAdx = diff(A);       % derivada dA/dx da área
dmdx = diff(mdot);    % derivada dmdot/dx do fluxo massico
```

```

dTSDx = diff(TS);          % derivada dTo/dx da temperatura de
estagnação

%% Simplificação da variável dmdot/dx para eliminação da variável
simbólica m %%

tmp = dmdx/mdot;
tmp = simplify(tmp);

%% Definição da equação (3.7) %%

dM = Z*(1+ (gama-1)*Z^2/2)/(1-Z^2)*(-dAdx/A+
(gama*Z^2*4*at)/(2*D)+(1+gama*Z^2)*(dTSDx/(2*TS)+ tmp));

%% "Jogada" para passar as variáveis simbólicas para numéricas %%

str = char(dM);          % Como o comando ode45 necessita que as
variáveis de entrada sejam não simbólicas, a maneira encontrada para
passar as variáveis simbólicas utilizadas para encontrar as equações
diferenciais em variáveis numéricas, foi declará-las como caracteres
e posteriormente recriar a equação para dM, automaticamente, em
outro arquivo MATLAB .m, já substituindo as variáveis simbólicas
pelas de nosso interesse

%% Tabela de conversão das variáveis numéricas para simbólicas %%

table={'Y','x';...
      'Z','M';
      'm','w'};

%% Execução da função que cria um novo arquivo .m contendo a equação
3.7 com variáveis numéricas para a primeira parte do tubo %%

syms2mcode('Polx5.m',str,table); % é criado o arquivo Polx5.m para a
equação (3.7)

%% Implementação do Método de Range Kutta para a primeira parte do
tubo %%

[x,M]=ode45('Polx5',[0 1],M(1));

%% Definição das condições que regem o comportamento da segunda
parte do tubo %%

D = 0.3 - 0.1*cos(pi*(y-1));
A = pi*D.^2/4;
dAdx = diff(A);

%% Definição da equação (3.7) para a segunda parte do tubo %%

dM = Z*(1+ (gama-1)*Z^2/2)/(1-Z^2)*(-dAdx/A+
(gama*Z^2*4*at)/(2*D)+(1+gama*Z^2)*(dTSDx/(2*TS)+ tmp));

```

```

str = char(dM);
Mtmp = M(length(x)); % valor do número de Mach quando x = 1
Md = 0.475; % valor do número de Mach após a onda de choque

%% Execução da função que cria um novo arquivo .m contendo a equação
3.7 com variáveis numéricas para a segunda parte do tubo %%

syms2mcode('Polx5b.m',str,table);% é criado o arquivo Polx5b.m para
a equação (3.7)

%% Implementação do Método de Range Kutta para a segunda parte do
tubo %%

[x1,M1]=ode45('Polx5b',[1 1.5],Mtmp); % Antes da onda de choque
[x2,M2]=ode45('Polx5b',[1.5 2],Md); % Após a onda de choque

clear TS D A mdot;

%% Junção das variáveis x e M %%

x = vertcat(x,x1,x2);
M = vertcat(M,M1,M2);

%% Redefinição das condições iniciais %%

K = (gama-1)/2;
TS(1) = 1000;
TS = TS(1) + dT_dx*x;
P(1) = PS(1)/(1+K*M(1)^2)^(gama/(gama-1));

%% Cálculos dos valores de mdot, A, T, To, P e Po para todo o sistema
%%

for n = 1:length(x)
    mdot(n) = 3/(3*x(n) + 40);
    if x(n) < 1
        A(n) = pi*.2^2/4;
    else
        D = 0.3 - 0.1*cos(pi*(x(n)-1));
        A(n) = pi/4*D.^2;
    end
end

for m = 1:length(M)
    T(m) = TS(m)/(1+K*M(m)^2);
end

for k = 2:length(x)
    P(k)=(P(k-1)*mdot(k)*A(k-1)*M(k-1))/(A(k)*mdot(k-
1)*M(k))*(T(k)/T(k-1)).^0.5;

```

```

        PS(k)=PS(k-1)*P(k)/P(k-1)*(TS(k)*T(k-1)/(TS(k-1)*T(k)))^(gama/(gama-1));
end

%% Plotagem dos gráficos

figure(1)
plot(x,M)
hold on;
xlabel('Comprimento do tubo (m)')
ylabel('Número de Mach')

figure(2)
plot(x,A)
hold on;
xlabel('Comprimento do tubo (m)')
ylabel('Área (m²)')

figure(3)
plot(x,mdot)
hold on;
xlabel('Comprimento do tubo (m)')
ylabel('Fluxo de Massa (kg/s)')

figure(4)
plot(x,T)
hold on;
hndl = plot(x,TS);
% set(hndl,'LineStyle','-.')
% set(hndl,'LineWidth',2)
set(hndl,'Color','red')
xlabel('Comprimento do tubo (m)')
ylabel('Temperatura (K)')
legend('Temperatura Estática','Temperatura de Estagnação',0)

figure(5)
plot(x,P)
hold on;
hndl2 = plot(x,PS);
set(hndl2,'Color','red')
xlabel('Comprimento do tubo (m)')
ylabel('Pressão (Pa)')
legend('Pressão Estática','Pressão de Estagnação',0)

```