

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO ESCOLA POLITÉCNICA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**ANÁLISE DE MODELOS DE RENDIMENTO DE ENGRENAGENS E  
APLICAÇÃO EM CÂMBIOS MANUAIS AUTOMOTIVOS.**

**José Henrique Ricardo Françaço**

**SÃO PAULO  
2009**

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO ESCOLA POLITÉCNICA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**ANÁLISE DE MODELOS DE RENDIMENTO DE ENGRENAGENS E  
APLICAÇÃO EM CÂMBIOS MANUAIS AUTOMOTIVOS.**

Trabalho de formatura apresentado à Escola  
Politécnica da Universidade de São Paulo para  
obtenção do título de Graduação em Engenharia

José Henrique Ricardo Françoso

Orientador: Marcelo A. Leal Alves

SÃO PAULO  
2009

## **FICHA CATALOGRÁFICA**

**Françoso, José Henrique Ricardo**

**Análise de modelos de rendimento de engrenagens e aplicação em câmbios manuais automotivos / J.H.R. Françoso. – São Paulo, 2009.**

**114 p.**

**Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.**

**1. Engrenagens (Eficiência; Transmissão) 2. Mecanismos  
3. Matlab (Modelos matemáticos) I. Universidade de São Paulo.  
Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II. t.**

## Resumo

O interesse no estudo e desenvolvimento de novos métodos para melhorar a eficiência na transmissão de engrenagens tem aumentado consideravelmente nos últimos anos, devido à constante preocupação com os problemas ambientais e consumo de energia. E além disso, por causa da crescente demanda por veículos com melhor desempenho, conforto, segurança e confiança. Então, todas as dissipações de energia presentes no carro devem ser analisadas, incluindo a eficiência nos mecanismos de transmissão.

De acordo com Del Castillo [6], em um conjunto de engrenagens simples, as perdas devido ao contato de engrenagens representam 1% ou 2% da potência total transmitida. Mas, como o rendimento global dos automóveis atuais ainda é baixo, qualquer aprimoramento na eficiência representaria uma significativa melhoria do ponto de vista da economia energética.

Um dos objetivos deste trabalho de conclusão de curso é o estudo das perdas de potência no contato de engrenagens existentes dentro de um câmbio manual automotivo, em diferentes condições de operação. A principal dificuldade encontrada ainda hoje por engenheiros é descobrir como é o comportamento do atrito e estimar uma formulação confiável para representar o seu coeficiente.

Além do rendimento de engrenagens, serão analisadas outras perdas presentes no câmbio, que podem se tornar importantes dependendo do modo de operação, e são causadas por: atrito nos rolamentos, no óleo lubrificante (churning losses) e também no ar ao redor da engrenagem (windage losses).

Por fim, o objetivo final é a implementação de um modelo matemático, em plataforma MatLab/Simulink<sup>®</sup>, para avaliar a contribuição de cada uma dessas perdas dissipadas no rendimento total de um câmbio.

# Sumário

## RESUMO

## LISTA DE FIGURAS E TABELAS

1	Rendimento mecânico de engrenagens simples.....	10
1.1	Introdução.....	10
1.2	Relação entre as perdas no cálculo da eficiência mecânica .....	10
1.3	Rendimento mecânico médio de um trem de engrenagens normal .....	11
1.4	Engrenagens com dentes externos .....	12
1.4.1	Rendimento direto .....	12
1.4.2	Rendimento inverso .....	14
1.5	Engrenagens com dentes internos.....	15
1.5.1	Rendimento direto .....	15
1.5.2	Rendimento inverso .....	16
2	Métodos analíticos para estimar o rendimento mecânico de engrenagens .....	18
2.1	Introdução.....	18
2.2	Eficiência mecânica das engrenagens de dentes retos (spur gears).....	19
2.2.1	Equação de Buckingham .....	19
2.2.2	Equação de Merritt .....	22
2.2.3	Equação de Yada .....	23
2.2.4	Confronto dos modelos.....	24
2.3	Modelo de Buckingham.....	25
2.3.1	Eficiência mecânica de engrenagens com dentadura interna e dentes retos .....	25
2.3.2	Eficiência mecânica de engrenagens helicoidais.....	27
2.4	Coeficiente de atrito.....	30
2.4.1	Modelo de Buckingham .....	30
2.4.2	Modelo de Niemann .....	34
2.5	Análises de sensibilidade do rendimento mecânico.....	40
2.5.1	Variação da relação de transmissão, mantendo o raio da roda motora fixo.....	40
2.5.2	Variação da relação de transmissão, mantendo a distância entre os centros fixa .....	42
2.5.3	Ângulo de pressão variável .....	42
2.5.4	Número de dentes $Z_1$ variável, relação de transmissão fixa .....	43
2.5.5	Variação da velocidade de rotação da engrenagem motriz.....	44

2.5.6	Módulo variável e relação de transmissão constante .....	45
2.5.7	Variação do ângulo de hélice .....	46
3	Eficiência mecânica com o efeito da razão de contato e o estudo de um câmbio manual comercial .....	47
3.1	Introdução .....	47
3.2	Razão de contato das engrenagens .....	47
3.2.1	Engrenagens externas .....	47
3.2.2	Engrenagens internas .....	48
3.2.3	Efeitos da variação da razão de contato na perda de potência .....	49
3.3	Cálculo da eficiência aplicado a um câmbio comercial (M40) .....	52
3.3.1	Métodos para melhorar o rendimento .....	61
4	Modelos de eficiência em câmbio manual no MatLab/Simulink .....	65
4.1	Introdução .....	65
4.2	Modelo da eficiência mecânica das engrenagens .....	65
4.2.1	Subsistemas .....	68
4.3	Modelo da perda por atrito nos rolamentos .....	69
4.4	Modelo da perda devido ao lubrificante (Churning Loss) .....	77
4.4.1	Estudo teórico .....	77
4.4.2	Modelagem dos blocos orientados .....	79
4.5	Modelo de perda por ventilação do ar (Windage Loss) .....	85
4.5.1	Estudo teórico .....	85
4.5.2	Modelagem dos blocos orientados .....	87
4.6	Modelos de câmbio e diferencial modificados .....	88
4.6.1	Novo modelo do câmbio .....	89
4.6.2	Novo modelo de diferencial .....	94
4.7	Simulações e análises dos resultados .....	96
5	Conclusão .....	104
6	Bibliografia .....	105
	Anexo A - Gráfico da eficiência mecânica da primeira marcha (câmbio M40) .....	107
	Anexo B – Modelos de inicialização (Câmbio C530) .....	111

## LISTA DE FIGURAS E TABELAS

FIGURA 1 – RENDIMENTO INSTANTÂNEO DAS ENGRENAGENS DE DENTES RETOS .....	12
FIGURA 2 – FORÇAS EM UM PAR DE ENGRENAGENS SIMPLES COM O EFEITO DA FRICÇÃO .....	13
FIGURA 3 – FORÇAS EM UM PAR DE ENGRENAGENS SIMPLES COM O EFEITO DA FRICÇÃO (INVERSO).....	14
FIGURA 4 – FORÇAS EM UM PAR DE ENGRENAGENS INTERNAS SIMPLES COM O EFEITO DA FRICÇÃO.....	15
FIGURA 5 – FORÇAS EM UM PAR DE ENGRENAGENS INTERNAS SIMPLES COM O EFEITO DA FRICÇÃO (INVERSO) .....	17
FIGURA 6 – RELAÇÕES GEOMÉTRICAS DAS ENGRENAGENS EXTERNAS DE DENTES RETOS .....	19
FIGURA 7 – CARACTERÍSTICAS DE UM PERFIL DE DENTE .....	21
FIGURA 8 – EFICIÊNCIA MECÂNICA X SEGMENTO DE CONTATO.....	23
FIGURA 9 – YADA X BUCKINGHAM-MERRITT.....	24
FIGURA 10 – RELAÇÕES GEOMÉTRICAS ENTRE PINHÃO E COROA .....	25
FIGURA 11 – CONFIGURAÇÃO DE ENGRENAGEM HELICOIDAL .....	28
FIGURA 12 – VELOCIDADES PRESENTES NO CONTATO DE ENGRENAGENS .....	30
FIGURA 13 – VELOCIDADE DE ESCORREGAMENTO NO SEGMENTO DE CONTATO.....	31
FIGURA 14 – CURVAS DO COEFICIENTE DE ATRITO NAS ENGRENAGENS (MODELO DE BUCKINGHAM) .....	33
FIGURA 15 – FORÇAS QUE ATUAM NO DENTE DE UMA ENGRENAGEM HELICOIDAL [15] .....	36
FIGURA 16 – VELOCIDADE ACUMULADA NA LINHA DE AÇÃO.....	37
FIGURA 17 – ANDAMENTO DO COEFICIENTE DE ATRITO VARIANDO-SE A FORÇA NORMAL .....	38
FIGURA 18 – COMPORTAMENTO DO COEFICIENTE DE ATRITO, CONSIDERANDO A VARIAÇÃO DO TORQUE E VELOCIDADE. COM $i = 2.35$ , $\eta M = 50 \text{ m Pa s}$ , $Ra = 1.5 \mu\text{m}$ , $KA = 1$ E $b = 22 \text{ mm}$ .....	39
FIGURA 19 – EFEITO DA RUGOSIDADE NO COEFICIENTE DE ATRITO. COM $\eta M = 50 \text{ m Pa s}$ , $T = 400 \text{ Nm}$ , $KA = 1$ E $n1 = 3000 \text{ rpm}$ .....	39
FIGURA 20 – EFEITO DA VISCOSIDADE NO COEFICIENTE DE ATRITO. COM $Ra = 1.5 \mu\text{m}$ , $T = 400 \text{ Nm}$ , $KA = 1$ $n1 = 3000 \text{ rpm}$ .....	40
FIGURA 21 – RENDIMENTO MECÂNICO X RELAÇÃO DE TRANSMISSÃO (ENGRENAGENS DE DENTES RETOS).....	41
FIGURA 22 – O EFEITO DA RELAÇÃO DE TRANSMISSÃO NO RENDIMENTO MECÂNICO .....	42
FIGURA 23 – RELAÇÃO ENTRE O ÂNGULO DE PRESSÃO E A RAZÃO DE CONTATO .....	43
FIGURA 24 – EFEITO DO ÂNGULO DE PRESSÃO NO RENDIMENTO MECÂNICO.....	43
FIGURA 25 – RENDIMENTO X NÚMERO DE DENTES $Z_1$ .....	44
FIGURA 26 – EFICIÊNCIA MECÂNICA X VELOCIDADE ANGULAR .....	45
FIGURA 27 – EFEITO DO MÓDULO NO RENDIMENTO MECÂNICO.....	46
FIGURA 28 – EFEITO DO ÂNGULO DE HÉLICE NO RENDIMENTO .....	46
FIGURA 29 – EFEITO DO ADDENDUM NA PERDA DE POTÊNCIA E RAZÃO DE CONTATO.....	49
FIGURA 30 – EFEITO DO ADDENDUM E RAZÃO DE CONTATO NO ESCORREGAMENTO .....	49
FIGURA 31 – EFEITO DO “DIAMETRAL PITCH” E ÂNGULO DE PRESSÃO NA PERDA DE POTÊNCIA E RAZÃO DE CONTATO.....	50
FIGURA 32 – EFEITO DO DIÂMETRO NA PERDA DE POTÊNCIA .....	51
FIGURA 33 – EFEITO DA RELAÇÃO DE TRANSMISSÃO NA PERDA DE POTÊNCIA .....	51
FIGURA 34 – EXEMPLO DE CAIXA DE CÂMBIO (M40) .....	52
FIGURA 35 – DADOS DIMENSIONAIS DO CÂMBIO M40.....	53
FIGURA 36 – COMPARAÇÃO DOS MODELOS DE BUCKINGHAM E NIEMANN COM MÁXIMA CARGA, 400NM, E VELOCIDADE DE ROTAÇÃO DA PRIMEIRA ENGRENAGEM, 3000 RPM. ....	54
FIGURA 37 – EFICIÊNCIA DA RELAÇÃO FINAL DE REDUÇÃO PARA A PRIMEIRA E SEXTA MARCHAS .....	54
FIGURA 38 – EFICIÊNCIA TOTAL PARA CADA MARCHA (M40) COM CARGA MÁXIMA, 400NM, E VELOCIDADE ANGULAR DA PRIMEIRA ENGRENAGEM, 3000 RPM. ....	55
FIGURA 39 – EFICIÊNCIA PARA OS DIFERENTES TIPOS DE MARCHA (M40).....	56
FIGURA 40 – VELOCIDADE ESCORREGAMENTO E ACUMULADA PRIMEIRA ATÉ A QUARTA MARCHA DO M40.....	60
FIGURA 41 – VELOCIDADE ESCORREGAMENTO E ACUMULADA PRA A QUINTA E SEXTA MARCHA DO M40.....	61

FIGURA 42 – LARGURA DO DENTE EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE DENTES NA RODA. ....	63
FIGURA 43 – EFEITO DA MUDANÇA DE PERFIL NA EFICIÊNCIA MECÂNICA. ....	63
FIGURA 44 – CONVENÇÃO DE SINAL POSITIVA. ....	65
FIGURA 45 – BLOCO DA EFICIÊNCIA MECÂNICA. ....	66
FIGURA 46 – MÁSCARA DO BLOCO DA EFICIÊNCIA MECÂNICA. ....	67
FIGURA 47 – ESTRUTURA INTERNA DO BLOCO DE EFICIÊNCIA MECÂNICA. ....	67
FIGURA 48 – BLOCO DO CÁLCULO DAS FORÇAS ....	69
FIGURA 49 – MÁSCARA INICIAL PARA O MODELO DE CÁLCULO DAS FORÇAS ....	70
FIGURA 50 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DO EIXO PRIMÁRIO COM TODAS AS ENGRENAGENS E FORÇAS (PLANO YZ) .....	71
FIGURA 51 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DO EIXO PRIMÁRIO COM TODAS AS ENGRENAGENS E FORÇAS (PLANO YX) .....	71
FIGURA 52 – DENTRO DO BLOCO DE CÁLCULO DAS FORÇAS NOS ROLAMENTOS .....	72
FIGURA 53 – CARREGAMENTO AXIAL DIVIDIDO ENTRE UM CONJUNTO DE ROLAMENTOS CÔNICOS.....	73
FIGURA 54 – SEÇÃO DO CÂMBIO C530 COM SEIS MARCHAS. ....	75
FIGURA 55 – DADOS DOS ROLAMENTOS DA CAIXA DE CÂMBIO MANUAL C530. ....	75
FIGURA 56 – MODELO DE ROLAMENTO. ....	76
FIGURA 57 – ESTRUTURA INTERNA DO BLOCO DE MANCAL.....	76
FIGURA 58 – VISTA DA ESTRUTURA INTERNA DO CÁRTER [16].....	78
FIGURA 59 – NÍVEL DE ÓLEO NO C530 .....	80
FIGURA 60 – BLOCO QUE ESCOLHE A VELOCIDADE DAS ENGRENAGENS DO SECUNDÁRIO .....	81
FIGURA 61 – MODELO DA PERDA DEVIDO AO LUBRIFICANTE .....	81
FIGURA 62 – MÁSCARA DO MODELO DE PERDA DEVIDO AO LUBRIFICANTE.....	82
FIGURA 63 – PARTE INTERIOR DO BLOCO DE “CHURNING LOSS” .....	82
FIGURA 64 – DENTRO DO BLOCO QUE CALCULA O TORQUE RESISTIVO E A POTÊNCIA DISSIPADA. ....	83
FIGURA 65 – PERDA DE POTÊNCIA VERSUS VELOCIDADE, MEDIDO POR ALBERS [16] (GEOMETRIA 6) .....	84
FIGURA 66 – PERDA DE POTÊNCIA “CHURNING” VERSUS VELOCIDADE ANGULAR (GEOMETRIA 6) .....	84
FIGURA 67 – PERDA DE POTÊNCIA “CHURNING” VERSUS VELOCIDADE ANGULAR (GEOMETRIA 7) .....	85
FIGURA 68 – COMPARAÇÃO ENTRE OS RESULTADOS EXPERIMENTAIS E OS DO MODELO DE ANÁLISE DIMENSIONAL [20] .....	86
FIGURA 69 – RESULTADOS DAS PERDAS POR “WINDAGE” OBTIDAS DO MODELO PARA 4 TIPOLOGIAS DE ENGRENAGENS.....	88
FIGURA 70 – MODELOS DE BLOCOS ORIENTADOS DE UM VEÍCULO COM CÂMBIO MANUAL (MT). ....	89
FIGURA 71 – ANTIGO MODELO DOS ROLAMENTOS .....	90
FIGURA 72 – MODELOS DE CÂMBIO MANUAL E ROLAMENTOS MODIFICADOS .....	91
FIGURA 73 – PARTE INTERNA DO MODELO DE MANCAL DO EIXO PRIMÁRIO.....	91
FIGURA 74 – MODELO DE CÂMBIO COM UM GRAU DE LIBERDADE MODIFICADO.....	93
FIGURA 75 – EXEMPLO DE UM SISTEMA DE UM GRAU DE LIBERDADE.....	93
FIGURA 76 – MODELO DE DIFERENCIAL MODIFICADO CONSIDERANDO AS DISSIPACÕES DE ENERGIA. ....	95
FIGURA 77 – DADOS DOS MANCAIS DO DIFERENCIAL .....	96
FIGURA 78 – RENDIMENTO GLOBAL VERSUS TORQUE DE ENTRADA EM PORCENTAGEM, CONSIDERANDO VELOCIDADES CONSTANTES .....	97
FIGURA 79 – TODAS AS CONTRIBUIÇÕES DE PERDA, CONSIDERANDO VELOCIDADES CONSTANTES PARA O VEÍCULO .....	98
FIGURA 80 – VELOCIDADE DO VEÍCULO, MARCHAS, TORQUE DE ENTRADA E VELOCIDADE ANGULAR DO PRIMÁRIO. ....	99
FIGURA 81 – TODAS AS PERDAS DE ENERGIA NA CAIXA DE CÂMBIO EM CONDIÇÃO DE ACELERAÇÃO.....	100
FIGURA 82 – CONTRIBUIÇÃO DA PERDA PELO LUBRIFICANTE PARA CADA ENGRENAGEM DO SISTEMA DE TRANSMISSÃO.....	101
FIGURA 83 – EFEITO “WINDAGE” PARA CADA ENGRENAGEM DO SISTEMA DE TRANSMISSÃO. ....	102



FIGURA 84 – EFEITO DO ATRITO NO CONTATO DOS DENTES NO DIFERENCIAL E NO CÂMBIO .....	102
FIGURA 85 – CONTRIBUIÇÃO DE PERDA NOS ROLAMENTOS DO PRIMÁRIO, SECUNDÁRIO E DIFERENCIAL.....	103
TABELA 1 – SUMÁRIO DOS DESLOCAMENTOS DO PONTOS PRIMITIVOS .....	17
TABELA 2 – RENDIMENTO PARA ENGENHAGENS EXTERNAS DE DENTES RETOS .....	29
TABELA 3 – RENDIMENTO PARA ENGENHAGENS INTERNAS .....	29
TABELA 4 – RENDIMENTO PARA ENGENHAGENS HELICOIDAIS .....	29
TABELA 5 – SIMULAÇÕES AVALIANDO OS DOIS MODELOS PARA CADA RELAÇÃO DE TRANSMISSÃO E CONSIDERANDO CONSTANTES OS PARÂMETROS: $HM = 50 \text{ m Pa s}$ , $KA = 1$ , $RA = 0.35 \text{ mm}$ . .....	57

## 1 Rendimento mecânico de engrenagens simples

### 1.1 Introdução

Como mencionado antes, a crescente necessidade de reduzir o consumo de energia e a emissão de poluentes aumentou o interesse em estudar a eficiência de um par de engrenagens e reduzir a perda de potência causada pelos fatores internos no contato dos dentes.

De acordo com Merritt [4], os meios de dissipação de potência podem ser divididos em dois principais: devido ao atrito no escorregamento dos dentes e devido à movimentação no óleo lubrificante. Uma breve explicação de cada um será mostrada no parágrafo (1.2).

No parágrafo (1.3) será mostrado o efeito do atrito na direção das forças de reação no contato entre os dentes.

Nos parágrafos (1.4) e (1.5) serão deduzidas equações que relacionam a eficiência mecânica com o deslocamento virtual do ponto de contato primitivo, que é causado pela fricção. Então, pode-se traduzir o rendimento mecânico em termos de quanto esse ponto primitivo é distante do teórico.

### 1.2 Relação entre as perdas no cálculo da eficiência mecânica

Como citado acima, o desperdício de potência presente nos trens de engrenagens está associado principalmente a dois fatores: atrito nos dentes e churning losses (óleo). O primeiro dependerá do tipo de engrenagem, do detalhe de desenho do dente, das características de engrenamento, do coeficiente médio de atrito entre os dentes e também da potência transmitida. O segundo é depende basicamente da viscosidade e densidade do lubrificante, da geometria e da velocidade de rotação da engrenagem.

A relação da eficiência com os termos dissipados pode ser demonstrada com os seguintes parâmetros:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_i = \text{Potência de entrada} \\ P_o = \text{Potência de saída} \\ P_c = \text{Potência dissipada por churning} \\ P_t = \text{Potência dissipada por atrito} \\ P_l = \text{Potência total dissipada} \\ \Delta_E = \text{porcentagem de perda por atrito} \\ \eta = \text{rendimento total} \end{array} \right.$$

Dessas quantidades,  $P_c$  e  $\Delta_E$  devem ser conhecidas ou calculadas para cada caso particular. Agora, assumindo que a perda por churning é absorvida antes de a potência alcançar os dentes motores, a energia cedida pelos dentes motores é igual a  $(P_i - P_c)$ , menor do que a potência de entrada  $P_i$ . Assim, a perda por atrito pode ser expressa como:

$$P_t = \frac{\Delta_E}{100} (P_i - P_c) \quad (1.1)$$

E a dissipação total é:

$$P_l = P_c + P_t = P_c + \frac{\Delta_E}{100}(P_i - P_c) \quad (1.2)$$

A energia que alcança o eixo de saída é igual a diferença entre a potência de entrada e a total dissipada:

$$P_o = P_i - P_l = (P_i - P_c) \left(1 - \frac{\Delta_E}{100}\right) \quad (1.3)$$

Então, rendimento total:

$$\eta = 100 \frac{P_o}{P_i} = \left(1 - \frac{P_c}{P_i}\right) (100 - \Delta_E) \quad (1.4)$$

Se, entretanto, fosse suposto que perda por churning fosse absorvida depois da energia ter passado através dos dentes motores, então a expressão da eficiência total seria:

$$\eta = 100 - \Delta_E - \frac{100P_c}{P_i} \quad (1.5)$$

De acordo com Merritt [4], em baixas velocidades de rotação, dissipação por churning são desprezíveis em comparação com as perdas por atrito, em quanto que em altas velocidades e levemente carregado, elas podem se tornar mais importantes e até mesmo exceder o valor dessas últimas.

As equações descritas acima para calcular a eficiência total relacionam-se com as engrenagens propriamente ditas, não considerando as dissipações nos rolamentos, elementos de vedação e atrito com ar (windage loss), os quais serão estudados posteriormente neste trabalho.

### 1.3 Rendimento mecânico médio de um trem de engrenagens normal

A Figura 1 mostra o contato entre o dente A e B nos ponto M' e M'', onde A pertence à engrenagem motriz. Segundo Merritt [4], em ausência de atrito as forças de reação entre as faces dos dentes permanecem na reta normal comum; mas, a presença de atrito muda a direção dessas forças de um ângulo  $\phi$ , o ângulo de atrito. As condições são diferentes durante o acesso e recesso, como mostrado em (a) e (b) na Figura 1. Na região de acesso, a velocidade periférica do dente motor é menor que a do dente movido. A existência de velocidade relativa entre os dois dentes induz o dente motor a ser puxado pela fricção. A linha de ação A'B' intersecta a linha central O<sub>1</sub>O<sub>2</sub> at  $p'_e$ , que está localizado dentro do círculo de raio primitivo da roda movida. Ao contrário, na região de recesso, o dente movido é puxado, pois a velocidade periférica deste é menor do que aquela do dente motor. Então, a linha de ação A''B'' do vetor das forças de reação em M'', neste caso, passa através do ponto  $p''_e$ , que também está localizado dentro do círculo primitivo movido. A distância  $pp'_e$  (acesso) é maior do que  $pp''_e$  (recesso), como provado por Yada [1], mas essa diferença pode ser ignorada porque é

bastante insignificante [4]. Adota-se  $\delta = pp'_e = pp''_e$  como sendo a distância entre esses pontos.

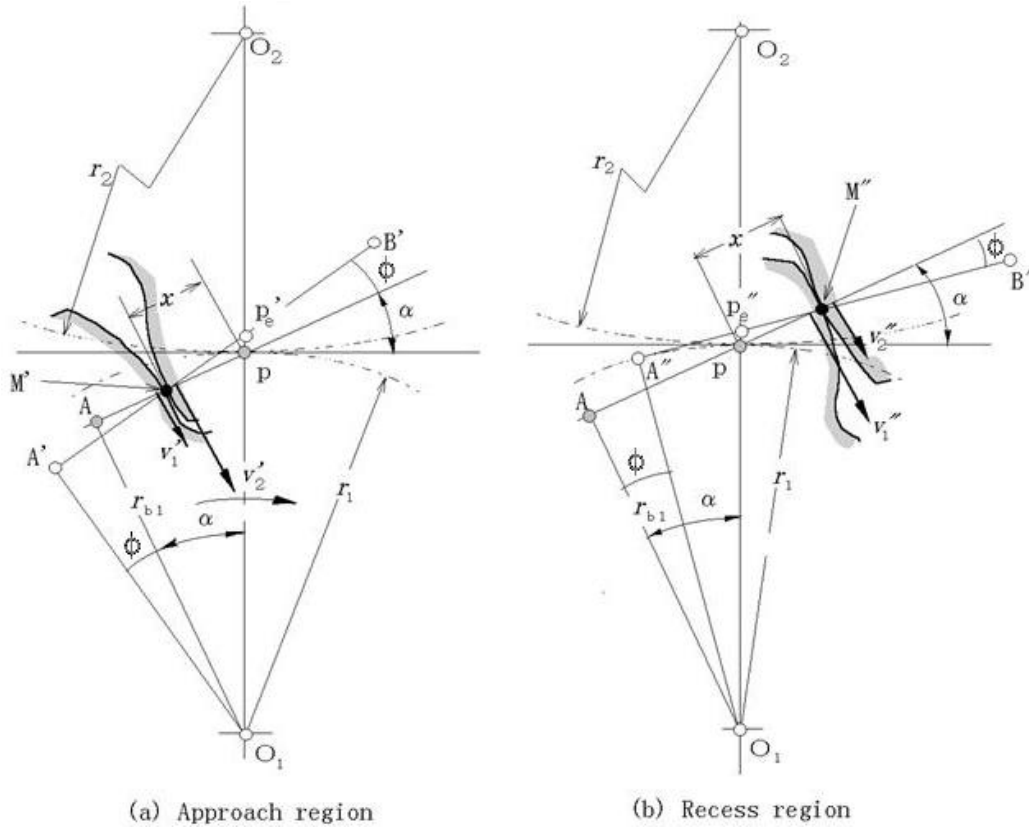


Figura 1 – Rendimento instantâneo das engrenagens de dentes retos

Baseando-se na presente teoria acima, considerando apenas um par de dentes em contato e assumindo que a carga é constante no ponto de contato, é possível estabelecer uma relação entre a eficiência mecânica e esta distância  $\delta$ , para união entre engrenagens com dentes internos e externos.

## 1.4 Engrenagens com dentes externos

### 1.4.1 Rendimento direto

A Figura 2 abaixo mostra um exemplo de contato entre duas engrenagens externas simples (os círculos em azul são os primitivos). Como já mencionado, por causa da presença de atrito, a linha de ação das forças muda de direção em relação ao ângulo de pressão  $\alpha$  com um ângulo  $\phi$ . Neste caso, “i” representa a roda motora e “j” a movida. Pode ser visto que o ponto de contato primitivo  $P_0$  se move para outra posição, dentro do círculo da roda movida. Este novo ponto  $P$  é um ponto de contato virtual, isto é, como se o raio primitivo da engrenagem motriz tivesse aumentado e o raio da conduzida tivesse diminuído, e eles valem respectivamente  $(R_i + \delta_{Dij})$  e  $(R_j - \delta_{Dij})$ . O índice “D” significa direto (energia flui diretamente de “i” para “j”), logo,  $\delta_{Dij}$  significa deslocamento direto quando “i” é motor e “j” é guiado. À seguir, serão mostradas as fórmulas para determinar esses deslocamentos em base à igualdade das forças tangenciais no contato entre os dentes.

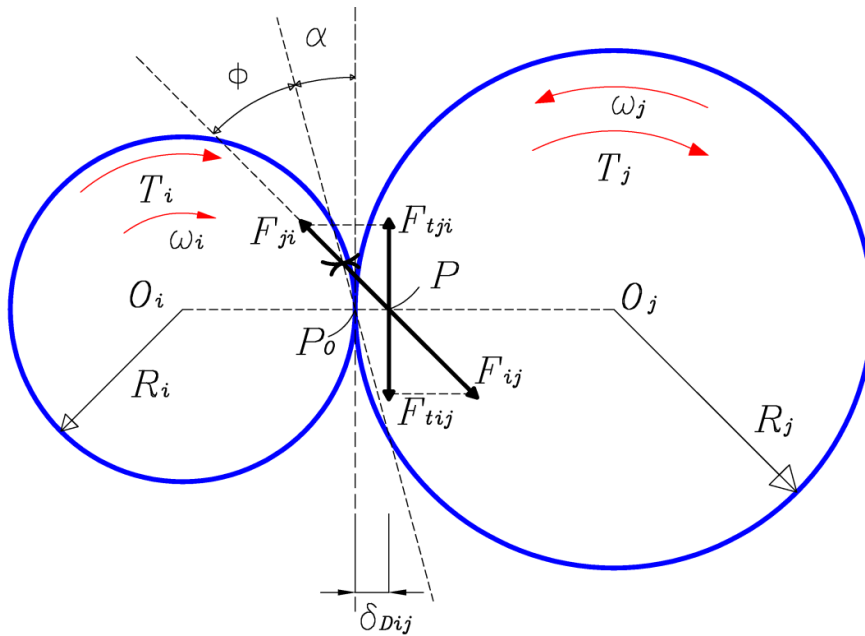


Figura 2 – Forças em um par de engrenagens simples com o efeito da fricção

A definição de rendimento é a razão entre a potência de saída e a potência de entrada. Então:

$$\eta_{Dij} = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{T_j \cdot \omega_j}{T_i \cdot \omega_i} \quad (1.6)$$

Em base da igualdade das forças tangenciais do contato entre os dentes, pode-se obter as seguintes equações, recordando que esta força é igual torque dividido pelo raio primitivo, portanto:

$$F_{tij} = F_{tji} \quad (1.7)$$

$$\frac{T_i}{R_i + \delta_{Dij}} = \frac{T_j}{R_j - \delta_{Dij}} \quad (1.8)$$

A razão de transmissão pode ser escrita como:

$$\tau = \frac{\omega_i}{\omega_j} = \frac{R_j}{R_i} \quad (1.9)$$

Substituindo (1.9) e (1.8) na equação (1.6), encontra-se a relação entre eficiência e deslocamento:

$$\eta_{Dij} = \frac{(R_j - \delta_{Dij}) R_i}{(R_i + \delta_{Dij}) R_j} = \frac{\left(1 - \frac{\delta_{Dij}}{R_j}\right)}{\left(1 + \frac{\delta_{Dij}}{R_i}\right)} \quad (1.10)$$

Na verdade, o que se mede primeiro é a eficiência para depois encontrar o valor do deslocamento, isto é, o rendimento mecânico na união de engrenagens pode ser traduzido na

forma deste deslocamento do pitch point (ponto primitivo). Dois métodos para media analiticamente esse rendimento serão discutidos e analisados no próximo capítulo (Cap. 2). Agora, mudando a equação (1.10), isolando o deslocamento em função da eficiência, obtém-se:

$$\delta_{Dij} = \frac{(1-\eta_{Dij})R_j R_i}{\eta_{Dij}R_j+R_i} = \frac{(1-\eta_{Dij})}{\frac{\eta_{Dij}}{R_i} + \frac{1}{R_j}} \quad (1.11)$$

#### 1.4.2 Rendimento inverso

Quando existe a inversão do movimento (ver Figura 3), isto é, a potência flui de roda “j” para a “i”, o ponto primitivo virtual  $P$  estará localizado na engrenagem movida, que neste caso é a roda “i”. Agora, os valores dos raios primitivos da motriz e da movida são respectivamente  $(R_j + \delta_{Iij})$  e  $(R_i - \delta_{Iij})$ . O índice “I” significa inverso, então,  $\delta_{Iij}$  é o deslocamento inverso, quando a engrenagem “i” se torna movida e a “j” motora. Obviamente, este poderia ter sido escrito como deslocamento direto  $\delta_{Iij} = \delta_{Dji}$ , mas não criar confusões, foi preferido usar a nomenclatura “ij” (potência flui diretamente de “i” para “j”).

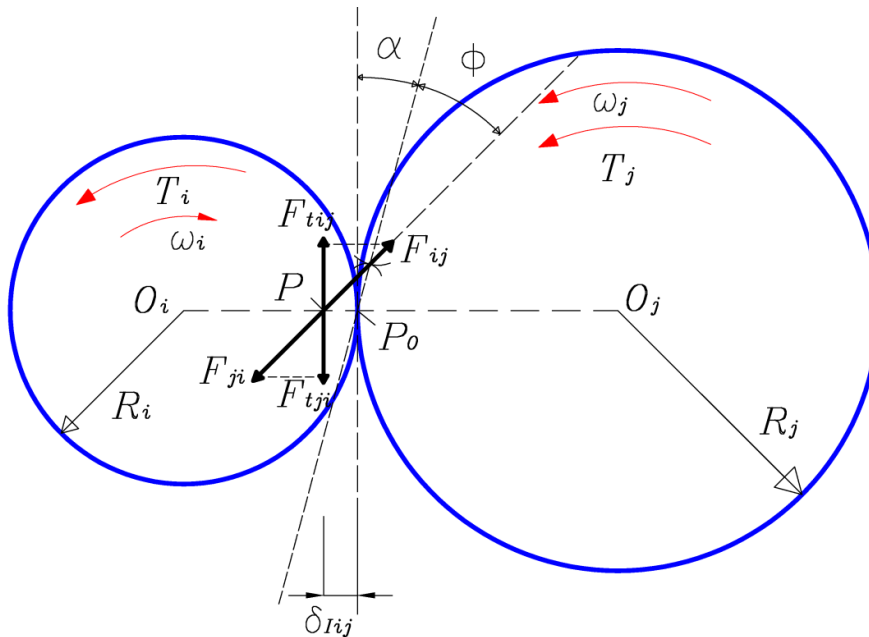


Figura 3 – Forças em um par de engrenagens simples com o efeito da fricção (Inverso)

Da mesma maneira, é possível encontrar a relação rendimento-deslocamento:

$$\frac{T_j}{R_j+\delta_{Iij}} = \frac{T_i}{R_i-\delta_{Iij}} \quad (1.12)$$

$$\eta_{Iij} = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{T_i \omega_i}{T_j \omega_j} = \frac{T_i R_j}{T_j R_i} = \frac{(R_i-\delta_{Iij})R_j}{(R_j+\delta_{Iij})R_i} = \frac{\left(1-\frac{\delta_{Iij}}{R_i}\right)}{\left(1+\frac{\delta_{Iij}}{R_j}\right)} \quad (1.13)$$

$$\delta_{Iij} = \frac{(1-\eta_{Iij})R_j R_i}{\eta_{Iij} R_i + R_j} = \frac{(1-\eta_{Iij})}{\frac{\eta_{Iij}}{R_j} + \frac{1}{R_i}} \quad (1.14)$$

Vale ressaltar que quando se muda o a função de motor ou movido das engrenagens, o deslocamento será diferente ( $\delta_{Dij} \neq \delta_{Iij}$ ) mesmo se as eficiências medidas na configuração direta e inversa forem iguais ( $\eta_{Dij} = \eta_{Iij}$ ), porque seus raios primitivos são diferentes ( $R_i \neq R_j$ ).

## 1.5 Engrenagens com dentes internos

### 1.5.1 Rendimento direto

Antes, foi estudado o caso de engrenamento entre engrenagens externas, agora será mostrada a relação entre duas rodas, onde uma é interna em relação à outra (veja Figura 4). O índice “j” representa a engrenagem com dentes externos e “k” a roda com dentes internos (formato de anel). Neste caso, “j” é motora e “k” é conduzida.

Pode ser visto na Figura 4 que o ponto virtual agora é localizado externamente a ambas as engrenagens, e então os raios aumentaram seus valores. Os raios primitivos da engrenagem motriz e da movida são respectivamente  $(R_j + \delta_{Djk})$  e  $(R_k + \delta_{Djk})$ .

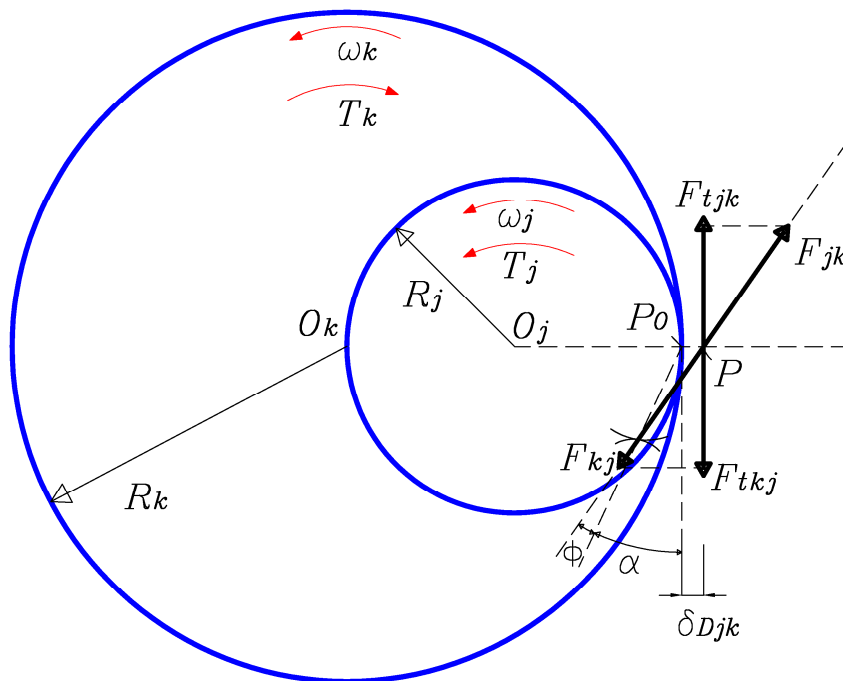


Figura 4 – Forças em um par de engrenagens internas simples com o efeito da fricção

Neste caso, a eficiência é expressa como:

$$\eta_{Djk} = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{T_k \cdot \omega_k}{T_j \cdot \omega_j} \quad (1.15)$$

Em base na igualdade das forças tangenciais no contato dos dentes, pode-se chegar à equação:

$$\frac{T_j}{R_j + \delta_{Djk}} = \frac{T_k}{R_k + \delta_{Djk}} \quad (1.16)$$

Agora, a relação de transmissão é:

$$\tau = \frac{\omega_j}{\omega_k} = \frac{R_k}{R_j} \quad (1.17)$$

Substituindo (1.16) e (1.17) na equação (1.15), a analogia entre o rendimento mecânico e o deslocamento do ponto primitivo se torna igual a:

$$\eta_{Djk} = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{T_k \omega_k}{T_j \omega_j} = \frac{T_k R_j}{T_j R_k} = \frac{(R_k + \delta_{Djk}) R_j}{(R_j + \delta_{Djk}) R_k} = \frac{\left(1 + \frac{\delta_{Djk}}{R_k}\right)}{\left(1 + \frac{\delta_{Djk}}{R_j}\right)} \quad (1.18)$$

$$\delta_{Djk} = \frac{(1 - \eta_{Djk}) R_j R_k}{\eta_{Djk} R_k - R_j} = \frac{(1 - \eta_{Djk})}{\frac{\eta_{Djk}}{R_j} - \frac{1}{R_k}} \quad (1.19)$$

### 1.5.2 Rendimento inverso

Aqui, do mesmo modo feito anteriormente, foi invertido o sentido do fluxo de potência, isto é, a energia segue da engrenagem mais externa “k” para a engrenagem mais interna “j” (veja Figura 5). Neste caso, o ponto primitivo virtual se localiza na parte interna de ambos os círculos. Assim, os raios primitivos da engrenagem motora e da movida são respectivamente  $(R_j - \delta_{Ijk})$  e  $(R_k - \delta_{Ijk})$ .

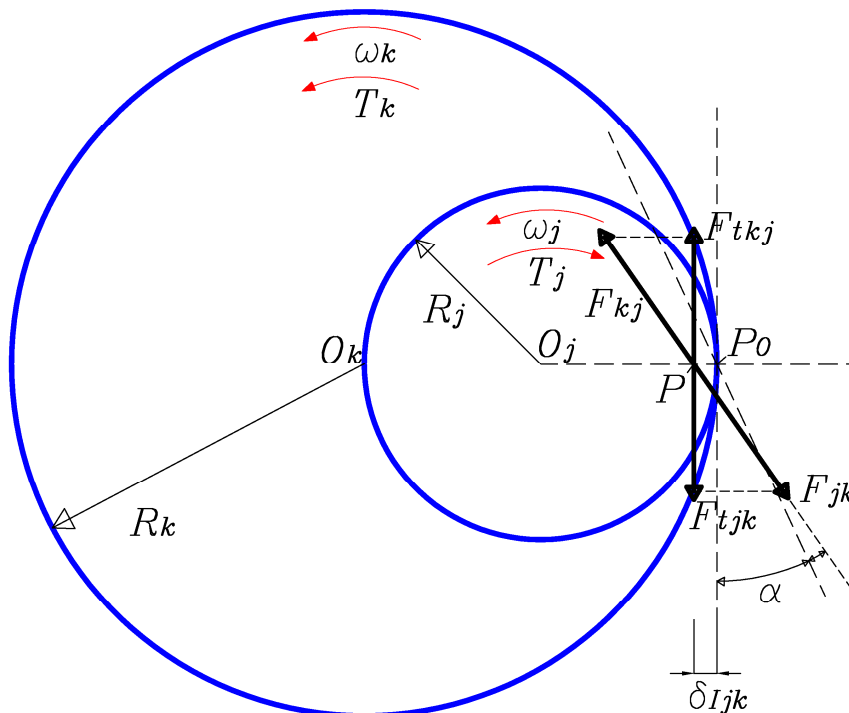




Figura 5 – Forças em um par de engrenagens internas simples com o efeito da fricção (Inverso)

Aplicando do mesmo modo para esse caso, o resultado final das equações acima é representado abaixo:

$$\frac{T_k}{R_k - \delta_{Ijk}} = \frac{T_j}{R_j - \delta_{Ijk}} \quad (1.20)$$

$$\eta_{Ijk} = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{T_j \omega_j}{T_k \omega_k} = \frac{T_j R_k}{T_k R_j} = \frac{(R_j - \delta_{Ijk}) R_k}{(R_k - \delta_{Ijk}) R_j} = \frac{\left(1 - \frac{\delta_{Ijk}}{R_j}\right)}{\left(1 - \frac{\delta_{Ijk}}{R_k}\right)} \quad (1.21)$$

$$\delta_{Ijk} = \frac{(1 - \eta_{Ijk}) R_j R_k}{R_k - \eta_{Ijk} R_j} = \frac{(1 - \eta_{Ijk})}{\frac{1}{R_j} - \frac{\eta_{Ijk}}{R_k}} \quad (1.22)$$

Pode-se perceber que as equações (1.11), (1.14), (1.19) e (1.22) são bastante similares, e representam os quatro tipos de configuração dependendo de qual engrenagem é motora ou movida e se o contato é entre dentes externos ou internos. A tabela 1 faz um sumário dos resultados calculados neste capítulo.

Tabela 1 – Sumário dos deslocamentos do pontos primitivos

<b>External gears coupling</b>	<b>Direct displacement</b>	<b>Inverse displacement</b>
External gear <i>i</i> External gear <i>j</i>	$\delta_{Dij} = \frac{(1 - \eta_{Dij})}{\frac{\eta_{Dij}}{R_i} + \frac{1}{R_j}}$	$\delta_{Iij} = \frac{(1 - \eta_{Iij})}{\frac{\eta_{Iij}}{R_j} + \frac{1}{R_i}}$
<b>Internal-external gears coupling</b>	<b>Direct displacement</b>	<b>Inverse displacement</b>
External gear <i>j</i> Internal gear <i>k</i>	$\delta_{Djk} = \frac{(1 - \eta_{Djk})}{\frac{\eta_{Djk}}{R_j} - \frac{1}{R_k}}$	$\delta_{Ijk} = \frac{(1 - \eta_{Ijk})}{\frac{1}{R_j} - \frac{\eta_{Ijk}}{R_k}}$

## 2 Métodos analíticos para estimar o rendimento mecânico de engrenagens

### 2.1 Introdução

Como se pôde notar das fórmulas anteriores, é necessário calcular primeiro o rendimento mecânico de um conjunto de engrenagens em contato para depois encontrar o valor do deslocamento  $\delta$  (desvio do ponto primitivo de contato) e o ponto primitivo virtual  $p'_e$  para então se introduzir nas equações dinâmicas das engrenagens, por exemplo, uma cadeia de engrenagens epicíclicas.

Neste capítulo, dois principais métodos para calcular analiticamente a eficiência mecânica das engrenagens, para diferentes tipos de configurações como: dente reto externo, interno e helicoidal.

Há 60 anos, Merrit [4] e Buckingham [3] realizaram análises teóricas de rendimento mecânico de engrenagens. Eles apresentaram equações de eficiência mecânica na mesma forma, embora usando diferentes processos para obterem os resultados.

Além disso, será feita uma análise de dois modelos de comportamento do coeficiente de atrito, um proposto por Buckingham e outro, mais atual, descrito por Niemann [12].

Finalmente, algumas avaliações de sensibilidade serão realizadas, mudando vários parâmetros do modelo de rendimento proposto por Buckingham.

## 2.2 Eficiência mecânica das engrenagens de dentes retos (spur gears)

### 2.2.1 Equação de Buckingham

Nesta seção, será mostrado o método analítico proposto por Buckingham [3] para medir o rendimento mecânico das engrenagens com dentes externos e retos.

A Figura 6 mostra as relações geométricas entre duas rodas dentadas em contato. Foi considerado positivo o sentido horário para o momento e velocidade angular, e o ponto  $O_1$  é o centro da roda motriz. A linha AB é a linha de ação. O subscrito 1 é usado para simbolizar a engrenagem motora e 2 é usado para a movida. Os símbolos são nomeados como:

$Z_1, Z_2 =$  número de dentes da motora e movida, respectivamente

$R_{b1} =$  raio de base (motriz)

$R_{b2} =$  raio de base (movida)

$R_1, R_2 =$  raio primitivo da roda motriz e movida, respectivamente

$R_{o1}, R_{o2} =$  raio externo da motora e movida, respectivamente

$\alpha =$  ângulo de pressão

$\overline{mn} = g_1 + g_2 =$  segmento de contato

$\overline{AB} =$  linha de ação

$\mu =$  coeficiente de atrito, considerado constante

$\mu_a =$  coeficiente médio de atrito para o acesso

$\mu_r =$  coeficiente médio de atrito para o recesso

$\beta_a =$  arco de acesso na engrenagem motriz

$\beta_r =$  arco de recesso na engrenagem motriz

$i =$  relação de transmissão

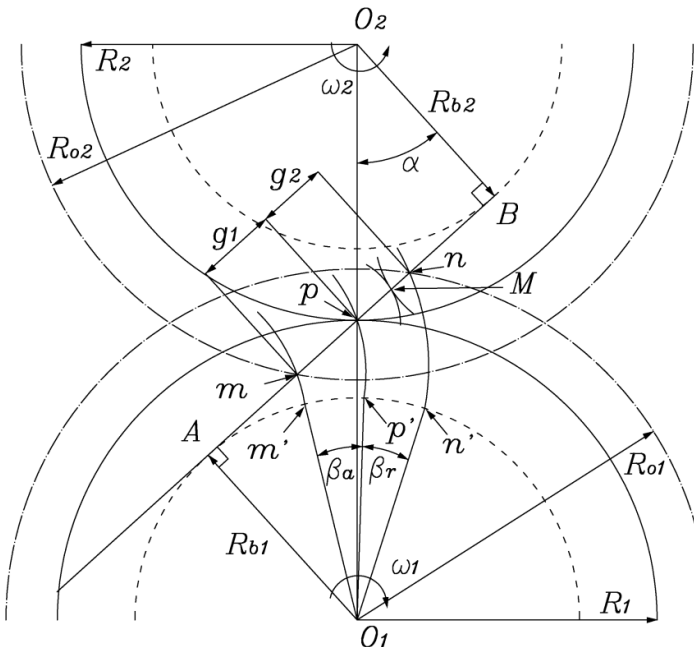


Figura 6 – Relações geométricas das engrenagens externas de dentes retos

De acordo com Buckingham, a força de atrito auxilia a rotação da engrenagem motriz durante a região de acesso; entretanto, durante o recesso, esta força se opõe ao movimento de rotação

desta engrenagem. Então, em seus cálculos analíticos, ele estudou separadamente essas duas regiões de acesso e recesso.

A seguir, algumas simplificações do modelo feito por ele:

- Dentes com formatos idênticos e espaçados igualmente
- Pressão normal constante durante todo o período de engrenamento
- Quando 2 ou mais pares de dentes suportam a carga simultaneamente, a pressão é igualmente dividida entre eles
- Razão de contato igual a 1 e os coeficientes de atrito na área de contato não variam.

Ele encontrou uma simples formulação para a eficiência mecânica entre engrenagens considerando o trabalho de entrada igual ao produto da força normal, velocidade angular e raio da base da roda motora. Então, assumindo  $\mu$  o coeficiente de atrito seja constante, mas distintos para acesso e recesso em todo o engrenamento, a eficiência é:

$$\eta = 1 - \left( \frac{1 + \frac{1}{i}}{\beta_a + \beta_r} \right) \left( \frac{\mu_a}{2} \beta_a^2 + \frac{\mu_r}{2} \beta_r^2 \right) \quad (2.23)$$

Onde  $i = \frac{Z_2}{Z_1}$  é a relação de transmissão.

Quando o coeficiente médio de atrito pode ser considerado igual tanto para acesso quanto recesso, então isso resulta:

$$\eta = 1 - \left( \frac{1 + \frac{1}{i}}{\beta_a + \beta_r} \right) \frac{\mu}{2} (\beta_a^2 + \beta_r^2) \quad (2.24)$$

Vendo a Figura 6, é possível deduzir as seguintes relações geométricas:

$$\beta_a = \frac{\overline{m'p'}}{R_{b1}} = \frac{\overline{m\overline{p}}}{R_{b1}} = \frac{g_1}{R_{b1}} = \frac{\sqrt{R_{o2}^2 - R_{b2}^2} - R_2 \sin \alpha}{R_{b1}} \quad (2.25)$$

$$\beta_r = \frac{\overline{p'm'}}{R_{b1}} = \frac{\overline{p\overline{n}}}{R_{b1}} = \frac{g_2}{R_{b1}} = \frac{\sqrt{R_{o1}^2 - R_{b1}^2} - R_1 \sin \alpha}{R_{b1}} \quad (2.26)$$

Pela geometria das engrenagens, algumas relações entre os raios, o número de dentes e o módulo serão mostrados. O método mais comum de proporção construtiva é o então chamado proporção modular e este diz que:

$$\begin{cases} p = \pi m \\ h_a = m \\ h_f = 1,25 m \end{cases} \quad (2.27)$$

Onde  $m$  é o módulo da engrenagem de dentes retos e  $\pi = 3,1416$ .

Na Figura 7, é mostrada a característica de um perfil de engrenagem. O  $p$  é o passo do círculo primitivo (pitch),  $h_a$  é chamada de addendum e  $h_f$  é chamado de dedendum.

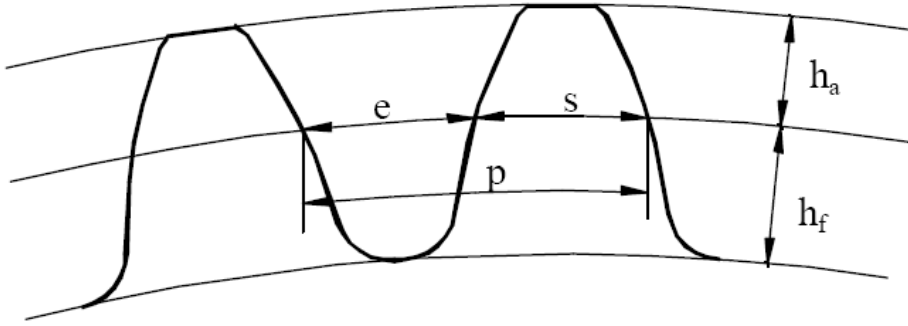


Figura 7 – Características de um perfil de dente

O comprimento do círculo primitivo pode ser expresso em duas maneiras diversas, dependendo do raio primitivo e de acordo com o passo. Introduzindo o número de dentes  $Z$  da roda, o comprimento será igual ao produto do passo e do número de dentes. Então é possível chegar à seguinte conclusão:

$$pZ = 2\pi R$$

Arrumando a equação anterior, o valor do módulo resulta:

$$\left\{ m = \frac{p}{\pi} = \frac{2R}{Z} \right. \quad (2.28)$$

Através do módulo existe uma proporcionalidade entre o raio primitivo e o número de dentes das engrenagens.

Se duas engrenagens se juntam, elas devem possuir o mesmo valor de passo  $p$ , para conseguir unir os vãos de uma com o dente da outra, e assim elas devem ter o mesmo módulo.

Pela teoria, existem algumas relações entre o módulo e o número de dentes com os raios do perfil de engrenagem. Aplicando para as duas rodas estudadas acima (Figura 6), essas relações são:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 = \frac{m Z_1}{2} \\ R_2 = \frac{m Z_2}{2} \\ R_{b1} = R_1 \cos\alpha = \frac{m Z_1 \cos\alpha}{2} \\ R_{b2} = R_2 \cos\alpha = \frac{m Z_2 \cos\alpha}{2} \\ R_{o1} = R_1 + h_a = m \left( 1 + \frac{Z_1}{2} \right) \\ R_{o2} = R_2 + h_a = m \left( 1 + \frac{Z_2}{2} \right) \end{array} \right. \quad (2.29)$$

Substituindo as equações (2.29) dentro das (2.25) e (2.26), e depois dentro da (2.23), o resultado será uma equação de eficiência que depende basicamente do coeficiente de atrito, número de dentes das rodas, módulo e ângulo de pressão. Não existe a necessidade de escrever essa equação, pois é muito grande e trabalhosa. Além disso, um algoritmo computacional será realizado para calcular esse rendimento.

Essa eficiência representada na equação (2.23) ou (2.24) é chamada de direta, considerando roda 1 motriz e roda 2 movida.

Quando se invertem os papéis, isto é, a engrenagem 2 passa a ser a motriz, a fórmula de eficiência muda (basicamente os valores dos arcos de acesso e recesso) e agora é chamada de inversa. As novas equações para os arcos são:

$$\beta_a = \frac{\sqrt{R_{o1}^2 - R_{b1}^2} - R_1 \sin\alpha}{R_{b2}} \quad (2.30)$$

$$\beta_r = \frac{\sqrt{R_{o2}^2 - R_{b2}^2} - R_2 \sin\alpha}{R_{b2}} \quad (2.31)$$

Do mesmo modo, para encontrar a expressão de eficiência é necessário fazer a substituição da (2.29) nas equações acima e depois colocá-las na equação de rendimento. Obviamente, a relação de transmissão também se inverte,  $i = \frac{Z_1}{Z_2}$ .

### 2.2.2 Equação de Merritt

Como mencionado anteriormente, em condições de fricção, a posição do ponto de  $p_e$ , onde a linha da ação cruza a linha de centro  $O_1O_2$ , é diferente da posição do ponto primitivo  $p$  (ver Fig.1). Tendo em conta a distância entre o centro do círculo base e  $p_e$ , Merritt [4] apresentou a relação entre o torque motor  $C_1$  e o torque movido  $C_2$  como:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{\overline{O_2 p_e}}{\overline{O_1 p_e}} \quad (2.32)$$

Já que a relação de transmissão  $i$  é dada pela razão entre os raios primitivos (distância do “pitch point” até o centro da engrenagem), e considerando  $O_1$  como o centro da roda motora, a eficiência instantânea é obtida como:

$$\eta = \frac{C_2}{C_1} \left| \frac{\omega_2}{\omega_1} \right| = \frac{C_2}{C_1} \frac{1}{i} = \frac{\overline{O_2 p_e} \overline{O_1 p}}{\overline{O_1 p_e} \overline{O_2 p}} \quad (2.33)$$

Esta equação acima representa a relação entre o rendimento mecânico e o deslocamento virtual do ponto primitivo. Esta foi usada antes para calcular a expressão do deslocamento, equações (1.11), (1.14), (1.19) e (1.22).

Merritt considerou o cálculo do trabalho de entrada aplicado no dente como o produto da força normal e o deslocamento ao longo da linha de ação sendo uma aproximação. Neste método, ele calculou o trabalho dissipado baseado na força normal, na quantia de escorregamento das superfícies dos dentes e no coeficiente de atrito. Então, baseando-se no contato mostrado na Figura 6, ele chegou à seguinte expressão:

$$\eta = 1 - \frac{1}{2 \cos\alpha} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{(\mu_1 g_1^2 + \mu_2 g_2^2)}{g_2 + g_1} \quad (2.34)$$

Onde  $\mu_1$  e  $\mu_2$  são os coeficientes de atrito médios da região  $g_1$  e  $g_2$ , respectivamente.

A equação (2.34) representa o caso quando existem dois coeficientes de atrito diferentes para acesso e recesso. Mas, considerando constante para ambos ( $\mu = \mu_1 = \mu_2$ ), a expressão fica:

$$\eta = 1 - \frac{\mu}{2 \cos \alpha} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{(g_1^2 + g_2^2)}{g_2 + g_1} \quad (2.35)$$

Reorganizando essas expressões representadas acima, elas se tornam equivalentes às equações de Buckingham, pois  $R_{b1} = R_1 \cos \alpha$  e  $g_1 = R_{b1} \beta_a$ , o mesmo vale para a roda 2. Todos os termos da equação são obtidos geometricamente pela Figura 6. A única exceção é o coeficiente de atrito que depende da velocidade de escorregamento (ver par. 2.4), mas será considerado constante para a região  $g_1$  e  $g_2$ . Então, a eficiências direta e inversa terão valores iguais, considerando as mesmas engrenagens operando na mesma velocidade periférica.

Embora as duas equações sejam da mesma forma, uma diferença entre a descrição de Buckingham e Merritt reflete no enunciado de Buckingham que diz que “a eficiência pode ser escrita de uma forma mais simples e exata considerando o trabalho entrante igual a  $F_n R_{b1} \omega$ ”. Deste enunciado percebe-se que Buckingham calculou o trabalho de entrada como o produto da força normal e o deslocamento ao longo da linha de ação. Por outro lado, Merritt calculou a mesma potência entrante que Buckingham depois de considerar o comportamento da fricção.

### 2.2.3 Equação de Yada

Baseado nos modelos de Buckingham e Merritt, Yada [1] propôs um modelo analítico preciso. Em seus estudos, ele deduziu expressões da razão dos momentos para a região de acesso e recesso. Mas, ao invés de calcular essa razão considerando o deslocamento do ponto de primitivo de contato (pitch point) ao longo da linha central  $O_1O_2$ , Yada calculou a proporção observando os raios de base dos círculos. A Figura 8 mostra a variação da razão dos momentos e então, o rendimento mecânico instantâneo no ponto de contato.

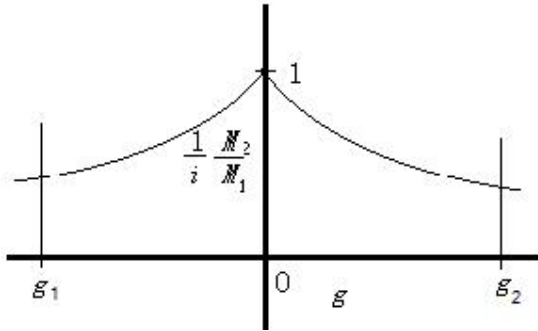


Figura 8 – Eficiência mecânica X segmento de contato

Depois, ele calcula a eficiência média da inteira região de contato, considerando diferentes coeficientes de atrito para acesso e recesso ( $\mu_a \neq \mu_r$ ):

$$\eta = \frac{\left(1 + \frac{R_{b1}}{R_{b2}}\right)}{(g_2 + g_1)} \left\{ \frac{R_{b1}}{A} \ln \left(1 + A \frac{g_1}{R_{b1}}\right) + \frac{R_{b1}}{B} \ln \left(1 + B \frac{g_2}{R_{b1}}\right) \right\} - \frac{R_{b1}}{R_{b2}} \quad (2.36)$$

Expandindo logaritmicamente os termos da equação (2.36) em séries de potência e ignorando séries maiores que a terceira potência, ele encontrou a seguinte equação:

$$\eta = 1 - \frac{1}{2 R_{b1}} \left(1 + \frac{1}{i}\right) \frac{(\mu_a g_1^2 + \mu_r g_2^2) + (\mu_a \mu_r \tan \alpha)(g_1^2 - g_2^2)}{(g_2 + g_1)(1 + \tan \alpha (\mu_r - \mu_a) - \mu_a \mu_r \tan^2 \alpha)} \quad (2.37)$$

Agora, considerando o mesmo coeficiente de atrito para o inteiro segmento de contato ( $\mu = \mu_a = \mu_r$ ), isto resulta:

$$\eta = 1 - \frac{1}{2 R_{b1}} \left(1 + \frac{1}{i}\right) \frac{\mu(g_1^2 + g_2^2) + (\mu^2 \tan \alpha)(g_1^2 - g_2^2)}{(g_2 + g_1)(1 - \mu^2 \tan^2 \alpha)} \quad (2.38)$$

Além disso, ignorando os termos  $(\mu^2 \tan \alpha)(g_1^2 - g_2^2)$  do numerador e  $\mu^2 \tan^2 \alpha$  do denominador, desde que esses termos sejam suficientemente desprezíveis, a equação se torna igual àquela de Buckingham ou Merritt.

#### 2.2.4 Confronto dos modelos

Na Figura 9, é mostrado um exemplo de contraste entre a formulação de Yada e aquela de Buckingham-Merritt para o rendimento mecânico. Foi realizada uma simulação considerando engrenagens de dentes externos e retos, sendo a roda motora com  $Z_1 = 24$  e a roda movida com  $Z_2 = 64$ . O ângulo de pressão foi variado de  $10^\circ$  a  $80^\circ$ , o módulo considerado igual a  $m = 5 \text{ mm}$  e a velocidade angular de rotação suposta constante  $n_1 = 1000 \text{ rpm}$ .

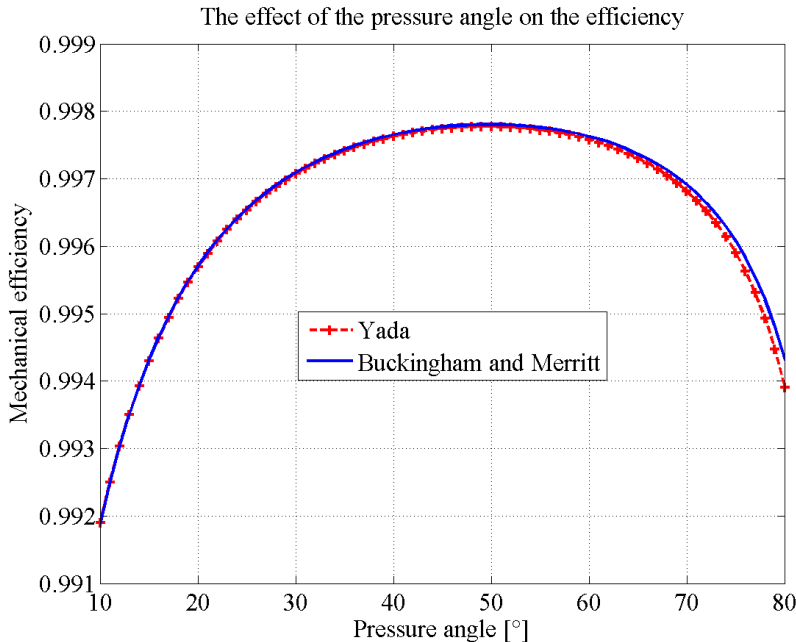


Figura 9 – Yada X Buckingham-Merritt

Da Figura 9 acima, pode-se concluir que para pequenos ângulos de pressão as curvas são praticamente as mesmas. Quando se aumenta o valor do ângulo, a diferença entre as curvas também cresce, mas ainda continua desprezível. Assim, pode-se usar a formulação de Buckingham-Merritt, que é a mais simples.



No próximo parágrafo (2.3) serão estudadas as engrenagens com dentadura interna e engrenagens helicoidais.

## 2.3 Modelo de Buckingham

### 2.3.1 Eficiência mecânica de engrenagens com dentadura interna e dentes retos

A Figura 10 mostra as relações geométricas do contato entre engrenagens internas, um pinhão (centro em  $O_1$ ) e uma coroa (centro em  $O_2$ ). Neste caso é representando o pinhão como sendo a engrenagem motora. Os símbolos são nomeados como:

$Z_1, Z_2$  = número de dentes do pinhão e da engrenagem interna (coroa), respectively.

$R_1, R_2$  = raio primitivo do pinhão e da coroa, respectively.

$R_{b1}, R_{b2}$  = raio de base do pinhão e da coroa, respectively.

$R_i$  = raio interno da coroa

$R_{o1}$  = raio externo do pinhão.

$\bar{m}n = g_1 + g_2 =$  segmento de contato.

$\alpha$  = ângulo de pressão.

$\beta_a$  = arco de acesso do membro motor.

$\beta_r$  = arco de recesso do membro motor.

$m$  = módulo

$i$  = relação de transmissão

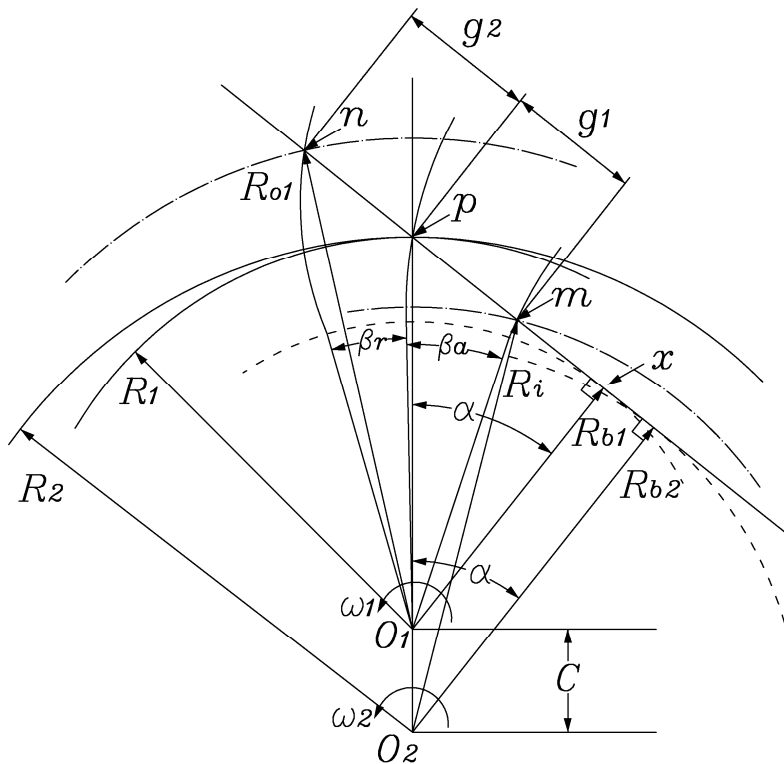


Figura 10 – Relações geométricas entre pinhão e coroa

As equações anteriores calculadas são válidas para o contato entre engrenagens de dente reto externas. De acordo com Buckingham, a força normal e o torque resistivo devido a fricção

ajudam ou se opõem a rotação da engrenagem da mesma maneira que ocorre no caso de engrenagens externas. Então, ele deduziu a formula de rendimento para engrenagens internas, considerando diferentes coeficientes de atrito para acesso e recesso:

$$\eta = 1 - \left( \frac{1-\frac{1}{i}}{\beta_a + \beta_r} \right) \left( \frac{\mu_a}{2} \beta_a^2 + \frac{\mu_r}{2} \beta_r^2 \right) \quad (2.39)$$

Do mesmo modo, considerando o atrito constante, esta resulta:

$$\eta = 1 - \left( \frac{1-\frac{1}{i}}{\beta_a + \beta_r} \right) \frac{\mu}{2} (\beta_a^2 + \beta_r^2) \quad (2.40)$$

Essas fórmulas relatam o caso em que o pinhão (roda 1) é motor. Mas agora, as algumas relações geométricas são diferentes, por exemplo:

$$\beta_a = \frac{g_1}{R_{b1}} = \frac{R_2 \sin \alpha - \sqrt{R_i^2 - R_{b2}^2}}{R_{b1}} \quad (2.41)$$

$$\beta_r = \frac{g_2}{R_{b1}} = \frac{\sqrt{R_{o1}^2 - R_{b1}^2} - R_1 \sin \alpha}{R_{b1}} \quad (2.42)$$

De outra forma, quando a coroa passa a ser a engrenagem motora, a relação de transmissão se inverte  $i = \frac{Z_1}{Z_2}$ , e a nova expressão se torna igual a:

$$\eta = 1 - \left( \frac{\frac{1}{i}-1}{\beta_a + \beta_r} \right) \left( \frac{\mu_a}{2} \beta_a^2 + \frac{\mu_r}{2} \beta_r^2 \right) \quad (2.43)$$

$$\eta = 1 - \left( \frac{\frac{1}{i}-1}{\beta_a + \beta_r} \right) \frac{\mu}{2} (\beta_a^2 + \beta_r^2) \quad (2.44)$$

E os arcos de acesso e recesso também mudam:

$$\beta_a = \frac{g_2}{R_{b2}} = \frac{\sqrt{R_{o1}^2 - R_{b1}^2} - R_1 \sin \alpha}{R_{b2}} \quad (2.45)$$

$$\beta_r = \frac{g_1}{R_{b2}} = \frac{R_2 \sin \alpha - \sqrt{R_i^2 - R_{b2}^2}}{R_{b2}} \quad (2.46)$$

Outra maneira de escrever essa equação é considerando o segmento de contato ao invés dos arcos para a região de acesso e recesso. Assim, a expressão resulta:

$$\eta = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_{b1}} - \frac{1}{R_{b2}} \right) \frac{(\mu_1 g_1^2 + \mu_2 g_2^2)}{g_2 + g_1} \quad (2.47)$$

O raio interno da coroa e o raio externo do pinhão são mantidos nas proporções convencionais, então, as seguintes relações são válidas:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 = \frac{m Z_1}{2} \\ R_2 = \frac{m Z_2}{2} \\ R_{b1} = R_1 \cdot \cos\alpha = \frac{m Z_1 \cos\alpha}{2} \\ R_{b2} = R_2 \cdot \cos\alpha = \frac{m Z_2 \cos\alpha}{2} \\ R_{o1} = R_1 + m = m \left(1 + \frac{Z_1}{2}\right) \\ R_i = R_2 - m = m \left(\frac{Z_2}{2} - 1\right) \end{array} \right. \quad (2.48)$$

Mas de acordo com Buckingham, se o perfil da engrenagem interna se estende abaixo do ponto de tangência do segmento de contato com o círculo de base, ocorre interferência. Para evitar isso, o raio interno da coroa deve ser grande o suficiente para ficar fora deste ponto. A seguinte expressão representa o mínimo valor do raio interno para evitar a interferência:

$$R_{ix} = \sqrt{R_{b2}^2 + (C \cdot \sin\alpha)^2} \quad (2.49)$$

Da mesma maneira para as engrenagens externas, considerando a mesma velocidade periférica, a eficiência direta (quando o pinhão é motor) e inversa (quando a coroa é motora) terão o mesmo valor e são expressas pela equação (2.47).

### 2.3.2 Eficiência mecânica de engrenagens helicoidais

As equações (2.23) ou (2.24) se aplicam também para engrenagens helicoidais, exceto que a influência do ângulo de hélice deve ser considerada. A Figura 11 mostra um exemplo de configuração de uma cremalheira helicoidal. Então, serão nomeados alguns parâmetros:

$\alpha$  = ângulo de pressão no plano de rotação

$\alpha_n$  = ângulo de pressão normal

$\psi$  = ângulo de hélice no ponto primitivo

$m$  = módulo frontal

$m_n$  = módulo normal

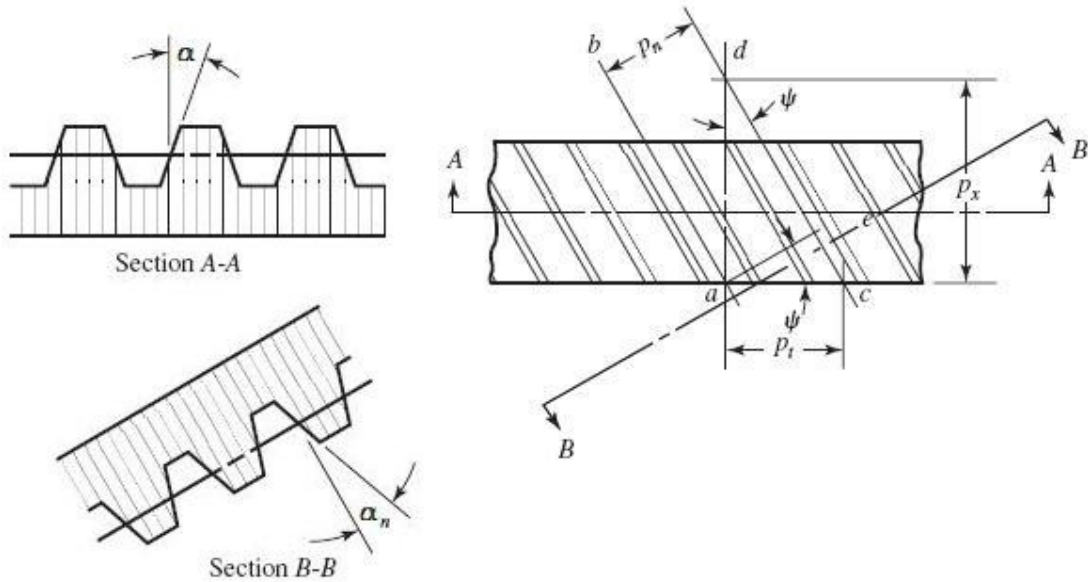


Figura 11 – Configuração de engrenagem helicoidal

A seguinte equação mostra a relação entre esses ângulos, que é:

$$\tan \alpha_n = \tan \alpha \cdot \cos \psi \quad (2.50)$$

De acordo com Buckingham, sabendo esses ângulos a eficiência pode ser estimada como:

$$\eta = 1 - \left( \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_n \cos \psi} \right) \left( \frac{1 + \frac{1}{i}}{\beta_a + \beta_r} \right) \left( \frac{\mu_a}{2} \beta_a^2 + \frac{\mu_r}{2} \beta_r^2 \right) \quad (2.51)$$

A equação reportada acima é usada quando os coeficientes de atrito são diferentes. Quando esses coeficientes são iguais, a expressão do rendimento resulta:

$$\eta = 1 - \left( \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_n \cos \psi} \right) \left( \frac{1 + \frac{1}{i}}{\beta_a + \beta_r} \right) \frac{\mu}{2} (\beta_a^2 + \beta_r^2) \quad (2.52)$$

É possível notar que as equações (2.51) e (2.52) são idênticas às (2.23) e (2.24) respectivamente, quando o ângulo de hélice é igual a zero, isto é, a engrenagem helicoidal se torna uma engrenagem de dente reto.

As equações para os arcos de acesso e recesso são os mesmos para as engrenagens de dentes retos, mas deve ser usado o ângulo de pressão no plano de rotação. Considerando a proporção modular do dente da engrenagem, existem as seguintes relações:

$$\begin{aligned} h_a &= m_n = m \cos \psi \\ h_f &= 1,25 m_n = 1,25 m \cos \psi \end{aligned} \quad (2.53)$$

Pela teoria, existem algumas relações entre o módulo e o número de dentes para os raios internos, externos e primitivos. Aplicando para as duas rodas estudadas anteriormente (Fig. 6), mas agora considerando o ângulo de hélice, as relações geométricas são:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 = \frac{m Z_1}{2} \\ R_2 = \frac{m Z_2}{2} \\ R_{b1} = R_1 \cos\alpha = \frac{m Z_1 \cos\alpha}{2} \\ R_{b2} = R_2 \cos\alpha = \frac{m Z_2 \cos\alpha}{2} \\ R_{o1} = R_1 + h_a = m \left( \frac{Z_1}{2} + \cos\psi \right) \\ R_{o2} = R_2 + h_a = m \left( \frac{Z_2}{2} + \cos\psi \right) \end{array} \right. \quad (2.54)$$

Somente para um melhor entendimento, um sumário sobre as fórmulas de rendimento mecânico das engrenagens é mostrado nas próximas tabelas.

Tabela 2 – Rendimento para engrenagens externas de dentes retos

	Spur gears
Buckingham and Merritt	$\eta = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_{b1}} + \frac{1}{R_{b2}} \right) \frac{(\mu_a g_1^2 + \mu_r g_2^2)}{g_2 + g_1}$
Yada	$\eta = \frac{\left(1 + \frac{R_{b1}}{R_{b2}}\right)}{(g_2 + g_1)} \left\{ \frac{R_{b1}}{A} \ln \left(1 + A \frac{g_1}{R_{b1}}\right) + \frac{R_{b1}}{B} \ln \left(1 + B \frac{g_2}{R_{b1}}\right) \right\} - \frac{R_{b1}}{R_{b2}}$

Tabela 3 – Rendimento para engrenagens internas

	Internal gears
Buckingham	$\eta = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_{b1}} - \frac{1}{R_{b2}} \right) \frac{(\mu_1 g_1^2 + \mu_2 g_2^2)}{g_2 + g_1}$

Tabela 4 – Rendimento para engrenagens helicoidais

	Helical gears
Buckingham	$\eta = 1 - \left( \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_n \cos\psi} \right) \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_{b1}} + \frac{1}{R_{b2}} \right) \frac{(\mu_a g_1^2 + \mu_r g_2^2)}{g_2 + g_1}$

## 2.4 Coeficiente de atrito

### 2.4.1 Modelo de Buckingham

Na verdade, o coeficiente de atrito não é constante, mas varia com diferentes cargas, velocidade, lubrificantes, e do material da engrenagem. Na literatura [3], testes com “spur gears” indicam que a forma geral das curvas é representada pelos coeficientes de atrito plotados com a velocidade de escorregamento. Estes gráficos mostram que, em baixas velocidades, os valores de atrito são altos, reduzindo rapidamente para um valor mínimo com o aumento da velocidade, e então aumentando outra vez com o crescimento da velocidade.

A Figura 12 mostra a cinemática de duas engrenagens externas para melhor explicar o significado das velocidades presentes no contato dos dentes. Por exemplo, considerando o ponto de contato P no segmento de contato, existem as velocidades mostradas na Figura 12.  $V_1$  e  $V_2$  são as velocidades totais do ponto P devido a rotação das engrenagens 1 e 2, respectivamente. Essas velocidades podem ser divididas em dois componentes: componente normal e tangencial ao segmento de contato. Quando existe um contato sem interferência, a componente normal é a mesma para ambas, mas a tangencial geralmente são diferentes ( $V_{t1} \neq V_{t2}$ ). Esta diferença de velocidades entre os dentes é chamada de velocidade de escorregamento, que entra no cálculo do coeficiente de atrito.

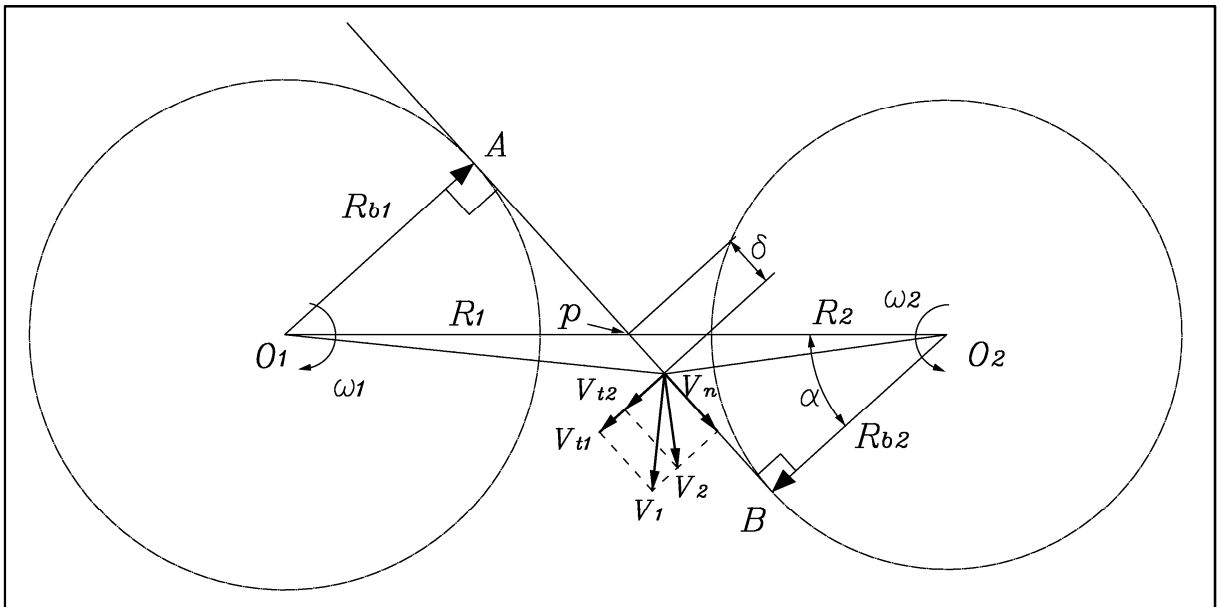


Figura 12 – Velocidades presentes no contato de engrenagens

A cinemática do mecanismo representado na Figura 12, diz respeito apenas às velocidades tangenciais:

$$V_{t1} = \omega_1(R_1 \sin\alpha + \delta) \quad (2.55)$$

$$V_{t2} = \omega_2(R_2 \sin\alpha - \delta) \quad (2.56)$$

$$V_s = V_{t1} - V_{t2} = \omega_1(R_1 \sin\alpha + \delta) - \omega_2(R_2 \sin\alpha - \delta) \quad (2.57)$$

Referindo a linha de ação AB do sistema representado na Figura 6, a Figura 13 apresenta o comportamento da velocidade de escorregamento do dentes no segmento de contato, que consiste no escorregamento em uma direção durante o acesso, reduzindo até zero no ponto primitivo onde a direção de escorregamento muda, e cresce de novo conforme o ponto de contato percorre a região de recesso. Esta variação da velocidade de escorregamento é uniforme ao longo do caminho de contato.

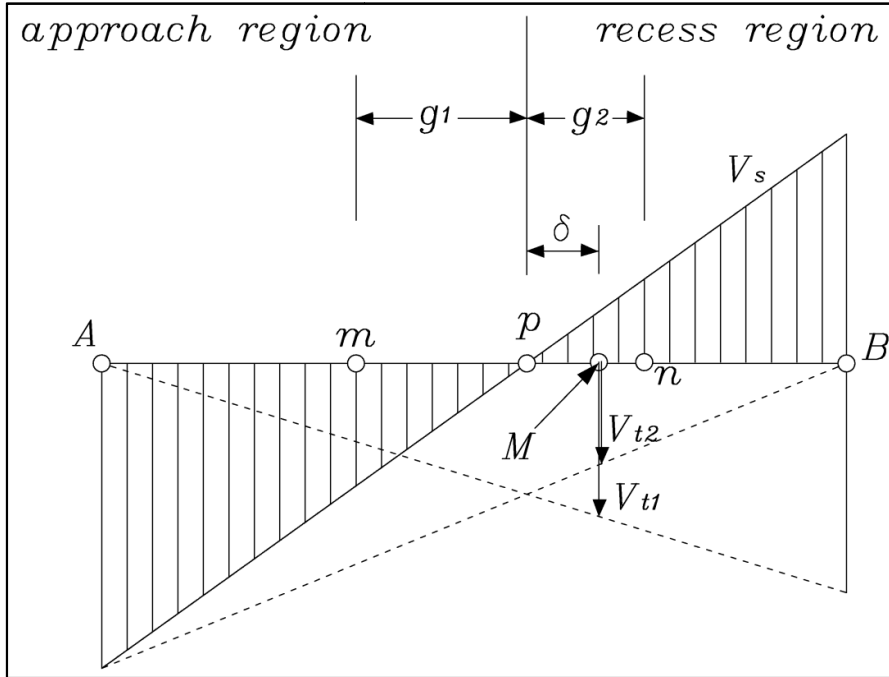


Figura 13 – Velocidade de escorregamento no segmento de contato

Para encontrar o valor máximo da velocidade de escorregamento de cada parte é suficiente substituir na equação (2.57) os valores  $\delta = g_1$  e  $\delta = g_2$ . Buckingham, no seu método, calculou os valores de velocidade máxima para cada parte (acesso e recesso) e considerou a valores médios das velocidades. A equação (2.57) pode ser mais simplificada:

$$V_s = \omega_1 \delta + \omega_2 \delta = \omega_1 \delta + \left( \frac{\omega_1 R_1}{R_2} \right) \delta \quad (2.58)$$

Considerando que a roda 1 seja a motora, existem algumas relações:

$$V = \omega_1 R_1 = \frac{2\pi R_1 n}{60} \quad (2.59)$$

Trazendo as equações (2.58) e (2.59) juntas, a expressão para a velocidade de escorregamento resulta:

$$V_s = V \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \delta \quad (2.60)$$

A equação (2.60) mostra que essa velocidade tem um comportamento linear, como representado na Figura 13.

O máximo valor das velocidades de escorregamento para a região de acesso e recesso é:

$$V_{sa,max} = V \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) g_1 \quad (2.61)$$

$$V_{sr,max} = V \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) g_2 \quad (2.62)$$

Então, sabendo que  $g_1 = R_{b1}\beta_a$  e  $g_2 = R_{b1}\beta_r$ , as velocidades médias de escorregamento para o acesso e recesso são:

$$V_{sa} = \frac{V_{sa,max}}{2} = \left( \frac{V}{2} \right) \left[ 1 + \frac{Z_1}{Z_2} \right] \beta_a \cos\alpha \quad (2.63)$$

$$V_{sr} = \frac{V_{sr,max}}{2} = \left( \frac{V}{2} \right) \left[ 1 + \frac{Z_1}{Z_2} \right] \beta_r \cos\alpha \quad (2.64)$$

onde,

$V_{sr}$  = velocidade de escorregamento média do recesso

$V_{sa}$  = velocidade de escorregamento média do acesso

$V$  = velocidade periférica

$n$  = velocidade angular da roda motora

E todos os outros símbolos são os mesmos mostrados anteriormente.

Após vários testes de performance de engrenagens, foi possível criar a seguinte equação empírica, que representa o valor do coeficiente de atrito em função da velocidade de escorregamento. Esta é:

$$\mu = \frac{a}{e^{bV_s}} + c \sqrt{V_s} \quad (2.65)$$

onde,

$\mu$  = coeficiente de atrito médio

$a = 0.050$

$b = 24.606$

$c = 0.0281$

$V_s$  = average sliding velocity, [m/s]

Alguns testes experimentais realizados para estabelecer valores de fricção para acesso e recesso mostraram que o atrito de acesso aparece ser quase o dobro daquele de recesso (ver Buckingham [3], pag. 405). Por esta razão, o coeficiente de atrito médio para ambas as regiões é:

$$\mu_a = \frac{4\mu}{3} = \frac{4}{3} \left( \frac{a}{e^{bV_{sa}}} + c \sqrt{V_{sa}} \right) \quad (2.66)$$

$$\mu_r = \frac{2\mu}{3} = \frac{2}{3} \left( \frac{a}{e^{bV_{sr}}} + c \sqrt{V_{sr}} \right) \quad (2.67)$$

A Figura 14 mostra o gráfico desses coeficientes em função da velocidade de escorregamento.



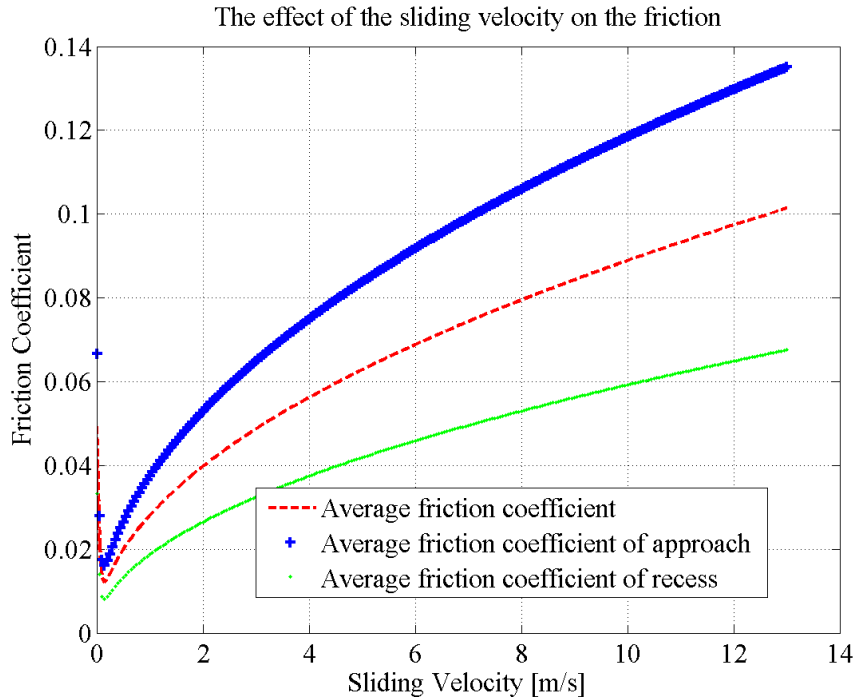


Figura 14 – Curvas do coeficiente de atrito nas engrenagens (modelo de Buckingham)

Os valores de  $\mu_a$  e  $\mu_r$  plotados na figura acima são para engrenagens de material leve com desenho convencional. Estes serão usados quando o desenho dá uma preponderância de recesso ou acesso. Nestes casos, a velocidade média de escorregamento será diferente para o acesso e recesso.

Mas em transmissão de automóvel as engrenagens não são leves, pelo contrário, eles são feitos com aços duros geralmente, para suportar altas cargas. Por causa disso, o valor do coeficiente de atrito de recesso  $\mu_r$  será usado para todo o segment de contato.

O procedimento experimental usado para medir o comportamento do atrito é o seguinte: pega-se um par de engrenagens com suas características geométricas conhecidas, como número de dentes  $Z_1$  e  $Z_2$ , o arco de aproximação do acesso e recesso ( $\beta_a$  e  $\beta_r$ ). O procedimento é variar a velocidade periférica e medir os valores da carga de entrada e de saída. Com esses dois últimos termos é possível calcular a eficiência, definida pela razão deles. Então, conhecendo o valor do rendimento e substituindo na equação (2.24), por exemplo, o coeficiente de atrito pode ser facilmente encontrado. Agora, repetindo esse procedimento para diferentes velocidades periféricas e colocando os resultados em um gráfico, pode ser obtida a curva de comportamento de atrito em função da velocidade, como mostrado antes (Fig. 14).

Um exemplo de cálculo (Buckingham [3], pag. 403) é demonstrado a seguir, supondo os seguintes valores:

$$\beta_a = 0.3691 \text{ radian} \quad \beta_r = 0.3045 \text{ radian} \quad N_1 = 18 \quad N_2 = 48$$

Com a velocidade periférica igual a  $V = 25 \text{ ft/s} = 0.127 \text{ m/s}$ , foram medidos os valores de carga de entrada e saída:

$$\text{Output load} = 1,092 \text{ lb} \quad \text{Input load} = 1,099 \text{ lb}$$

A eficiência é a razão entre esses dois últimos valores, então resulta:

$$\eta = \frac{1,092}{1,099} = 0.9936$$

Usando a equação (2.24) para achar o valor de  $\mu$ , então:

$$\mu = \frac{2(1 - 0.9936)(\beta_a + \beta_r)}{(\beta_a^2 + \beta_r^2) \left(1 + \frac{N_1}{N_2}\right)} = 0.0272$$

Assim, desenhando o comportamento do coeficiente de atrito, é possível estimar a fórmula (2.65) para engrenagens externas de dentes retos.

Igualmente, com respeito às engrenagens internas, as velocidades de escorregamento médias para acesso e recesso são expressas como:

$$V_{sa} = \left(\frac{V}{2}\right) \left[1 - \frac{z_1}{z_2}\right] \beta_a \cos\alpha \quad (2.68)$$

$$V_{sr} = \left(\frac{V}{2}\right) \left[1 - \frac{z_1}{z_2}\right] \beta_r \cos\alpha \quad (2.69)$$

Mais uma vez referindo-se a Figura 10, estas equações consideram o caso quando o pinhão (roda 1) é motor. Por outro lado, quando a coroa se torna a engrenagem motora, as expressões resultam:

$$V_{sa} = \left(\frac{V}{2}\right) \left[\frac{z_2}{z_1} - 1\right] \beta_a \cos\alpha \quad (2.70)$$

$$V_{sr} = \left(\frac{V}{2}\right) \left[\frac{z_2}{z_1} - 1\right] \beta_r \cos\alpha \quad (2.71)$$

Sobre as engrenagens helicoidais, a velocidade de escorregamento para o acesso e para o recesso pode ser expressa do mesmo modo para engrenagens externas de dentes retos. A única diferença a ser observada é que o ângulo de pressão na fórmula deve ser o ângulo de pressão no plano de rotação.

#### 2.4.2 Modelo de Niemann

De acordo com Niemann e Winter ([12],[13]), o coeficiente de atrito, além de depender das velocidades de escorregamento e rotação, depende também da carga aplicada, da largura do dente, da rugosidade do material, da viscosidade e especialmente da estrutura química do óleo lubrificante. Eles consideraram a perda por atrito em condições de baixa velocidade, onde esta quota é importante. Para altas velocidades, as quotas do rolamento, elementos de vedação e perda por “windage” se tornam mais importantes.

Após vários testes experimentais com óleos minerais, eles encontraram a seguinte equação para estimar o coeficiente médio de atrito no inteiro segmento de contato, que é:

$$\mu_m = 0,045 \left( \frac{K_A F_{bt}/b}{V_{cm} \rho_m} \right)^{0,2} \eta_M^{-0,05} X_R \leq 0,2 \quad (2.72)$$

onde,

$F_{bt}$  = força normal no plano transversal [N]

$b$  = largura do dente [mm]

$K_A$  = fator de aplicação

$V_{cm}$  = velocidade média acumulada no contato [m/s]

$\rho_m$  = raio de curvatura médio na seção normal [mm]

$\eta_M$  = viscosidade dinâmica do óleo lubrificante [m Pa s]

$X_R$  = fator do efeito da rugosidade na superfície do dente

Para simplificar o cálculo, o fator de aplicação  $K_A$  será sempre assumido igual a 1, pois considera uma operação uniforme da máquina (tabela 22.3/3, Page 322, ref. [13]).

O raio médio de curvatura  $\rho_m$  pode ser expresso da seguinte forma:

$$\rho_m = R_1 \sin \alpha \cos \alpha / \left[ \cos \psi \cos \alpha_n \left( 1 + \frac{1}{i} \right) \right] \quad (2.73)$$

onde,

$\alpha$  = ângulo de pressão no plano de rotação

$\alpha_n$  = ângulo de pressão normal

$\psi$  = ângulo de hélice

$R_1$  = raio primitivo da engrenagem motriz

$i$  = gear ratio =  $+\frac{Z_2}{Z_1}$  for external gears or  $i = -\frac{Z_2}{Z_1}$  for internal gears

O fator de rugosidade  $X_R$  considera a rugosidade e o diâmetro primitivo da roda motora, e é definido como:

$$X_R = 3.8(R_a/D_1)^{1/4} \quad (2.74)$$

onde,

$R_a$  = rugosidade média [ $\mu\text{m}$ ]

$D_1$  = diâmetro primitivo da roda motora [mm]

A Figura 15 mostra os tipos de força que atuam no dente durante o contato de engrenamento. A força que importa no coeficiente de atrito é a força normal no plano transversal  $F_{bt}$ . Pela figura, é possível ver geometricamente que essa força é igual a força tangencial ( $W_t$ ) dividida pelo cosseno do ângulo de pressão no plano de rotação ( $\phi_t = \alpha$ ). E já se sabe que a força tangencial pode ser definida in função do torque e do raio primitivo. Então, as equações resultam:

$$F_{bt} = \frac{W_t}{\cos \alpha} \quad \text{e} \quad W_t = \frac{T}{R_1}$$

Então, a fórmula final para  $F_{bt}$  em função do torque é:

$$F_{bt} = \frac{T}{R_1 \cos \alpha} = \frac{T}{R_{b1}} \quad (2.75)$$

Relembrando de novo que  $\alpha$  não é o ângulo de pressão normal, mas sim o ângulo de pressão no plano transversal, que leva em conta o ângulo de hélice.

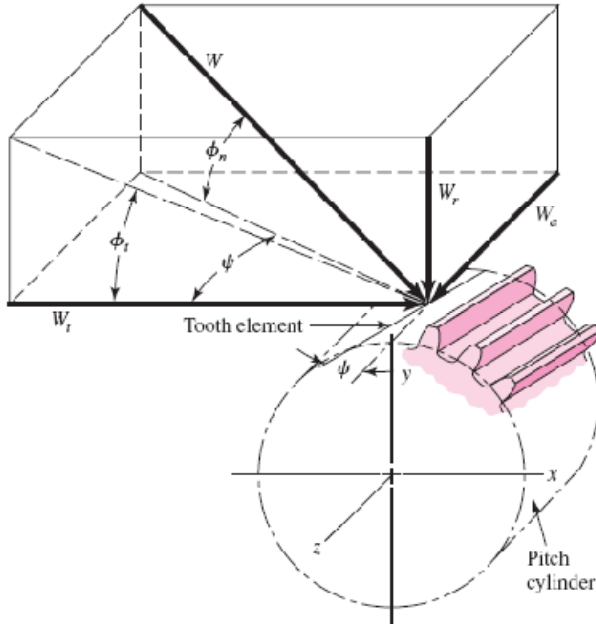


Figura 15 – Forças que atuam no dente de uma engrenagem helicoidal [15]

Na formulação de Buckingham do coeficiente de atrito, ele usa a velocidade de escorregamento, expressa pela equação (2.57), que é a diferença das velocidades tangenciais. No modelo de Niemann, por outro lado, ele considera a velocidade acumulada, que é definida como a soma das velocidades tangenciais. Assim, essa velocidade nos pontos do segmento de contato pode ser expressa como:

$$V_c = V_{t1} + V_{t2} = 2V \sin \alpha + \delta(\omega_1 - \omega_2) \quad (2.76)$$

onde  $V = \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$ .

Quando  $\delta = 0$  (pitch point) a equação (2.76) resulta:  $V_c = 2V \sin \alpha$ .

A Figura 16 representa a modificação da Figura 13, agora considerando o comportamento da velocidade acumulada na linha de ação AB.

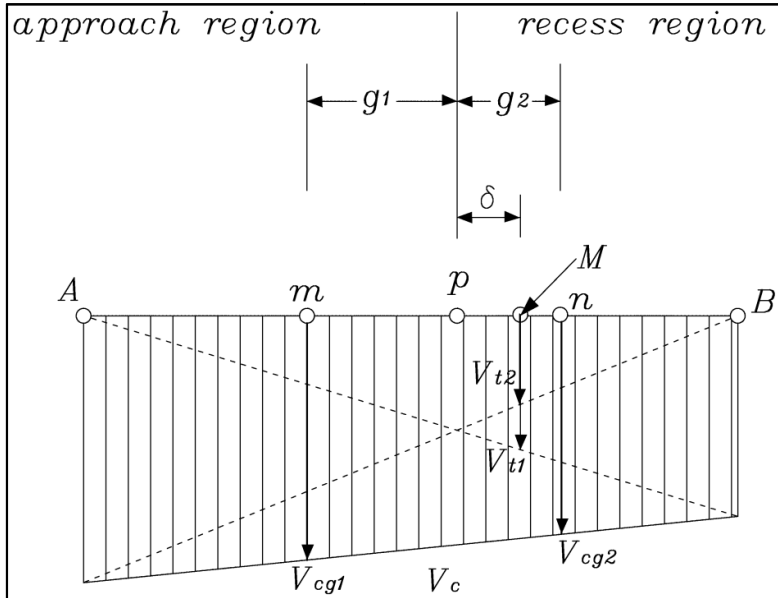


Figura 16 – Velocidade acumulada na linha de ação

Mas, o valor da velocidade que entra na equação da fricção envolve apenas a velocidade média do segmento de contato  $\overline{mn}$ . Então, é necessário calcular a velocidade acumulada no início (ponto m) e no final (ponto n) e depois achar a média aritmética. Estes valores são:

$$V_{cg1} = 2Vsina + g_1(\omega_1 - \omega_2)$$

$$V_{cg2} = 2Vsina + g_2(\omega_1 - \omega_2)$$

Então, a velocidade média acumulada é:

$$V_{cm} = \frac{V_{cg1} + V_{cg2}}{2} = 2Vsina + g_a(\omega_1 - \omega_2) \quad (2.77)$$

Onde  $g_a = \text{entire segment of contact} = g_1 + g_2$ .

É recomendado observar os seguintes valores limites para se usar a equação de atrito:

- Com  $v_t < 1 \text{ m/s}$ , deve ser esperado coeficiente de atrito maior respeito a (2.72),
- Com  $v_t > 50 \text{ m/s}$ , adotar o valor limite  $v_t = 50 \text{ m/s}$ ,
- Com  $F_{bt}/b < 150 \text{ N/mm}$ , inserir o valor limite  $F_{bt}/b = 150 \text{ N/mm}$ .

A principal diferença desta nova expressão analítica com a anterior proposta por Buckingham é o fato de considerar a carga, isto é, a força normal que age no contato dos dentes. Obviamente, quanto maior essa força, maior será o coeficiente de atrito e conseqüentemente maior será perda de potência. A Figura 17 mostra o andamento do coeficiente de fricção variando o torque inicial, mantendo a mesma velocidade de rotação:

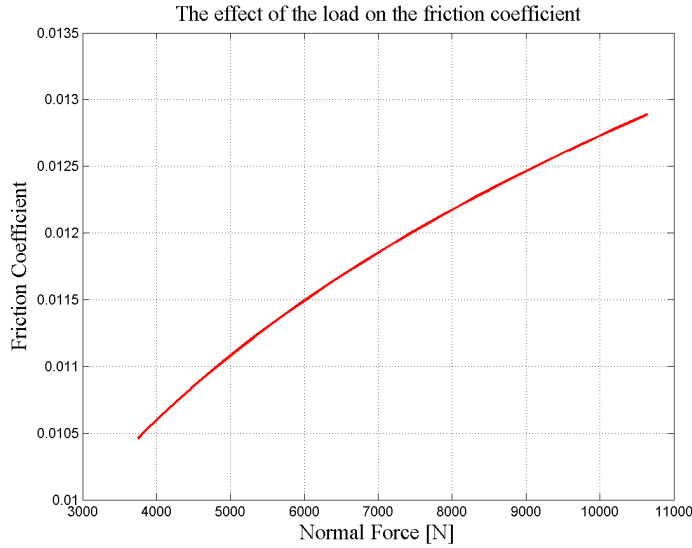


Figura 17 – Andamento do coeficiente de atrito variando-se a força normal

Agora, para entender melhor o comportamento desse coeficiente de atrito, foi considerada a variação de dois fatores (força e velocidade), mantendo os outros parâmetros constantes. A Figura 18 mostra o cálculo da fricção aplicada a uma caixa de cambio manual comercial (M40), considerando a geometria da segunda marcha, por exemplo (ver propriedades geométricas Figura 35). É possível concluir que aumentando a velocidade periférica, o coeficiente de atrito diminui, até um certo valor (quando a velocidade atinge 50 m/s) e então permanece constante para valores de velocidade mais altos. Para baixos valores ( $< 1$  m/s), o atrito tende a crescer bruscamente e a equação (2.72) não responde corretamente nessa região do gráfico. Outra coisa a ser notada é que aumentando o torque da engrenagem motora, a força de contato entre os dentes aumenta e a curva se move para cima, isto é, o coeficiente de atrito se torna maior.

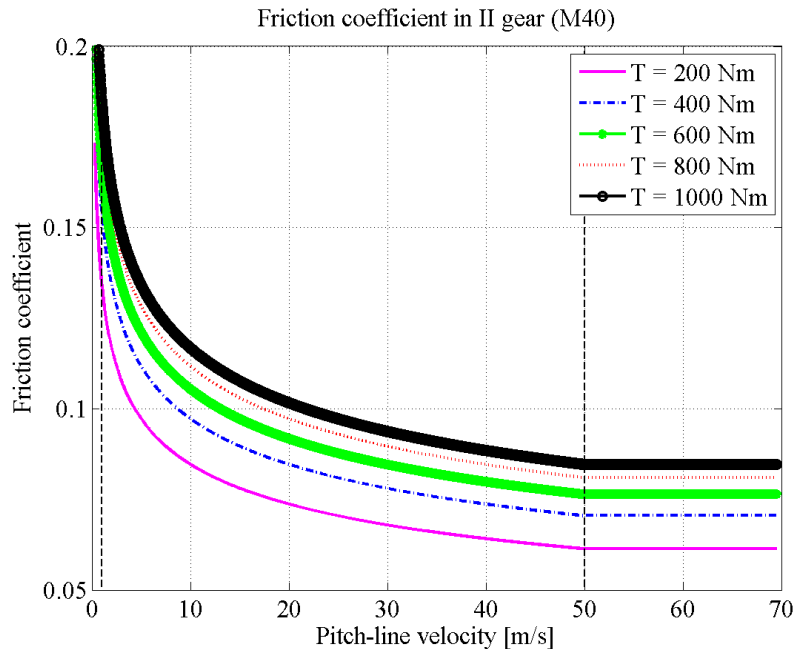


Figura 18 – Comportamento do coeficiente de atrito, considerando a variação do torque e velocidade. Com  $i = 2.35$ ,  $\eta_M = 50 \text{ m Pa s}$ ,  $R_a = 1.5 \mu\text{m}$ ,  $K_A = 1$  e  $b = 22 \text{ mm}$ . Além disso, a rugosidade é também um importante contributo no calculo da fricção. A Figura 19 representa o andamento do coeficiente de atrito variando a rugosidade média do material, para três diferentes marchas de um cambio manual comercial M40 (ver Fig. 35), mantendo outros parâmetros constantes. O efeito da rugosidade tem maior efeito quanto maior for a relação de transmissão, por exemplo, para a primeira marcha (curva vermelha).

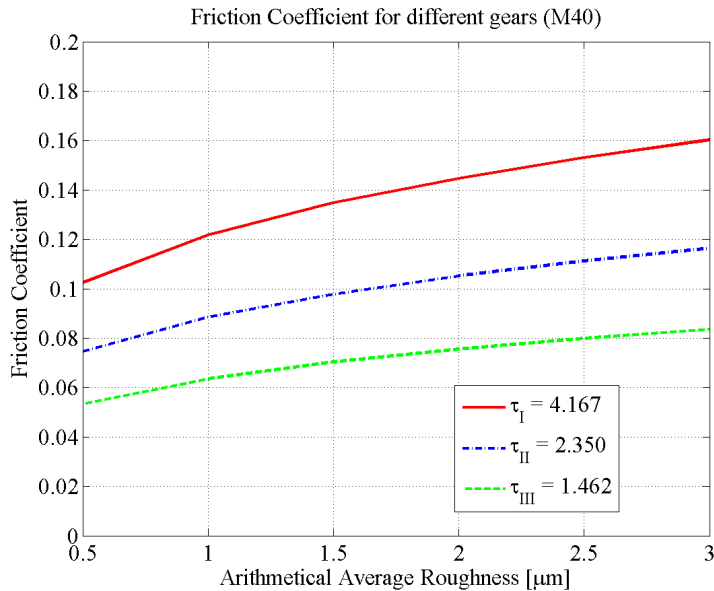


Figura 19 – Efeito da rugosidade no coeficiente de atrito. Com  $\eta_M = 50 \text{ m Pa s}$ ,  $T = 400 \text{ Nm}$ ,  $K_A = 1$  e  $n_1 = 3000 \text{ rpm}$ .

A viscosidade dinâmica do lubrificante, ao contrário, tem um influência pequena no coeficiente de atrito e no rendimento. Na Figura 20, foram considerados os mesmo três exemplos feitos antes na Figura 19. É possível perceber que a eficiência não varia muito quando a viscosidade muda, por exemplo, de 10 até 100 [m Pa s], permanecendo basicamente constante para cada uma das marchas.

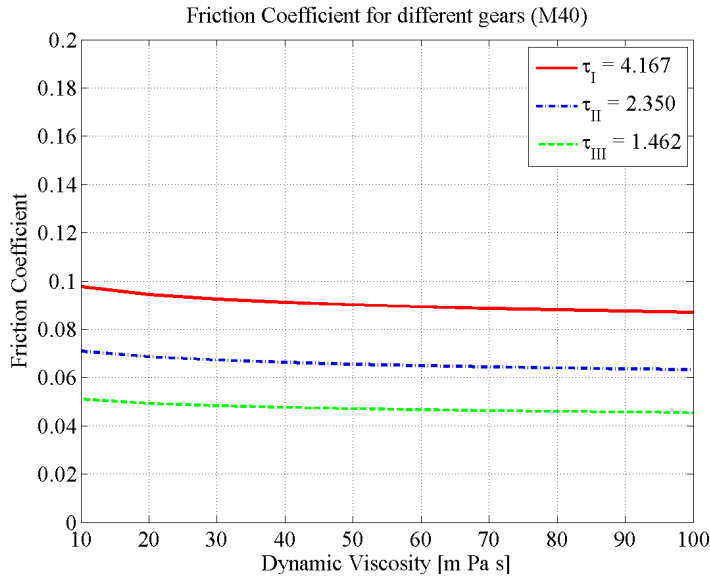


Figura 20 – Efeito da viscosidade no coeficiente de atrito. Com  $R_a = 1.5 \mu m$ ,  $T = 400 Nm$ ,  $K_A = 1$  e  $n_1 = 3000 rpm$ .

## 2.5 Análises de sensibilidade do rendimento mecânico

É pertinente realizar alguns experimentos computacionais para verificar o comportamento da eficiência mecânica em certas circunstâncias, e também verificar que importante papel cada termo possui.

Vários tipos de simulações foram realizados para analisar o rendimento, variando a relação de transmissão, o módulo, o número de dentes e a velocidade de rotação, para engrenagens externas e internas de dentes retos. Para engrenagens helicoidais, foi examinado o efeito da variação do ângulo de hélice.

Nestas simulações, os elementos considerados são engrenagens feitas de aços duros, então, o comportamento do coeficiente de atrito para o recesso (eq. 2.67) será usado para o inteiro segmento de contato (acesso e recesso), como Buckingham havia considerado. Além disso, uma comparação com alguns gráficos obtidos por Anderson [14] (mostrado no Cap. 3) será feita para fortalecer toda a teoria discutida neste presente trabalho.

### 2.5.1 Variação da relação de transmissão, mantendo o raio da roda motora fixo

Este primeiro teste é para medir o andamento da eficiência com igual número de dentes  $Z_1$  (e então  $R_1$ ) e velocidade angular  $n_1$ , variando o número de dentes da engrenagem motriz, e obviamente mudando a relação de transmissão  $i$ .

$$Z_1 = 24 \quad Z_2 = [17: 1: 240] \quad m = 5 mm \quad \alpha = 20^\circ \quad n_1 = 1000 rpm$$



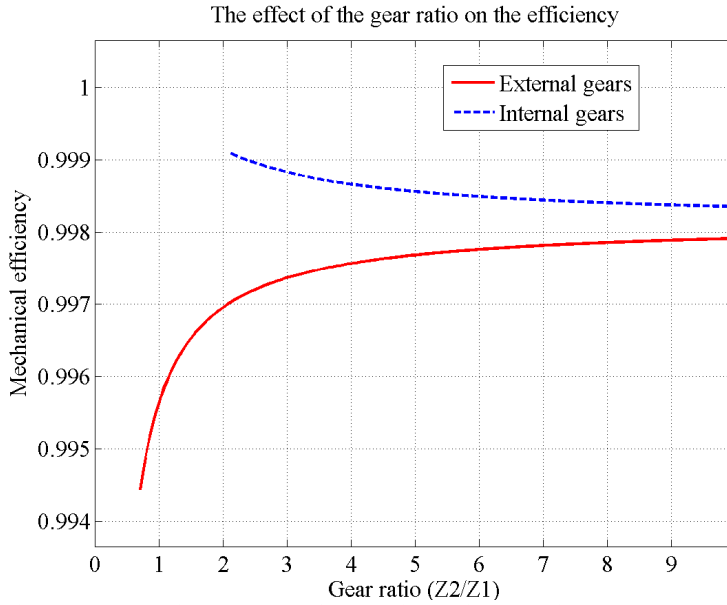


Figura 21 – Rendimento mecânico X relação de transmissão (engrenagens de dentes retos)

Para a simulação com engrenagens internas, obviamente, a engrenagem interna (coroa) deve ser maior que o pinhão. Foi adotado:  $Z_2 = [50: 1: 240]$ .

O andamento crescente da curva de eficiência entre rodas externas (vermelha) pode ser explicado pelas equações de velocidade de escorregamento (2.63) e (2.64). Pela simulação é possível perceber que apesar do aumento de  $\beta_a$  (acesso), o aumento do número de dentes  $Z_2$  tem um efeito maior. Então, o resultado é a diminuição da velocidade de escorregamento e conseqüentemente, redução do coeficiente de atrito. No recesso, se o número de dentes cresce, a velocidade e o atrito também aumentam.

$$V_{sa} = f(Z_2, \beta_a) = \left(\frac{V}{2}\right) \left[1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right] \beta_a \cos\alpha \Rightarrow \uparrow Z_2, \uparrow \beta_a \xrightarrow{\text{therefore}} \downarrow V_{sa}, \downarrow \mu_a$$

$$V_{sr} = f(Z_2) = \left(\frac{V}{2}\right) \left[1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right] \beta_r \cos\alpha \Rightarrow \uparrow Z_2 \xrightarrow{\text{therefore}} \downarrow V_{sr}, \downarrow \mu_r$$

Como os coeficientes de atrito diminuem, então, a equação de eficiência expressa pela (2.23) resulta na curva crescente mostrada na Figura 21.

Já as engrenagens internas (curva azul) possuem um comportamento contrário, que pode ser explicado pelas equações de velocidade de escorregamento (2.68) e (2.69). Neste caso, o arco de acesso  $\beta_a$  decresce, mas o aumento de  $Z_2$  é ainda mais significativo. Então, a velocidade de escorregamento no acesso aumenta. Para a região de recesso, o aumento do número de dentes aumenta também o seu valor.

$$V_{sa} = f(Z_2, \beta_a) = \left(\frac{V}{2}\right) \left[1 - \frac{Z_1}{Z_2}\right] \beta_a \cos\alpha \Rightarrow \uparrow Z_2, \downarrow \beta_a \xrightarrow{\text{therefore}} \uparrow V_{sa}, \uparrow \mu_a$$

$$V_{sr} = f(Z_2) = \left(\frac{V}{2}\right) \left[1 - \frac{Z_1}{Z_2}\right] \beta_r \cos\alpha \Rightarrow \uparrow Z_2 \xrightarrow{\text{therefore}} \uparrow V_{sr}, \uparrow \mu_r$$

Logo, por causa do aumento do coeficiente de atrito, a eficiência mecânica de engrenagens internas tem um andamento decrescente como mostrado na figura anterior.

Outro importante fato que pode ser percebido é que quando a segunda engrenagem é interna (coroa), o rendimento mecânico é sempre maior do que quando essa engrenagem é externa, considerando o mesmo número de dentes (ver Figura 21).

### 2.5.2 Variação da relação de transmissão, mantendo a distância entre os centros fixa

Neste caso, a relação de transmissão é aumentada enquanto a distância entre as rodas é mantida constante em 0,250 m. A Figura 22 mostra o decremento da eficiência por causa do aumento da relação de transmissão.

Este comportamento será mostrado também no parágrafo (3.2.3). De acordo com Anderson [14], esta situação causa aumento das velocidades de escorregamento e então a perda de potência também cresce. Logo, o rendimento tem uma tendência decrescente, como mostrado na Figura 22.

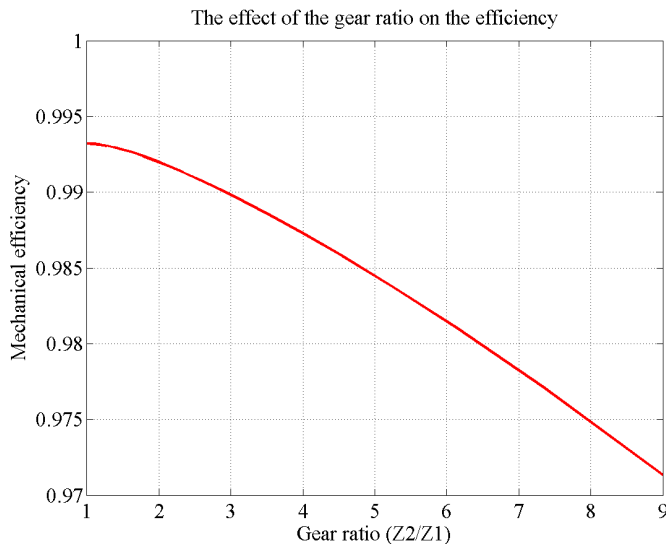


Figura 22 – O efeito da relação de transmissão no rendimento mecânico

### 2.5.3 Ângulo de pressão variável

De acordo com Anderson [14], a redução do ângulo de pressão aumenta a razão de contato (contact ratio) dos dentes substancialmente e a velocidade de escorregamento aumenta com o acréscimo da razão de contato, então conseqüente a perda de potência sobe (ver par. 3.2.2). A Figura 23 e Figura 24 mostram exatamente esses comportamentos, isto é, reduzindo o ângulo de pressão a razão de contato cresce e ao contrário, a eficiência diminui. Então, isso prova a validade do modelo proposto neste trabalho com o estudo feito por Anderson.

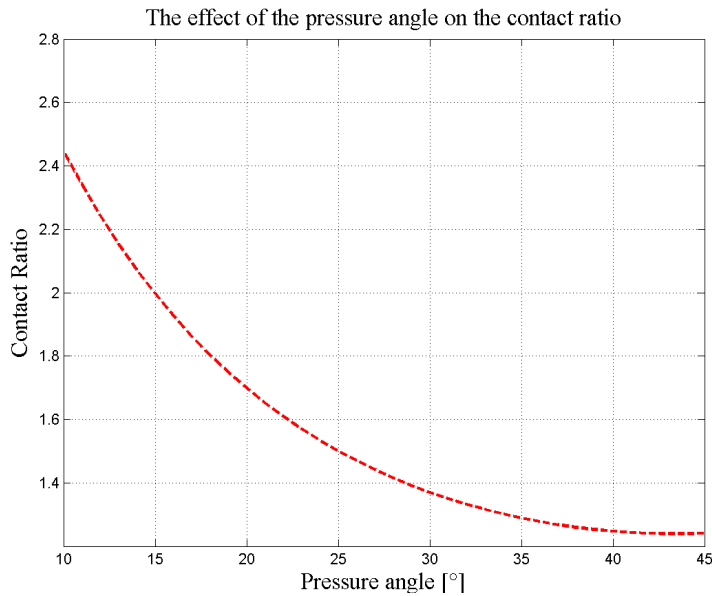


Figura 23 – Relação entre o ângulo de pressão e a razão de contato

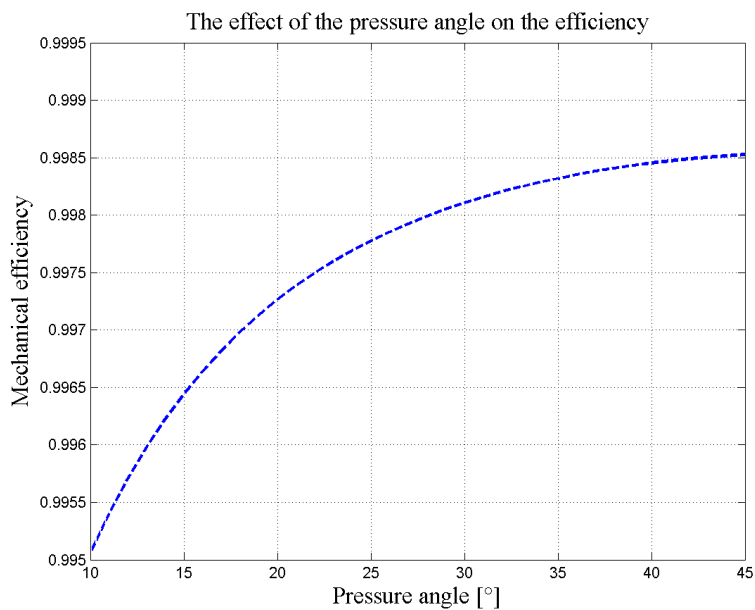


Figura 24 – Efeito do ângulo de pressão no rendimento mecânico

#### 2.5.4 Número de dentes $Z_1$ variável, relação de transmissão fixa

A simulação representada na Figura 25 reproduz o caso quando a relação de transmissão é fixada e o número de dentes da engrenagem motriz muda. Obviamente, se o número de dentes de uma engrenagem varia o número de dentes da outra também muda, pois a relação de transmissão é constante. As variáveis de ingresso da simulação são:

$$i = 5 \quad Z_1 = [10: 1: 200] \quad m = 5 \text{ mm} \quad \alpha = 20^\circ \quad n_1 = 1000 \text{ rpm}$$

O andamento da curva das engrenagens externas (vermelho) pode ser explicado pelos termos da equação do rendimento. A fórmula (2.23) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\eta = f(\mu_r, \beta_a, \beta_r) = 1 - \mu_r \frac{(\beta_a^2 + \beta_r^2)}{\beta_a + \beta_r} K$$

A letra K corresponde aos termos constantes da equação. Pelos resultados da simulação, foi mostrado que o coeficiente de atrito aumenta o seu valor, mas, mais devagar do que os arcos diminuem os seus. Por esta razão, o último termo da expressão acima se reduz e então, a eficiência tende a aumentar.

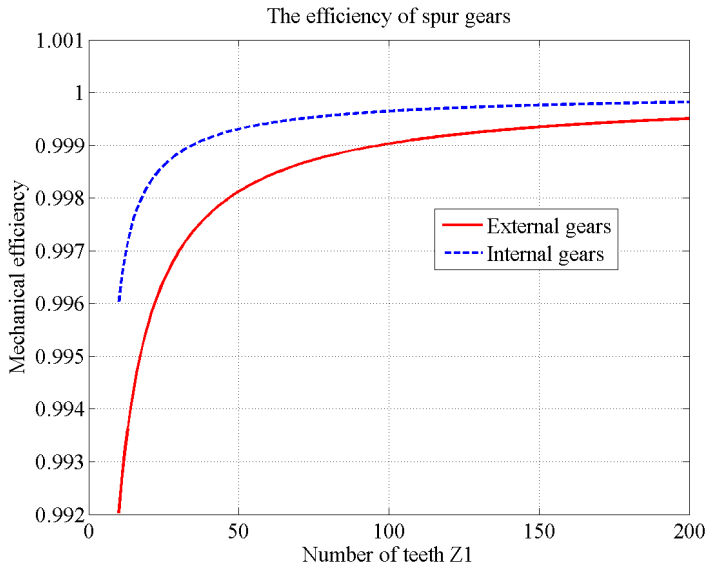


Figura 25 – Rendimento X Número de dentes Z<sub>1</sub>

Para as engrenagens internas (curva em azul) a mesma coisa acontece. A diminuição dos arcos de acesso e recesso vence o aumento do coeficiente de atrito e a eficiência tende a crescer. Considerando a mesma relação de transmissão, um importante fato a ser notado é que o rendimento é maior quando a segunda engrenagem é de dentadura interna do que quando possui dentes externos. Uma possível explicação está na constante K da fórmula acima. Para engrenagem externa,  $K = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{i}\right)$ , que é maior do que para engrenagem interna (eq. 2.39), onde  $K = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{i}\right)$ .

### 2.5.5 Variação da velocidade de rotação da engrenagem motriz

A Figura 26 representa o efeito da velocidade angular no rendimento mecânico das engrenagens. Nesta simulação, o número de dentes das rodas 1 e 2 são fixos, mas a roda 2 pode ser tanto externa quando interna. Os parâmetros de ingresso são:

$$Z_1 = 24 \quad Z_2 = 120 \quad m = 5 \text{ mm} \quad \alpha = 20^\circ \quad n_1 = [500: 10: 5000] \text{ rpm}$$

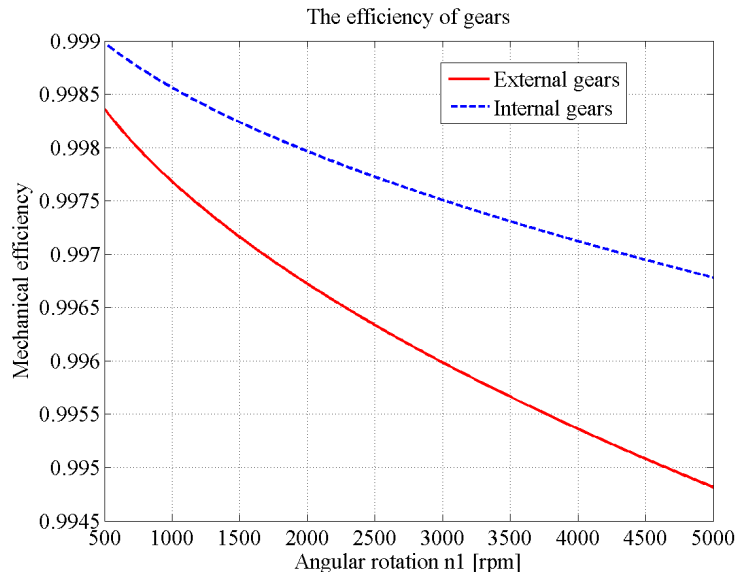


Figura 26 – Eficiência mecânica X velocidade angular

Os resultados se mostraram já esperados, porque neste caso apenas o termo que é variável na equação do rendimento é o coeficiente de atrito. Quando a velocidade de rotação cresce, as velocidades de escorregamento também. Então, o atrito se torna maior e a rendimento cai.

### 2.5.6 Módulo variável e relação de transmissão constante

Agora, para verificar o efeito da variação do módulo no rendimento mecânico, as seguintes considerações foram adotadas na simulação: os raios primitivos de ambas as rodas são constantes, então a relação de transmissão também. Variando proporcionalmente o número de dentes e calculando os valores dos módulos, a curva reportada na Figura 27 foi obtida. Este resultado não foi uma surpresa, porque alguns teste reportados por Buckingham haviam já mostrado que engrenagens finas (com pequeno módulo) são mais eficientes do que engrenagens com grande módulo. A razão é porque as engrenagens finas possuem menores velocidades de escorregamento e portanto menor coeficiente de atrito.

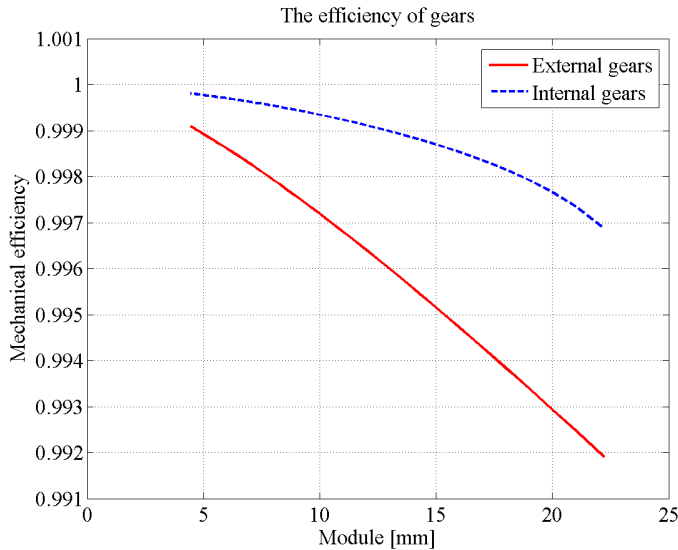


Figura 27 – Efeito do módulo no rendimento mecânico

### 2.5.7 Variação do ângulo de hélice

Neste último caso, será estudado o efeito do ângulo de hélice no comportamento da eficiência. A Figura 28 mostra o resultado da simulação. O número de dentes foi considerado constante para ambas as engrenagens. O módulo frontal  $m$ , o ângulo de pressão no plano de rotação  $\alpha$  e a velocidade periférica  $V$  foram mantidos invariáveis também. O ângulo de hélice foi variado de 0 até 50°. Os parâmetros de ingresso são:

$$Z_1 = 24 \quad Z_2 = 120 \quad m = 5 \text{ mm} \quad \alpha = 20^\circ \quad \psi = [0: 1: 50]^\circ \quad n_1 = 1000 \text{ rpm}$$

O aumento da eficiência é devido a redução dos arcos de acesso e recesso e, portanto da velocidade de escorregamento. E de alguma maneira esses arcos diminuem mais rapidamente do que o cosseno do ângulo de hélice. Logo, a eficiência aumenta (ver fórmula 2.51) como mostrado na Figura 28. Mais uma vez, o rendimento das engrenagens internas se mostra maior que aquele das externas.

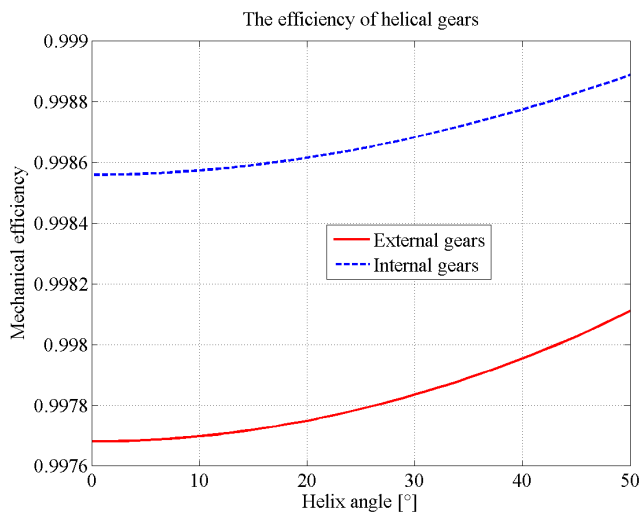


Figura 28 – Efeito do ângulo de hélice no rendimento

### 3 Eficiência mecânica com o efeito da razão de contato e o estudo de um câmbio manual comercial

#### 3.1 Introdução

Os estudos prévios sobre rendimento de engrenagens consideraram um par de engrenagens onde a razão de contato é igual a unidade, isto é, existe apenas um par de dentes em contato e trocando forças durante todo o segmento de contato. Mas, na verdade essa razão é sempre maior do que 1 e para alguns tipo de rodas dentadas esse valor pode chegar a 2 ou 3.

Aqui será apresentado o modelo proposto por Niemann, que leva em consideração o real valor da razão de contato, mas é adequado somente para rodas com valores entre 1 e 2 (que é a maioria das engrenagens). Então, uma análise do efeito da razão de contato na variação da eficiência será feita.

Por fim, esta teoria será aplicada a um câmbio manual comercial para entender melhor os efeitos das perdas de potência em cada marcha, causadas pelo atrito nos dentes, em diversas condições de torque inicial e velocidade rotacional. Neste caso, será utilizado o modelo de coeficiente de atrito proposto por Niemann (ver par. 2.4.2), que considera mais parâmetros como: força de contato, viscosidade e rugosidade.

#### 3.2 Razão de contato das engrenagens

##### 3.2.1 Engrenagens externas

Niemann e Winter ([12],[13]) encontraram um expressão para dissipação de potência no caso do contato de engrenagens com razão de contato entre 1 e 2. Eles consideraram um coeficiente de atrito médio constante durante o inteiro segmento de contato (esse coeficiente é calculado como mostrado no parágrafo 2.4.2). Então, considerando o engrenamento de rodas externas (ver Fig. 6), a equação da perda é:

$$L = \frac{\mu \pi \cos \alpha}{\cos \alpha_n \cos \psi} \left( \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right) (1 - \varepsilon + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) \quad (3.78)$$

Logo, o rendimento é definido como:

$$\eta = 1 - L = 1 - \frac{\mu \pi \cos \alpha}{\cos \alpha_n \cos \psi} \left( \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right) (1 - \varepsilon + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) \quad (3.79)$$

onde,

$\varepsilon$  = razão de contato

$\varepsilon_1$  = razão de contato parcial no segmento  $g_1$

$\varepsilon_2$  = razão de contato parcial no segmento  $g_2$

A definição geométrica dessas razões de contato, referindo de novo à Figura 6, é mostrada nas seguintes expressões:

$$\varepsilon = \frac{\text{segment } \overline{mn}}{p_b} = \frac{g_1 + g_2}{p_b}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{g_1}{p_b}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{g_2}{p_b}$$

Como  $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$  e a razão de contato não é maior do que 2, então,  $\varepsilon_1 < 1$  e  $\varepsilon_2 < 1$ . O passo  $p_b$  é chamado “passo do círculo de base” e é igual ao produto do passo primitivo pelo cosseno do ângulo de pressão ( $p_b = p \cos \alpha$ ).

Relembrando que para engrenagens externas, o segmentos de contato podem ser expressos geometricamente como:

$$g_1 = \sqrt{R_{o2}^2 - R_{b2}^2} - R_2 \sin \alpha$$

$$g_2 = \sqrt{R_{o1}^2 - R_{b1}^2} - R_1 \sin \alpha$$

Se as engrenagens forem helicoidais, o cálculo dos raios e do segmento de contato deve ser feito usando o ângulo de pressão no plano de rotação (como explicado no par. 2.3.2).

Um interessante ponto a ser considerado é que substituindo ( $\varepsilon = 1$ ) na equação de rendimento expressa anteriormente e reorganizando os termos dessa equação, o resultado será a formulação proposta por Buckingham (2.35). Logo, isso prova a validade da sua teoria de rendimento mecânico considerando razão de contato unitário no par de engrenagens.

### 3.2.2 Engrenagens internas

Para engrenagens internas, a equação da eficiência (3.79) se torna igual a:

$$\eta = 1 - L = 1 - \frac{\mu \pi \cos \alpha}{\cos \alpha_n \cos \psi} \left( \frac{1}{Z_1} - \frac{1}{Z_2} \right) (1 - \varepsilon + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) \quad (3.80)$$

As definições das razões de contato ( $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ ) são as mesmas, mas as expressões são diferentes. De acordo com a Figura 10, elas podem ser representadas como:

$$g_1 = R_2 \sin \alpha - \sqrt{R_i^2 - R_{b2}^2}$$

$$g_2 = \sqrt{R_{o1}^2 - R_{b1}^2} - R_1 \sin \alpha$$

Do mesmo modo, se for engrenagem helicoidal, deve ser usado o ângulo de pressão no plano de rotação. Adotando razão de contato igual a 1, a equação se transforma na mesma definida por Buckingham.



### 3.2.3 Efeitos da variação da razão de contato na perda de potência

Recentemente, Anderson e Loewenthal [14] propuseram um estudo de rendimento em engrenagens com alta razão de contato. Eles explicaram e mostraram graficamente a variação da razão de contato e perda de potência quando algumas características da engrenagem mudam (addendum, ângulo de pressão, módulo, diâmetro e relação de transmissão).

Aqui, algumas discussões dos resultados obtidos em [14] serão feitas, e no parágrafo (2.5) será feita um comparação com os resultados encontrados usando a teoria descrita neste trabalho (teoria de Buckingham).

A Figura 29 mostra que o aumento da proporção de addendum causa um aumento na razão de contato e também um incremento na perda de potência. Esta maior perda pode ser explicada no fato que as velocidades de escorregamento crescem significativamente quando a razão de contato aumenta (ver Figura 30). Mesmo que a carga seja dividida em três pares de dente ( $\epsilon = 2.97$ ) ao invés de dois ( $\epsilon = 1.83$ ), este aumento da velocidade de escorregamento de alguma maneira comanda a alta perda de potência.

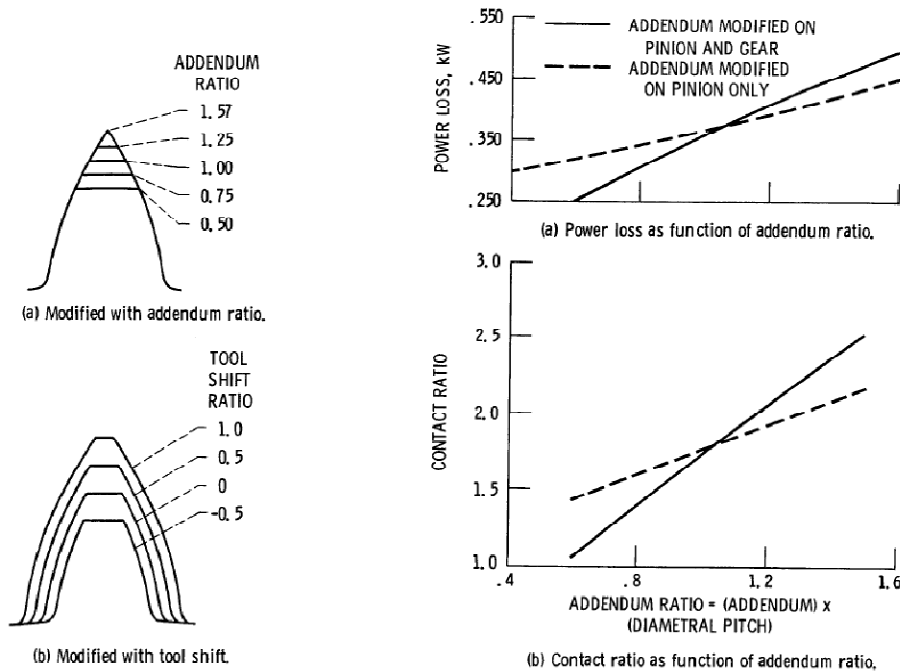


Figura 29 – Efeito do addendum na perda de potência e razão de contato

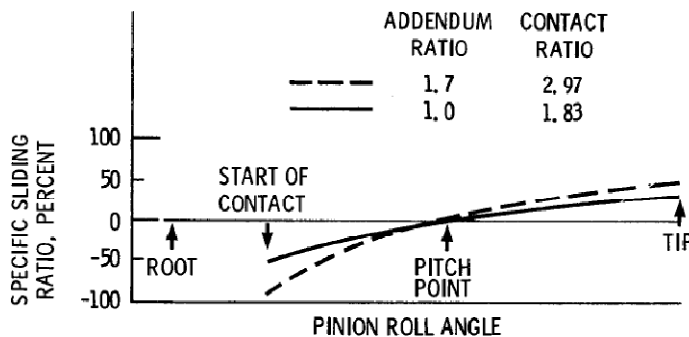
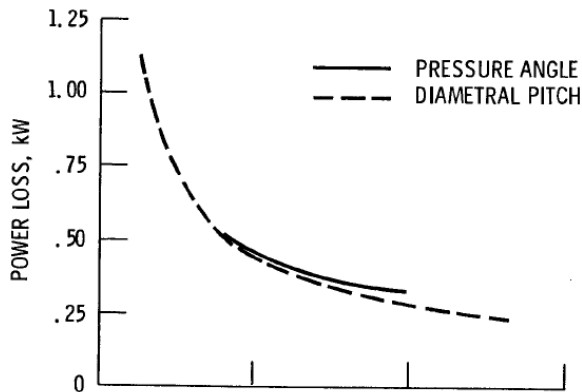


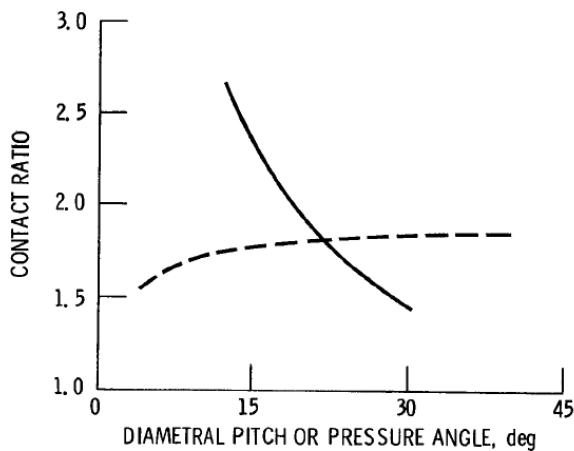
Figura 30 – Efeito do addendum e razão de contato no escorregamento

Com respeito à Figura 31, é possível concluir que reduzindo o ângulo de pressão, a razão de contato aumenta substancialmente e de novo, a velocidade de escorregamento aumenta, resultando maior perda de potência.

Também na Figura 31, é mostrado que o “diametral pitch” (inverso do módulo) tem menor efeito na razão de contato do que o ângulo de pressão e o addendum. Mas, engrenagens finas (com módulo reduzido), apesar de ter razão de contato maior do que engrenagens grossas, elas possuem menor perda de potência devido às baixas velocidades de escorregamento.



(a) Power loss as function of diametral pitch or pressure angle.



(b) Contact ratio as function of diametral pitch or pressure angle.

Figura 31 – Efeito do “diametral pitch” e ângulo de pressão na perda de potência e razão de contato

Na Figura 32, o efeito do diâmetro na dissipação de potência é mostrado. Essa perda pode ser reduzida usando diâmetros maiores até certo ponto. Depois começa a aumentar denovo, devido o aumento das perdas por rolamento e “windage”.

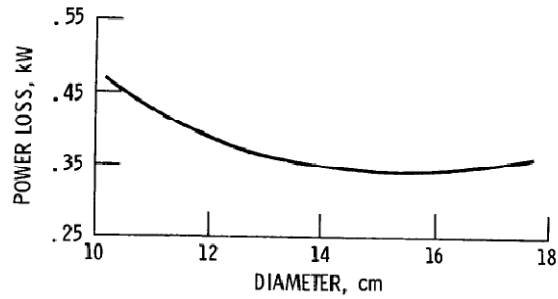


Figura 32 – Efeito do diâmetro na perda de potência

Se a relação de transmissão aumenta enquanto a distância entre os centros é mantida constante, a perda aumenta de forma significativa (ver Figura 33), porque o pinhão diminui seu diâmetro quando a relação de transmissão aumenta. Esta situação causa aumento da velocidade de escorregamento e então maiores perdas.

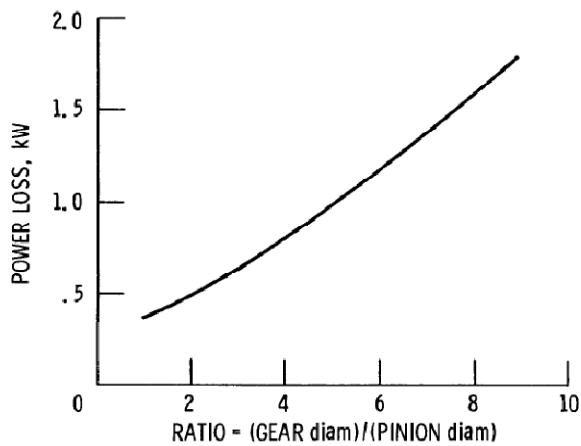


Figura 33 – Efeito da relação de transmissão na perda de potência

Considerando todos esses efeitos acima estudados, é evidente que a dissipação de potência aumenta no andamento de baixa para alta razão de contato. Entretanto, vários outros parâmetros podem decididamente aumentar as perdas, sem mudar a razão de contato, como no caso do “diametral pitch” (Figura 23). Assim, pode ser dito que nem sempre, mas de um modo geral, um aumento na razão de transmissão faz as perdas crescerem.

### 3.3 Cálculo da eficiência aplicado a um câmbio comercial (M40)

Neste parágrafo será mostrado um estudo da eficiência aplicado a uma caixa de câmbio manual comercial (M40), comparando os dois modelos estudados anteriormente (Buckingham e Niemann). Recordando que, além da diferença na consideração do coeficiente de atrito dos dois modelos (ver par. 2.4), Niemann considera ainda o efeito da razão de contato, que na verdade é maior do que 1. Buckingham, ao contrário, assume que ela possui valor unitário. O significado de M40 é porque o torque máximo de operação é de 400 Nm. Esta caixa de câmbio possui seis diferentes marchas mais a marcha ré. Existe um eixo primário por onde vem o torque do motor e dois eixos secundários, que transmitem o torque para os pneus. A escolha de dois eixos secundários permite a redução da dimensão axial da caixa, mas aumenta a dimensão radial, como se pode ver na Figura 34.



Figura 34 – Exemplo de caixa de câmbio (M40)

Na Figura 35 é mostrada uma tabela com os dados geométricos obtidos pela medição direta dos elementos físicos e que serão usados nas próximas simulações. A letra “Z” representa o número de dentes da respectiva engrenagem. “M” é o módulo, expresso em [mm]. “ALFA” é o ângulo de pressão no plano normal e “BETA” é o ângulo de hélice, ambos expressos em graus [°]. “Tau” é a relação de transmissão.

MT [Nm]	DATA OF TEETH								WIDTH OF TOOTH [mm]	
	Tau	It [mm]	TAU Zr/Zp	Zp	Zr	M	ALFA	BETA	Pinion	Gear
320	I	88,5	4,167	12	50	2,548	21,0	25,000	28,0	25,5
400	II	88,5	2,350	20	47	2,299	20,0	30,000	22,0	20,5
400	III	112,8	1,462	52	76	1,504	16,0	32,000	18,0	19,0
400	IV	112,8	0,955	67	64	1,445	16,00	32,00	17,5	18,0
400			1,047	64	67	1,446	16,00	32,00		
400	V	88,5	0,695	59	41	1,510	16,00	32,00	17,0	17,0
400			0,786	56	44	1,507	16,00	32,00		
400	VI	88,5	0,552	67	37	1,445	16,00	32,00	17,5	18,0
400			0,625	64	40	1,446	16,00	32,00		
320	RF	158,5	4,222	18	76	3,023	22,00	27,00	41,0	38,0
320			4,563	16	73	3,166	19,50	27,00		
400	RM	138,78	0,980	50	49	2,548	21,0	25	25,5	18

Figura 35 – Dados dimensionais do câmbio M40

A primeira simulação considera cada marcha (I, II, ..., VI) individualmente, não considerando a contribuição da relação de redução final (RF). A marcha ré não será considerada na simulação, porque o contato acontece não apenas entre 2 engrenagens, mas tem uma adicional, que rende possível o movimento reverso.

Para a simulação de Buckingham é necessário apenas o número de dentes das engrenagens, o módulo e os ângulos (pressão e hélice). Mas a formulação de Niemann requer mais parâmetros como: largura do dente, força de contato (torque), viscosidade do óleo, rugosidade e considera ainda a razão de contato maior que um. Na simulação foram considerados os seguintes parâmetros:

Velocidade angular de operação = 3000 rpm

Torque na condição de regime permanente (carga total) = 400 Nm

Viscosidade do lubrificante (LS 75W-90) = 50 m Pa s

Rugosidade aritmética média = 0.35  $\mu$ m

Fator de aplicação ( $K_a$ ) = 1

Para o lubrificante, foi adotado o LS 75W-90<sup>1</sup>. Como a viscosidade varia com a temperatura, foi assumido um valor constante. A média aritmética da rugosidade foi adotada como 0.35 $\mu$ m, porque de acordo com [12] é possível usar o limite ( $R_a \approx 0.3 \dots 0.35\mu$ m) para engrenagens de aços com dentes temperados e retificados com fino acabamento.

<sup>1</sup> Veja o site LS 75W-90 Product Data Sheet

[http://www.mobil.com/USA-English/Lubes/PDS/GLXXENPVLMO Mobil1\\_Synthetic\\_Gear\\_Lubricant\\_LS\\_75W-90.asp](http://www.mobil.com/USA-English/Lubes/PDS/GLXXENPVLMO Mobil1_Synthetic_Gear_Lubricant_LS_75W-90.asp)

A Figura 36 mostra a diferença entre Buckingham (azul) e Niemann (vermelho). É possível perceber que a eficiência de Buckingham tem valores maiores e a razão disso é porque seu modelo considera menos parâmetros do que o modelo de Niemann, que é afetado pela força de contato, oil viscosity, rugosidade, razão de contato etc.

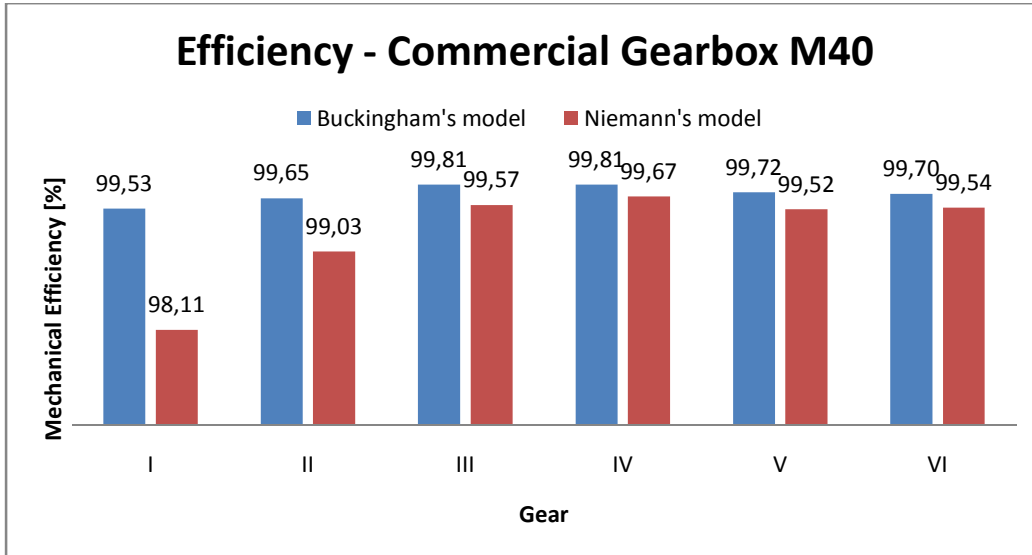


Figura 36 – Comparação dos modelos de Buckingham e Niemann com máxima carga, 400Nm, e velocidade de rotação da primeira engrenagem, 3000 rpm.

A Figura 37 representa a eficiência da relação de redução final (entre o eixo secundário e o diferencial) quando a primeira ou a sexta marcha estão engatadas. Em relação ao modelo de Niemann, é possível ver um melhoramento da relação de redução final (RF) quando se passa da primeira para a sexta marcha. Por outro lado, pela teoria de Buckingham a eficiência reduziu um pouco, mas ainda permanece maior do que os valores de Niemann.

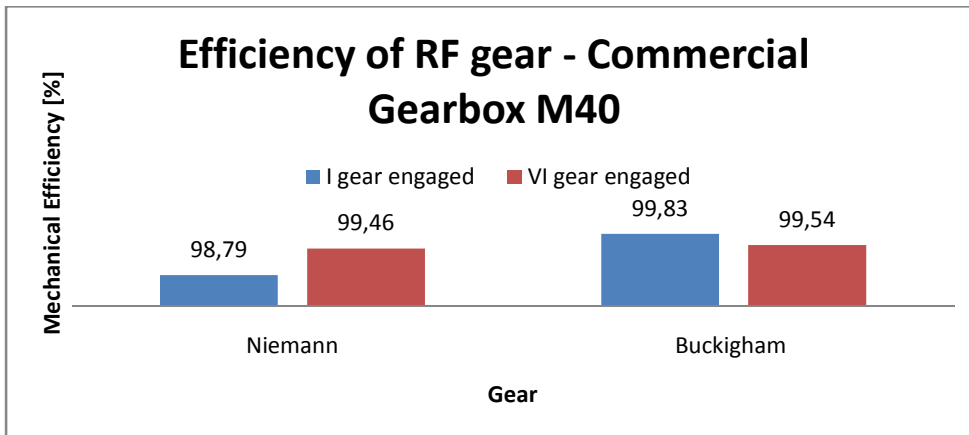


Figura 37 – Eficiência da relação final de redução para a primeira e sexta marchas

A Figura 38 exibe a eficiência total para cada marcha em contato, isto é, a soma da eficiência do primeiro par de engrenagens (entre o eixo primário e secundário) com o segundo par (secundário e diferencial). Obviamente, as engrenagens em contato no diferencial são cônicas e a formulação do rendimento será diversa. Mas para simplificar, foi assumido que essas engrenagens são cilíndricas.

Os valores de rendimento se reduziram em comparação com o gráfico anterior (Figura 36), porque agora, foi considerada a taxa de perda devido a relação de redução final (RF).

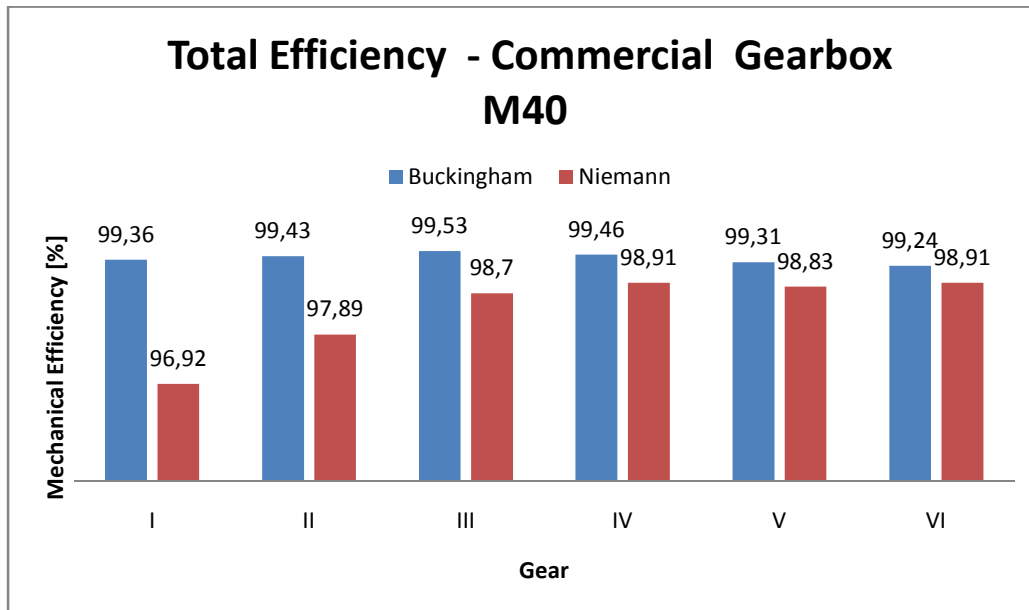


Figura 38 – Eficiência total para cada marcha (M40) com carga máxima, 400Nm, e velocidade angular da primeira engrenagem, 3000 rpm.

Pelos gráficos anteriores, pôde-se perceber que o comportamento do rendimento é bastante semelhante para ambos os modelos. Mudando de marcha (I→II), a eficiência aumenta com ajuda de alguns fatores como: o módulo se reduz (veja Figura 27), o ângulo de hélice aumenta (ver Figura 28) e a distância entre as engrenagens são fixas para a I e II marchas, mas a II tem uma relação de transmissão menor, então isso contribui para o aumento da eficiência (ver Figura 22). Do mesmo modo, o procedimento da eficiência quando se muda para as outras marchas, pode ser explicado olhando a variação dos fatores que influenciam esse rendimento e o coeficiente de atrito.

Um interessante ponto a ser discutido é a diferença dos valores de resposta dos modelos para o caso da marcha I. Este valor mais baixo encontrado por Niemann pode ser demonstrado pelo baixo número de dentes da engrenagem motora ( $Z=12$  para I marcha), então a velocidade tangencial no contato dos dentes é menor e então a perda por atrito se torna mais importante, resultado uma menor eficiência.

A Figura 39 mostra o rendimento (modelo de Niemann) para cada marcha do câmbio M40, variando a velocidade de operação mas considerando o torque vindo do motor constante e igual a 400 Nm (carga máxima).

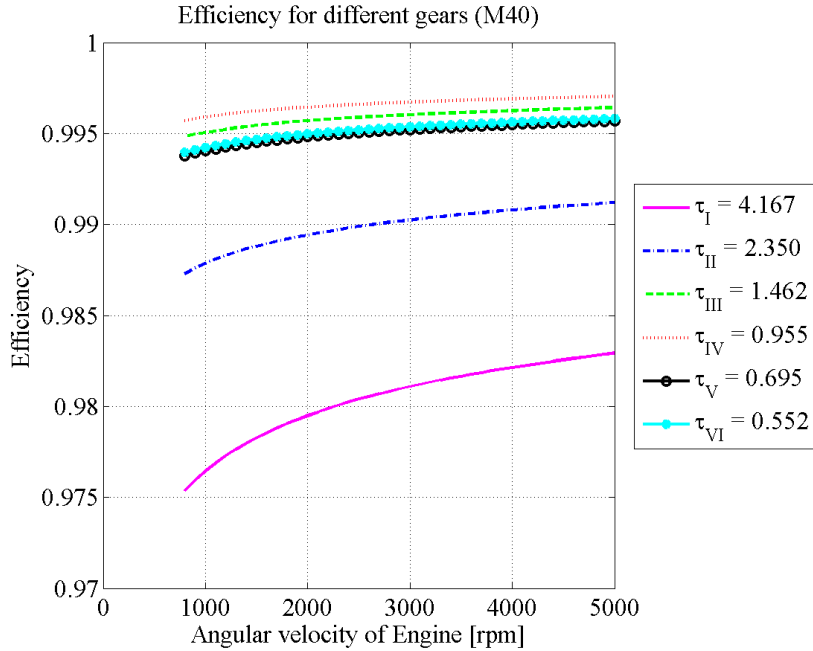


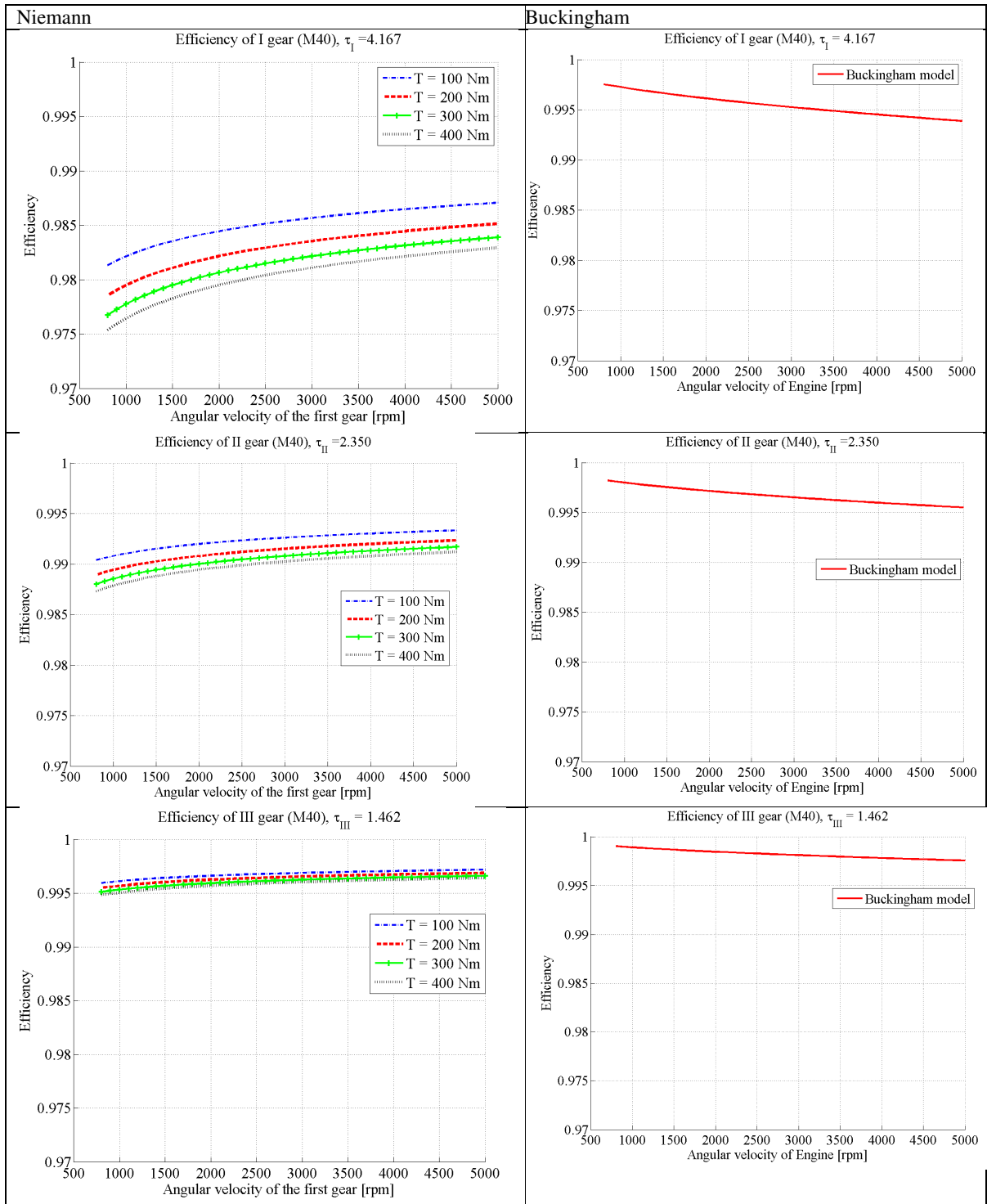
Figura 39 – Eficiência para os diferentes tipos de marcha (M40)

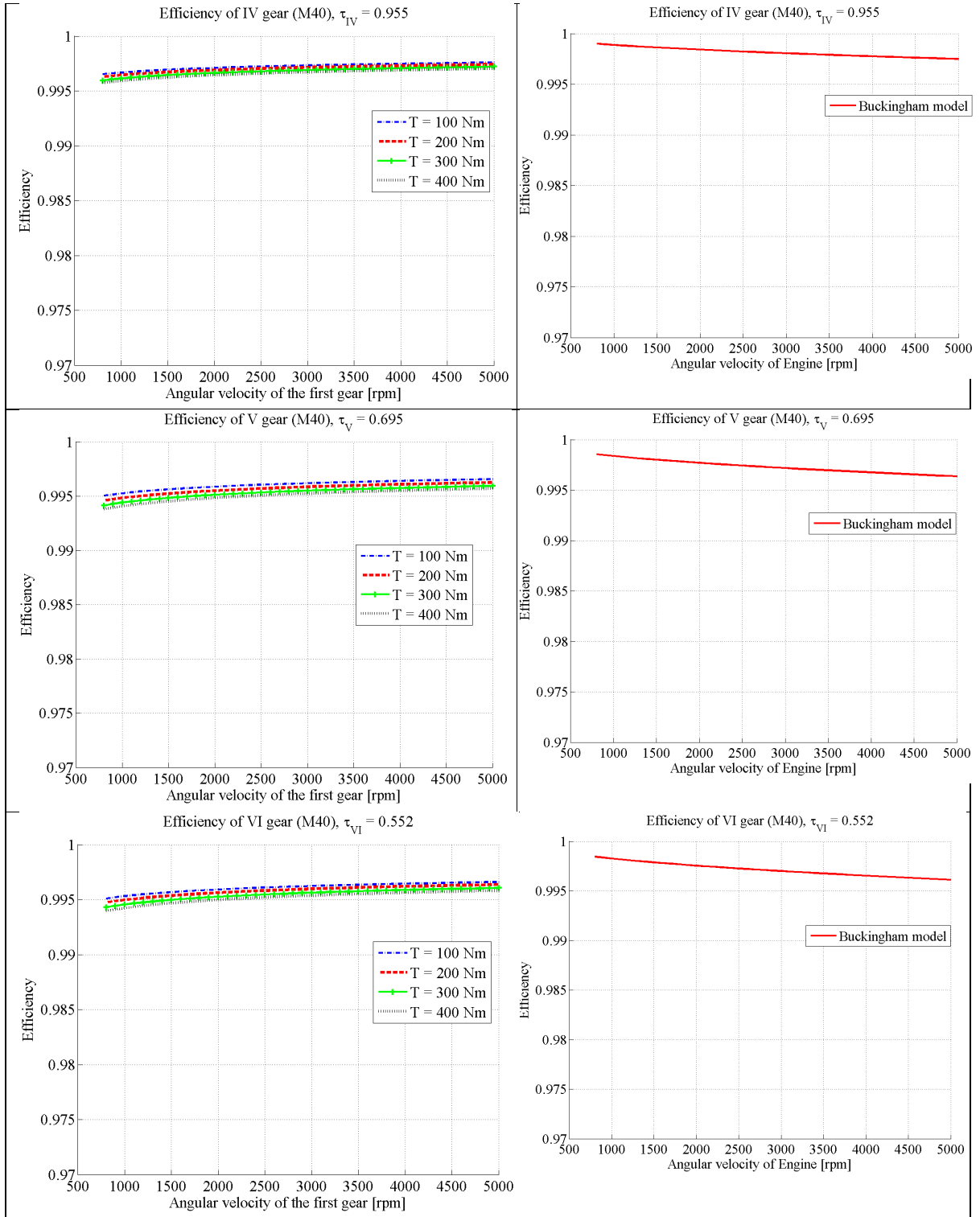
Pela Figura 39, é possível intuir que quanto mais o valor da relação de transmissão se aproxima de 1, mais alto é o rendimento mecânico. Neste gráfico a quarta marcha é mais eficiente porque possui uma relação quase unitária ( $\tau=0.955$ ). Outra explicação pra o aumento de desempenho quando se para da primeira para a segunda marcha, diz respeito ao aumento da velocidade acumulada (veja Figura 40). Da primeira até a quarta, a eficiência cresce, mas começa a decrescer para a quinta e sexta, porque a relação de transmissão começa a ficar menos do que 1. A marcha 6 parece ser um pouco mais eficiente que a quinta. Algumas razões para isso é porque a largura dos dentes da sexta marcha é um pouco maior (assim o efeito da força no dente é menor), o efeito da rugosidade é mais baixo e a velocidade acumulada é maior (ver Figura 41).

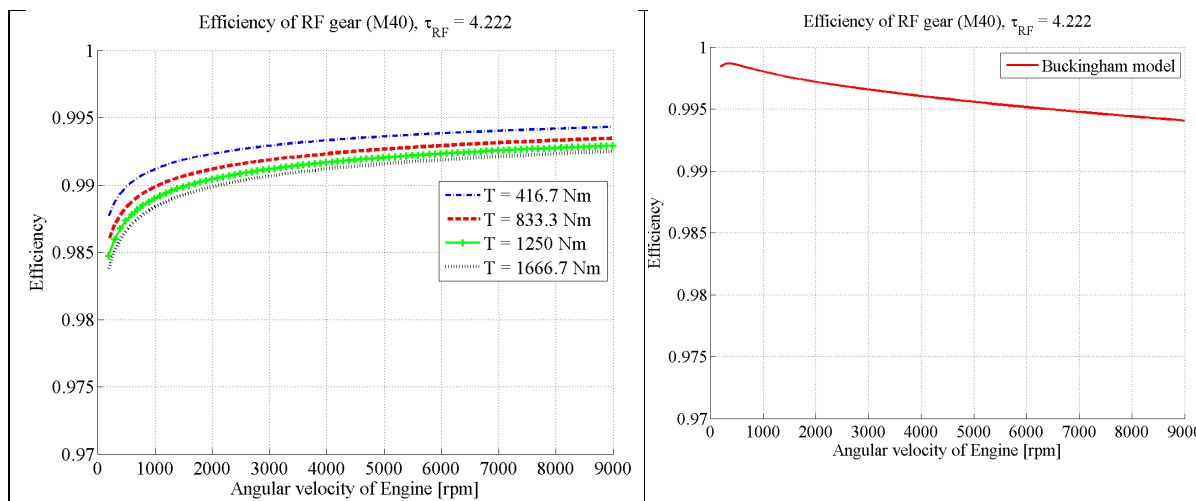
Os próximos gráficos mostrado na Tabela 5 ilustram o comportamento de cada marcha deste câmbio comercial manual em diferentes condições de operação, para os dois modelos anteriormente estudados (Buckingham e Niemman).



Tabela 5 – Simulações avaliando os dois modelos para cada relação de transmissão e considerando constantes os parâmetros:  $\eta_M = 50 \text{ m Pa s}$ ,  $K_A = 1$ ,  $R_a = 0.35 \text{ }\mu\text{m}$ .







O texto desenvolvido em MatLab (m-file) para primeira marcha é apresentado no Anexo A.

Pelos gráficos mostrados na Tabela 5, é plausível observar que o modelo de Buckingham sofre pouco ou nenhum efeito quando se troca de marcha ou aumenta a carga. Aumentando a velocidade, a eficiência reduz um pouco, mas isso é desprezível. Parece ser um modelo muito otimista e não apropriado para considerar o rendimento mecânico neste caso, porque seus valores se mantêm praticamente constantes e entre um limite de 0,995 até 1, isto é, eficiência de 99% a 100%.

Com respeito ao modelo de Niemann, existem significantes diferenças no rendimento, principalmente entre a primeira e a sexta marcha. O efeito do torque corresponde àquele tratado no parágrafo (2.4) para o coeficiente de atrito. Aumentando esse torque, as forças que agem no contato dos dentes cresce, o atrito também e então, a eficiência cai. Mas essa queda é mais expressiva para as primeiras marchas. A primeira marcha apresenta uma diferença considerável quando o torque varia de 100 até 400 Nm. A medida que vai se aumentando a marcha, o efeito das forças se reduzem. A quarta marcha, por exemplo, possui o rendimento quase constante quando se varia o torque. A velocidade tem também muita influência nas primeiras marchas (primeira e segunda). Para marchas altas (IV, V e VI) a eficiência tem se mostrado muito elevada e nessas condições o modelo de Niemann pode ser aproximado ao modelo de Buckingham.

Na simulação para a relação de redução final (RF) foi considerado todos os possíveis limites de variação de velocidade e torque que a engrenagem suportaria, dependendo de qual marcha foi engatada entre o eixo primário e secundário.

De um modo geral os resultados do rendimento se mostraram relativamente elevados, mas a variação de torque e velocidade pode influenciar bastante ou pouco, se considerar a primeira ou sexta marcha, por exemplo. A primeira marcha transmite torque elevado e baixa velocidade, então a eficiência um valor menor do que para a sexta marcha, que transmite menor torque e elevada velocidade (ver Tabela 5).

Na Figura 40 e 41 são mostrados em escala os valores da velocidade de escorregamento (esquerda) e velocidade acumulada (direita) para as seis marchas do câmbio manual M40. Também é possível perceber como varia o comprimento do segmento de contato dessas marchas.

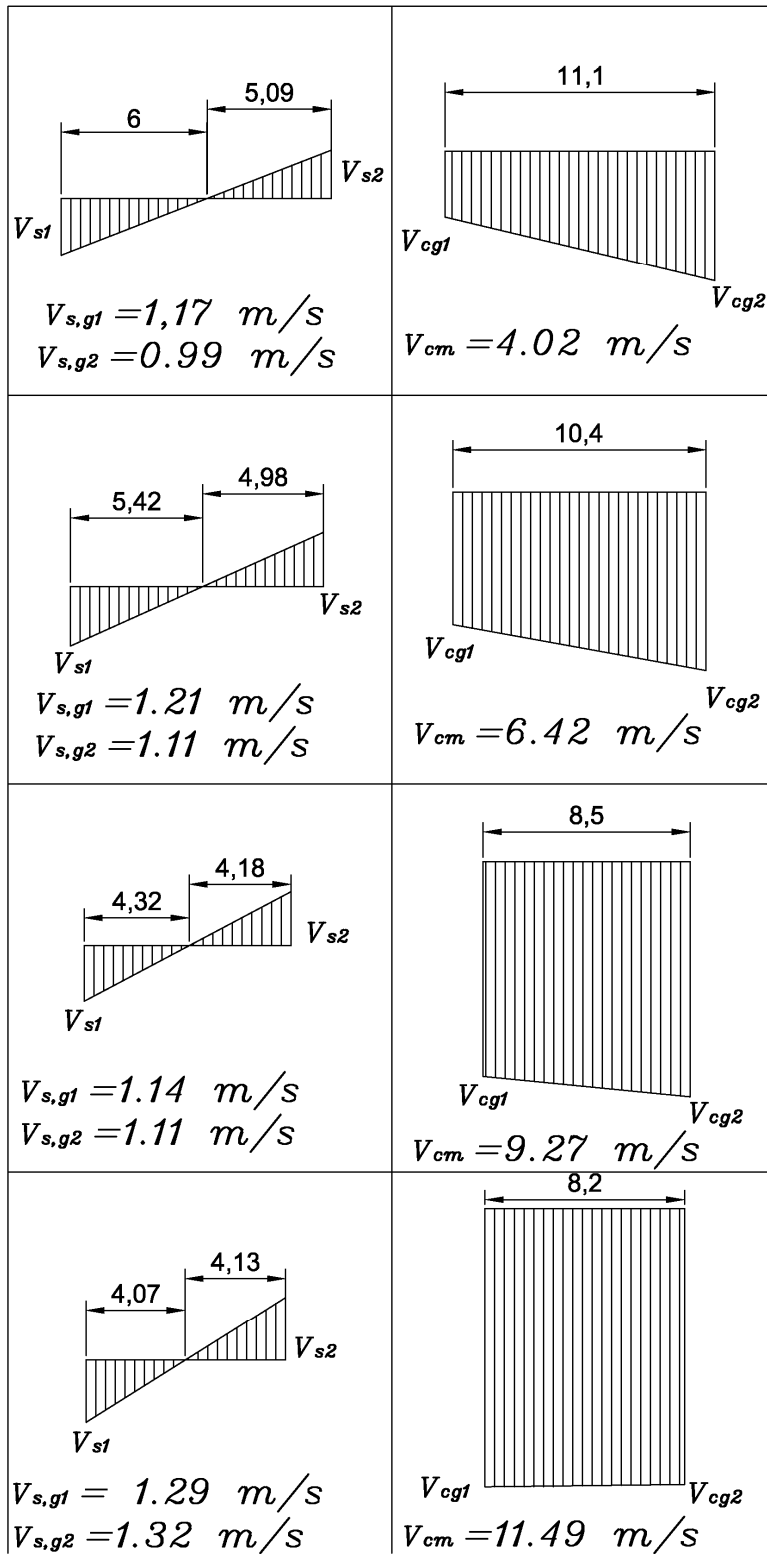


Figura 40 – Velocidade escorregamento e acumulada primeira até a quarta marcha do M40

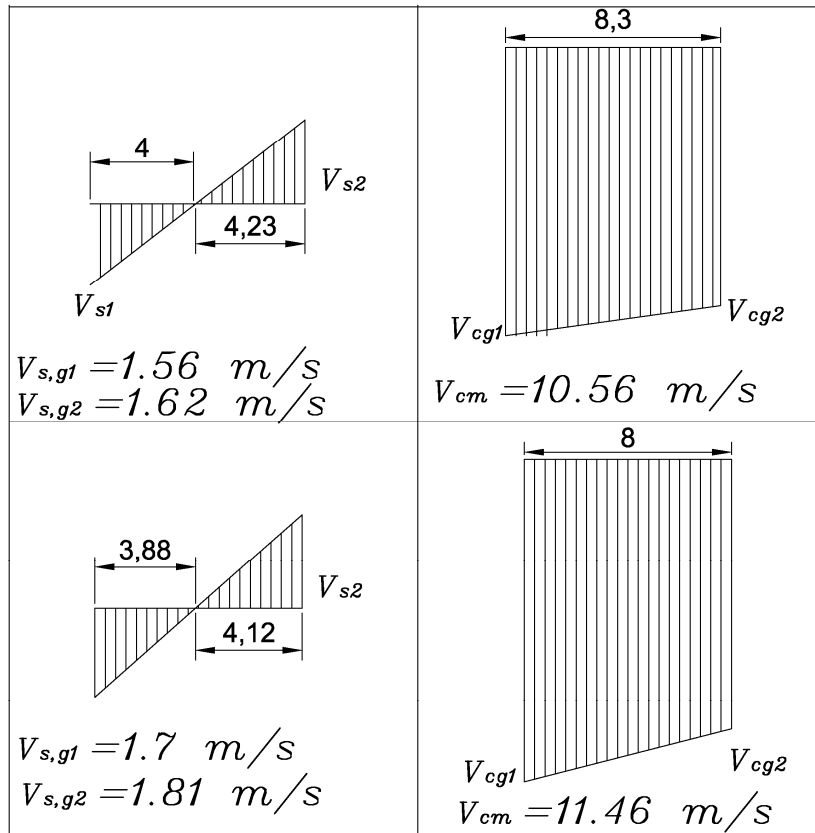


Figura 41 – Velocidade escorregamento e acumulada pra a quinta e sexta marcha do M40.

Olhando as figuras acima, nota-se que a velocidade de escorregamento não muda significativamente quando se passa da primeira para a segunda marcha e assim por diante. Isto consegue explicar o fato de que o cálculo de eficiência de Buckingham, que considera velocidade de escorregamento, não apresenta grande variação da primeira para a sexta marcha, como mostrado na Tabela 5.

Ao contrário, a velocidade acumulada aumenta substancialmente seu valor quando se muda da primeira para a sexta. Niemann considera este termo no coeficiente de atrito (equação 2.72). Quando a velocidade cresce, o atrito se reduz e então o rendimento sobe. Isto explica o comportamento dos gráficos na Tabela 5 para o modelo de Niemann.

### 3.3.1 Métodos para melhorar o rendimento

Um método para melhorar a eficiência mecânica da primeira marcha, por exemplo, seria mudando o perfil do dente de uma maneira adequada. A eficiência pode aumentar quando se usa o deslocamento do perfil do dente  $b_1=X_1m$  e  $b_2=X_2m$ , onde  $m$  é o módulo e  $X_1$  e  $X_2$  são os coeficientes de mudança de perfil para a engrenagem 1 e 2, respectivamente.

A expressão que relata o novo ângulo de pressão com o velho, mudando o perfil é (de acordo com [12], tabela 22.1/11, página 276):

$$inv\alpha_{wt} = inv\alpha + 2 \frac{X_1+X_2}{Z_1+Z_2} \tan\alpha_n \quad (3.81)$$

onde,

$\alpha_{wt}$  = novo ângulo de pressão mudando o perfil do dente

$X_1$  = coeficiente de mudança de perfil (engrenagem 1)

$X_2$  = coeficiente de mudança de perfil (engrenagem 2)

O raio de base permanece invariável, mas o raio primitivo varia com a seguinte relação:

$$R_{w1} = R_{b1} / \cos \alpha_{wt} \quad (3.82)$$

onde  $R_{w1}$  = novo raio primitivo (engrenagem 1).

Depois, deve ser calculada a variação do addendum para estimar no novo raio externo das engrenagens. Esta modificação pode ser expressa em função da distância entre os eixos antes e depois, e também dos coeficientes  $X_1$  e  $X_2$ . Então, o resultado é:

$$k = \frac{a - a_d - m_n(X_1 + X_2)}{m_n} \quad (3.83)$$

onde,

$a$  = nova distância entre os eixos =  $R_{w1} + R_{w2}$  [mm]

$a_d$  = antiga distância entre os eixos =  $R_1 + R_2$  [mm]

$k$  = variação do coeficiente de addendum

$m_n$  = módulo normal [mm]

O novo addendum pode ser expresso como:

$$h_{a1} = m_n + m_n(X_1 + k) = m \cos \psi (1 + X_1 + k) \quad (3.84)$$

O raio externo é então definido pela equação:

$$R_{ow1} = R_1 + h_{a1} \quad (3.85)$$

O mesmo deve ser feito para a engrenagem 2. Depois de encontrar a nova geometria dessas rodas dentadas, o processo de cálculo do coeficiente de atrito (ver par. 2.4.2) e rendimento (par. 3.2.1) é o mesmo de antes, a única diferença é que agora o ângulo de pressão é  $\alpha_{wt}$  e os raios são aqueles novo calculados acima.

Em um par de engrenagens, aquela crítica é a pequena, porque a espessura da base do dente é menor e as forças trocadas causam maior efeito nessa região de menos resistência. A Figura 42 mostra como a largura do dente varia quando o número de dentes muda.

Em muitos casos, dimensionar com segurança a engrenagem menor, aumentando o seu módulo, envolveria o uso de engrenagens maiores com dimensões inaceitáveis, por questões de tamanho e custo. Seria mais conveniente nessa situação usar engrenagens com mudança (deslocamento) de perfil, agindo apropriadamente nos coeficientes  $X_1$  e  $X_2$  para obter uma espessura da base do dente semelhante para as duas rodas.

Uma vantagem dessa escolha é que a modificação da resistência mecânica das duas engrenagens acontece ampliando o dente da roda menor e diminuindo aquele da engrenagem

maior, sem agir no módulo, isto é, nas dimensões de transmissão (raios de base permanecem constantes.)

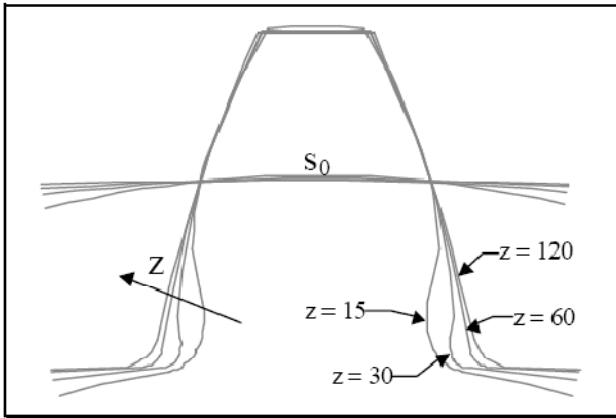


Figura 42 – Largura do dente em função do número de dentes na roda.

A Figura 43 mostra como a eficiência da primeira marcha (câmbio M40) varia quando se altera o perfil do dente, que depende dos coeficientes de mudança de perfil ( $X_1$  e  $X_2$ ).

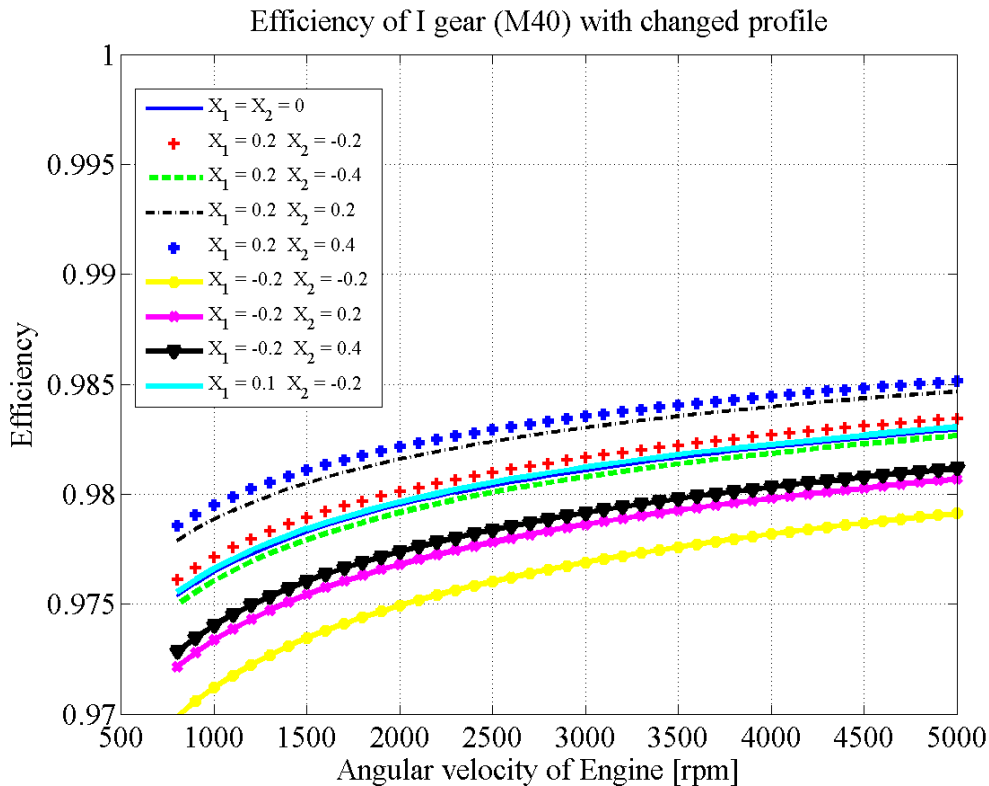


Figura 43 – Efeito da mudança de perfil na eficiência mecânica.

A figura acima comprova que é possível escolher valores adequados dos coeficientes para que se consiga melhorar a eficiência mecânica. O rendimento é melhorado quando o coeficiente da roda 1 (mais crítica) é positivo. O valor positivo de X significa uma base mais larga do dente e então, aumenta suas resistências. Por exemplo, a configuração ( $X_1=0.2$  and  $X_2=0.4$ ) apresenta menor razão de contato, maior velocidade acumulada e maior raio de curvatura.

Conseqüentemente, possui menor perda por atrito. Então, a configuração neste caso é melhor do que a configuração de engrenagens sem mudança de perfil. Por outro lado, a configuração ( $X_1=-0.2$  and  $X_2=-0.2$ ) apresenta maior razão de contato, menor raio de curvatura e menor velocidade acumulada, então, o coeficiente de atrito é maior e isto resulta em uma pior eficiência.



## 4 Modelos de eficiência em câmbio manual no MatLab/Simulink

### 4.1 Introdução

Na primeira parte deste capítulo será mostrado um modelo que estima a eficiência mecânica no contato entre um par de engrenagens simples, usando a aproximação de blocos orientados em plataforma MatLab/Simulink<sup>®</sup>. Para calcular o coeficiente de atrito, foi usada a teoria de Nienann [12] estudada nos capítulos anteriores.

Será implementado também um modelo que considera a perda de potência devido ao momento atrito, causado pelos rolamentos tanto no eixo primário quanto no secundário.

Além disso, um estudo do efeito da presença do lubrificante no rendimento será analisado (churning loss) e também a contribuição da ventilação do ar (windage loss), e posteriormente aplicação no modelo.

O tipo de câmbio utilizado nas simulações é um C530, que possui um eixo primário e apenas um eixo secundário, com seis marchas diferentes.

Finalmente, com todos os blocos de perda potência incluídos num modelo de veículo completo, algumas simulações foram realizadas para verificar a parcela de cada termo na eficiência global da caixa de câmbio, considerando o carro em aceleração (mudando de marcha) e também em velocidade constante.

### 4.2 Modelo da eficiência mecânica das engrenagens

Baseado em toda a teoria estudada nos capítulos anteriores, um modelo computacional foi desenvolvido no ambiente MatLab/Simulink<sup>®</sup> para avaliar a eficiência mecânica entre duas engrenagens em contato, considerando o efeito do atrito nos dentes. A Figura 44 mostra a convenção de sinal positiva para o torque e velocidade angular de ambas.

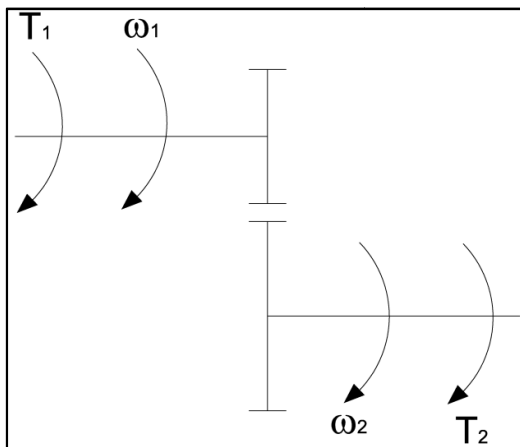


Figura 44 – Convenção de sinal positiva.

A Figura 45 representa um bloco com duas entradas e duas saídas. Este bloco pode é capaz de estimar o rendimento mecânico entre engrenagens externas e também internas. A primeira

engrenagem é fixada como sendo apenas externa, mas a segunda pode ter tanto dentes externos como internos, dependendo da escolha. As entradas (em verde) são: o torque que vem da segunda roda e a velocidade angular da primeira. Obviamente, as saídas (em vermelho) são: o torque da primeira e a velocidade angular da segunda. Considerando a relação de transmissão igual a  $\tau = \pm \frac{Z_2}{Z_1}$  (positiva para engrenagens internas e negativa para externas), as saídas podem ser expressas da seguinte maneira:

$$\omega_2 = \pm \frac{\omega_1}{\tau} \quad (4.86)$$

$$T_1 = \pm \frac{T_2}{\tau} \begin{cases} \frac{1}{\eta} & \text{quando a primeira é motora} \\ \eta & \text{quando a segunda é motora} \end{cases} \quad (4.87)$$

O sinal “±” é porque a segunda engrenagem pode ser interna ou externa. Por causa disso, a velocidade angular ou o torque inverte o seu sinal em relação à primeira engrenagem. Para usar corretamente o rendimento calculado dentro do bloco, deve-se conhecer qual roda trabalha como motriz ou movida. A equação (4.87) é dividida em duas partes, quando a primeira é motriz, a eficiência deve estar no denominador da equação, mas quando a segunda executa a função de motora, a eficiência deve multiplicar o seu torque para encontrar o torque da primeira.



Figura 45 – Bloco da eficiência mecânica.

Neste bloco, foi criada uma máscara de inicialização (veja Figura 46) onde é possível colocar e modificar todos os parâmetros importantes do sistema. Nesta máscara, se entra com os valores iniciais tais como: o número de dentes das duas engrenagens, o seu tipo (externa ou interna), o módulo, o ângulo de pressão, o ângulo de hélice, o fator de aplicação, a viscosidade do óleo, a rugosidade média e a largura do dente. Na inicialização desta máscara (ver Anexo B.1), todos os parâmetros necessários são calculados para estimar o valor do coeficiente de atrito e rendimento mecânico.

Esta máscara calcula as constantes que serão usadas no modelo como: os raios primitivo, de base e externos; o raio médio de curvatura  $\rho_m$  e o fator de rugosidade  $X_R$ , que entram na formulação do atrito. O ângulo de pressão e o de hélice entram em graus e a máscara converte-os em radiano para serem usados corretamente nas equações. Os outros parâmetros como a largura do dente  $b$ , a viscosidade do óleo  $\eta_M$  não são modificados na inicialização e entram diretamente nas fórmulas dentro do modelo.

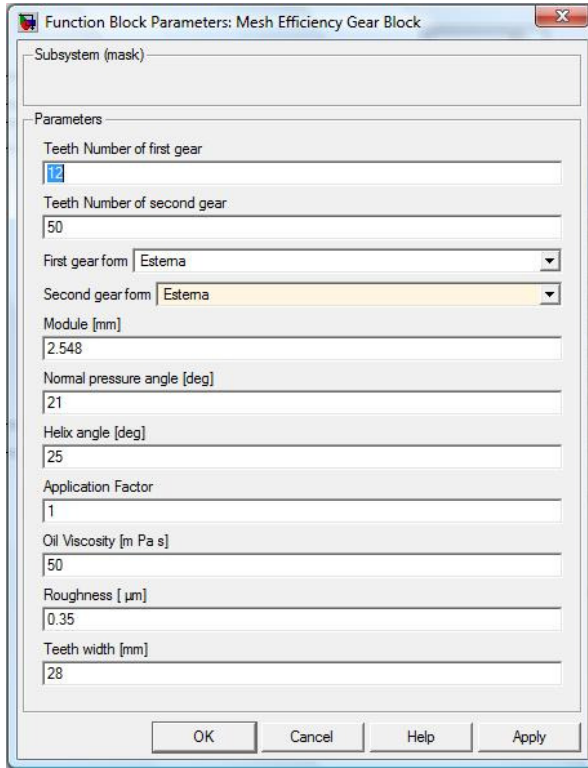


Figura 46 – Máscara do bloco da eficiência mecânica.

A Figura 47 representa a estrutura interna do modelo com os seus respectivos subsistemas, que serão explicados adiante.

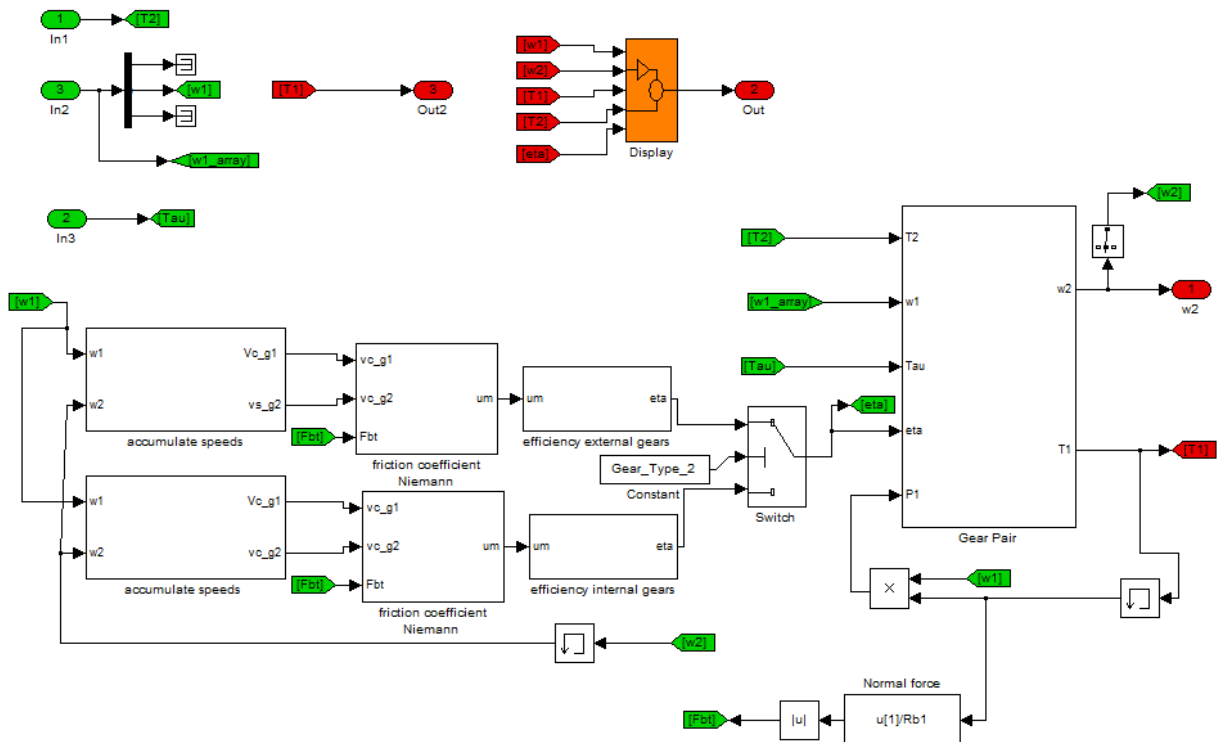


Figura 47 – Estrutura interna do bloco de eficiência mecânica.

### 4.2.1 Subsistemas

Pela Figura 47, é possível observar diversos subsistemas, cada um com seu papel no cálculo da eficiência. Uma coisa importante a ser notada é que o caminho para calcular o rendimento foi dividido em dois modos, um para engrenagens externas (três blocos acima) e outro para internas (três blocos abaixo). Depois existe um interruptor (switch) que escolhe qual valor dos dois caminhos segue adiante. A constante que decide isto é a “Gear\_Type\_2”, que foi definida na máscara inicial e representa o tipo da segunda engrenagem (interna ou externa). Se esta for interna, o valor da constante é 1 e ela permite a passagem do sinal da entrada de baixo (rendimento das engrenagens internas); por outro lado, sendo externa, será igual a 2 e a passagem será na entrada de cima (eficiência das engrenagens externas). Agora olhando dentro de todos esses subsistemas, pode-se dividir em:

#### a) Cálculo da velocidade acumulada

O primeiro subsistema permite calcular a velocidade acumulada para a região de acesso e recesso. Este bloco tem como valores de entrada a velocidade angular em rad/s das duas rodas em contato ( $\omega_1$  e  $\omega_2$ ). As saídas são as velocidades acumuladas calculadas pelas equações tratadas no parágrafo (2.4.2). Os dois blocos são porque a formulação da velocidade acumulada difere para engrenagens externas e internas em contato (veja parágrafo 2.4)

#### b) Coeficiente de atrito (Niemann)

Depois de encontrar os valores das velocidades acumuladas no segmento de contato, é necessário calcular o seu valor médio. Este bloco tem como entrada as velocidades e a força normal calculada através do torque T1 dividido pelo raio de base da primeira engrenagem  $R_{b1}$ . Dentro existe uma função que calcula o coeficiente de atrito através da fórmula de Niemann (eq. 2.72) e este é a saída do bloco.

#### c) Eficiência mecânica

Depois de calcular o coeficiente de atrito da inteira região de contato, é hora de calcular a eficiência mecânica das engrenagens. Este bloco possui apenas uma entrada (coeficiente de atrito) e uma saída (rendimento). Dentro dele, uma função calcula a eficiência considerando os valores anteriormente definidos na máscara (número de dentes, razão de contato, ângulo de pressão, etc) e o valor de entrada, usando a expressão estudada para engrenagens com razão de contato maior do que 1 (Cap. 3).

Finalmente, o último bloco à direita representa a interação entre as rodas dentadas. São cinco entradas: o torque da segunda engrenagem, a velocidade angular da primeira, a relação de transmissão, a eficiência calculada antes e potência que vem da primeira roda. Dentro deste bloco são usadas as expressões (4.86) e (4.87) para determinar as saídas: torque da primeira engrenagem e velocidade angular da segunda. O sinal da relação de transmissão decide o sinal dos elementos de saída. O sinal da potência julga se a primeira é a roda motora (sinal positivo) ou a movida (sinal negativo) e então escolher qual das equações em (4.87) usar.

### 4.3 Modelo da perda por atrito nos rolamentos

Além da perda de potência devido ao atrito no contato entre os dentes das engrenagens, os rolamentos também contribuem com sua parte na eficiência global de uma caixa de câmbio, criando um momento de atrito no eixo primário e no secundário. Antes de encontrar o valor desse momento, é necessário conhecer quanta carga radial e axial o rolamento está suportando. Para calcular essas forças, um modelo de bloco foi criado e é representado na Figura 48.

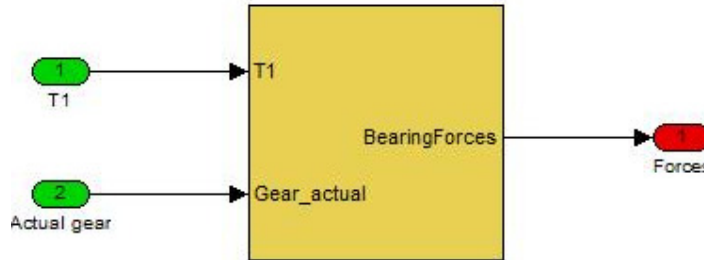


Figura 48 – Bloco do cálculo das forças

Os parâmetros de entrada são o torque do eixo primário e a marcha atual, que seleciona qual das seis possíveis relações de transmissão está engajada. Dependendo de qual for ela, os rolamentos irão receber diferentes carregamentos e este efeito deve ser considerado. O valor da marcha atual varia de 1 até 6 (representando as 6 marchas do câmbio C530).

A definição dessas forças é baseada no torque do eixo primário (de onde vem a potência do motor), nas características das engrenagens e nos parâmetros geométricos do eixo. Então, uma apropriada máscara inicial foi criada com os fatores necessários para o cálculo. A máscara é mostrada na Figura 49. Os parâmetros iniciais são escritos em vetores de seis números, que representam as engrenagens das seis marchas para o eixo primário e secundário. Esses vetores são: número de dentes, módulos, ângulos de pressão e de hélice, e distância de cada engrenagem do rolamento escolhido. A distância entre os rolamentos tanto do primário quanto do secundário recebe um único valor. Para melhor entendimento a Figura 50 mostra algumas propriedades geométricas do eixo primário no plano YZ, onde se pode ver a força radial e axial. Já a Figura 51 mostra o mesmo eixo no plano YX, onde apenas a força tangencial será equilibrada nos rolamentos. Considerando, por exemplo, uma marcha “i” engajada, as forças de reação nos rolamentos são expressas pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned}
 R_{Az} &= \frac{T_m}{r_{p,i}} \left( \frac{\tan \alpha_n}{\cos \beta} \frac{d_{p,i}}{l} + \frac{r_{p,i}}{l} \tan \beta \right) \\
 R_{Ay} &= \frac{T_m}{r_{p,i}} \tan \beta \\
 R_{Ax} &= \frac{T_m}{r_{p,i}} \left( \frac{d_{p,i}}{l} + \frac{r_{p,i}}{l} \tan \beta \right) \\
 R_{Bz} &= \frac{T_m}{r_{p,i}} \left( \frac{\tan \alpha_n}{\cos \beta} \left( 1 - \frac{d_{p,i}}{l} \right) - \frac{r_{p,i}}{l} \tan \beta \right) \\
 R_{Bx} &= \frac{T_m}{r_{p,i}} \left( \left( 1 - \frac{d_{p,i}}{l} \right) - \frac{r_{p,i}}{l} \tan \beta \right)
 \end{aligned} \tag{4.88}$$

É possível observar que as equações acima mostradas foram reestruturadas deixando como parâmetros importantes apenas o torque e as características geométricas das engrenagens da marcha (raio primitivo, distância das engrenagens e rolamentos, ângulo de pressão e hélice). O torque é a única variável, isso porque os outros termos já foram definidos na inicialização da máscara, por serem valores constantes. Então, as equações podem ser reescritas como torque que multiplica uma constante. Dentro da máscara, todas essas constantes são calculadas. Por exemplo, a constante para a força radial na direção Z no rolamento A é:

$$K_{Az} = \frac{1}{r_{p,i}} \left( \frac{\tan\alpha_n d_{p,i}}{l} + \frac{r_{p,i}}{l} \tan\beta \right)$$

As forças no secundário são calculadas da mesma maneira, lembrando que o torque que entra na equação deve ser multiplicado pela relação de transmissão da respectiva marcha.

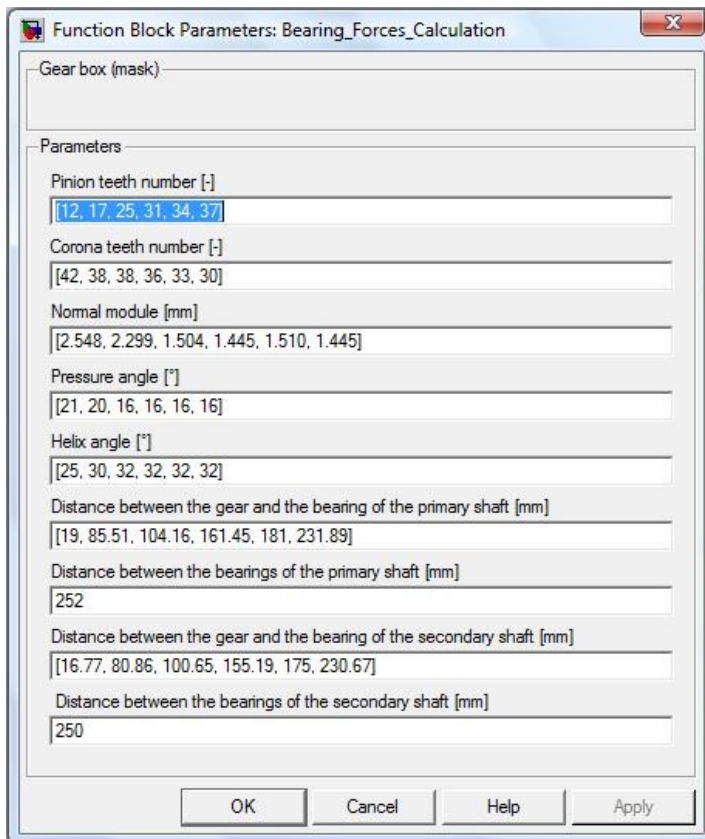


Figura 49 – Máscara inicial para o modelo de cálculo das forças

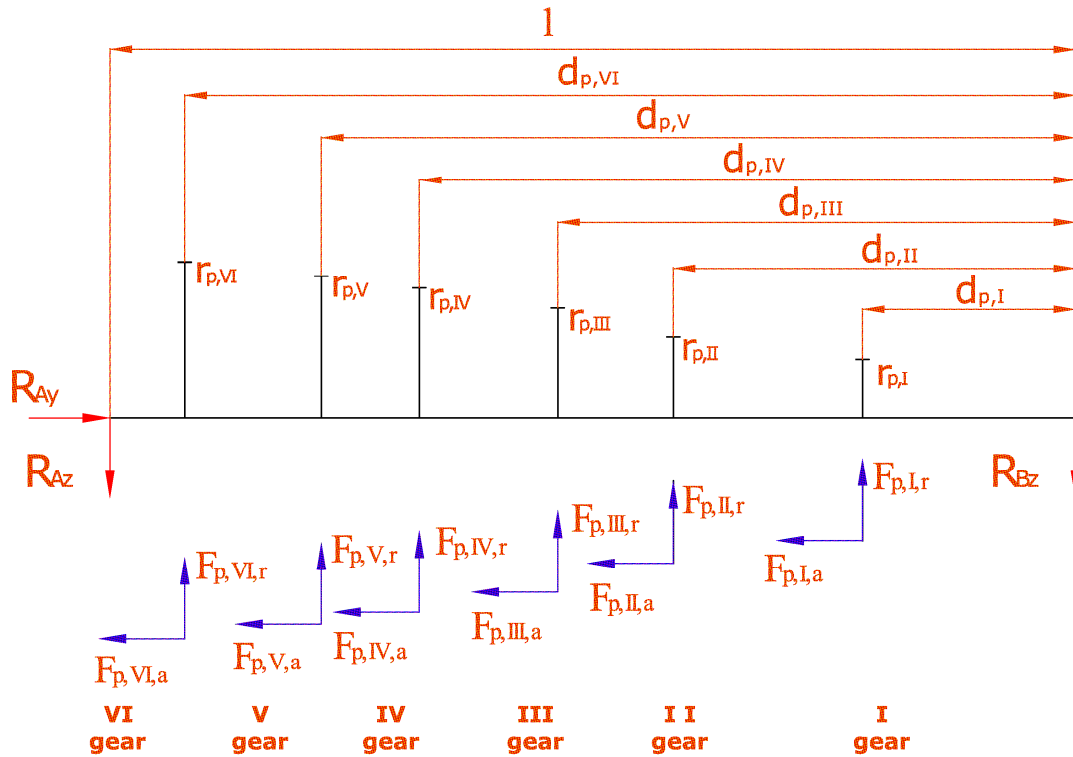


Figura 50 – Representação geométrica do eixo primário com todas as engrenagens e forças (Plano YZ)

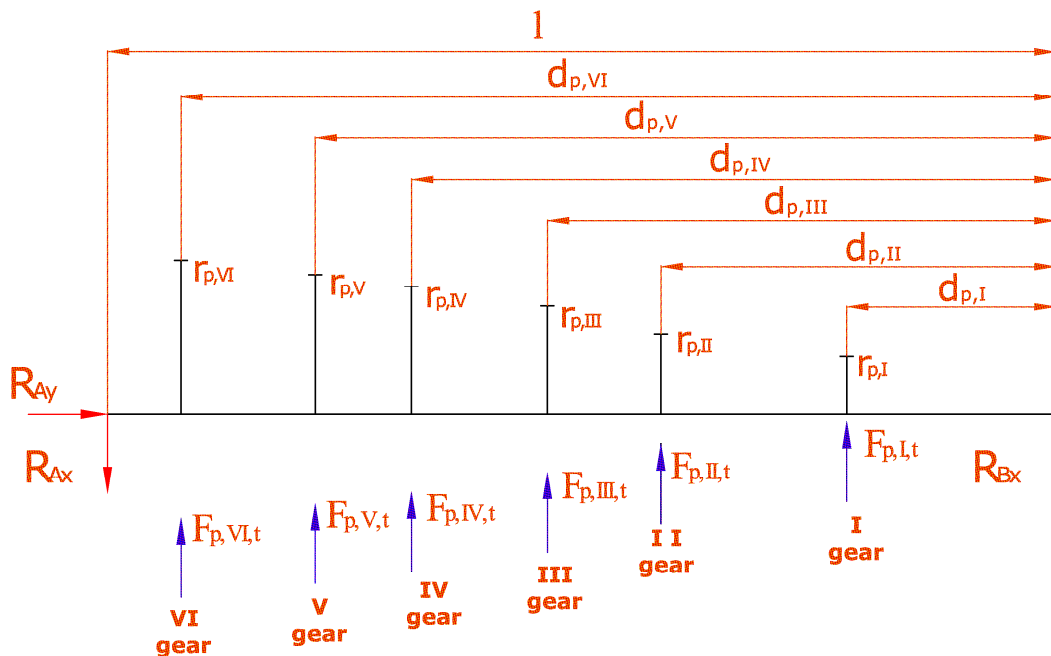


Figura 51 – Representação geométrica do eixo primário com todas as engrenagens e forças (Plano YX)

Dentro do bloco de cálculo das forças existem quatro blocos que representam os quatro rolamentos presentes na caixa de câmbio. Existem dois no primário (chamados de A e B) e dois no secundário (chamados de C e D). A estrutura interna do bloco é mostrada na Figura 52. A inicialização do bloco apresentado na Figura 48 é indicada no Anexo B.2.

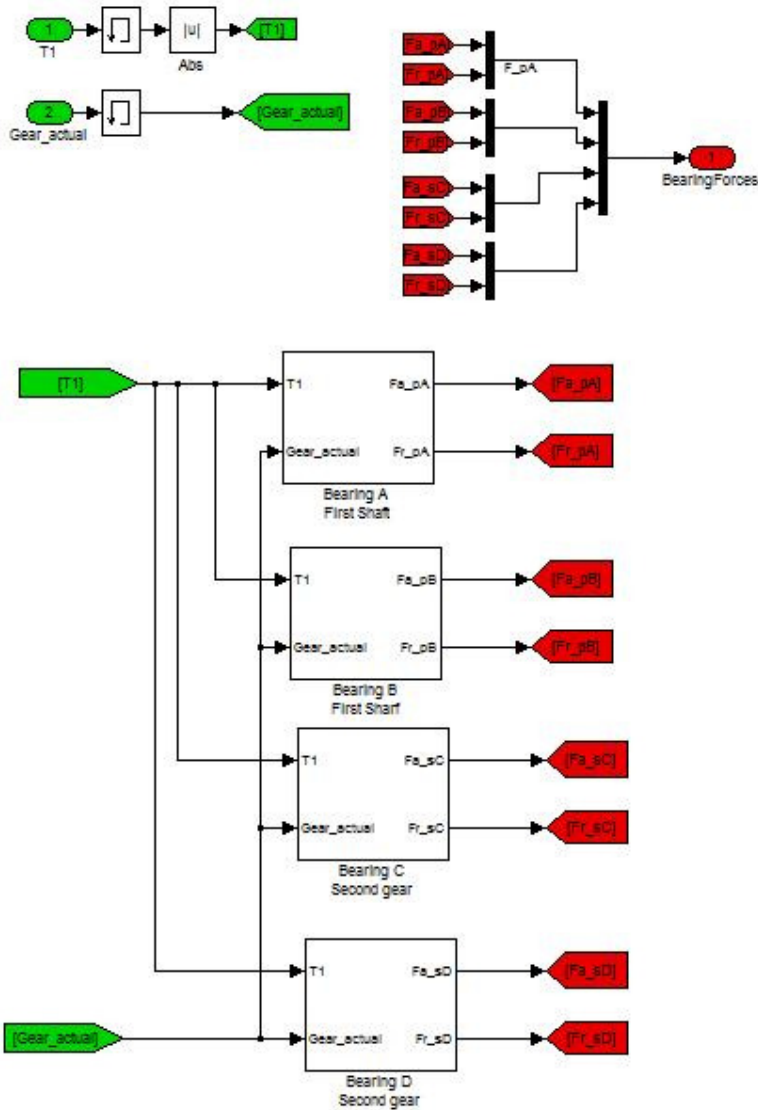


Figura 52 – Dentro do bloco de cálculo das forças nos rolamentos

Dentro de cada um destes blocos ocorre o cálculo real das forças, usando as equações (4.88). Devido ao fato de que as engrenagens apresentadas no câmbio C530 são helicoidais, os rolamentos devem ser capazes de suportar o componente radial e axial do carregamento. Pelo esboço do câmbio em AutoCad (Figura 54), é possível perceber que todos os rolamentos são cônicos com disposição em “X”. Os dois rolamentos de cada eixo irão suportar a força axial. Para estimar a contribuição de cada parte, foi adotado o método de cálculo proposto pela SKF. A Figura 53 mostra as condições para avaliar o carregamento axial suportado pelos rolamentos, extraído do site comercial da SKF [17].



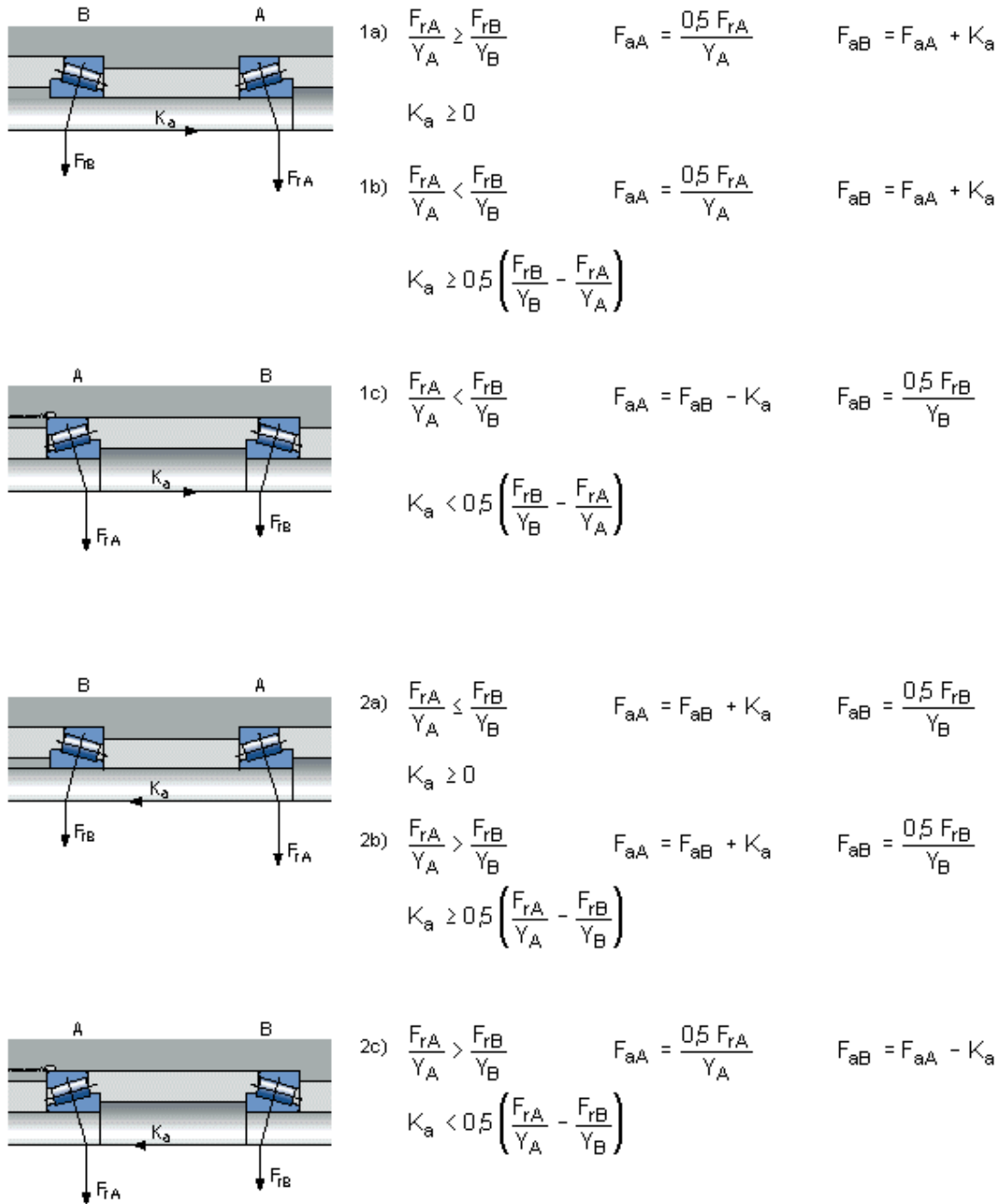


Figura 53 – Carregamento axial dividido entre um conjunto de rolamentos cônicos

A seguir é mostrada a linguagem de programação usada para calcular a distribuição axial entre os rolamentos:

```
function [FaA, FaB] = fcn(Fa, FrA, FrB, YA, YB)

Ka=abs(Fa);
% Fa>0 if force direct from A to B bearing
if Fa>=0

    if FrA/YA >= FrB/YB
```

```
FaA = -0.5*FrA/YA;
FaB = abs(FaA)+Ka;

else
  if Ka >= 0.5*(FrB/YB - FrA/YA)
    FaA = -0.5*FrA/YA;
    FaB = abs(FaA)+Ka;

    else
      FaB = 0.5*FrB/YB;
      FaA = -(FaB - Ka);
    end
  end

else
  % Fa<0 if direct from B to A bearing
  if FrA/YA <= FrB/YB

    FaB = 0.5*FrB/YB;
    FaA = -(FaB + Ka);

  else

    if Ka >= 0.5*(FrA/YA - FrB/YB)
      FaB = 0.5*FrB/YB;
      FaA = -(FaB + Ka);

    else

      FaA = -0.5*FrA/YA;
      FaB = abs(FaA)-Ka;
    end
  end

end

end
```

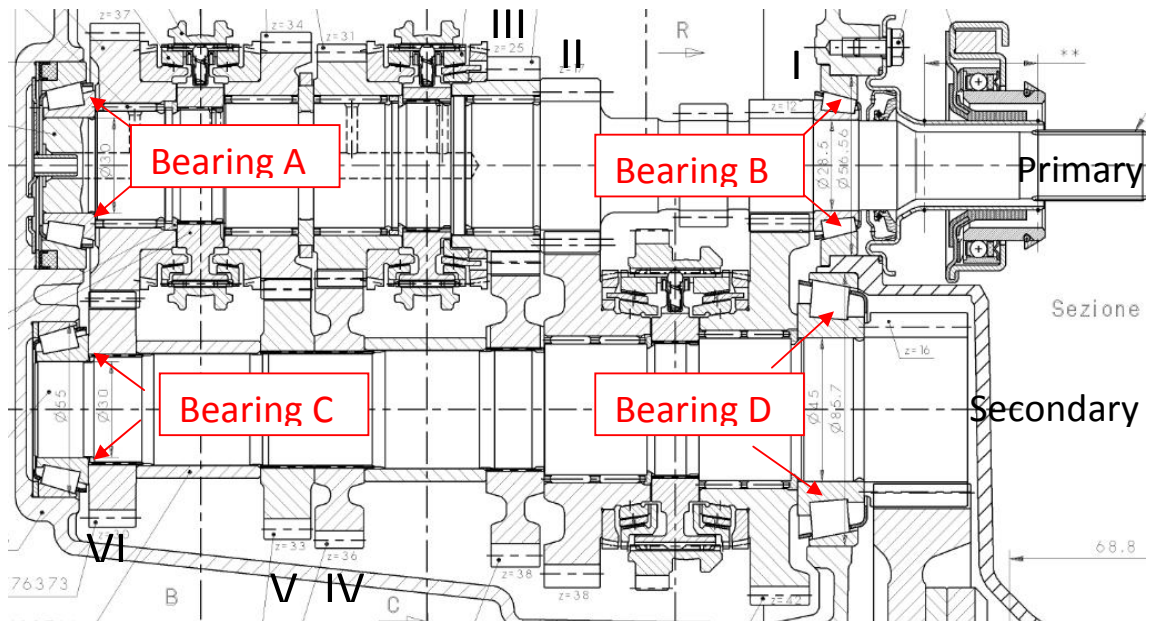


Figura 54 – Seção do câmbio C530 com seis marchas.

Depois de calcular essas forças, o próximo passo é colocá-las dentro do modelo computacional para produzir como valores de saída o momento de fricção e energia dissipada no rolamento. O algoritmo de cálculo usado foi o mesmo que aquele utilizado pela SKF, no seu site comercial. Mas antes de tudo, os quatro rolamentos devem ser escolhidos para depois se obterem os seus parâmetros através do site.

Medindo as características geométricas da figura em AutoCad do câmbio C530 acima, a seleção dos tipos de rolamentos é mostrada na próxima figura com parâmetros obtidos pelo site SKF.

	Bearing A	Bearing B	Bearing C	Bearing D
Type	30206 J2/Q	1985/1922/Q	32006 X/Q	30209 J2/Q
d [mm]	30	28.575	30	45
D [mm]	62	57.15	55	85
B [mm]	17.25	19.845	17	20.75
v [mm <sup>2</sup> /s]	34.3	34.3	34.3	23.6
Krs	6E-08	6E-08	3E-08	3E-08
Kz	6	6	6	6
$\mu$ sl	0.002	0.002	0.002	0.002
Ks1	0	0	0	0
Ks2	0	0	0	0
$\beta$	0	0	0	0
Vm	0	0	0	0
Kroll	1.2E-11	1.2E-11	1.4E-11	1.3E-11
Y	1.6	1.8	1.4	1.5

Figura 55 – Dados dos rolamentos da caixa de câmbio manual C530.

Onde  $d$  é o diâmetro interno,  $D$  é o diâmetro externo,  $B$  é largura do rolamento,  $\nu$  é a viscosidade cinemática. Os parâmetros adimensionais  $K_{rs}$ ,  $K_z$ ,  $\mu_{sl}$ ,  $K_{s1}$ ,  $K_{s2}$ ,  $\beta$ ,  $V_m$ ,  $K_{roll}$  dependem do tipo de rolamento escolhido e estão colocados dentro da máscara inicial do modelo de rolamento SKF. Depois de escolhido o mancal, alguns testes são realizados variando as forças axial e radial, e os parâmetros encontrados foram inseridos no modelo (bloco azul da Figura 57) para encontrar a dissipação de potência. Os fatores de entrada são a velocidade de rolagem, a carga axial e a carga radial aplicadas no mancal. A saída será o torque de fricção causado e isto significa que o torque inicial transmitido do motor para a caixa de câmbio se reduz por causa dessa resistência de atrito.

Um modelo para um simples mancal é mostrado abaixo (Figura 56). As entradas são a velocidade angular, o torque inicial e o vetor com as forças axial e radial. As saídas são a perda, o momento de atrito e torque final (considerando a perda devido ao atrito).



Figura 56 – Modelo de rolamento.

Dentro do bloco (Figura 57) se pode ver o modelo de mancal SKF (azul). Foi usada a função tangente hiperbólica para descrever o momento de atrito do mancal, e foi adotado um limiar de velocidade igual a 1 rad/s.

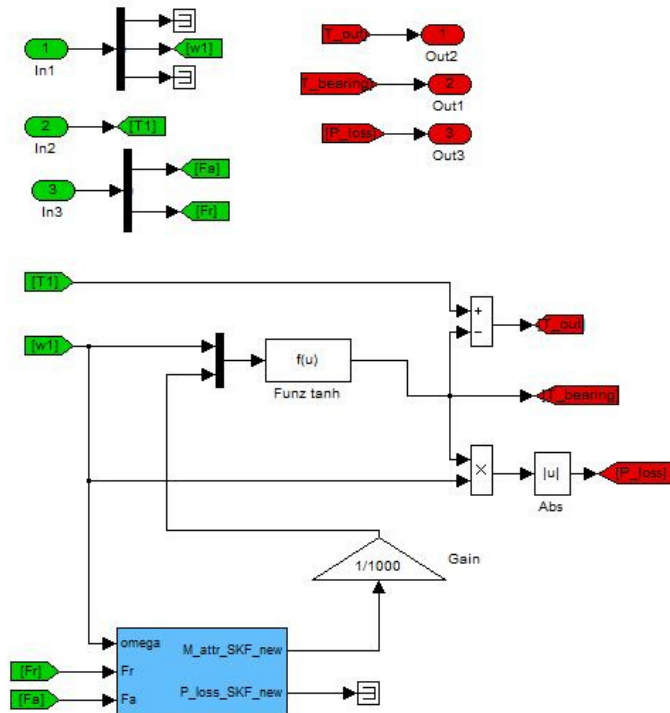


Figura 57 – Estrutura interna do bloco de mancal.

## 4.4 Modelo da perda devido ao lubrificante (Churning Loss)

### 4.4.1 Estudo teórico

As perdas por “churning” são causadas pelo movimento do óleo lubrificante ao redor das rodas dentadas da caixa de câmbio. De estudos previamente realizados foram estabelecidas duas fórmulas para dois tipos de regime, baixa velocidade (1000 – 3000 rpm) e alta velocidade (5000 – 7000 rpm) da engrenagem. Albers [16] em seu trabalho propôs aprimoramento da fórmula para alta velocidade e encontrou uma conexão entre os dois tipos de regime. Ele formulou um número de Reynolds que verifica qual fórmula deverá ser usada. Após diversos estudos nesse assunto, ele estimou a expressão para o torque de resistência na engrenagem como:

$$C_{churn} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 S_m R_p^3 C_m \quad (4.89)$$

onde,

$C_{churn}$  = torque de resistência [Nm]

$\rho$  = densidade do óleo [ $kg/m^3$ ]

$\omega$  = velocidade angular da engrenagem [rad/s]

$S_m$  = área da superfície molhada [ $m^2$ ]

$R_p$  = raio primitivo da roda [m]

$C_m$  = coeficiente adimensional do torque resistivo [-]

Assim, para se calcular a potência dissipada se deve multiplicar o torque de resistência e a velocidade angular:

$$P_{churn} = C_{churn} \omega \quad (4.90)$$

O principal desafio é encontrar uma expressão adequada para o coeficiente  $C_m$  para altas e baixas velocidades. Albers [16] e depois Changenet e Vexel [19] reformularam as equações para velocidades baixas e elevadas, obtendo resultados melhores para a grande maioria dos testes experimentais. Chegaram à seguinte fórmula para o coeficiente do torque resistivo para altas velocidades, que não considera mais o número de Reynolds:

$$C_m = 3,644 \left(\frac{h}{D_p}\right)^{0,1} \left(\frac{V_o}{D_p^3}\right)^{-0,35} Fr^{-0,88} \left(\frac{b}{D_p}\right)^{0,85} \quad (4.91)$$

Para velocidades reduzidas, o coeficiente é dependente do Reynolds e pode ser expresso como:

$$C_m = 1,366 \left(\frac{h}{D_p}\right)^{0,45} \left(\frac{V_o}{D_p^3}\right)^{0,1} Fr^{-0,6} Re^{-0,21} \quad (4.92)$$

onde,

$h$  = profundidade submersa da engrenagem [m]

$V_o$  = volume de óleo no cárter [ $m^3$ ]

$D_p$  = diametro primitivo [m]

$Fr$  = número de Froude [-]

$Re$  = número de Reynolds [-]

$b$  = largura de face da engrenagem [m]

O volume do óleo  $V_o$  dentro do cárter pode ser calculado através da seguinte fórmula:

$$V_o = wl \left( h_{axis} - R_p \left( 1 - \frac{h}{R_p} \right) \right) \quad (4.93)$$

onde,

$w$  = largura do cárter [m]

$l$  = comprimento do cárter [m]

$h_{axis}$  = altura do eixo até a base do cárter [m]

A Figura 58 representa os parâmetros da estrutura do cárter.

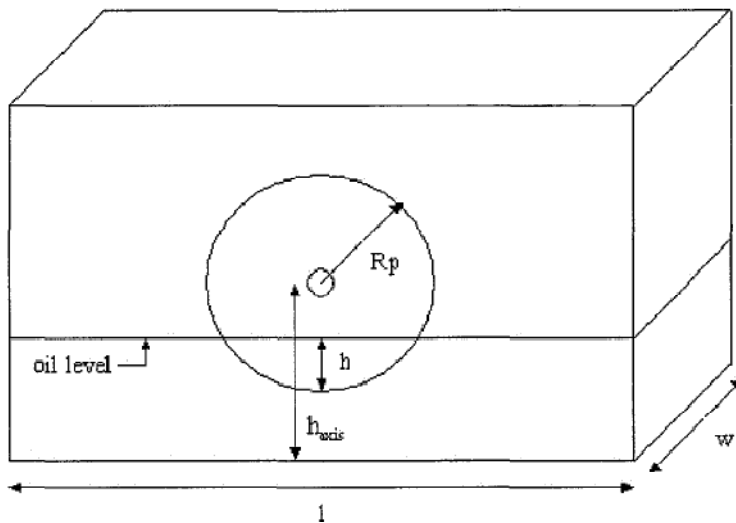


Figura 58 – Vista da estrutura interna do cárter [16]

O número de Froude  $Fr$  é definido por:

$$Fr = \frac{\omega^2 R_p}{g} \quad (4.94)$$

onde,

$g$  = aceleração da gravidade [ $m/s^2$ ]

Para encontrar a relação entre as duas fórmulas para baixa e alta velocidade de rotação, um novo número de Reynolds foi derivado por ele. Este número determina qual equação, sob certas condições, será usada. O novo número de Reynolds é definido como:

$$Re = \frac{v_t b}{\nu} \quad (4.95)$$

onde,

$v_t = \text{velocidade de rotação [m/s]}$

$\nu = \text{viscosidade do óleo [m}^2/\text{s]}$

O intervalo de valores do número de Reynolds que define a zona de transição é de 6000 a 9000. Para valores maiores que 9000, deve-se usar o coeficiente de torque resistivo para altas velocidades proposto por Albers [16]. Por outro lado, se for menor do que 6000, escolhe-se o  $C_m$  para baixa velocidade. Se a velocidade estiver na zona de transição se utiliza uma interpolação linear entre as duas fórmulas.

#### 4.4.2 Modelagem dos blocos orientados

Baseado no estudo anterior de perda por “churning” realizado por Albers, um modelo computacional foi desenvolvido para considerar o efeito desse prejuízo na eficiência do câmbio, do mesmo modo feito para o atrito no contato dos dentes e nos rolamentos.

Através do desenho técnico do câmbio C530, é possível descobrir o nível de óleo dentro da caixa e do diferencial. Como o lubrificante ocupa também o diferencial, este deve ser considerado no cálculo das perdas da mesma maneira.

A Figura 59 é uma vista transversal que mostra o nível de óleo (região vermelha) dentro da caixa de câmbio. É possível perceber que apenas as engrenagens do eixo secundário e a engrenagem do diferencial estão banhadas em óleo. As engrenagens do primário não ficam banhadas, mas são lubrificadas devido o movimento do secundário.

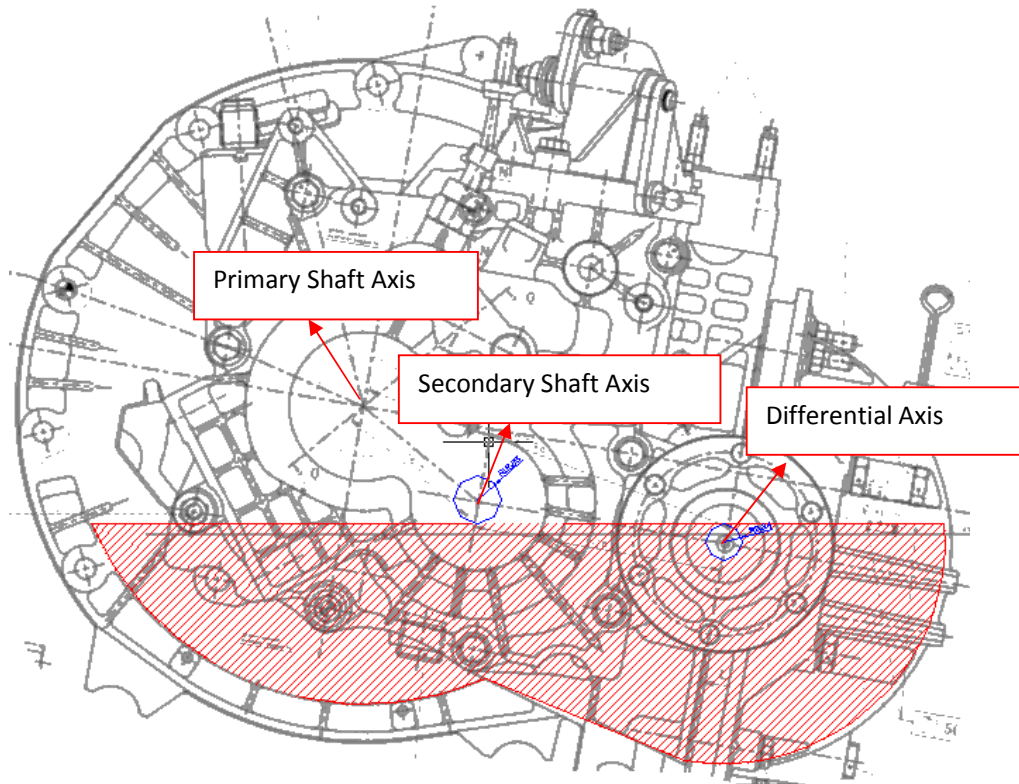


Figura 59 – Nível de óleo no C530

Então, este modelo deve considerar a resistência do óleo causada em todas as engrenagens presentes no secundário e na coroa do diferencial. Mas primeiro, a velocidade de cada uma deve ser deduzida, e a velocidade irá depender de qual marchar foi engatada e da posição do sincronizador (se no primário ou secundário).

A Figura 54 ilustra os eixos da caixa de transmissão. Pela figura, se observa que existe apenas um único sincronizador no eixo secundário (responsável pela primeira e segunda marcha) e dois no primário (responsáveis pela terceira-quarta e quinta-sexta). Isto significa que para as duas primeiras marchas, a roda fixa é localizada no primário. E para as outras marchas (III, IV, V e VI), a engrenagem fixa é localizada no secundário. Então, para estimar a velocidade angular dessas últimas é óbvio, porque será igual ao valor da atual velocidade angular do eixo secundário. Mas, considerando a primeira e segunda roda, suas velocidades não necessariamente serão a mesma que o secundário. Estas dependerão da velocidade do primário e da relação de transmissão atual.

Por exemplo, considerando a primeira marcha engatada. Supondo que a velocidade do primário é 1000 rpm e a relação de transmissão é 4, então a velocidade do secundário será 250 rpm. A velocidade da primeira (porque está conectada), terceira, quarta, quinta e sexta roda no eixo secundário será a mesma do eixo (250 rpm), porque elas são fixas. Já a velocidade da segunda roda (supondo relação de transmissão igual a 2) é diferente e será igual a 500 rpm (velocidade do primário dividida pela relação de transmissão da segunda marcha). Para avaliar cada roda dentada, foi criado bloco chamado “cinemática das engrenagens do câmbio”, que recebe a velocidade atual do primário e secundário, e retorna a velocidade de cada roda, incluindo a engrenagem do diferencial. Ao interno, existe um bloco de decisão para



cada roda, que decide qual valor de velocidade escolher, pela posição do sincronizador. Um exemplo disso é mostrado na Figura 60. Basicamente, se “Syn\_p” é igual a “p” passa o sinal de cima “w\_s” (velocidade angular do secundário) e se “Syn\_p” é igual a “s” então passa o sinal abaixo “w\_p/Tau\_i” (velocidade do primário dividida pela relação de transmissão para a roda considerada).

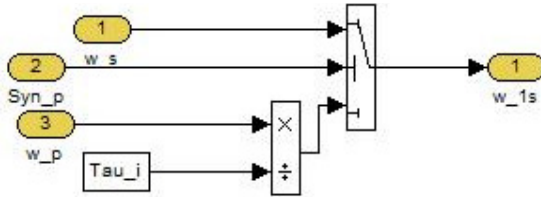


Figura 60 – Bloco que escolhe a velocidade das engrenagens do secundário

Depois de obter o valor de cada roda dentada, este deve ser reportado para outro bloco “Churning\_Loss\_Gearbox” (Figura 61), que calcula o torque de resistência e a potência dissipada devido ao lubrificante.

Este bloco tem como entrada três parâmetros: o valor da relação de transmissão atual (marcha enganchada), o vetor com as velocidades das engrenagens do secundário (que vem do bloco anterior) e a velocidade angular do secundário.

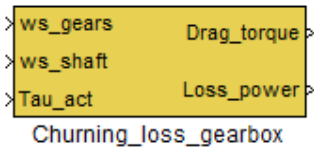


Figura 61 – Modelo da perda devido ao lubrificante

A máscara inicial (ver Figura 62) foi criada para receber todos os parâmetros estáticos necessários para calcular os coeficientes e outros fatores geométricos que são usados nas equações anteriores do coeficiente, do torque resistivo e da perda de potência. Estas variáveis iniciais são: o número de dentes de todas as engrenagens, ângulo de pressão, ângulo de hélice, módulo, viscosidade do óleo, largura dos dentes, densidade, volume e nível do óleo. O nível de óleo foi assumido como a distância entre o eixo e a superfície do óleo. Pela Figura 59, pode-se perceber que o nível está abaixo do eixo do secundário (valor negativo) e acima do eixo do diferencial (valor positivo). Este valor é usado para calcular a profundidade da engrenagem no lubrificante, na máscara de inicialização. Os valores encontrados para o secundário e diferencial são:

$$l_{oil_s} = -12.28 \text{ mm}$$

$$l_{oil_D} = 9.21 \text{ mm}$$

Então, para encontrar o valor da altura submersa  $h$  para cada roda dentada, a expressão é:

$$h = R_i + l_{oil}$$

onde,

$R_i = \text{raio primitivo da roda [mm]}$   
 $l_{oil} = \text{nível de óleo a partir do eixo [mm]}$

Dentro da inicialização da máscara existe um algorítmico que extrai, por exemplo, a superfície banhada, a altura submersa e outros fatores para serem usados na avaliação da perda por “churning” proposta foi Albers. O esquema de linguagem da inicialização pode ser visto no Anexo B.3.

Na Figura 63 é mostrado um subsistema, dentro do bloco da perda por lubrificante, que calcula o momento de resistência e as perdas para cada engrenagem do secundário. O bloco “selector” escolhe o valor exato da velocidade da roda dentada que deve ser usada. A Figura 64 mostra o esquema dentro deste bloco, onde pode ser visto um subsistema que calcula o número de Reynolds, de Froude, o coeficiente e torque resistivo e dissipação (através dos valores inseridos e extraídos na máscara inicial, usando a teoria estudada no parágrafo 4.4.1).

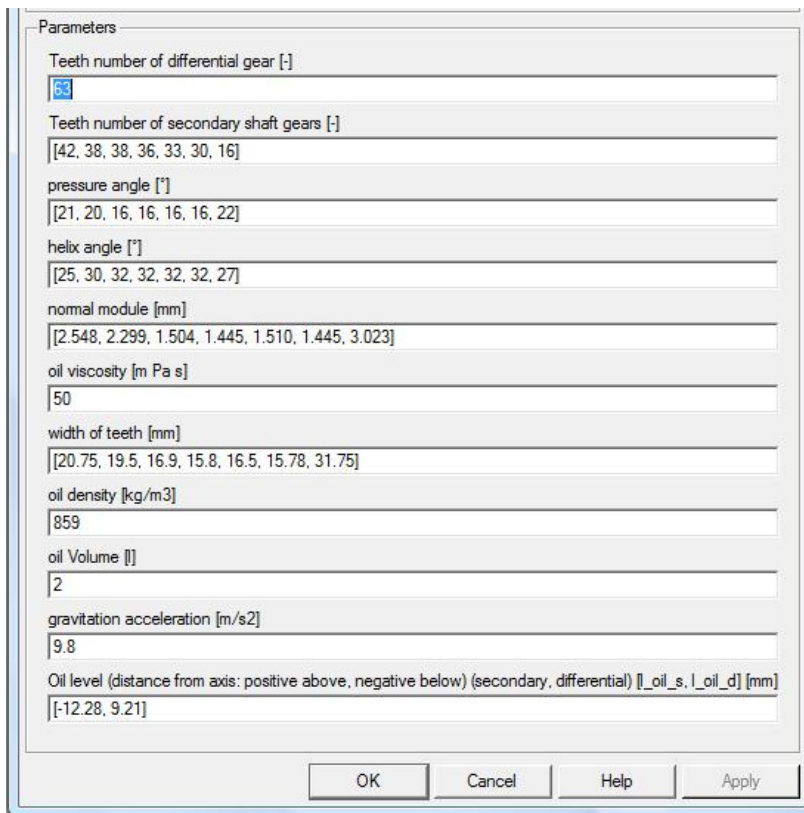


Figura 62 – Máscara do modelo de perda devido ao lubrificante

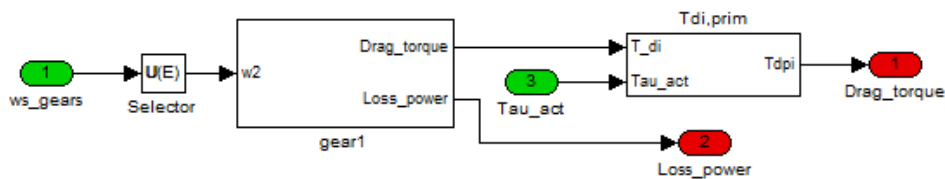


Figura 63 – Parte interior do bloco de “churning loss”

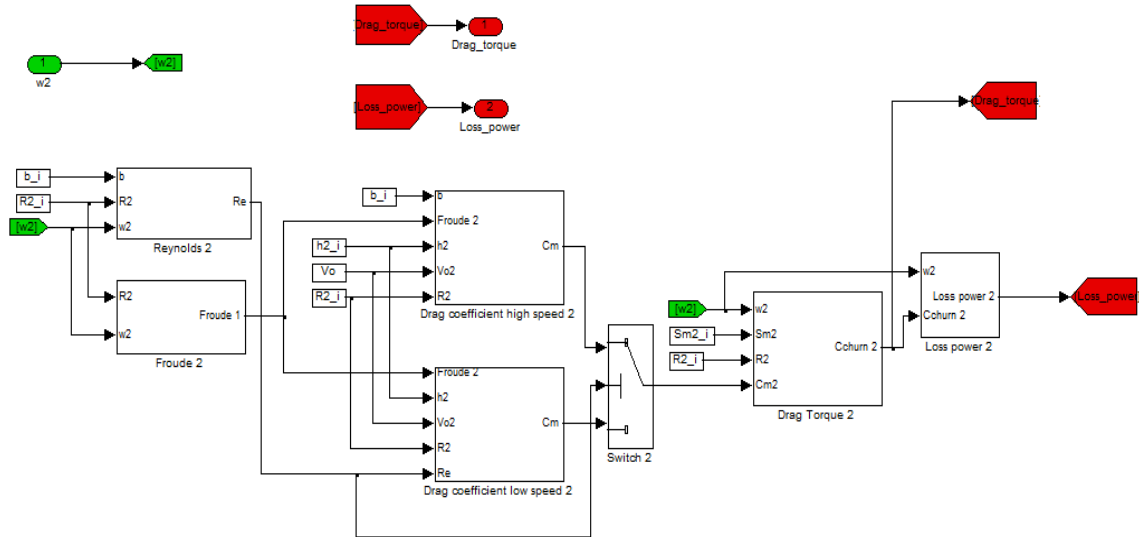


Figura 64 – Dentro do bloco que calcula o torque resistivo e a potência dissipada.

Referindo-se de novo à Figura 63, depois de calcular o torque resistivo para cada engrenagem, este momento deve ser reportado ao eixo primário para ser considerado nas equações de equilíbrio dinâmico de um sistema de um grau de liberdade, que será explicado a seguir. Para reportar esse torque, se usa um sistema parecido com o caso da velocidade visto antes (Figura 60). Existe um bloco de decisão (switch) que escolhe qual relação de transmissão adotar: se a engrenagem tem o sincronizador no primário, o torque é passado pelo valor de relação de transmissão da marcha engatada, que não é necessariamente o mesmo para a roda analisada. Se o sincronizador está no secundário, a relação usada deve ser aquela relativa à engrenagem estudada e não necessariamente à marcha engatada. Isto é:

$$T_{drag,p,i} = T_{drag,i} / \tau_{actual} \quad \text{se o sincronizador está no primário}$$

$$T_{drag,p,i} = T_{drag,i} / \tau_i \quad \text{se o sincronizador está no secundário}$$

onde,

$T_{drag,p,i}$  = torque resistivo da engrenagem  $i$  reportado ao primário

$T_{drag,i}$  = torque resistivo da engrenagem  $i$

$\tau_{actual}$  = relação de transmissão da marcha engatada

$\tau_i$  = relação de transmissão da roda dentada  $i$

Outra coisa a ser lembrada na Figura 64 é o bloco “switch” que seleciona qual coeficiente usar. Se Reynolds é maior que 6000, então o coeficiente para alta velocidade deve ser adotado (como proposto por Albers [16]).

A Figura 65 mostra o resultado experimental obtido por Albers, considerando as seguintes geometrias de engrenagens: módulo = 1mm, diâmetro primitivo = 100mm, largura do dente = 20mm e viscosidade = 20mm<sup>2</sup>/s. A Figura 66 ilustra o modelo proposto neste trabalho de

formatura para a mesma geometria de engrenagem. O resultado mostra valores aproximadamente iguais em relação ao experimento de Albers.

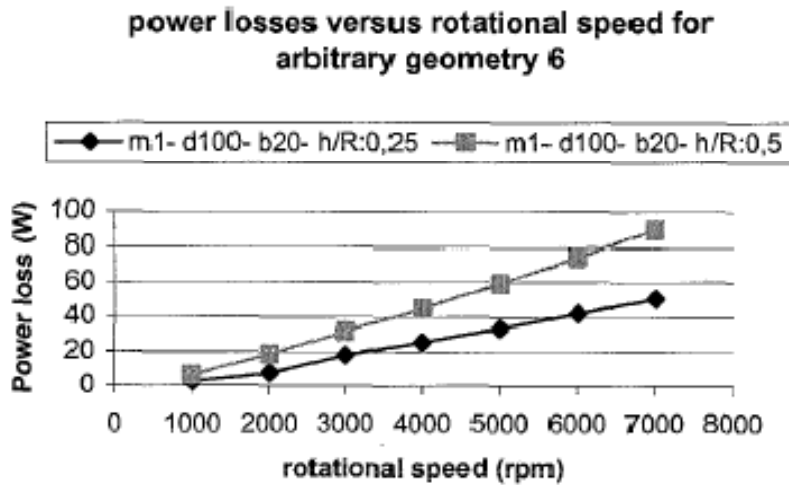


Figura 65 – Perda de potência versus velocidade, medido por Albers [16] (geometria 6)

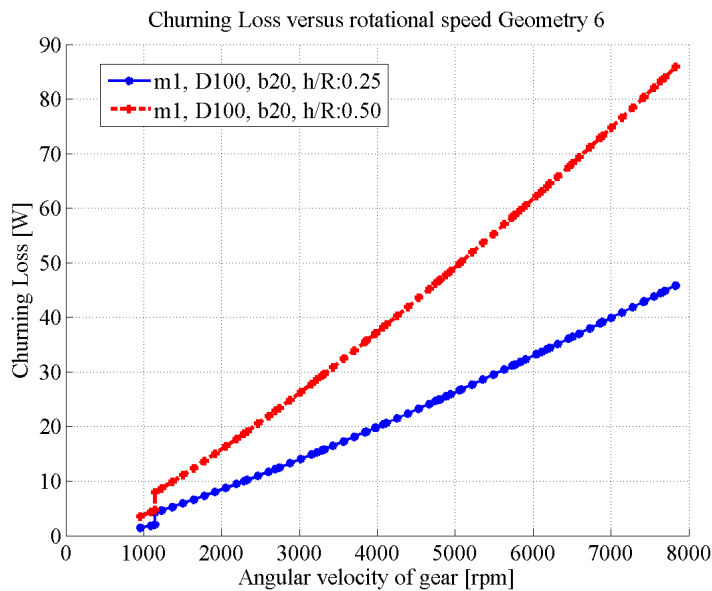


Figura 66 – Perda de potência “churning” versus velocidade angular (geometria 6)

Modificando a geometria, por exemplo, as propriedades da geometria 7 usada por Albers: módulo = 2mm, diâmetro primitivo = 200mm, largura do dente = 15mm e viscosidade = 60mm<sup>2</sup>/s. A Figura 67 mostra o comportamento da perda quando a velocidade aumenta. O raio é maior do que o anterior (geometria 6), então, a quantidade de perda é mais considerável. A descontinuidade apresentada no gráfico abaixo é devido à passagem de uma condição de baixa velocidade para uma de elevada velocidade, isto é, o novo número de Reynolds supera o valor de 6000 e conseqüentemente a fórmula usada para o coeficiente de resistência também varia.

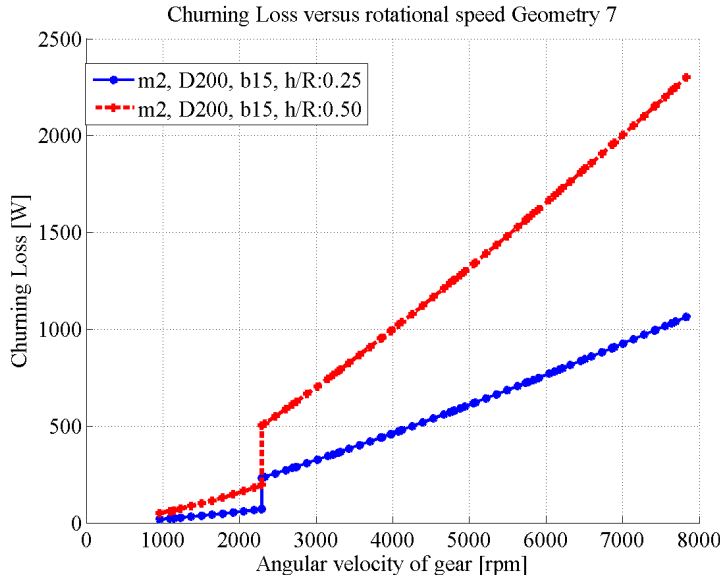


Figura 67 – Perda de potência “churning” versus velocidade angular (geometria 7)

## 4.5 Modelo de perda por ventilação do ar (Windage Loss)

### 4.5.1 Estudo teórico

Além de se estudarem os efeitos do óleo lubrificante no interior do câmbio, existe um outro fluido (como por exemplo o ar) que tem papel importante no rendimento energético, principalmente quando se consideram elevadas velocidades de rotação das engrenagens.

Eastwick e Johnson [21], em seu trabalho, descreveram vários estudos realizados anteriormente para investigar a perda por ventilação do ar nas rodas dentadas em movimento. Chegaram à conclusão que enquanto é claro perceber, através de todos esses modelos, que a velocidade de rotação, parâmetros geométricos, densidade do fluido, entre outros, são importantes, o grau de efeito e as soluções gerais para se reduzirem as perdas são menos claras. E ainda diz que uma metodologia de modelagem deve ser realizada, para ser aplicada a todas as configurações e tipos de engrenagens.

Quem mais próximo chegou a um modelo adequado foi Changenet et al. [20]. Em seu estudo eles analisaram e compararam dois outros métodos precedentes, o de Anderson e Loewenthal [22] e Dawson [23]. Além disso, fizeram uma análise dimensional das engrenagens e através de vários dados experimentais obtidos com diversos tipos de rodas dentadas. Assim, chegaram a uma formulação para o coeficiente do momento de atrito causado por ventilação (windage). Esse coeficiente depende principalmente do raio primitivo, do número de dentes, do número de Reynolds, da largura dos dentes, entre outros, e pode ser expresso pela seguinte equação:

$$C_t = 60Re^{-0,25} \left(\frac{b}{R}\right)^{0,8} Z^{-0,4} \left\{ \left(\frac{h_1}{R}\right)^{0,56} + \left(\frac{h_2}{R}\right)^{0,56} \right\} \quad (4.96)$$

onde,

$Re = \text{número de Reynolds}$

$R = \text{raio primitivo [m]}$

$b = \text{largura do dente [m]}$

$Z = \text{número de dentes}$

$h_{1,2} = 0,5^{1/0,56}R$  quando não existe nenhum obstáculo ao lado da engrenagem

Assim, o momento de atrito pode ser definido através deste coeficiente e outros parâmetros dimensionais, tais como:

$$M_g = \frac{1}{2} \rho \omega^3 R^5 C_t \quad (4.97)$$

onde,

$M_g = \text{momento de atrito causado pelo fluido [Nm]}$

$\rho = \text{densidade do ar [kg/m}^3\text{]}$

$\omega = \text{velocidade angular da roda [rad/s]}$

$C_t = \text{coeficiente do momento de atrito}$

Da mesma maneira, para calcular a perda em [W] basta multiplicar esse momento de atrito pela velocidade angular da engrenagem, como mostrado no parágrafo anterior (4.4.1).

Changenet et al [20] realizaram várias simulações com diversas tipologias de rodas dentadas para validar o modelo proposto acima. Um exemplo é o gráfico mostrado na Figura 68, que compara os valores coletados experimentalmente com os valores obtidos através das fórmulas precedentes. Pode-se perceber que este modelo apresenta valores relativamente honestos para esses tipos de engrenagens, mostradas na tabela 2 [20].

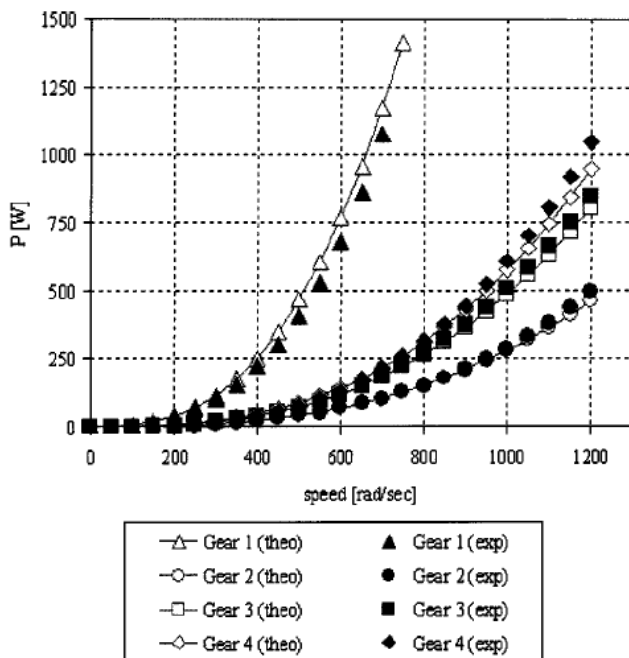


Figura 68 – Comparação entre os resultados experimentais e os do modelo de análise dimensional [20]

#### 4.5.2 Modelagem dos blocos orientados

A modelagem nesse caso é muito parecida com a do caso anterior (churning loss), só que agora, as engrenagens do eixo primário devem ser consideradas, pois elas também circulam no ar dentro da caixa de câmbio. Aproveitando o mesmo bloco que calcula as velocidades de todas as engrenagens, descrito no parágrafo (4.4.2) e Figura 60, foram aplicadas as equações anteriores para avaliar como cada engrenagem contribui na perda total por “windage loss”. As estruturas dos blocos utilizados para esse caso são praticamente as mesmas que foram usadas para estimar a perda devido ao óleo lubrificante.

Mas para usar corretamente os torques gerados por cada engrenagem nas equações de equilíbrio dinâmico, devem ser tomados alguns cuidados. Para as engrenagens do eixo secundário, os torques devem ser reportados para o eixo primário, e este procedimento já foi descrito anteriormente no estudo da perda de potência por “churning”. Agora, para as engrenagens do primário, adota-se o seguinte esquema:

$$T_{drag,p,i} = T_{drag,i} \tau_i / \tau_{actual} \quad \text{se o sincronizador está no primário}$$

$$T_{drag,p,i} = T_{drag,i} \quad \text{se o sincronizador está no secundário}$$

onde,

$T_{drag,p,i}$  = torque resistivo da engrenagem  $i$  reportado ao primário

$T_{drag,i}$  = torque resistivo da engrenagem  $i$

$\tau_{actual}$  = relação de transmissão da marcha engatada

$\tau_i$  = relação de transmissão da roda dentada  $i$

Assim, os torques encontrados para as engrenagens da primeira e segunda marchas podem ser passados diretamente para o primário, pois estas são fixas a ele. Já as outras marchas necessitam multiplicar o torque pela relativa relação de transmissão daquela marcha e depois dividir o valor pela relação de transmissão da marcha atual, reportando assim o torque para o eixo primário, pois essas engrenagens não são fixadas no primário.

A Figura 69 mostra uma simulação do modelo proposto nesse trabalho para o cálculo da perda de potência por “windage” para as mesmas geometrias de engrenagens usadas por Changenet em seu trabalho. Pode-se perceber que os valores são muito parecidos com os encontrados por ele na Figura 68.

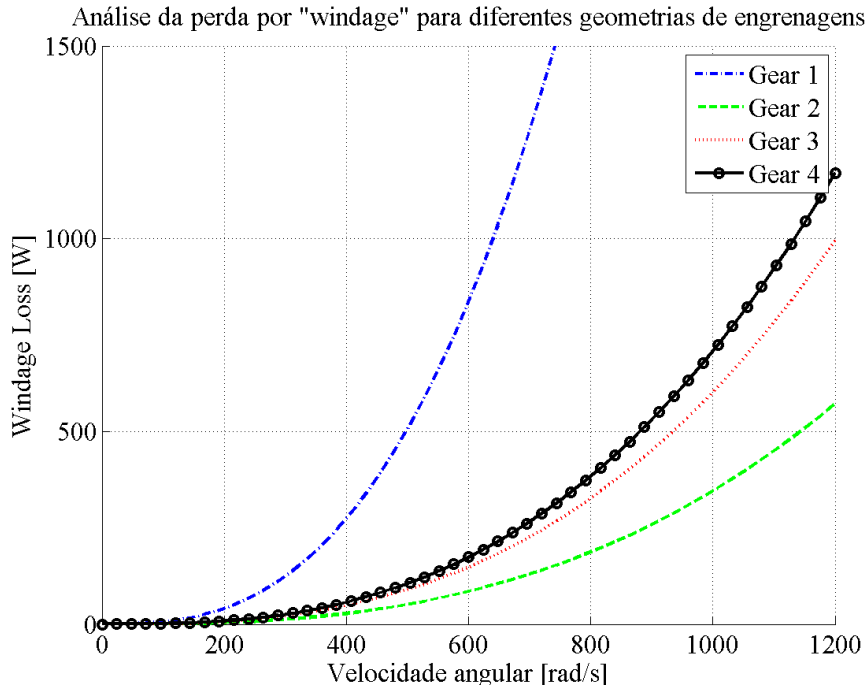


Figura 69 – Resultados das perdas por “windage” obtidas do modelo para 4 tipologias de engrenagens

#### 4.6 Modelos de câmbio e diferencial modificados

Agora, todos esses contributos de perda modelados anteriormente (atrito nos dentes, rolamentos e óleo lubrificante) serão implementados dentro do bloco de câmbio manual de um modelo de veículo completo (já desenvolvido antes, pelo Departamento de Engenharia Mecânica do Politecnico di Torino, Itália) para verificar o comportamento dessas energias de dissipação, em diferentes condições de movimento do veículo. A Figura 70 representa o modelo completo do carro, onde se pode ver o motor, a embreagem, a caixa de câmbio, o diferencial, os semi-eixos, as rodas e o veículo. A parte modificada e estudada neste presente trabalho é o modelo de câmbio manual (circulado em vermelho) e o diferencial (circulado em verde).



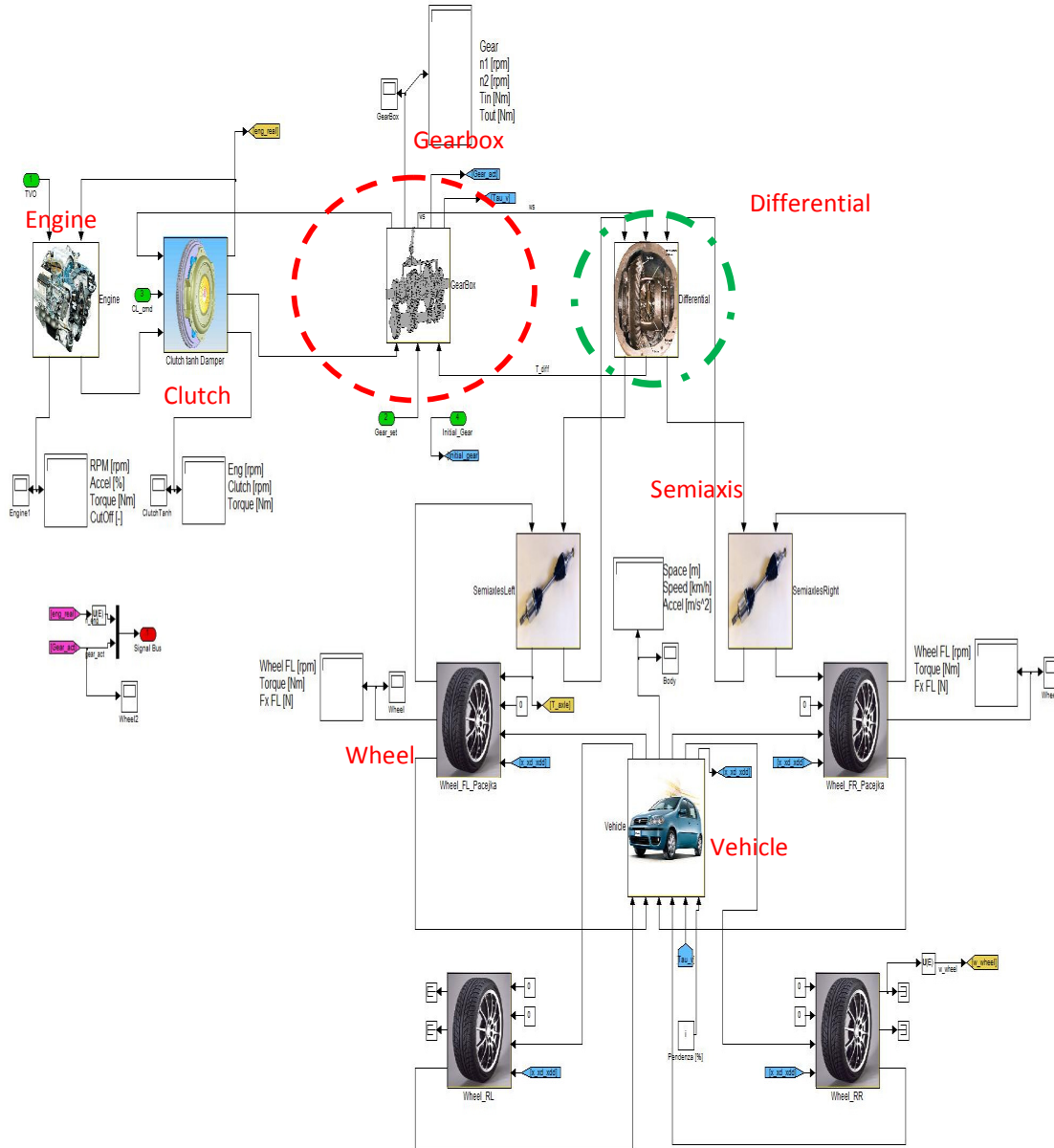


Figura 70 – Modelos de blocos orientados de um veículo com câmbio manual (MT).

#### 4.6.1 Novo modelo do câmbio

O modelo anterior de câmbio manual (MT) não levava em conta as energias dissipadas nos contatos entre dentes, as perdas devido ao lubrificante (churning losses) e ventilação (windage losses). Com relação aos rolamentos, o modelo antigo considerava um valor constante para o momento de fricção, que não considerava as forças atuantes no mancal e as diferentes propriedades dos mancais do primário e secundário. A Figura 71 mostra como era o modelo de rolamento dentro da caixa de câmbio antes.

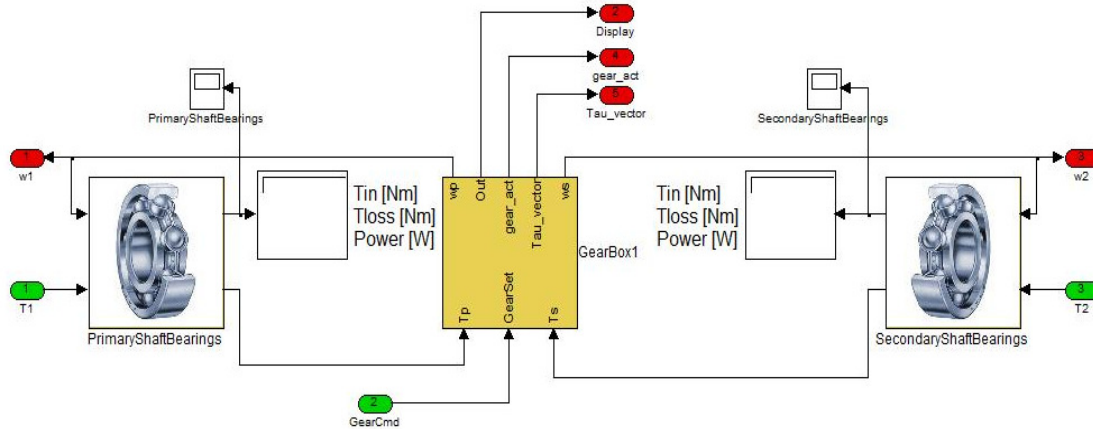


Figura 71 – Antigo modelo dos rolamentos

Neste modelo, os mancais do primário e do secundário foram assumidos idênticos. O momento de atrito é igual e constante para ambos os eixos. O torque T1 que vem da embreagem, quando passa através do mancal sofre uma redução de sua energia, que será transmitida para a caixa de câmbio. Do mesmo modo, T2 que vem do diferencial reduz seu poder quando um momento de atrito é considerado nos rolamentos do eixo secundário.

A modificação realizada no modelo de rolamento (ver par. 4.3) foi aplicada no sistema. Foram considerados quatro tipos diferentes de rolamentos. Suas características foram mostradas na Figura 55. Agora, o contributo de perda varia de um rolamento para outro, dependendo de como as forças agem. Os blocos dos rolamentos do primário foram colocados em série, assim, antes de transmitir o torque para a caixa de câmbio, este perde uma parcela de seu valor quando passa pela primeira caixa de mancal e perde mais um pouco quando passa pela segunda. Da mesma maneira, as caixas dos mancais secundários são colocadas em série.

O esquema do modelo de câmbio manual modificado é divulgado na Figura 72. Este sistema, assim como o inteiro modelo do carro, tem um comportamento dinâmico. Por exemplo, as forças ativas são calculadas dentro do modelo de câmbio, depois elas vão para fora e entram no bloco dos rolamentos. O torque que sai desse bloco (considerando os termos dissipados) retorna para a caixa de câmbio e muda as forças ativas e assim por diante.

Outros termos que dissipam energia, que podem ser modelados como os rolamentos (considerando um momento de atrito constante), são os elementos de vedação presentes no eixo primário que contribuem para a perda de potência e não podem ser desprezados.

A Figura 73 representa os mancais do eixo primário. As forças calculadas antes são usadas para estimar qual quantidade de carga axial será descarregada em cada mancal. As condições foram exibidas na Figura 53, extraídas do site SKF.

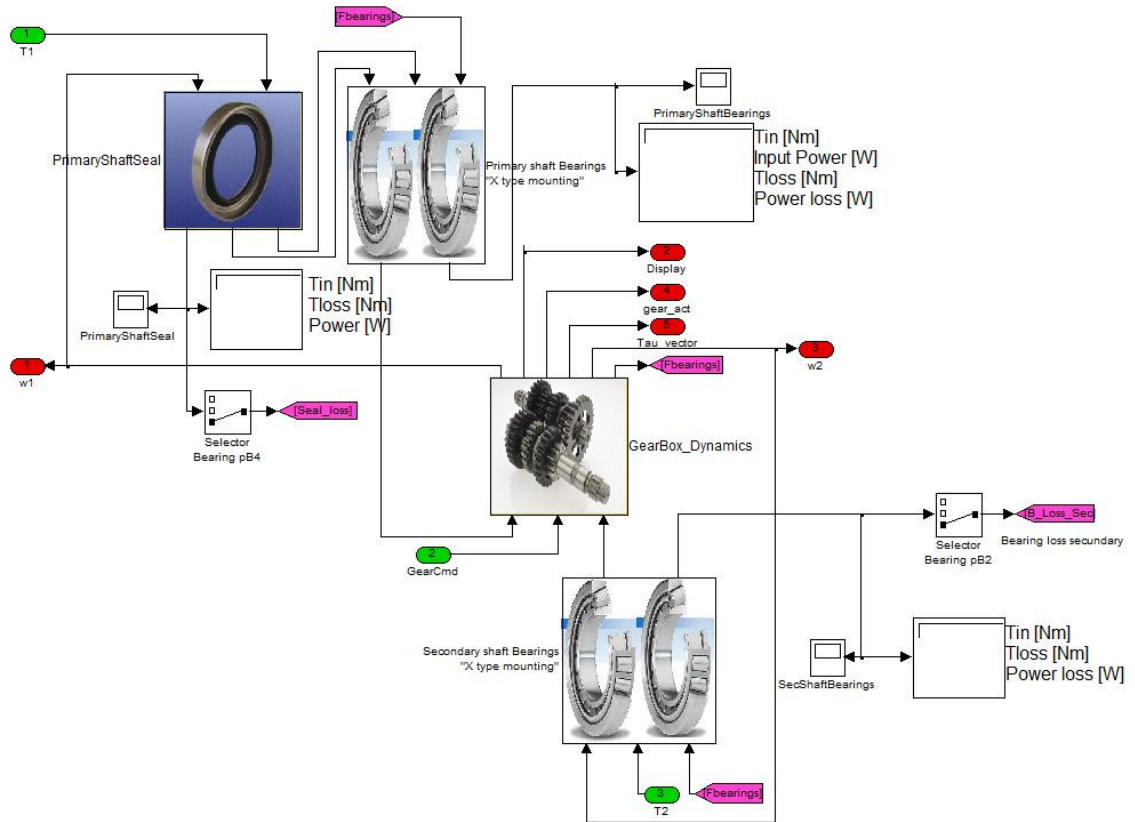


Figura 72 – Modelos de câmbio manual e rolamentos modificados

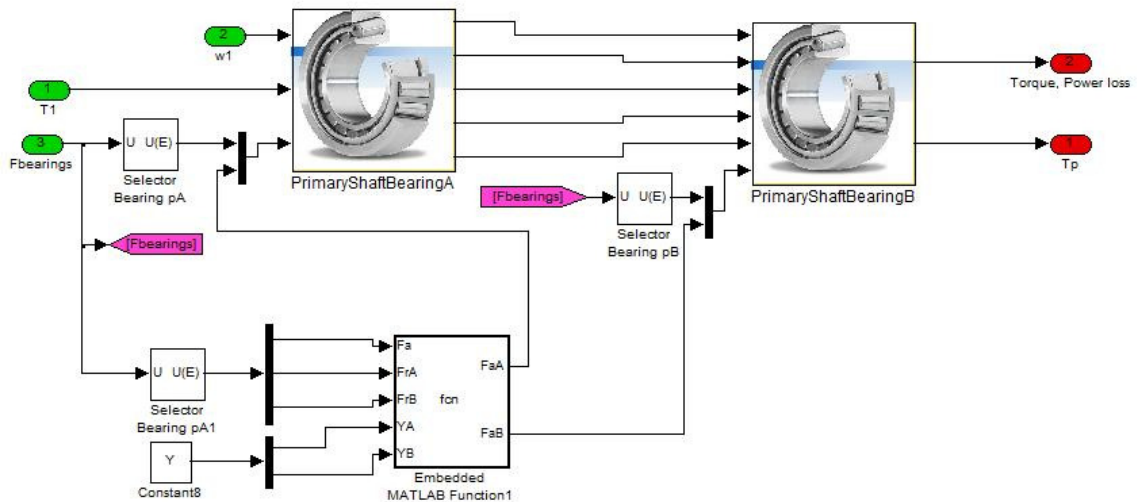


Figura 73 – Parte interna do modelo de mancal do eixo primário.

Como mencionado anteriormente, além das perdas devido ao rolamento e vedação, outros modelos de dissipação foram introduzidos no bloco da caixa de câmbio. Eles referem-se à eficiência entre engrenagens e perda no contato com o lubrificante e ainda devido à ventilação do ar ao redor da engrenagem.

Apenas para melhorar o entendimento, o grosso modelo de câmbio pode ser separado em dois principais sistemas: com um grau de liberdade e outro com dois graus de liberdade. O sistema

de dois graus refere-se à situação quando as marchas não estão engatadas, isto é, no momento de transição de marchas, que é mais difícil de ser modelado, pois não conhece ao certo o comportamento cinemático das rodas dentadas. Já o sistema de um grau de liberdade é mais simples, porque considera o momento em que uma marcha esta ligada e assim é possível estabelecer a cinemática e a dinâmica dos elementos envolvidos. Então, os modelos de dissipação foram introduzidos apenas no sistema dinâmico de um grau de liberdade (Figura 74), porque a maior parte da dissipação por atrito nos dentes ocorre quando as marchas estão engatadas e transmitindo torque.

O bloco azul representa o modelo de eficiência mecânica do par de engrenagens (ver par. 4.2) aplicado na caixa de câmbio. As entradas são as velocidades angulares do eixo primário e secundário, a marcha atual (que informa quais engrenagens estão ligadas) e o torque que vem da embreagem. A saída será a eficiência  $\eta$  ou mesmo  $\frac{1}{\eta}$ , dependendo do sinal de potência da barra do primário. Se positiva, significa que o primário é o eixo motor e então, é o valor de  $\eta$  que sai do bloco.

O bloco verde considerada o efeito do óleo lubrificante (ver parágrafo 4.4). As entradas são as mesmas que para o modelo de eficiência mecânica menos o torque entrante. As saídas são o torque de resistência, que será considerado nas equações de equilíbrio dinâmico, e a energia dissipada, medida em Watt.

O bloco bege corresponde ao bloco das forças nos mancais. Os valores de entrada são basicamente o torque e a marcha atual. A saída será o vetor com as forças axiais e radiais para os quatro mancais dentro da caixa de câmbio e estas forças serão usadas como entrada no modelo de rolamento (Figura 72) para calcular a contribuição do momento de fricção e a energia dissipada.

O bloco cinza representa o efeito do ar (windage loss). As entradas são as velocidades angulares de todas as engrenagens presentes na caixa de câmbio manual C530. As saídas são o torque resistivo, que entra também nas equações dinâmicas, e a energia dissipada em Watt.

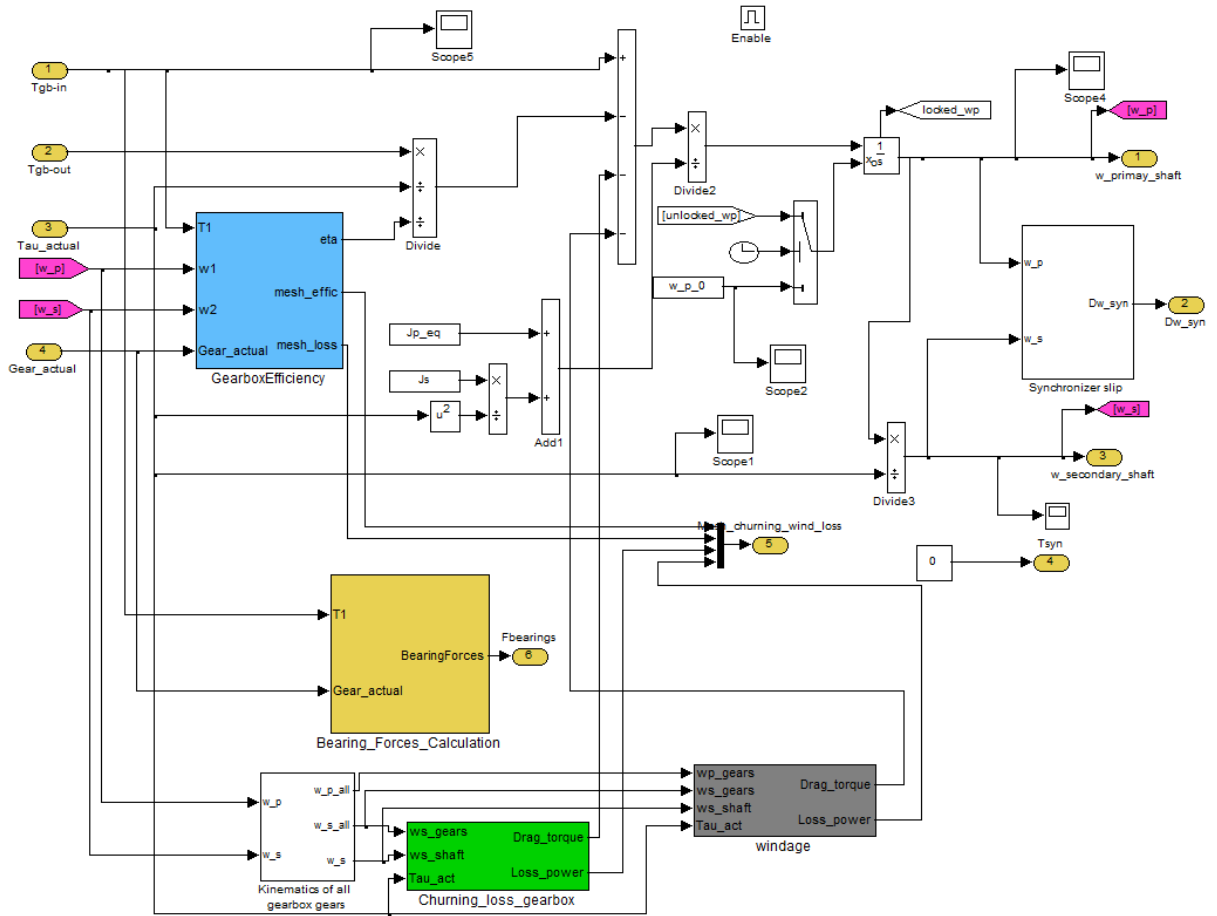


Figura 74 – Modelo de câmbio com um grau de liberdade modificado

Para entender melhor as equações dinâmicas e como essa eficiência e momentos dissipados são considerados dentro do modelo de um grau de liberdade, um desenho representativo é mostrado na Figura 75.

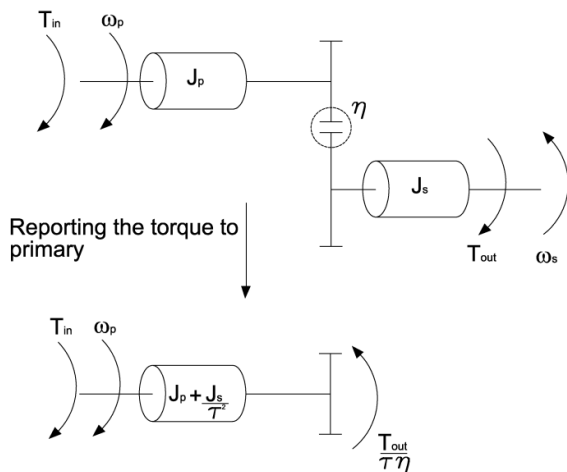


Figura 75 – Exemplo de um sistema de um grau de liberdade

Isto representa o comportamento dinâmico entre o eixo primário e secundário quando as engrenagens estão em contato. Para considerar os efeitos de perda (atrito nos dentes e lubrificante), deve-se transferir o torque do secundário para o primário, criando uma estrutura que considera um momento de inércia equivalente para os dois eixos. Por exemplo, quando não existe atrito entre os dentes ( $\eta = 1$ ) e nenhum torque resistivo causado pelo óleo, o equilíbrio dinâmico pode ser representado como:

$$T_{in} - \frac{T_{out}}{\tau_i} = J_{eq}\dot{\omega}_p \quad (4.98)$$

onde,

$T_{in}$  = torque do eixo primário

$T_{out}$  = torque do eixo secundário

$\tau_i$  = relação de transmissão da marcha  $i$

$J_{eq}$  = momento de inércia equivalente =  $J_p + \frac{J_s}{\tau_i^2}$

$\dot{\omega}_p$  = aceleração angular do primário

Por exemplo, assumindo que o eixo primário é o motor e levando em consideração o torque dissipado e a eficiência mecânica das engrenagens, o equilíbrio dinâmico transforma-se em:

$$T_{in} - \frac{T_{out}}{\tau_i\eta} - T_{drag} = J_{eq}\dot{\omega}_p \quad (4.99)$$

onde,

$\eta$  = eficiência mecânica das engrenagens

$T_{drag}$  = torque resistivo causado pelo lubrificante e pelo ar

Esta equação dinâmica poder ser vista em forma de blocos na Figura 74. Existe um bloco que soma o torque de entrada e subtrai os outros torques (resistivos). O resultado então é dividido pelo momento de inércia equivalente para produzir a aceleração angular, que será integrada para encontrar a velocidade angular do eixo primário, e depois a do eixo secundário pode ser estimada cinematicamente pela relação de transmissão.

#### 4.6.2 Novo modelo de diferencial

Como o diferencial faz parte da caixa de câmbio, o efeito da perda causada pelo contato de engrenagens, pelos rolamentos, pelo óleo lubrificante e elementos de vedação deve ser considerado para o modelo de eficiência de uma caixa de câmbio manual mais realista. O diferencial possui uma engrenagem grande acoplada com o eixo secundário e o lubrificante ocupa um volume significativo dentro dele (ver Figura 59). A Figura 76 ilustra o bloco de diferencial modificado. Existem dois elementos de vedação, para o semi-eixo esquerdo e o semi-eixo direito, e estes foram considerados com as mesmas características que o selo de vedação do primário. Depois, existe o bloco dos mancais, que calcula o momento de fricção e a perda de potência causados pelas forças que atuam neles. Então, finalmente, existe o bloco

que leva em conta a eficiência mecânica no contato de engrenagens do diferencial e do secundário. Os dados dos mancais são mostrados na Figura 77.

O esquema e as fórmulas usadas dentro destes blocos são os mesmos usados anteriormente na consideração da caixa de câmbio manual.

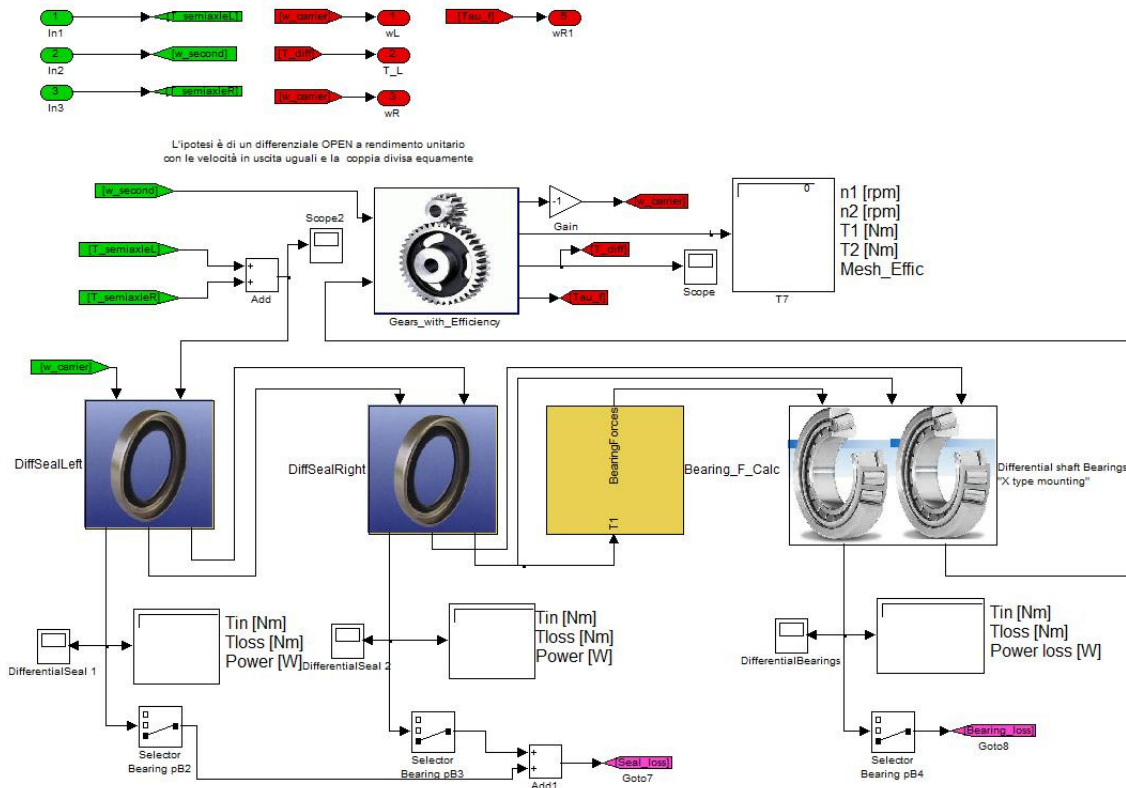


Figura 76 – Modelo de diferencial modificado considerando as dissipações de energia.

Finalmente, tem-se o modelo de carro completo que leva em consideração os principais mecanismos de dissipação de potência presentes na estrutura de uma caixa de câmbio manual, considerando ainda o efeito do diferencial na eficiência global.

	Bearing A	Bearing B
Type	32009 X/Q	32009 X/Q
d [mm]	45	45
D [mm]	75	75
B [mm]	20	20
v [mm <sup>2</sup> /s]	34.3	34.3
Krs	3E-08	3E-08
Kz	6	6
μsl	0.002	0.002
Ks1	0	0
Ks2	0	0
β	0	0
Vm	0	0
Kroll	1.6E-11	1.6E-11
Y	1.5	1.5

Figura 77 – Dados dos mancais do diferencial

#### 4.7 Simulações e análises dos resultados

Nesta parte serão apresentados alguns resultados das simulações de um veículo com um câmbio manual do tipo C530 para avaliar a contribuição dos diferentes meios de dissipação de energia estudados anteriormente. Os primeiros testes foram feitos considerando o carro movendo em regime permanente com velocidade constante para cada marcha. A inclinação da estrada foi escolhida como 0% , isto é, o carro se move na linha horizontal. E a válvula de borboleta foi deixada totalmente aberta (100%).

As condições impostas são:

- A) Primeira marcha, carro movendo com velocidade constante (15 Km/h)
- B) Segunda marcha, 30 Km/h
- C) Terceira marcha, 50 Km/h
- D) Quarta marcha, 80 Km/h
- E) Quinta marcha, 100 Km/h
- F) Sexta marcha, 130 Km/h

Como as velocidades para as marchas menores são pequenas (15 e 30 Km/h), a potência de entrada necessária para manter o carro nessa velocidade constante é muito baixa. Então, as perdas possuem maior proporcionalidade na eficiência global. A Figura 78 ilustra o rendimento global variando o torque de entrada do motor [%] (o torque máximo desse câmbio C530 é 300 Nm). Este gráfico mostra que a eficiência global aumenta quando a potência de entrada cresce, porque a energia dissipada cresce em proporção menor do que a energia entrante. Assim, a eficiência será maior, mesmo que quantitativamente as perdas sejam mais altas.



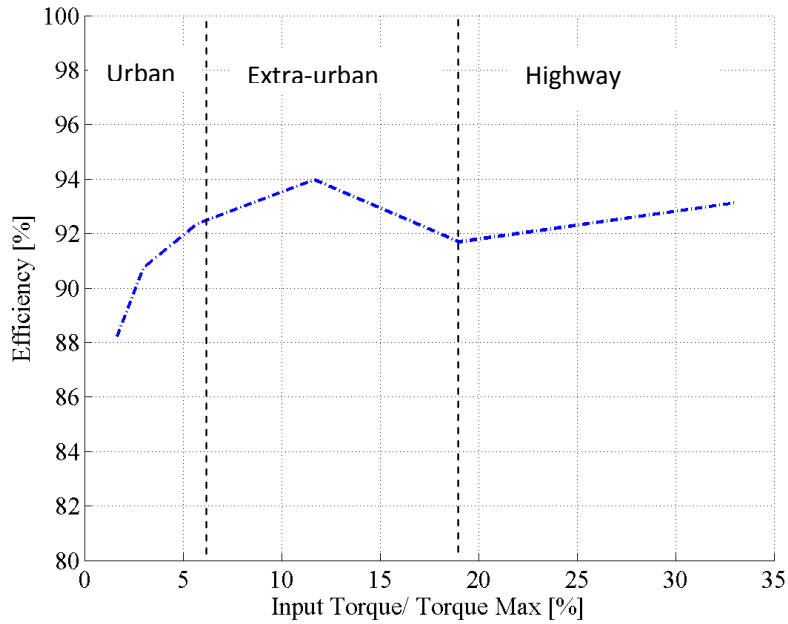


Figura 78 – Rendimento global versus Torque de entrada em porcentagem, considerando velocidades constantes

Assim, em regiões urbanas (dentro das cidades), onde o carro geralmente anda com baixas velocidades, o rendimento do câmbio se mostra menor em relação a quando o carro trafega em áreas extra-urbanas com alta velocidade.

A Figura 79 representa a dissipação por atrito, no rolamento, no selo de vedação, no óleo lubrificante (churning) e no ar (windage) considerando a mesma simulação de antes (A, B, C, ...). Todas elas crescem, perdas no lubrificante, ar e vedação devido ao aumento da velocidade de rotação; rolamentos e atrito devido ao crescimento das forças (aumento do torque) e também da velocidade angular.

Os baixos valores para a dissipação de potência por atrito e nos rolamentos (300 e 350W max) são por causa das condições impostas. O carro movendo a velocidade constante requer pouca energia do motor, então as forças de contato entre os dentes e as suportadas pelos mancais são pequenas. As perdas por “churning” aumentam bruscamente porque existe uma descontinuidade (o coeficiente do torque de resistência varia) quando se passa de uma condição de baixa para uma de elevada velocidade (ver parágrafo 4.4). As dissipações por “windage” e nos rolamentos também se tornam mais importantes para velocidades elevadas.

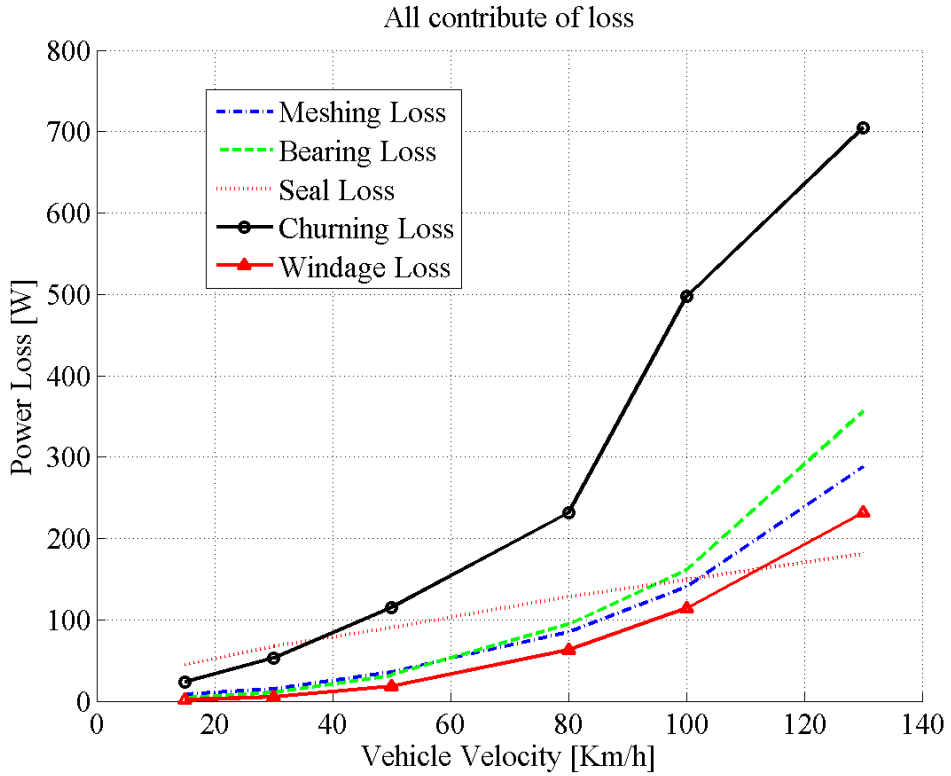


Figura 79 – Todas as contribuições de perda, considerando velocidades constantes para o veículo

Agora, outros testes foram realizados considerando o veículo em aceleração progressiva, mudando as marchas da primeira até a sexta. A Figura 80 mostra a velocidade do carro, o torque e a velocidade do eixo primário, que representam a potência de entrada na caixa de câmbio, para cada mudança de marcha, apenas para ilustrar as condições impostas na simulação do veículo.

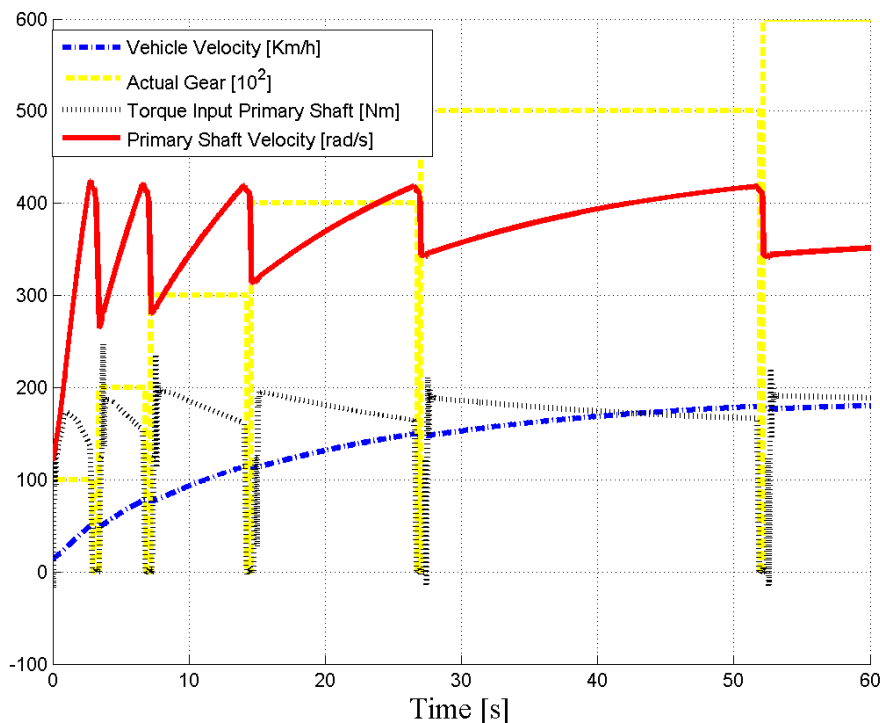


Figura 80 – Velocidade do veículo, marchas, torque de entrada e velocidade angular do primário.

A Figura 81 mostra os efeitos de dissipação para a simulação anterior (carro acelerando e mudando de marcha). Neste caso, a potência que vem do motor é muito elevada e então o efeito do atrito nos dentes é muito alto, porque as forças são grandes. A contribuição do atrito é mais significativa do que as outras formas de dissipação para marchas menores, isso porque o torque é muito alto e a eficiência mecânica acaba sendo baixa, se comparada com o rendimento para marchas maiores.

Perdas nos rolamentos, além de dependerem das forças envolvidas na transmissão, também dependem da velocidade de rotação do eixo. No gráfico abaixo, pode-se perceber que sua proporção aumenta quando a velocidade do veículo também cresce, isto é, quando o carro está engatando marchas maiores (quinta ou sexta).

Os desperdícios nos selos de vedação são mais significantes para as primeiras marchas, porque a velocidade é baixa. Para velocidades elevadas, a variação dessa perda pode ser desprezada, como mostra a Figura 81.

Perdas por “churning” dependem fortemente da velocidade da engrenagem banhada em óleo no câmbio e no diferencial. Para baixas velocidades, essa parcela de perda é menor do que as outras. Mas quando a velocidade aumenta, este termo passa a ser mais importante. O aumento rápido da potência dissipada pode ser verificado no gráfico abaixo. Isso acontece por causa da transição entre baixa e alta velocidade, que usam coeficiente de torque resistivo diferentes, quando o número de Reynolds passa o valor de 6000.

Recordando que esse câmbio C530 permite um torque de entrada máximo de 300 Nm, mas nas simulações este chega a 200 Nm (66%). Isso explica ainda os baixos valores para a potência dissipada. Obviamente, operando com a carga máxima possível (300 Nm), as perdas seriam bem mais elevadas, principalmente no atrito dos dentes e nos rolamentos.

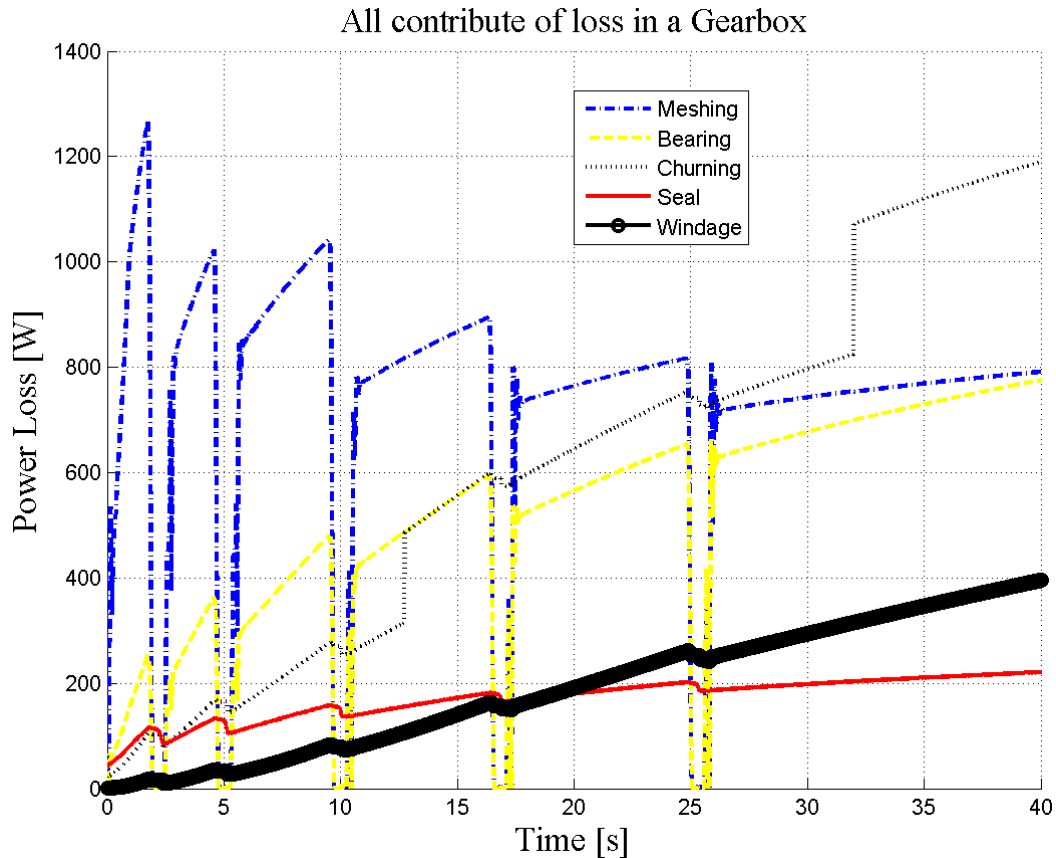


Figura 81 – Todas as perdas de energia na caixa de câmbio em condição de aceleração

As perdas por “windage” crescem com o aumento da velocidade de rotação, sendo insignificante para baixas velocidades (primeiras marchas), mas tornando-se mais relevante no rendimento do global do câmbio para velocidades maiores (quinta ou sexta marcha).

Como o torque resistivo gerado pelo lubrificante é fortemente proporcional à geometria da engrenagem (raio elevado ao cubo), a engrenagem que causa maior efeito na perda por “churning” é a roda dentada do diferencial, pois o seu raio primitivo é muito maior em comparação com as demais engrenagens do câmbio e ainda o nível de óleo no diferencial é mais elevado.

Na Figura 82, é possível notar que essa roda do diferencial causa praticamente toda a perda de energia pelo efeito do lubrificante. O coeficiente do torque resistivo se torna maior quando passa da condição de baixa para a de alta velocidade e isso implica em um massivo incremento das perdas. Esses crescimentos bruscos mostrados no gráfico se devem justamente a essa passagem de transição entre regime laminar e turbulento.

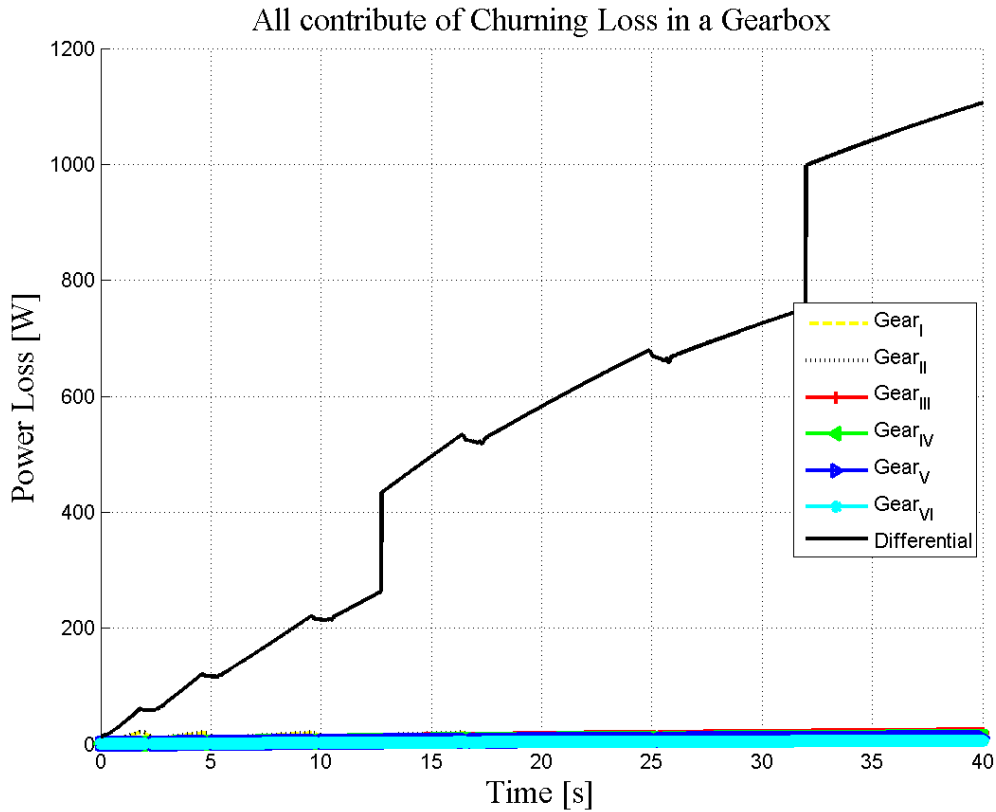


Figura 82 – Contribuição da perda pelo lubrificante para cada engrenagem do sistema de transmissão

A Figura 83 mostra o comportamento da dissipação de energia para todas as engrenagens causada por “windage”, isto é, a resistência que o fluido (no caso o ar) causa na roda dentada. Mais uma vez, a roda do diferencial contribui quase que na totalidade das perdas, devido as suas características geométricas, sendo a engrenagem de tamanho maior. A soma de todas as outras engrenagens chega ao valor de aproximadamente 25% do valor total dissipado apenas dela engrenagem do diferencial. As engrenagens do secundário têm papel mais significativo que aquelas do primário, porque possuem na grande maioria dos casos engrenagens com dimensões mais elevadas e por isso contribuem mais com as perdas por “windage”. Sendo a engrenagem do diferencial aquela que mais contribui para a dissipação de energia, tanto por “churning” quanto por “windage”, medidas e novos estudos de material, rugosidade e outras características podem ser feitas nessa engrenagem para minimizar seus efeitos de perda.

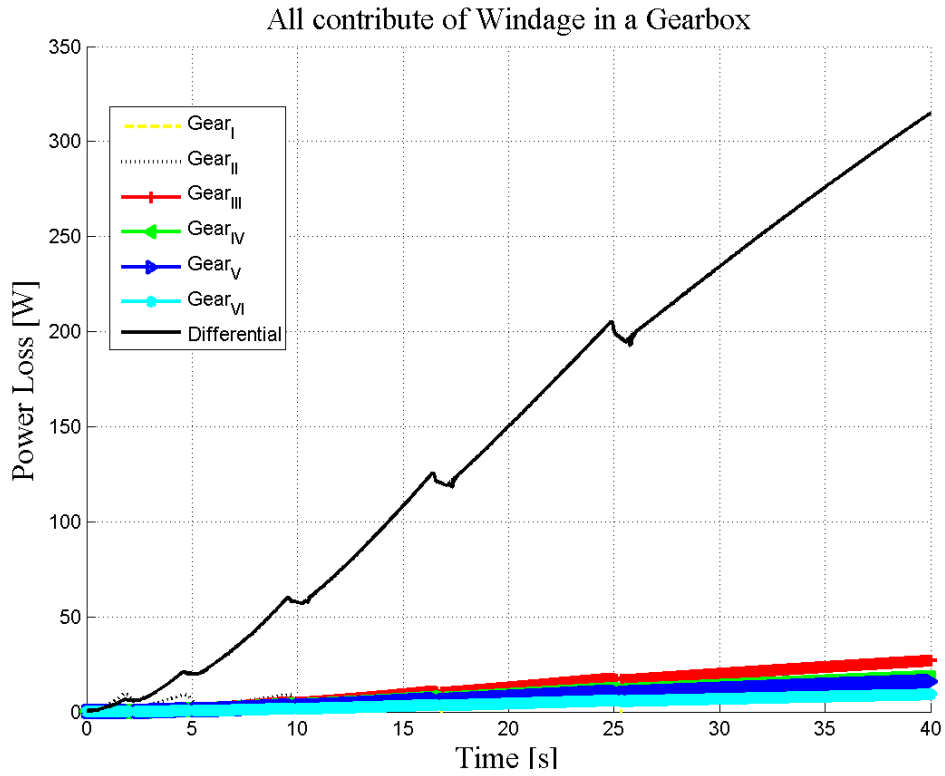


Figura 83 – Efeito “windage” para cada engrenagem do sistema de transmissão.

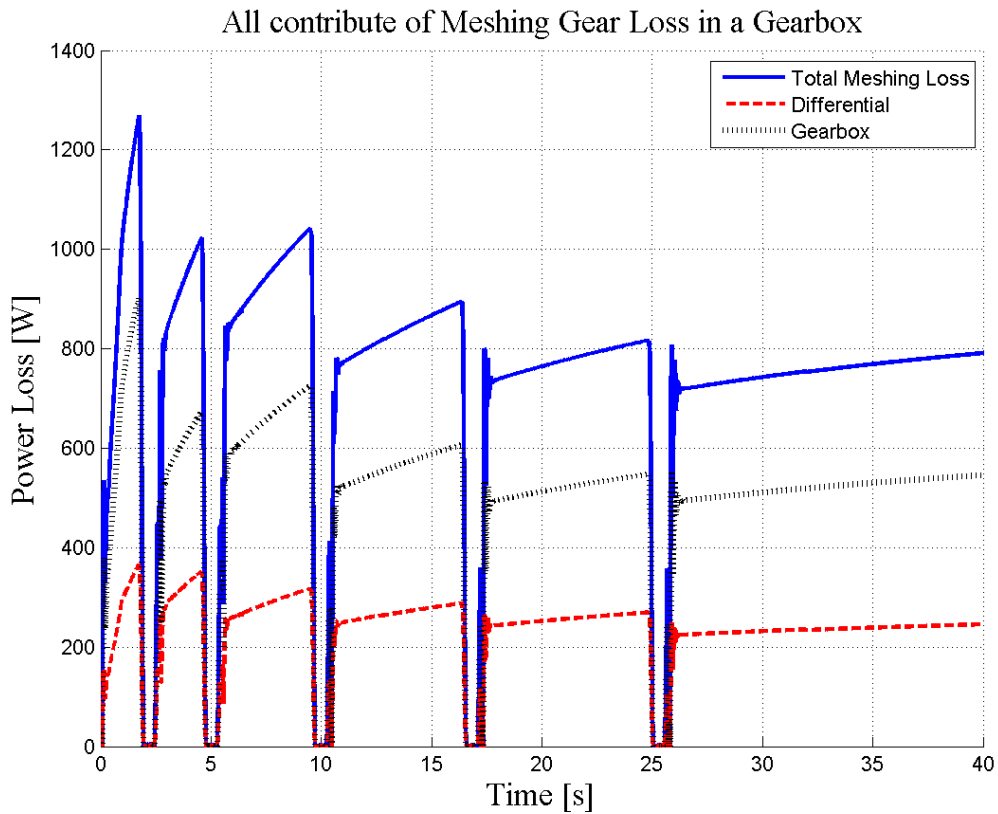


Figura 84 – Efeito do atrito no contato dos dentes no diferencial e no câmbio

Os resultados da perda por atrito no sistema de engrenamento é mostrado na Figura 84. As perdas no interior da caixa de câmbio se revelaram maiores do que no diferencial. Isto porque a eficiência mecânica para as engrenagens em contato no câmbio é menor do que a eficiência encontrada nas rodas dentadas do diferencial. E também a energia entrante no câmbio é maior que no diferencial.

Como o rendimento mecânico é menor para as primeiras marchas (primeira, segunda e terceira), estas apresentam um elevado nível de energia dissipada, chegando além de 1200W. Para marchas maiores, a eficiência melhora (veja o cálculo de eficiência aplicado a um câmbio manual M40, parágrafo 3.3), a parcela de perda nesse caso reduz seu valor.

A Figura 85 demonstra a contribuição da perda nos mancais. Os rolamentos do diferencial parecem ser os de menor importância na soma da dissipação total. Embora as forças ativas que agem nos mancais do diferencial sejam de magnitudes similares àquelas para o eixo primário e secundário, a dissipação de energia é menor porque a velocidade do eixo do diferencial é reduzida em relação ao primário e secundário, mostrando que a velocidade de rotação tem um papel mais importante que as forças no cálculo do momento de atrito e da potência dissipada.

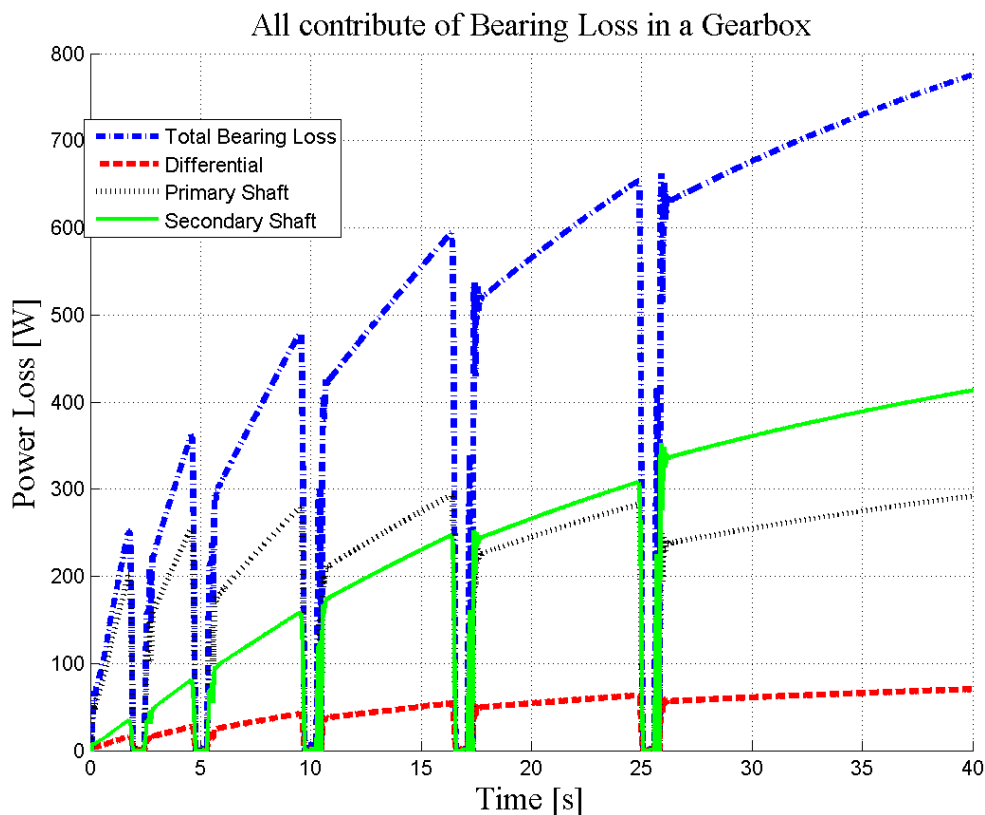


Figura 85 – Contribuição de perda nos rolamentos do primário, secundário e diferencial

Olhando para o primário e secundário, é possível concluir que os mancais do primário têm maior importância para a primeira, segunda, terceira e quarta marchas. Isso porque a velocidade do primário é maior. Mas, quando se passa para a quinta marcha, a relação de transmissão fica menor que 1, então, a velocidade do secundário ultrapassa o valor do primário e conseqüentemente suas perdas se tornam maiores.

## 5 Conclusão

De acordo com Morello [18], a eficiência global de um câmbio manual, levando em consideração algumas perdas possíveis devido ao atrito, rolamento, óleo, vedação e ar, está entre 92 – 97%. Então, o modelo computacional proposto neste trabalho parece representar bem a realidade. A Figura 78 ilustra a eficiência global do câmbio e seus valores se mostram relativamente dentro desse intervalo.

Um dos problemas ainda existente é como estudar e formular um coeficiente de atrito adequado para avaliar os diferentes tipos de engrenagens. E isso implica na necessidade de mais estudos nessa área da tribologia para melhorar a análise de rendimento de peças mecânicas em contato, possibilitando assim na descoberta de novos métodos para aumentar a eficiência mecânica.

A primeira marcha do câmbio manual apresenta baixa eficiência por causa do reduzido número de dentes, mas ela pode ser melhorada quando se escolhem coeficientes de perfil  $X_1$  e  $X_2$  adequados, como mostrados na Figura 43.

A eficiência mecânica é melhor quanto mais perto do valor unitário for a relação de transmissão (veja Figura 39). Dependendo da relação de transmissão, o efeito da rugosidade no dente pode variar bastante o coeficiente de atrito no contato (Figura 19). Por outro lado, a viscosidade dinâmica do lubrificante possui um efeito insignificante no cálculo do rendimento (Figura 20).

A contribuição das perdas por atrito e nos rolamentos se torna mais importante quando o torque de entrada no câmbio é maior. Para altas velocidades, as perdas por “churning” crescem consideravelmente, porque o coeficiente de torque resistivo aumenta repentinamente quando o número de Reynolds passa de uma condição de baixa para alta velocidade ( $Re > 6000 - 9000$ ). A roda dentada do diferencial contribui com mais de 98% das perdas por “churning” em um câmbio manual em condições de elevada velocidade, por isso pode ser estudada com maior rigor para diminuir essas perdas.

As perdas devido aos rolamentos tornam-se mais dependentes da velocidade do eixo de rotação do que das forças envolvidas na transmissão mecânica (ver Figura 85).

No caso da perda por “windage”, um modelo capaz de ser usado para todos os tipos de configurações de rodas dentadas é ainda requerido. Um possível caminho para investigá-lo seria o uso de softwares CFD para analisar os movimentos do fluido ao redor da engrenagem.



## 6 Bibliografia

- [1] Yada, T., “Review of gear efficiency equation and force treatment”, JSME International Journal Series C – Mechanical Systems Machine Elements and Manufacturing, 40, pp. 1-8, 1997.
- [2] Mantriota, G., and Pennestrì, E., “Theoretical and experimental efficiency analysis of multi-degrees-of-freedom epicyclic gear trains”, Multibody System Dynamics, 9, pp. 389-408, 2003.
- [3] Buckingham, E., Analytical Mechanics of Gears, McGraw Hill (1949), p.395-406.
- [4] Merritt H.E., Gears, Sir Isaac Pitman & Sons, third edition (1954), p.339-345.
- [5] Velardocchia M; Bonisoli E; Galvagno E; Vigliani A.; Sorniotti A, “Efficiency of Epicyclic Gears in Automated Manual Transmission Systems”, SAE ICE2007 8th Int. Conf. Engines for Automobile, Capri 16-20 September , 2007.
- [6] Del Castillo, J. M., “The analytical expression of the efficiency of planetary gear trains”, Mechanism and Machine Theory, 37, pp. 197-214, 2002.
- [7] Pennestrì, E. and Valentini, P.P, “A review of formulas for the mechanical efficiency analysis of two degrees-of-freedom epicyclic gear trains”, ASME Journal of Mechanical Design, p. 602-608, New York, 2003.
- [8] Velardocchia M., D Alfio N., Bonisoli E., Galvagno E., Amisano F., Sorniotti A., “Block-oriented Models of Torque Gap Filler Devices for AMT Transmissions”, SAE 2008 World Congress (Detroit, Michigan) April 14-17, pp. 1-10, 2008.
- [9] The MathWorks, “Matlab® - The Language of Technical Computing, User’s Guide Version 7.1”, [http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/pdf\\_doc/matlab/getstart.pdf](http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/pdf_doc/matlab/getstart.pdf), 2005.
- [10] The MathWorks, “Simulink® - Simulation and Model-Based Design, Using Simulink® Version 6.3”, [http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/pdf\\_doc/simulink/sl\\_gs.pdf](http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/pdf_doc/simulink/sl_gs.pdf), 2005.
- [11] The MathWorks, “Stateflow® - For state diagram modeling, User’s Guide Version 6.3”, [http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/pdf\\_doc/stateflow/sf\\_ug.pdf](http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/pdf_doc/stateflow/sf_ug.pdf), 2005.
- [12] Niemann, G., Elementi di Macchine, Vol. II, Springer, Berlin (1983), p54-58.
- [13] Niemann, G. and Winter, H., Elementi di Macchine, Vol. II, Springer, Berlin (1983), p.220.
- [14] Anderson, N. E.; Loewenthal, S. H., “Efficiency of Nonstandard and High Contact Ratio Involute Spur Gears”, Fourth International Power Transmission and Gearing Conference, ASME, Cambridge, Massachusetts, 1984.
- [15] Budynas, R. G.; Nisbett, J. K., “ Shigley’s Mechanical Engineering Design”, Eight Edition, McGraw-Hill.
- [16] Albers, Patrick; “A study of oil churning losses in a gearbox”, Internship for the Mechanical Engineering laboratory of Ecole Catholique d’Arts et Metiers de Lyon, France, February 2004.

- [17] “Axial loading of single row tapered roller bearings” (Table 3) SKF commercial website  
[http://www.skf.com/skf/productcatalogue/jsp/viewers/tableViewer.jsp?tableName=1\\_14\\_t1.tab&maincatalogue=1&lang=en](http://www.skf.com/skf/productcatalogue/jsp/viewers/tableViewer.jsp?tableName=1_14_t1.tab&maincatalogue=1&lang=en)
- [18] Morello, L., “Progetto della Trasmissione Meccanica”, Edizione Italiana, May 2005.
- [19] Changenet, C.; Vexex, P.; “A Model for the Prediction of Churning Losses in Geared Transmissions – Preliminary Results”, Journal of Mechanical Design, ASME, Lyon – France, January 2007.
- [20] Changenet, C.; Vexex, P.; Ville, F.; Diab, Y.; “Windage Losses in High Speed Gears – Preliminary Experimental and Theoretical Results”, Journal of Mechanical Design, ASME, France, September 2004.
- [21] Eastwick, C. N.; Johnson, G.; “Gear Windage: A Review”, Journal of Mechanical Design, ASME, England, March 2008.
- [22] Anderson, N. E.; Loewenthal, S. H.; “Effect of Geometry and Operating Conditions on Spur Gear System Power Loss”, ASME, 1981.
- [23] Dawson, P. H.; “Windage Loss in Larger High-Speed Gears”, 1984.

## Anexo A - Gráfico da eficiência mecânica da primeira marcha (câmbio M40)

### A.1 – Niemann's model

```

clear all; close all; clc % used to clear previous commands

F_Size = 16; % letter size

alphan_deg=21; %normal pressure angle [deg]
alphan=(alphan_deg*pi)/180; %normal pressure angle [rad]
psi_deg=25; % helix angle [deg]
psi=(psi_deg*pi)/180; %helix angle [rad]
mn=2.548/1000; % normal module [m]

Z1=12; %teeth number of gear 1 engaged
Z2=50; % teeth number of gear 2 engaged
m=mn/cos(psi); %module [m]
alpha=atan(tan(alphan)/cos(psi)); % pressure angle in plane rotation [rad]
R1=(m*Z1)/2; %pitch radius of gear 1 [m]
R2=(m*Z2)/2; %pitch radius of gear 2 [m]
Rb1=R1*cos(alpha); %circle base radius of 1 [m]
Rb2=R2*cos(alpha); %circle base radius of 2 [m]
Ro1=m*(cos(psi)+Z1/2); %outside radius 1 [m]
Ro2=m*(cos(psi)+Z2/2); %outside radius 2 [m]
n1=[800:100:5000]; % angular velocity of primary shaft [rpm]
C=[100:100:400]; %torque [Nm]
tau=Z2/Z1; %gear ratio
n2=n1./tau; %angular velocity of secondary shaft [rpm]

g1=((Ro2^2-Rb2^2)^(1/2)-R2*sin(alpha)); %first part of the contact
segment [m]
g2=((Ro1^2-Rb1^2)^(1/2)-R1*sin(alpha)); %second part of the contact
segment [m]

ga=g1+g2; % contact segment [m]
p=m*pi; % pitch [m]
pe=p*cos(alpha); % base pitch [m]
e=ga/pe; % contact ratio [m]
e1=g1/pe; %partial contact ratio [m]
e2=g2/pe; %partial contact ratio [m]

for j=1:size(n1,2)

V(j)=(2*pi*R1*n1(j)/60); % pitch-line velocity [m/s]

if V(j)>50
    V(j)=50; %if velocity > 50 m/s , must be used V = 50 m/s
else
    V(j)=V(j);
end
end

```

```

Vt1_g1(j)=(V(j)/R1)*(R1*sin(alpha)-g1); % tangential velocity of gear 1 in
g1 [m/s]
Vt2_g1(j)=(V(j)/R2)*(R2*sin(alpha)+g1); % tangential velocity of gear 2 in
g1 [m/s]
Vcg1(j)=Vt2_g1(j)+Vt1_g1(j); % accumulate velocity in g1 [m/s]

Vt1_g2(j)=(V(j)/R1)*(R1*sin(alpha)+g2); % tangential velocity of gear 1 in
g2 [m/s]
Vt2_g2(j)=(V(j)/R2)*(R2*sin(alpha)-g2); % tangential velocity of gear 2 in
g2 [m/s]
Vcg2(j)=Vt2_g2(j)+Vt1_g2(j); % accumulate velocity in g2 [m/s]

Vcm(j)=(Vcg1(j)+Vcg2(j))/2; % mean accumulate velocity of the entire
segment of contact [m/s]
end

Bb=acos(cos(psi)*cos(alphan)/cos(alpha)); % relation between pressure
angle and helix angle [rad]

rho=R1*1000*sin(alpha)*tau/(cos(Bb)*(tau+1)); % mean curvature radius [mm]
Ra=0.35; % arithmetical average roughness [mm]
Xr=3.8*(Ra/(2*R1*1000))^(1/4); % factor of roughness
visc= 50; % oil viscosity [m Pa s]
b=28; % width of teeth [mm]
Ka=1; % application factor

for j=1:size(C,2)
Fbt(j)=C(j)/Rb1; % normal force in the transversal plane [N]

if Fbt(j)/b < 150
    Fbt(j)=150*b; %if Fbt/b < 150, must be adopted Fbt/b = 50
else
    Fbt(j)=Fbt(j);
end
end

for j=1:size(C,2)
    for k=1:size(n1,2)
um(j,k)=0.045*((Ka*Fbt(j)/b)/(Vcm(k)*rho))^0.2 * visc^(-0.05) * Xr; %
Niemann's friction coefficient
eta(j,k)= 1 - um(j,k)*pi*(1/Z1+1/Z2)*(1-e+e1^2+e2^2)/cos(Bb); %
Niemann's efficiency
    end
end

figure('Name','Efficiency','NumberTitle','off')
ylabel('Efficiency','FontName','Times New Roman','FontSize',F_Size );
xlabel('Angular velocity of the first gear [rpm]','FontName','Times New
Roman','FontSize',F_Size );
grid on

```

```

title('Efficiency of I gear (M40), \tau_I =4.167','FontName','Times New
Roman','FontSize',F_Size);
hold on
plot(n1,eta(1,:), '-.b', 'Linewidth',2);
hold on
plot(n1,eta(2,:), '--r', 'Linewidth',3);
hold on
plot(n1,eta(3,:), '-g+', 'Linewidth',2);
hold on
plot(n1,eta(4,:), ':k', 'Linewidth',3);
hold on

legend('T = 100 Nm','T = 200 Nm','T = 300 Nm','T = 400 Nm')
ylim([0.97 1])

set(gcf, 'Position', [150 38 985 667]);
set(gca, 'FontName', 'Times New Roman', 'FontSize', F_Size)

```

## A.2 – Buckingham’s model

```

clear all; close all; clc % used to clear previous commands
%
% Modello di Buckingham
%
F_Size = 16; % letter size

Z1 = 12; %teeth number of gear 1 engaged
Z2= 50; % teeth number of gear 2 engaged
tauI=Z2/Z1; %gear ratio
modulemm=2.548; % normal module [mm]
mn=modulemm/1000; % normal module [m]
alphan= 21; %normal pressure angle [deg]
alphan=(alphan*pi)/180; %normal pressure angle [rad]
psi= 25; % helix angle [deg]
psi=(psi*pi)/180; %helix angle [rad]
alpha=atan(tan(alphan)/cos(psi)); % pressure angle in plane rotation [rad]
m=mn/cos(psi); %module [m]

n1=[800:100:5000]; % angular velocity of primary shaft [rpm]
n2=n1./tauI; %angular velocity of secondary shatf [rpm]

R1=(m*Z1)/2; %pitch radius of gear 1 [m]
R2=(m*Z2)/2; %pitch radius of gear 2 [m]
Rb1=R1*cos(alpha); %circle base radius of 1 [m]
Rb2=R2*cos(alpha); %circle base radius of 2 [m]
Ro1=m*(cos(psi)+Z1/2); %outside radius 1 [m]
Ro2=m*(cos(psi)+Z2/2); %outside radius 2 [m]

g1=((Ro2^2-Rb2^2)^(1/2)-R2*sin(alpha)); %first part of the contact segment
[m]

```

```

g2=((Ro1^2-Rb1^2)^(1/2)-R1*sin(alpha)); %second part of the contact segment
[m]
ga=g1+g2; % contact segment [m]
p=m*pi; % pitch [m]
pe=p*cos(alpha); % base pitch [m]
e=ga/pe; % contact ratio [m]
e1=g1/pe; %partial contact ratio [m]
e2=g2/pe; %partial contact ratio [m]
Bb=acos(cos(psi)*cos(alphan)/cos(alpha)); % relation between pressure angle
and helix angle [rad]

for j=1:size(n1,2)
Vt1_g1(j)=(2*pi*n1(j)/60)*(R1*sin(alpha)-g1); % tangential velocity of gear
1 in g1 [m/s]
Vt2_g1(j)=(2*pi*n2(j)/60)*(R2*sin(alpha)+g1); % tangential velocity of gear
2 in g1 [m/s]
Vsg1(j)=Vt2_g1(j)-Vt1_g1(j); % sliding velocity of g1 [m/s]
ug1(j)=(2/3)*(0.05/exp(24.606*(abs(Vsg1(j))/2)))+0.0281*sqrt(abs(Vsg1(j)/2))
); % Buckingham's friction coefficient of g1

Vt1_g2(j)=(2*pi*n1(j)/60)*(R1*sin(alpha)+g2); % tangential velocity of gear
1 in g2 [m/s]
Vt2_g2(j)=(2*pi*n2(j)/60)*(R2*sin(alpha)-g2); % tangential velocity of gear
2 in g2 [m/s]
Vsg2(j)=Vt2_g2(j)-Vt1_g2(j);% sliding velocity of g2 [m/s]
ug2(j)=(2/3)*(0.05/exp(24.606*(abs(Vsg2(j))/2)))+0.0281*sqrt(abs(Vsg2(j)/2))
); % Buckingham's friction coefficient of g2
um(j)=(ug1(j)+ug2(j))/2;

eta_D(j) = 1 -
(cos(alpha)/(cos(alphan)*cos(psi)))*(1/2)*(1/Rb1+1/Rb2)*(ug1(j)*g1^2+ug2(j)
*g2^2)/(g1+g2); % Buckingham's efficiency
end

figure('Name','Efficiency','NumberTitle','off')
ylabel('Efficiency','FontName','Times New Roman','FontSize',F_Size );
xlabel('Angular velocity of Engine [rpm]','FontName','Times New
Roman','FontSize',F_Size );
grid on
title('Efficiency of I gear (M40), \tau_I = 4.167','FontName','Times New
Roman','FontSize',F_Size);
hold on
plot(n1,eta_D,'-r','Linewidth',2);

set(gcf,'Position',[150 38 985 667]);
set(gca,'FontName','Times New Roman','FontSize',F_Size)
legend('Buckingham model')
ylim([0.97 1])

```

## Anexo B – Modelos de inicialização (Câmbio C530)

### B.1 - Initialization of the mesh efficiency model

```

BlockName = 'GearboxEfficiency';
VarName = {'Z1','Z2','mn','alpha_deg','psi_deg','Ka','visc','Ra','b'};

ParentName = get_param(gcb,'Name');
cont1 = max(find(ParentName=='/'));
if isempty(cont1)
    cont1 = 0;
end
evalin('base',strcat('Par.',ParentName(cont1+1:length(ParentName)),'.Name = ''',BlockName, ''';'))
for cont2 = 1 : size(VarName,2)
    if ischar(eval(VarName{cont2}))

evalin('base',strcat('Par.',ParentName(cont1+1:length(ParentName)),'.',VarName{cont2},' = ''',eval(VarName{cont2}), ''';'))
    else

evalin('base',strcat('Par.',ParentName(cont1+1:length(ParentName)),'.',VarName{cont2},' = [',num2str(eval(VarName{cont2})),'];'))
    end
end
clear BlockName VarName ParentName cont1 cont2

Gear_Type_2=2; % All external Gears

for cont1=1:size(Z1,2) % there is a "for" because this gearbox has 6 gears

    alpha(cont1)=(alpha_deg(cont1)*pi)/180; % normal pressure angle [rad]
    psi(cont1)=(psi_deg(cont1)*pi)/180; % helix angle [rad]
    mn(cont1)=mn(cont1)/1000; % normal module [m]
    m(cont1)=mn(cont1)/cos(psi(cont1)); % module [m]
    alpha_n(cont1)=alpha(cont1); %normal pressure angle [rad]
    alpha_t(cont1)=atan(tan(alpha_n(cont1))/cos(psi(cont1))); % transversal
pressure angle [rad]
    R1(cont1)=(m(cont1)*Z1(cont1))/2; %pitch radius of gear 1 [m]
    R2(cont1)=(m(cont1)*Z2(cont1))/2; %pitch radius of gear 2 [m]
    Rb1(cont1)=R1(cont1)*cos(alpha_t(cont1)); %circle base radius of 1 [m]
    Rb2(cont1)=R2(cont1)*cos(alpha_t(cont1)); %circle base radius of 2 [m]

Bb(cont1)=acos(cos(psi(cont1))*cos(alpha_n(cont1))/cos(alpha_t(cont1)));
Xr(cont1)=3.8*(Ra(cont1)/(2*R1(cont1)*1000))^(1/4); % fattore per
l'influsso della rugosità
    Ro1(cont1)=m(cont1)*(cos(psi(cont1))+Z1(cont1)/2); % relation between
pressure angle and helix angle [rad]
    if Gear_Type_2==2
        % External Gear
        tau(cont1) = -Z2(cont1)/Z1(cont1); %gear ratio
        Ro2(cont1)=m(cont1)*(cos(psi(cont1))+Z2(cont1)/2); %outside radius
2 [m]

```

```

        g1(cont1)=((Ro2(cont1)^2-Rb2(cont1)^2)^(1/2)-
R2(cont1)*sin(alpha_t(cont1))); %first part of the contact segment [m]
        g2(cont1)=((Ro1(cont1)^2-Rb1(cont1)^2)^(1/2)-
R1(cont1)*sin(alpha_t(cont1))); %second part of the contact segment [m]
        rho(cont1)=R1(cont1)*1000*sin(alpha_t(cont1))*(-
tau(cont1))/(cos(Bb(cont1))*(-tau(cont1)+1)); % mean curvature radius [mm]
    else
        % Internal Gear
        tau(cont1)= Z2(cont1)/Z1(cont1); %gear ratio
        Ri2(cont1) = m(cont1)*(Z2(cont1)/2-cos(psi(cont1))); % internal
radius of internal gear [m]
        g2(cont1)=((Ro1(cont1)^2-Rb1(cont1)^2)^(1/2)-
R1(cont1)*sin(alpha_t(cont1))); %second part of the contact segment [m]
        g1(cont1)=(R2(cont1)*sin(alpha_t(cont1))-(Ri2(cont1)^2-
Rb2(cont1)^2)^(1/2)); %first part of the contact segment [m]
        rho(cont1)=R1(cont1)*1000*sin(alpha_t(cont1))*(-
tau(cont1))/(cos(Bb(cont1))*((-tau(cont1))+1)); % mean curvature radius
[mm]
    end
    ga(cont1)=g1(cont1)+g2(cont1); % contact segment [m]
    p(cont1)=m(cont1)*pi; % pitch [m]
    pe(cont1)=p(cont1)*cos(alpha_t(cont1)); % base pitch [m]
    e(cont1)=ga(cont1)/pe(cont1); % contact ratio [m]
    e1(cont1)=g1(cont1)/pe(cont1); %partial contact ratio [m]
    e2(cont1)=g2(cont1)/pe(cont1); %partial contact ratio [m]

end

```

## B.2 – Initialization of bearing forces calculation

```

BlockName = 'Bearing_Forces_Calculation';
VarName = {'Z1', 'Z2', 'mn', 'alpha_deg', 'psi_deg', 'dp', 'lp', 'ds', 'ls'};

ParentName = get_param(gcb, 'Name');
cont1 = max(find(ParentName=='/'));
if isempty(cont1)
    cont1 = 0;
end
evalin('base', strcat('Par.', ParentName(cont1+1:length(ParentName)), '.Name =
'', BlockName, ''');)
for cont2 = 1 : size(VarName, 2)
    if ischar(eval(VarName{cont2}))

evalin('base', strcat('Par.', ParentName(cont1+1:length(ParentName)), '.', VarN
ame{cont2}, ' = ', eval(VarName{cont2}), ''');)
    else

evalin('base', strcat('Par.', ParentName(cont1+1:length(ParentName)), '.', VarN
ame{cont2}, ' = [', num2str(eval(VarName{cont2})), '];')
    end
end
clear BlockName VarName ParentName cont1 cont2

```



```

lp=lp/1000;
ls=ls/1000;
for cont1=1:size(Z1,2)

    alpha(cont1)=(alpha_deg(cont1)*pi)/180; %normal pressure angle [rad]
    psi(cont1)=(psi_deg(cont1)*pi)/180; %helix angle [rad]
    mn(cont1)=mn(cont1)/1000; % normal module [m]
    m(cont1)=mn(cont1)/cos(psi(cont1)); %module [m]
    alpha_n(cont1)=alpha(cont1); %normal pressure angle [rad]
    alpha_t(cont1)=atan(tan(alpha_n(cont1))/cos(psi(cont1))); % pressure
angle in plane rotation [rad]
    R1(cont1)=(m(cont1)*Z1(cont1))/2; %pitch radius of gear 1 [m]
    R2(cont1)=(m(cont1)*Z2(cont1))/2; %pitch radius of gear 2 [m]
    dp(cont1)=dp(cont1)/1000; % distance of each gear too the bearing
(primary shaft) [m]
    ds(cont1)=ds(cont1)/1000; % distance of each gear too the bearing
(secondary shaft) [m]
    % Forces calculation for bearing A from first shaft
    % for instance --> RA_Z= T* KA_Z Force in the direction Z that acts
to bearing A is equal torque time a constant for each gear engaged
    % Here these constants will be calculated to be used after in the
simulink to find the force

    KA_Z(cont1) = (1/R1(cont1)) * (
(tan(alpha_n(cont1))*dp(cont1))/(cos(psi(cont1))*lp) +
(R1(cont1)*tan(psi(cont1)))/lp ); % constant of force in Z to bearing A
(first shaft)
    KA_X(cont1) = (1/R1(cont1)) * ( dp(cont1)/lp ); % constant of force in
X to bearing A (first shaft)
    KA_Y(cont1) = tan(psi(cont1))/R1(cont1); % constant of force in Y to
bearing A (first shaft)
    % Forces calculation for Bearing B from first shaft (This bearing doesn't
have the force in Y)

    KB_Z(cont1) = (1/R1(cont1)) * ( (tan(alpha_n(cont1))/cos(psi(cont1))) *
(1-dp(cont1)/lp)) - (R1(cont1)*tan(psi(cont1)))/lp ); % constant of force
in Z to bearing B (first shaft)
    KB_X(cont1) = (1/R1(cont1)) * (1-dp(cont1)/lp) ; % constant of force in
X to bearing B (first shaft)

    %Forces calculation for Bearing C from second shaft
    % Hypothesis gear efficiency = 1
    Ks(cont1)= R2(cont1)/R1(cont1);
    KC_Z(cont1) =Ks(cont1)* (1/R2(cont1)) * (
(tan(alpha_n(cont1))*ds(cont1))/(cos(psi(cont1))*ls) -
(R2(cont1)*tan(psi(cont1)))/ls ); % constant of force in Z to bearing C
(second shaft)
    KC_X(cont1) = Ks(cont1)* (1/R2(cont1)) * ( ds(cont1)/ls ); % constant
of force in X to bearing C (second shaft)
    KC_Y(cont1) = Ks(cont1)* tan(psi(cont1))/R2(cont1); % constant of force
in Y to bearing C (second shaft)

```

```

%Forces calculation for Bearing D from second shaft

KD_Z(cont1) = Ks(cont1)* (1/R2(cont1)) * (
(tan(alpha_n(cont1))/cos(psi(cont1)) * (1-ds(cont1)/ls)) +
(R2(cont1)*tan(psi(cont1)))/ls ); % constant of force in Z to bearing D
(second shaft)
KD_X(cont1) =Ks(cont1)* (1/R2(cont1)) * (1-ds(cont1)/ls) ; % constant
of force in X to bearing D (second shaft)

end

```

### B.3 – Initialization of the churning loss model

```

BlockName = 'Churning_loss_gearbox';
VarName =
{'Zd', 'Z2', 'alpha_deg', 'psi_deg', 'mn', 'visc', 'b', 'rho', 'Vo_1', 'g', 'l_oil'};

ParentName = get_param(gcb, 'Name');
cont1 = max(find(ParentName=='/'));
if isempty(cont1)
    cont1 = 0;
end
evalin('base', strcat('Par.', ParentName(cont1+1:length(ParentName)), '.Name =
'', BlockName, ''');')
for cont2 = 1 : size(VarName, 2)
    if ischar(eval(VarName{cont2}))

evalin('base', strcat('Par.', ParentName(cont1+1:length(ParentName)), '.', VarN
ame{cont2}, ' = ', eval(VarName{cont2}), ''');')
        else

evalin('base', strcat('Par.', ParentName(cont1+1:length(ParentName)), '.', VarN
ame{cont2}, ' = [', num2str(eval(VarName{cont2})), '];')
        end
    end
clear BlockName VarName ParentName cont1 cont2

visc=visc*10^-6; %oil viscosity [m2/s]
Vo=Vo_1/1000; % oil volume [m3]
%l_oil_p=l_oil(1)/1000; % oil level (distance from axis) primary shaft
l_oil_s=l_oil(1)/1000; % oil level (distance from axis) secondary shaft
l_oil_d=l_oil(2)/1000; % oil level (distance from axis) differential shaft
b=b./1000; % width of the gear [m]

for cont1=1:(size(Z2,2)-1)

    alpha(cont1)=(alpha_deg(cont1)*pi)/180; % pressure angle [rad]
    psi(cont1)=(psi_deg(cont1)*pi)/180; % helix angle [rad]
    mn(cont1)=mn(cont1)/1000; % normal module [m]
    m(cont1)=mn(cont1)/cos(psi(cont1)); % module in transversal plane [m]
    hdent(cont1)=2.25*m(cont1)*cos(psi(cont1)); %tooth depth [m]
    alpha_n(cont1)=alpha(cont1); % normal pressure angle [rad]

```

```

alpha_t(cont1)=atan(tan(alpha_n(cont1))/cos(psi(cont1))); % transversal
pressure angle [rad]
R2(cont1)=(m(cont1)*Z2(cont1))/2; % pitch radius of gear 2 [m]
D2(cont1)=2*R2(cont1); % pitch diameter of gear 2 [m]
h2(cont1)=R2(cont1)+l_oil_s; % submerged depth of gear 2 secondary [m]
Is(cont1)=h2(cont1)/R2(cont1); % immersion factor gear 1 primary
Smd2(cont1)=R2(cont1)*(2*b(cont1)*acos(1-Is(cont1))) +
(4*Z2(cont1)*hdent(cont1)*b(cont1)*acos(1-
Is(cont1)))/(2*pi*cos(alpha_t(cont1)));
Smf2(cont1)=R2(cont1)^2 * (2*acos(1-Is(cont1)) - sin(2*acos(1-
Is(cont1))));
Sm2(cont1)=Smd2(cont1)+Smf2(cont1);; %wetted surface area of gear 2
[m2]
end

%differential calculation
alpha(7)=(alpha_deg(7)*pi)/180; % pressure angle [rad]
psi(7)=(psi_deg(7)*pi)/180; % helix angle [rad]
mn(7)=mn(7)/1000; % normal module [m]
m(7)=mn(7)/cos(psi(7)); % module in transversal plane [m]
hdent(7)=2.25*m(7)*cos(psi(7)); %tooth depth [m]
alpha_n(7)=alpha(7); % normal pressure angle [rad]
alpha_t(7)=atan(tan(alpha_n(7))/cos(psi(7))); % transversal pressure
angle [rad]
R2_d=(m(7)*Zd)/2; % pitch radius of differential gear [m]
R1_d=(m(7)*Z2(7))/2; % pitch radius of secondary gear [m]
h1_d=R1_d+l_oil_s; % submerged depth of secondary gear [m]
h2_d=R2_d+l_oil_d; % submerged depth of differential gear [m]
I1_d=h1_d/R1_d; % immersion factor secondary gear
I2_d=h2_d/R2_d; % immersion factor diff. gear
Smd1_d=R1_d*(2*b(7)*acos(1-I1_d)) + (4*Z2(7)*hdent(7)*b(7)*acos(1-
I1_d))/(2*pi*cos(alpha_t(7)));
Smf1_d=R1_d^2 * (2*acos(1-I1_d) - sin(2*acos(1-I1_d)));
Sm1_d=Smd1_d+Smf1_d; %wetted surface area of the secondary gear [m2]
Smd2_d=R2_d*(2*b(7)*acos(1-I2_d)) + (4*Zd*hdent(7)*b(7)*acos(1-
I2_d))/(2*pi*cos(alpha_t(7)));
Smf2_d=R2_d^2 * (2*acos(1-I2_d) - sin(2*acos(1-I2_d)));
Sm2_d=Smd2_d+Smf2_d; %wetted surface area of differential gear [m2]

```