

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Identificação dos expoentes de Fourier
de funções quase-periódicas

Gustavo Simões Araújo

Área de concentração:
Engenharia Mecânica

São Paulo
2009

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Identificação dos expoentes de Fourier
de funções quase-periódicas

Trabalho de formatura apresentado à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo para
obtenção do título de Graduação em Engenharia

Gustavo Simões Araújo

Orientador: Alexandre Kawano

Área de concentração:
Engenharia Mecânica

São Paulo
2009

FICHA CATALOGRÁFICA

Araujo, Gustavo Simões
Identificação dos expoentes de Fourier de funções quase-pe-
riódicas / G.S. Araujo. – São Paulo, 2009.
p.56

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade
de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1. Funções quase-periódicas 2. Análise de Fourier 3. Siste-
mas não lineares I. Universidade de São Paulo. Escola Politéc-
nica. Departamento de Engenharia Mecânica II. t.

Resumo

Funções do tipo $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x}$ se manifestam frequentemente nas análises da propagação de ondas no mar e nas vibrações em vigas, placas e cascas. Em particular, tais funções, denominadas quase-periódicas, aparecem na busca de fontes de ruídos em grandes estruturas. Assim a determinação dos parâmetros λ_n , em geral relacionados com propriedades físicas ou geométricas, como a localização de uma fonte, torna-se muito importante para a execução de um projeto de Engenharia.

O problema é que a recuperação desses parâmetros a partir do fenômeno físico observado é geralmente um problema dito “mal formulado”, no sentido que uma pequena perturbação experimental provoca um grande erro na estimação dos parâmetros, a ponto da informação ser por muitas vezes inutilizável. Neste trabalho de formatura, objetivamos o desenvolvimento de um método estruturado na resolução de um sistema não linear de Vandermonde para determinação desses parâmetros.

Palavras-chave: Funções Quase-Periódicas, Análise de Fourier, Sistemas não lineares, Matriz de Vandermonde

Abstract

Almost periodic functions are frequently present in the analysis of sea-waves and of vibrations in beams, plates and shells. In particular, such functions appear in the search for sources of noise in large structures. The parameters λ_n , Fourier exponent, are usually connected with geometric and physical properties, as the location of the source for examples.

The problem is that the recovery of these parameters from the observed physical phenomenon is usually an ill-posed problem, in the sense that a small experimental perturbation might cause a large error in the estimation of parameters. In this paper we present a methodology structured in the Vandermonde matrix with the aim to determine these parameters.

Keywords: Almost Periodic Function, Non-Linear System, Fourier analysis, Vandermonde matrix

Agradecimentos

Gostaria de agradecer às pessoas que me ajudaram e que contribuíram para o bom desenvolvimento deste projeto de formatura:

- Prof. Dr. Alexandre Kawano, meu orientador, que graças ao seu empenho, paciência e valiosas recomendações permitiu que este projeto de formatura tivesse sucesso;
- A minha irmã Beatriz que apesar de toda a falta de tempo dos dias atuais, conseguiu se organizar para revisar este trabalho;
- A minha mãe, minha irmã Natália e todas as outras pessoas que me incentivaram e me apoiaram e me incentivaram durante a redação deste trabalho de formatura.

Sumário

Índice de Figuras	8
1. Introdução.....	9
2. Funções Quase-Periódicas	10
2.1 Quase Periodicidade (Translation Numbers)	10
2.2 “Relativamente denso”	12
2.3 Definição Funções Quase-Periódicas	12
2.4 Séries de Fourier de funções quase-periódicas.....	16
3. Problemática.....	22
3.1 Expoentes de Fourier e seus períodos de translação	23
4. Resultados Obtidos	25
4.1. Método dos mínimos quadrados (MMQ)	25
4.2. Transformada de Fourier.....	26
4.2.1. Filtro Gaussiano	28
4.2.2. Filtro Lorentziano.....	31
4.2.3. Aplicação da transformada de Fourier em funções quase-periódicas	32
4.3. Sistema Não-Linear de Expoentes de Fourier:	36
4.3.1. Sistema de Equações Não-Lineares de Vandermonde	38
4.3.2. Simulação da Metodologia Trapp-Squire.....	41
4.3.3. Simulação da Metodologia Trapp-Squire em matrizes não quadradas	44
4.3.4. Função dos expoentes de Fourier.....	46
5. Aplicações.....	48
6. Considerações Finais.....	49
7. Bibliografia	50
Anexos:	51
Anexo.1 Rotina Matlab – Matrizes Retangulares.....	51
Anexo.2 Rotina Matlab – Matrizes Quadradas	52
Apêndices:	53
Apêndice.1 Funções Periódicas	53
Apêndice.2 Séries de Fourier de funções periódicas.....	54
Apêndice.3 Matriz Pseudo-Inversa de Moore–Penrose	55
Apêndice.4 Fourier-Stieltjes Álgebra	55

Índice de Figuras

Figura 1 - Dirac Comb	27
Figura 2 - $f = -2e - 15t + 3e - 10it + 2eit + 4e^{10it} + 3e^{15t}$ e $\sigma = 1$	29
Figura 3 - $f = 3e - 10it + 2eit/e + 4e^{i10t}$ e $\sigma = 1$	29
Figura 4 - $f = 3e - 10it + 2eit/e + 4e^{i10t}$ e $\sigma = 10$	30
Figura 5 - $f = 3e - 5it + 2eit + 4e^{3it}$ e $\sigma = 1$	30

1. Introdução

Este relatório visa apresentar os estudos que foram desenvolvidos no projeto de conclusão de curso de tema: “Identificação dos expoentes de Fourier de funções quase-periódicas”.

Na primeira parte do texto será apresentado um breve resumo da teoria das funções quase-periódicas desenvolvida por Harald Bohr, além de algumas ferramentas e propriedades que serão essenciais no decorrer do projeto. Em seguida será abordado o problema central deste trabalho de conclusão de curso, conjuntamente com algumas propriedades dos expoentes de Fourier, além de algumas metodologias para obtenção destes parâmetros. Finalmente serão apresentadas possíveis aplicações para este projeto em problemas físicos reais, como a vibrações de corpos e a concepção de navios.

2. Funções Quase-Periódicas

Nos parágrafos abaixo definiremos uma função quase-periódica, e apresentaremos suas propriedades. Entretanto antes de adentrar nesta teoria indicamos fortemente que o leitor leia os apêndices 1:Funções periódicas e 2:Séries de Fourier de funções periódicas, onde algumas propriedades e conceitos das funções periódicas e das séries de Fourier são apresentados.

2.1 Quase Periodicidade (Translation Numbers)

Dada uma função arbitrária $f(x) = u(x) + iv(x)$ $f:J \rightarrow X$ contínua, o número real τ ou $\tau(\varepsilon)$ é chamado período de translação correspondente a ε , se a seguinte expressão é respeitada em todo intervalo:

$$(1) \quad \sup_{x \in J} |f(x + \tau) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Para uma melhor compreensão deste conceito vamos estudar o comportamento da função $f(x) = e^{i\psi_1 x} + e^{i\psi_2 x}$, para diferentes valores de ψ_1 e ψ_2 :

Exemplo 1:

- Se ψ_1/ψ_2 for racional, existem n_1 e n_2 naturais tais que $\frac{n_1}{\psi_1} = \frac{n_2}{\psi_2}$.

Tomemos τ igual à $\frac{2\pi n_1}{\psi_1} = \frac{2\pi n_2}{\psi_2}$, tal que:

$$\begin{aligned} |f(x + \tau) - f(x)| &= |e^{i\psi_1(x+\tau)} + e^{i\psi_2(x+\tau)} - e^{i\psi_1 x} - e^{i\psi_2 x}| \\ &= |e^{i\psi_1 x}(e^{i\psi_1 \tau} - 1) + e^{i\psi_2 x}(e^{i\psi_2 \tau} - 1)| \\ &= |e^{i\psi_1 x}(e^{i2\pi n_1} - 1) + e^{i\psi_2 x}(e^{i2\pi n_2} - 1)| = 0 \end{aligned}$$

Logo, temos que $|f(x + \tau) - f(x)| = 0$, conseqüentemente f é uma função periódica.

- Se ψ_1/ψ_2 for irracional, obviamente não existem n_1 e n_2 naturais tais que a igualdade $\frac{n_1}{\psi_1} = \frac{n_2}{\psi_2}$ seja verdadeira. Porém podemos verificar que para

qualquer ε positivo, podemos encontrar um $\tau \in J$ para qual a expressão (1) seja válida em \mathbb{R} ,

$$\begin{aligned} |f(x + \tau) - f(x)| &= |e^{i\psi_1(x+\tau)} + e^{i\psi_2(x+\tau)} - e^{i\psi_1x} - e^{i\psi_2x}| \\ &= |e^{i\psi_1x}(e^{i\psi_1\tau} - 1) + e^{i\psi_2x}(e^{i\psi_2\tau} - 1)| \\ &\leq |(e^{i\psi_1\tau} - 1)| + |(e^{i\psi_2\tau} - 1)| \leq 4 \end{aligned}$$

Assim podemos afirmar que para todos os valores de $\varepsilon > 4$ qualquer $\tau \in J$ satisfaz a relação (1). Analisemos o caso de $0 < \varepsilon \leq 4$:

$$\begin{aligned} |f(x + \tau) - f(x)| &= |e^{i\psi_1(x+\tau)} + e^{i\psi_2(x+\tau)} - e^{i\psi_1x} - e^{i\psi_2x}| \\ &= |e^{i\psi_1x}(e^{i\psi_1\tau} - 1) + e^{i\psi_2x}(e^{i\psi_2\tau} - 1)| \leq |(e^{i\psi_1\tau} - 1)| + |(e^{i\psi_2\tau} - 1)| \\ &= [2 - 2 \cos(\psi_1 \tau)] + [2 - 2 \cos(\psi_2 \tau)] \\ &= 4 - 2[\cos(\psi_1 \tau) + \cos(\psi_2 \tau)] \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Assim, para que a expressão seja válida basta escolhermos um τ que satisfaça a inequação abaixo:

$$\begin{aligned} \cos(\psi_1 \tau) + \cos(\psi_2 \tau) &\geq \frac{4 - \varepsilon}{2} \\ \cos[1/2(\psi_1 + \psi_2)\tau] \cos[1/2(\psi_1 - \psi_2)\tau] &\geq \frac{4 - \varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Consequentemente constatamos que para qualquer valor de ε sempre existirá τ para o qual a expressão (1) é verificada.

Exemplo 2:

Duas interessantes observações podem ser feitas a partir da definição do período de translação de uma função:

- De uma maneira imediata podemos ver que dado um $\tau(\varepsilon_2)$, período de translação correspondente à ε_2 , este também será um período de translação de ε_1 , se $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, pois:

$$|f(x + \tau(\varepsilon_2)) - f(x)| \leq \varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$$

- Podemos sem dificuldades ver que a soma e a diferença de dois períodos de translação $\tau(\varepsilon_1)$ e $\tau(\varepsilon_2)$ são períodos de translação correspondentes à $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$:

$$\begin{aligned}
g(x) &= |f(x + \tau(\varepsilon_1) + \tau(\varepsilon_2)) - f(x)| \leq C \\
g &= |f(x + \tau(\varepsilon_1) + \tau(\varepsilon_2)) + f(x + \tau(\varepsilon_1)) - f(x + \tau(\varepsilon_1)) - f(x)| \\
g &= |[f(x + \tau(\varepsilon_1) + \tau(\varepsilon_2)) - f(x + \tau(\varepsilon_1))] + [f(x + \tau(\varepsilon_1)) - f(x)]| \\
g &\leq |f(x + \tau(\varepsilon_1) + \tau(\varepsilon_2)) - f(x + \tau(\varepsilon_1))| + |f(x + \tau(\varepsilon_1)) - f(x)| \\
g &= |f(x + \tau(\varepsilon_1) + \tau(\varepsilon_2)) - f(x)| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\
C &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2
\end{aligned}$$

2.2 “Relativamente denso”

Antes de definirmos a noção de uma função quase-periódica, o conceito de conjunto “relativamente denso” deve ser introduzido, isto é, a condição de existir um período de translação τ para um valor de $\varepsilon > 0$ não é suficiente. Assim seja E o conjunto dos números reais τ , este é chamado relativamente denso, se existe certo comprimento L , tal que em todo intervalo $\alpha \leq x \leq \alpha + L$ existe ao menos um valor de τ . Vejamos o exemplo abaixo a fim de melhor entender esta ideia.

Exemplo 3:

O conjunto relativamente denso mais simples é formado por uma progressão aritmética $n\tau$ ($n = \pm 0, \pm 1, \dots \pm p$), pois como vemos o maior intervalo entre dois valores de τ é p . Se analisarmos, porém, o conjunto formado por n^2 ($n = \pm 0, \pm 1, \pm 2 \dots \dots$), temos que $L = (n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$, isto é, o comprimento L é uma função crescente, logo não existe L_0 , tal que em todo intervalo $\alpha \leq x \leq \alpha + L_0$, existe ao menos um valor de τ .

2.3 Definição Funções Quase-Periódicas

Uma função $f: J \rightarrow X$ contínua é dita quase-periódica se dado um $\varepsilon > 0$, existe um conjunto relativamente denso de períodos de translação de $f(x)$ correspondente à ε . Em outras palavras, se existe para todos os valores de ε positivos, um

comprimento $L(\varepsilon)$, tal que cada intervalo deste comprimento contenha ao menos um período de translação $\tau(\varepsilon)$.

$$\sup_{x \in J} |f(x + \tau) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Teorema I: Uma função quase-periódica é limitada, isto é, existe uma constante C , tal que:

$$|f(x)| \leq C \text{ para qualquer valor } x \in \mathfrak{R}$$

Prova: Definamos um comprimento $L(\varepsilon)$ e um intervalo $x_0 \leq x \leq x_0 + L$, tal que a função $f: J \rightarrow X$ seja limitada neste intervalo, isto é:

$$|f(x)| \leq C \text{ para } x_0 \leq x \leq x_0 + L$$

Agora escolhemos um valor qualquer x_1 fora do intervalo, e um período de translação τ , tal que $x_1 = x_0 + \tau$, logo:

$$\begin{aligned} |f(x_1)| &= |f(x_0 + \tau)| = |f(x_0 + \tau) - f(x_0) + f(x_0)| \\ &\leq |f(x_0 + \tau) - f(x_0)| + |f(x_0)| \leq \varepsilon + C \end{aligned}$$

Um corolário importante, que será utilizado no decorrer deste texto, é que dada uma $f(x)$ quase-periódica, a função $f(x)^2$ também é quase-periódica.

Prova: Seja $f: J \rightarrow X$ quase-periódica, pelo teorema I esta será limitada, isto é, $|f(x)| \leq C$ para $x_0 \leq x \leq x_0 + L(\varepsilon)$, onde τ é o período de translação de ε :

$$|f(x + \tau)^2 - f(x)^2| = |f(x + \tau) - f(x)| |f(x + \tau) + f(x)| \leq 2C\varepsilon$$

Teorema II: Uma função quase-periódica $f: J \rightarrow X$ é uniformemente contínua, isto é, para um valor arbitrário $\varepsilon > 0$ existe um valor $\delta = \delta(\varepsilon)$, também positivo, tal que:

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq \varepsilon \text{ para } |x_2 - x_1| \leq \delta$$

Prova: Primeiramente consideremos o comprimento $L = L(\varepsilon/3)$ e o intervalo $x_0 \leq x \leq x_0 + L$. Dados dois valores y_1 e y_2 contidos neste intervalo, tal que

$|y_2 - y_1| \leq \delta$, e a seguinte relação $|f(y_2) - f(y_1)| \leq \epsilon/3$ são sempre válidos. Adotemos agora dois números arbitrários x_1 e x_2 , tal que $|x_2 - x_1| \leq \delta$, e um período de translação τ correspondente a $\epsilon/3$, tal que $x_1 = y_1 + \tau$ e $x_2 = y_2 + \tau$.

$$\begin{aligned} |f(x_2) - f(x_1)| &= |f(x_2) - f(x_1) + f(y_1) - f(y_1) + f(y_2) - f(y_2)| \leq \\ &\leq |f(y_1) - f(x_1)| + |f(y_2) - f(x_2)| + |f(y_2) - f(y_1)| = \\ &= |f(x_1 + \tau) - f(x_1)| + |f(x_2 + \tau) - f(x_2)| + |f(y_2) - f(y_1)| \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \end{aligned}$$

Deste teorema podemos deduzir um corolário importante para a demonstração do teorema III abaixo. Isto é, que para cada valor ϵ existem L e δ , tal que cada intervalo $x_0 \leq x \leq x_0 + L$ contém não somente um período de translação τ , mas sim um intervalo δ , onde todos os números neste contido são períodos de translação:

Prova: Sejam $L(\epsilon/2)$ e $\delta(\epsilon/2)$ dois números positivos, escolhidos conforme o teorema II e a definição de números de translação, temos então que em cada intervalo de comprimento $L(\epsilon/2)$ existe ao menos um período de translação $\tau(\epsilon/2)$. Além disso, temos que cada número do formato $\tau(\frac{\epsilon}{2}) + \gamma$, onde $|\gamma| \leq \delta(\epsilon/2)$ também é um período de translação $\tau(\epsilon)$ correspondente a ϵ , conforme o teorema II. Assim para um dado valor ϵ existe um intervalo L de comprimento $L(\epsilon/2) + 2\delta(\epsilon/2)$, e um intervalo δ de comprimento $2\delta(\epsilon/2)$, onde todos os valores compreendidos neste intervalo são períodos de translação correspondente a ϵ .

Outra possível formulação deste corolário é a seguinte: “Para todo valor ϵ existem L e δ , tal que para todo número positivo $\eta \leq \delta$ arbitrariamente escolhido, cada intervalo $\alpha \leq x \leq \alpha + L$ de comprimento L , contém um período de translação $\tau(\epsilon)$, correspondente a ϵ , que é igual a um inteiro múltiplo de η ”.

Teorema III: A soma de duas funções quase-periódicas f e g é também quase-periódica.

Prova: Para provar este teorema, basta mostrar que para um valor $\epsilon > 0$ existe um conjunto comum relativamente denso de períodos de translação $\tau(\epsilon)$ para ambas

as funções f e g . No caso de existir um valor de τ , tal que $\tau_f(\varepsilon) = \tau_g(\varepsilon)$, esta prova é trivial:

$$|(f + g)(x + \tau) - (f + g)(x)| = |f(x + \tau) - f(x) + g(x + \tau) - g(x)| \leq 2\varepsilon$$

Adotemos $L_f - \delta_f$ e $L_g - \delta_g$, conforme o teorema II e seu corolário, correspondentes à $\varepsilon/2$. Sejam L_0 e η definidos como $L_0 = \text{Max}(L_f, L_g)$ e $\eta_0 = \text{Min}(\delta_f, \delta_g)$. Logo para cada intervalo $\alpha \leq x \leq \alpha + L_0$, existem τ_f e τ_g períodos de translação correspondentes à $\varepsilon/2$, e que também são múltiplos de η , ou seja, $\tau_f = n_f \eta$ e $\tau_g = n_g \eta$. Se considerarmos todos os valores de τ_f e τ_g , tal que $|\tau_f - \tau_g| = |(n_f - n_g)\eta| = |p_{fg}\eta| \leq L_0$, estaremos trabalhando sob um conjunto finito de números, que podemos enumerar como pares ordenados $\{(\tau_f^{(1)}, \tau_g^{(1)}), (\tau_f^{(2)}, \tau_g^{(2)}), \dots, (\tau_f^{(R)}, \tau_g^{(R)})\}$.

Provemos que seja l definido como $\max_{i=1,2,\dots,R} |\tau_g^{(i)}|$, o intervalo $\alpha \leq x \leq \alpha + L + 2l$ contém ao menos um valor de $\tau = \tau_f = \tau_g$ correspondente à $\varepsilon/2$. Primeiramente no intervalo $\alpha + l \leq x \leq \alpha + l + L$ temos dois valores $\tau_f = n_f \eta$ e $\tau_g = n_g \eta$, onde $\tau_f - \tau_g = p_{fg}\eta = p_{fg}^{(R)}\eta = \tau_f^{(R)} - \tau_g^{(R)}$, assim $\tau = \tau_f - \tau_f^{(R)} = \tau_g - \tau_g^{(R)}$, onde τ pertence ao intervalo $\alpha \leq x \leq \alpha + L + 2l$. Sendo esta diferença um período de translação das funções quase-periódicas f e g corresponde à ε , e logo da soma $f + g$.

Teorema IV: O produto de duas funções quase-periódicas f e g também é uma função quase-periódica.

Prova: Pelo corolário do primeiro teorema temos que o quadrado de uma função quase-periódica também é uma função quase-periódica. O segundo teorema mostra que a soma e a diferença de funções quase-periódicas são também funções quase-periódicas. Assim com a seguinte manipulação abaixo, vemos que o produto de duas funções quase-periódicas também é uma função quase-periódica:

$$f(x)g(x) = \frac{[f(x) + g(x)]^2 - [f(x) - g(x)]^2}{2}$$

Teorema V: Para qualquer função quase-periódica f existe um valor médio, isto é:

$$M\{f(x)\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \varphi dx$$

Devido à complexidade este teorema não será demonstrado, porém o leitor se desejar pode consultar sua prova na referência (Harald Bohr, 1933).

2.4 Séries de Fourier de funções quase-periódicas

O teorema VI nos permitirá estender a teoria das séries de Fourier para as funções quase-periódicas.

Teorema VI: A função $a(\lambda) = M\{e^{-i\lambda x} f(x)\}$ é zero para todos os valores de λ , com exceção para um conjunto enumerável de números λ_n .

Prova: Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ números reais arbitrários e distintos e c_1, c_2, \dots, c_n números complexos arbitrários.

$$\begin{aligned} M \left\{ \left| f(x) - \sum_{i=0}^N c_i e^{i\lambda_i x} \right|^2 \right\} &= M \left\{ \left[f(x) - \sum_{i=0}^N c_i e^{i\lambda_i x} \right] \left[\overline{f(x) - \sum_{i=0}^N c_i e^{i\lambda_i x}} \right] \right\} \\ &= M \left\{ f(x) \overline{f(x)} - \overline{f(x)} \sum_{i=0}^N c_i e^{i\lambda_i x} - f(x) \sum_{i=0}^N \overline{c_i e^{i\lambda_i x}} + \sum_{i=0}^N c_i \overline{c_i} \right\} \\ &= M\{|f(x)|^2\} - \sum_{i=0}^N c_i M\{\overline{f(x)} e^{i\lambda_i x}\} - \sum_{i=0}^N \overline{c_i} M\{f(x) e^{-i\lambda_i x}\} + \sum_{i=0}^N c_i \overline{c_i} \\ &= M\{|f(x)|^2\} - \sum_{i=0}^N c_i \overline{a(\lambda_i)} - \sum_{i=0}^N \overline{c_i} a(\lambda_i) + \sum_{i=0}^N c_i \overline{c_i} \\ &= M\{|f(x)|^2\} - \sum_{i=0}^N |a(\lambda_i)|^2 + \sum_{i=0}^N |c_i - a(\lambda_i)|^2 \end{aligned}$$

Se por acaso escolhermos c_i iguais à $a(\lambda_i)$, a fórmula será a seguinte:

$$M \left\{ \left| f(x) - \sum_{i=0}^N c_i e^{i\lambda_i x} \right|^2 \right\} = M\{|f(x)|^2\} - \sum_{i=0}^N |a(\lambda_i)|^2$$

Logo podemos garantir que $\sum_{i=0}^N |a(\lambda_i)|^2 \leq M\{|f(x)|^2\}$.

Assim para um dado $P = M\{|f(x)|^2\}$, é possível afirmar que somente existe um conjunto de valores finitos λ , tal que para um valor h positivo, $|a(\lambda)| > h$. Isto é, para um valor de $|a(\lambda)| > 1$ existem somente os valores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$. Da mesma maneira para o intervalo $1/m < |a(\lambda)| \leq 1$ teríamos somente os valores $\lambda_{q+1}, \lambda_{q+2}, \dots, \lambda_{q+p}$, e para o intervalo $1/k < |a(\lambda)| \leq 1/m$ os valores $\lambda_{q+p+1}, \lambda_{q+p+2}, \dots, \lambda_{q+p+s}$, e assim em diante, consequentemente provando o teorema VI. Os valores de λ_n diferentes de zeros são normalmente chamados de expoentes de Fourier da função f . Logo dizemos que a série de Fourier da função f é igual:

$$(2) \quad f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a(\lambda_n) e^{i\lambda_n x}$$

As mesmas propriedades apresentadas no apêndice *Séries de Fourier de funções periódicas* também são válidas para as funções quase-periódicas.

Teorema VII (Teorema da Aproximação): Toda função $f: J \rightarrow X$ quase-periódica pode ser aproximada uniformemente pela soma finita $s(x) = \sum_{i=0}^N a(\lambda_n) e^{i\lambda_n x}$, onde os valores λ_n são os expoentes de Fourier, isto é:

$$(3) \quad \sup_{t \in J} |f(x) - s(x)| \leq \varepsilon$$

Prova: Para qualquer valor de $\varepsilon > 0$ escolhemos $l = l(\varepsilon/8)$ e $\delta = \delta(\varepsilon/8)$, tal que existe um período de translação τ que satisfaz:

$$\sup_{t \in J} |f(x + \tau) - f(x)| \leq \varepsilon/8 \text{ no intervalo } a \leq x \leq a + l$$

$$\text{e } |f(x'') - f(x')| \leq \varepsilon/8 \text{ para quaisquer } x', x'' \in J \text{ com } |x'' - x'| \leq \delta$$

Dividamos J em intervalos $J_n = (nl, (n+1)l)$, ($n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$) tal que em cada intervalo J há um subintervalo $\Delta_n = (\tau_n - \delta, \tau_n + \delta)$, de período de translação $\varepsilon/4$, de tal maneira que para todo $\tau' \in \Delta_n$:

$$(4) \quad \sup_{t \in J} |f(t + \tau') - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

Definamos a função $K_\delta(s)$, $s \in J$, por

$$K_\delta(s) = \begin{cases} l/2\delta & \text{se } s \in \Delta_n \\ 0 & \text{se } s \notin \Delta_n \end{cases}$$

Assim as seguintes propriedades abaixo, que serão utilizadas posteriormente, são válidas:

1. $(1/2nl) \int_{-nl}^{nl} K_\delta(s) ds = 1$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$).
2. Para qualquer valor de $s \in J$ e qualquer natural m

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2ml}\right) \int_{-ml+s}^{ml+s} K_\delta(r) dr &= \left(\frac{1}{2ml}\right) \int_{-ml+s}^{-ml} + \int_{-ml}^{-(m-1)l} \dots \int_{ml}^{ml+s} K_\delta(r) dr \\ &= \left(\frac{1}{2ml}\right) \left(2ml + \int_{-ml+s}^{-ml} + \int_{ml}^{ml+s} K_\delta(r) dr\right) = 1 + \eta(s) \text{ onde } \eta(s) \leq 1/m \end{aligned}$$

3. Para qualquer valor fixo de δ o conjunto de funções

$$\phi_{\delta,T}(u) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T K_\delta(r) K_\delta(u+r) dr$$

$$T = T_n = nl, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (-\infty < x < \infty)$$

é uniformemente limitado e equicontínuo. Assim pelo clássico teorema de Arzela¹ nos podemos encontrar uma subsequência $T_k = T_{n_k}$ da sequência T_n tal que o limite

$$\phi_\delta(u) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_k} \int_{-T_k}^{T_k} K_\delta(r) K_\delta(u+r) dr$$

existe uniformemente em todo intervalo infinito.

¹ - Veja anexo A para maiores explicações sobre o Teorema de Arzela.

4. A função limite $\phi_\delta(u)$ é definida positiva.

$$\begin{aligned}
& \sum_{\mu=1}^n \sum_{\sigma=1}^n \phi_\delta(u_\mu - u_\sigma) \xi_\mu \bar{\xi}_\sigma \\
&= \sum_{\mu=1}^n \sum_{\sigma=1}^n \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_k} \int_{-T_k}^{T_k} K_\delta(s) K_\delta(u_\mu - u_\sigma + r) dr \xi_\mu \bar{\xi}_\sigma \\
&= \sum_{\mu=1}^n \sum_{\sigma=1}^n \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_k} \int_{-T_k}^{T_k} K_\delta(u_\sigma + r) K_\delta(u_\mu + r) dr \xi_\mu \bar{\xi}_\sigma \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_k} \int_{-T_k}^{T_k} \left| \sum_{\mu=1}^n K_\delta(u_\mu + r) \right|^2 dr \geq 0
\end{aligned}$$

Assim vemos que a função ϕ_u é contínua, definida positiva e $\phi_u(0) = 1$, logo satisfaz as três condições do teorema de Bochner-Khinchin [12], podendo ser representada da seguinte forma:

$$(5) \quad \phi_\delta(u) = \sum_{\sigma=1}^{+\infty} \alpha_\sigma \exp(i\lambda_\sigma u) + \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\lambda u) ds(\lambda)$$

onde $\alpha_\sigma > 0$, e $s(\lambda)$ é contínua, não decrescente e limitada.

Utilizando a relação 4 e as propriedades 1 e 2 das funções $K_\delta(u)$ temos que:

$$(6) \quad \sup_{t \in J} |f(t) - f_{\delta,m,n}(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\Gamma}{m}$$

onde $\Gamma = \sup_{t \in J} |f(t)|$.

Seja m e n números naturais arbitrários, definamos a função como:

$$f_{\delta,m,n}(t) = \frac{1}{4mnl^2} \int_{-nl}^{nl} \int_{-ml+s}^{ml+s} K_\delta(s) K_\delta(r) f(t-s+r) dr ds$$

Se definirmos $nl = T$ e $ml = R$,

$$\begin{aligned}
f_{\delta,m,n}(t) &= \frac{1}{4TR} \int_{-T}^T \int_{-R+s}^{R+s} K_{\delta}(s) K_{\delta}(r) f(t-s+r) dr ds \\
&= \frac{1}{2R} \int_{-R}^R \left[\frac{1}{2T} \int_{-T+s}^{T+s} K_{\delta}(s) K_{\delta}(u+s) ds \right] f(t+u) du \\
&= \frac{1}{2R} \int_{-R}^R \phi_{\delta,T}(u) f(t+u) du
\end{aligned}$$

utilizando as propriedades 3 e 4 das funções $K_{\delta}(s)$, a igualdade (5) e impondo $T = T_k$ obtemos:

$$\begin{aligned}
f_{\delta,m}(t) &= \lim_{k \rightarrow \infty} f_{\delta,m,T_k}(t) = \frac{1}{2R} \int_{-R}^R f(t+u) \phi_{\delta}(u) du \\
&= \frac{1}{2R} \int_{-R}^R f(t+u) \left[\sum_{\sigma=1}^{+\infty} \alpha_{\sigma} \exp(i\lambda_{\sigma} u) + \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\lambda t) ds(\lambda) \right] du \\
&= \frac{1}{2R} \int_{-R}^R f(t+u) \left[\sum_{\sigma=1}^{+\infty} \alpha_{\sigma} \exp[i\lambda_{\sigma}(u+t-t)] + \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\lambda u) ds(\lambda) \right] du \\
&= \sum_{\sigma=1}^{+\infty} \alpha_{\sigma} \exp(-i\lambda_{\sigma} t) \frac{1}{2R} \int_{-R}^R f(t+u) \exp[i\lambda_{\sigma}(u+t)] du \\
&\quad + \frac{1}{2R} \int_{-R}^R f(t+u) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\lambda u) ds(\lambda) du \\
f_{\delta,m}(t) &= \sum_{\sigma=1}^{+\infty} \alpha_{\sigma} A_{\sigma,R} \exp(-i\lambda_{\sigma} t) + \frac{1}{2R} \int_{-R}^R f(t+u) h(u) du
\end{aligned}$$

Onde:

$$A_{\sigma,R} = \frac{1}{2R} \int_{-R}^R f(t+u) \exp[i\lambda_{\sigma}(u+t)] du$$

$$A_{\sigma} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R f(t+u) \exp[i\lambda_{\sigma}(u+t)] du$$

$$h(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\lambda u) ds(\lambda)$$

Analisemos o segundo termo a direita do sinal de igualdade:

$$C = \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2R} \int_{-R}^R f(t+u)h(u)du \right|$$

$$(7) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2R} \int_{-R}^R \|f(t+u)\|du \right|^{1/2} \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2R} \int_{-R}^R |h(u)|^2 du \right|^{1/2} = 0$$

Pois sendo $h(u)$ a integral de Fourier-Stieltjes² de uma distribuição contínua $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R |h(u)|^2 du = 0$.

Seja Γ tal que $\sum_{\sigma=N+1}^{+\infty} \alpha_\sigma < \varepsilon/2\Gamma$, temos que para todos os valores de $R > 0$,

$$(8) \quad \left| \sum_{\sigma=n+1}^{+\infty} \alpha_\sigma \frac{1}{2R} \int_{-R}^R f(t+u) \exp[i\lambda_\sigma(u+t)] du \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Utilizando as relações 6, 7 e 8 temos que:

$$\sup_{t \in J} \left| f(x) - \sum_{\sigma=1}^{n+1} \alpha_\sigma A_{\sigma,R} \exp(-i\lambda_\sigma t) \right|$$

$$\leq \sup_{t \in J} |f(x) - f_\delta(x)| + \left| \sum_{\sigma=n+1}^{+\infty} \alpha_\sigma A_{\sigma,R} \exp(-i\lambda_\sigma t) \right|$$

$$\sup_{t \in J} \left| f(x) - \sum_{\sigma=1}^{n+1} \alpha_\sigma A_{\sigma,R} \exp(-i\lambda_\sigma t) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

provando assim o teorema de aproximação.

² - Veja apêndice 4 para maiores informações sobre a integral de Fourier-Stieltjes.

3. Problemática

O objetivo desse projeto é a determinação dos expoentes de Fourier de uma função quase-periódica, dados seus coeficientes de Fourier, logo procuramos os valores de λ para qual a equação abaixo é diferente de zero.

$$(9) \quad a(\lambda) = M\{f(x)e^{-ix\lambda}\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \int_{-t}^t f(t)e^{-i\lambda t} dt \neq 0$$

Como demonstrado no teorema VI, o conjunto dos valores de λ que satisfazem esta equação é enumerável, podendo ser infinito. Entretanto como em uma aproximação física de um problema não é necessário que obtenhamos um correspondente idêntico da função f , mas sim que saibamos qual o erro da estimativa é aceito no nosso projeto, assim trabalharemos sob um conjunto finito de λ_n , visto o teorema de aproximação. Logo nosso propósito é que para um determinado erro de aproximação ε da função $f: J \rightarrow X$, calculemos os valores de $\tilde{\lambda}_n$ tal que a seguinte inequação seja válida para todo x :

$$(10) \quad \sup_{t \in J} \left| f(x) - \sum_{\sigma=1}^{n+1} \alpha_{\sigma} A_{\sigma,R} \exp(-i\lambda_{\sigma} t) \right| \leq \varepsilon$$

Porém não podemos nos esquecer que os valores de $\tilde{\lambda}_n$ serão estimativas dos valores reais dos expoentes de Fourier λ_n , logo temos de impor outra condição a estas estimativas, a fim de garantir a precisão deste cálculo:

$$(11) \quad |\lambda_i - \tilde{\lambda}_i| \leq \delta \quad \text{para } i = (1, 2, \dots, n)$$

Na resolução deste problema diversas abordagens são possíveis, consistindo a complexidade deste trabalho de conclusão de curso em encontrar qual metodologia proporciona um ponto ótimo entre resultados numéricos precisos e tempo de processamento.

3.1 Expoentes de Fourier e seus períodos de translação

No caso de uma função periódica, o período define de uma maneira única todos os expoentes de Fourier, isto é, se $p > 0$ for o período da função, todos os expoentes de Fourier são múltiplos de $2\pi/p$. Apesar de no caso das funções quase-periódicas não existir uma relação tão simples, também existe uma conexão entre o período de translação e os expoentes de Fourier.

Teorema VIII: Para qualquer $\delta > 0$ e para qualquer número natural N existe um $\varepsilon = \varepsilon(\delta, N) > 0$, tal que todo período de translação $\tau = \tau(\varepsilon)$ de uma função quase-periódica $f: J \rightarrow X$ satisfaz o sistema de inequações abaixo:

$$(12) \quad |\exp(i\lambda_n \tau) - 1| \leq \delta$$

Prova: Seja $f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n t}$, assim temos que

$$a_n = M_t\{f(t)\exp(-i\lambda_n t)\} \text{ e } a_n \exp(i\lambda_n \tau) = M_t\{f(t + \tau)\exp(-i\lambda_n t)\}$$

Logo,

$$a_n \exp(i\lambda_n \tau) - a_n = M_t\{[f(t + \tau) - f(t)]\exp(-i\lambda_n t)\}$$

$$\|a_n[\exp(i\lambda_n \tau) - 1]\| = \|M_t\{[f(t + \tau) - f(t)]\exp(-i\lambda_n t)\}\|$$

$$\leq \|M_t\{f(t + \tau) - f(t)\}\| = \varepsilon \rightarrow |\exp(i\lambda_n \tau) - 1| \leq \varepsilon/\|a_n\|$$

Se $k = \min_{1 \leq n \leq N} \|a_n\|$, temos que:

$$|\exp(i\lambda_n \tau) - 1| \leq \varepsilon/k$$

Desta maneira basta impor $\varepsilon = k\delta$ para satisfazer o sistema de equações.

Teorema IX: Para todo $\varepsilon > 0$ e existe um número natural $N = N(\varepsilon)$ e um $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que qualquer número τ que satisfaça o sistema de inequações 12 é um período de translação ε de uma função quase-periódica $f: J \rightarrow X$

Prova: A partir do teorema de aproximação podemos definir um polinômio trigonométrico para um dado $\varepsilon > 0$:

$$P_\varepsilon(t) = \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} a_{n,\varepsilon} \exp(i\lambda_n \tau)$$

tal que, $\sup_{t \in J} |f(t) - P_\varepsilon(t)| \leq \varepsilon/3$.

Definindo $n = N_\varepsilon$ e $\delta = \varepsilon/3 \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} \|b_{n,\varepsilon}\|$, temos que para um valor de τ satisfaz as inequações (11):

$$\sup_{t \in J} |P_\varepsilon(t + \tau) - P_\varepsilon(t)| = \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} \|a_{n,\varepsilon}\| |\exp(i\lambda_n \tau) - 1| \leq \delta \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} \|a_{n,\varepsilon}\| \leq \varepsilon/3$$

Disto segue que:

$$\begin{aligned} \sup_{t \in J} |f(t + \tau) - f(t)| &\leq \sup_{t \in J} |f(t + \tau) - P_\varepsilon(t + \tau)| + \sup_{t \in J} |P_\varepsilon(t + \tau) - P_\varepsilon(t)| \\ &\quad + \sup_{t \in J} |P_\varepsilon(t) - f(t)| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

isto é, que τ é um período de translação ε de $f(t)$.

4. Resultados Obtidos

No decorrer deste trabalho de formatura três metodologias para obtenção dos expoentes de Fourier de funções quase-periódicas foram estudadas, sendo estas apresentadas abaixo.

4.1. Método dos mínimos quadrados (MMQ)

Consideremos que os valores da função f , que desejamos reproduzir, em m pontos distintos $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \dots (x_m, f(x_m))$ são conhecidos, e que também possuímos um modelo da função f , que chamaremos de $s(x, \lambda)$, sendo este dependente de x e dos parâmetros $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$, onde $m \geq n$. Logo nosso objetivo é determinar os valores de λ_i tais que o erro de aproximação seja mínimo, isto é, minimizar a função abaixo:

$$S = \sum_{i=1}^m [f(x_i) - s(x_i, \lambda)]^2 = \sum_{i=1}^m e_i(x_i, \lambda)^2$$

Sabe-se que o ponto de mínimo da função S ocorrerá quando o gradiente é zero, isto é:

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda_j} = \sum_{i=1}^m 2e_i(x_i, \lambda) \cdot \frac{\partial e_i(x_i, \lambda)}{\partial \lambda_j} = 0$$

Como estamos trabalhando com uma função não linear o termo $\partial e_i(x_i, \lambda) / \partial \lambda_j$ depende tanto dos parâmetros λ como da variável independente. Assim valores iniciais λ_j devem ser adotados e refinados iterativamente, isto é:

$$\lambda_j \approx \lambda_j^k = \lambda_j^{k-1} + \Delta \lambda_j$$

Desta expressão a função s e as funções e_i podem ser reescritas da seguinte forma:

$$s(x_i, \lambda) \approx s(x_i, \lambda^k) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial s(x_i, \lambda^k)}{\partial \lambda_j} (\lambda_j - \lambda_j^k) = s(x_i, \lambda^k) + \sum_{j=1}^n J_{ij} \Delta \lambda_j$$

$$\begin{aligned}
e_i(x_i, \lambda) &= f(x_i) - s(x_i, \lambda) = f(x_i) - s(x_i, \lambda^k) - \sum_{j=1}^n J_{ij} \Delta \lambda_j \\
&= \Delta f_i - \sum_{j=1}^n J_{ij} \Delta \lambda_j
\end{aligned}$$

Substituindo na equação do gradiente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial \lambda_i} &= \sum_{i=1}^m 2 \left[\Delta f_i - \sum_{s=1}^n J_{is} \Delta \lambda_s \right] \cdot \frac{\partial [\Delta f_i - \sum_{s=1}^n J_{is} \Delta \lambda_s]}{\partial \lambda_i} = 0 \\
&= \sum_{i=1}^m 2 J_{ij} \left[\Delta f_i - \sum_{s=1}^n J_{is} \Delta \lambda_s \right] = \sum_{i=1}^m \Delta f_i J_{ij} - \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^n J_{ij} J_{is} \Delta \lambda_s \\
&\quad \sum_{i=1}^m \Delta f_i J_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^n J_{ij} J_{is} \Delta \lambda_s
\end{aligned}$$

Em uma notação matricial, o sistema de equações gerado pela condição de gradiente nulo teria a seguinte formulação, onde a matriz J é a Jacobiana:

$$\Delta F \cdot J = J^T J \Delta \lambda$$

Entretanto este método apresenta dois problemas: primeiramente, não se trata de uma resposta direta a expressão 9, isto é, ele não fornece valores de λ_i , tal que a equação 9 sempre seja válida, mas sim valores de λ_i que melhor aproximam a função f em um determinado intervalo; segundo entra no domínio da programação não-linear, o que gera uma maior complexidade ao software, além de um maior tempo de processamento, o que também não é desejado.

4.2. Transformada de Fourier

Analisemos a expressão do coeficiente de Fourier abaixo:

$$a(\lambda) = M\{f(x)e^{-ix\lambda}\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \int_{-t}^t f(t)e^{-i\lambda t} dt \neq 0$$

Facilmente vemos que a integral da equação tende a transformada de Fourier quando os limites de integração são infinitos. Além disso podemos afirmar que a ordem de grandeza desta função é $O\left(\int_{-t}^t f(t)e^{-i\lambda t} dt\right) = t^\alpha$ onde $\alpha = 1$ quando

$a(\lambda) \neq 0$, pois $\alpha > 1$ significaria $a(\lambda) = \infty$ o que não ocorre, pois a função f é limitada, e $\alpha < 1$ quando $a(\lambda) = 0$.

Assim concentremos nossa atenção na transformada de Fourier da função $f: J \rightarrow X$ quase-periódica de representação $f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a(\lambda_n) e^{i\lambda_n t}$:

$$\begin{aligned} \varphi(f) = \mathcal{F}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a(\lambda_n) e^{i\lambda_n t} e^{-i\lambda t} dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a(\lambda_n) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda_n t} e^{-i\lambda t} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{(2\pi)} \cdot a(\lambda_n) \cdot \delta(\lambda - \lambda_n) \end{aligned}$$

Assim se fossemos representar a transformada de Fourier da função f , isto é, $\mathcal{F}(\lambda)$, teremos um trem de impulso (*Dirac comb*) nas posições λ_n , conforme representado abaixo.

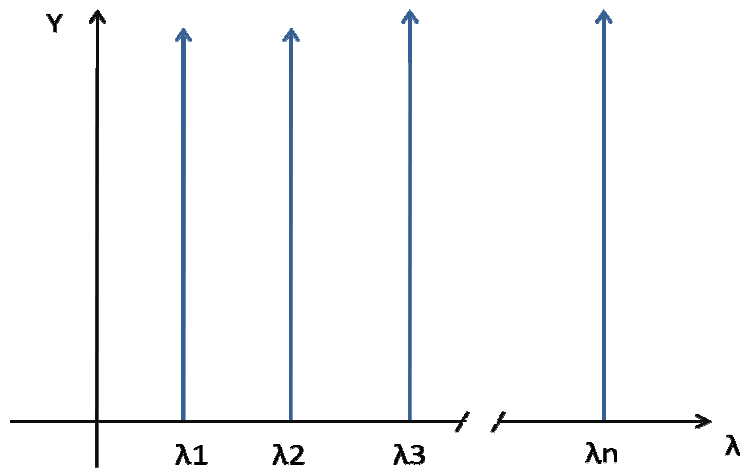


Figura 1 - Dirac Comb

Apesar de inicialmente podermos imaginar que tal representação nos seria vantajosa, e nos permitiria obter facilmente os valores dos expoentes de Fourier, esta não é a realidade. Pois o gráfico acima é uma representação dos resultados para uma função quase-periódica bem definida, isto é, erros de medição e de cálculo não foram considerados, sendo que estes podem ocasionar erros na estimativa dos parâmetros reais, além de gerar valores fantasmas, isto é, $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \dots, \lambda_p$ que não pertencem ao conjunto solução da expressão 9.

Assim neste primeiro modelo usaremos funções de filtragem, primeiramente para eliminar possíveis ruídos no sinal, e depois com o objetivo de concentrar a busca pelos expoentes de Fourier, para garantir uma melhor aproximação, e finalmente a fim de evitarmos a realização de operações sobre distribuições, no caso a distribuição delta de Dirac.

4.2.1. Filtro Gaussiano

O filtro gaussiano $g: J \rightarrow \mathbb{R}$, normalmente utilizado em eletrônica e no tratamento de sinais, é um filtro que tem como resposta frequencial uma função gaussiana. Este se torna extremamente útil quando se supõem que o erro na estimativa do sinal possui uma distribuição normal, fato extremamente plausível visto que as perturbações serão potencializadas nos arredores dos valores λ_i . Do ponto de vista matemático, o filtro gaussiano g modifica o sinal de entrada pela convolução deste último com a função gaussiana, sendo esta transformação conhecida como Transformada de Weierstrass. Abaixo vemos o resultado da aplicação deste filtro para o caso de uma função $f: J \rightarrow X$ quase-periódica de representação $f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a(\lambda_n) e^{i\lambda_n t}$:

$$\begin{aligned}
 g(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) \\
 \varphi(f \cdot g) = \mathcal{F}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)} f(t) e^{-i\lambda t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a(\lambda_n) e^{i\lambda_n t} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)} e^{-i\lambda t} dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \sum_{n=1}^{\infty} a(\lambda_n) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda_n t} e^{\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)} e^{-i\lambda t} dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \sum_{n=1}^{\infty} a(\lambda_n) \delta(\lambda - \lambda_n) * \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma} \cdot a(\lambda_n) \cdot \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}\right)
 \end{aligned}$$

Apliquemos o filtro gaussiano g em alguns casos testes:

- Caso 1: $f = -2e^{-15t} + 3e^{-3\pi it} + 2e^{it} + 4e^{2eit} + 3e^{15t}$ e $\sigma = 1$

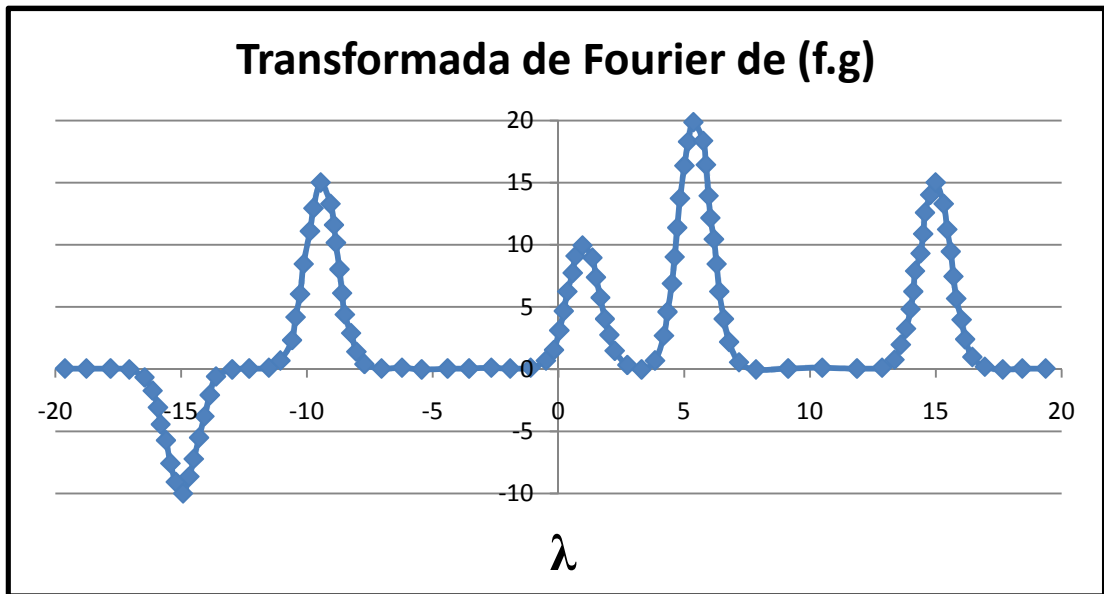


Figura 2 - $f = -2e^{-15t} + 3e^{-10it} + 2e^{it} + 4e^{10it} + 3e^{15t}$ e $\sigma = 1$

- Caso 2: $f = 3e^{-10it} + 2e^{it/e} + 4e^{10it}$ e $\sigma = 1$

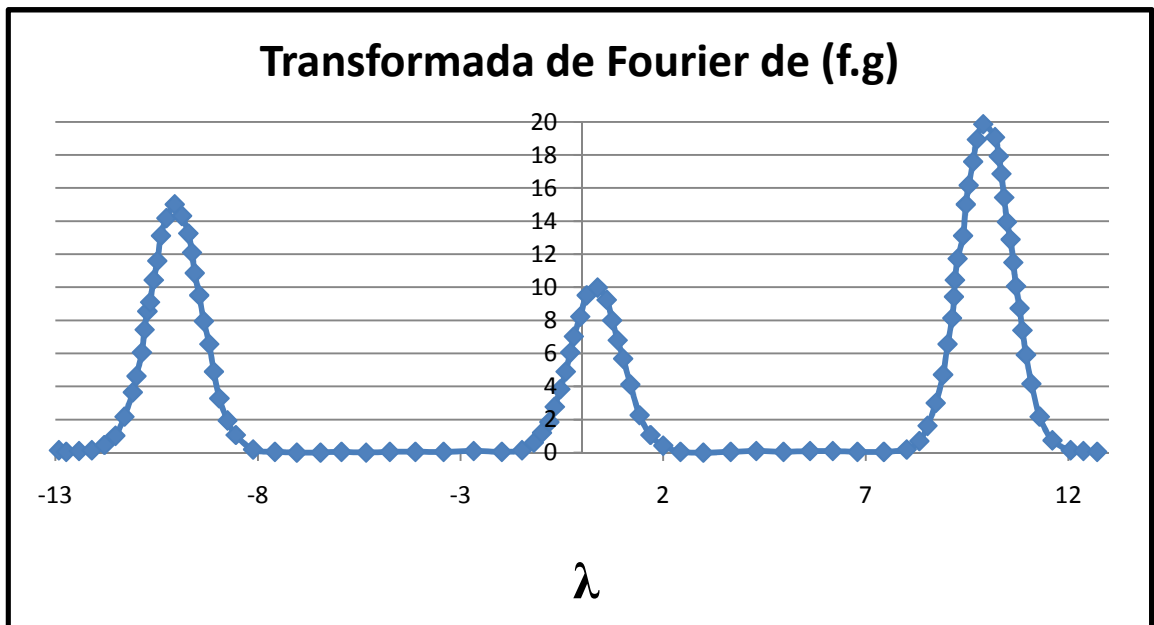


Figura 3 - $f = 3e^{-10it} + 2e^{it/e} + 4e^{10it}$ e $\sigma = 1$

- Caso 3: $f = 3e^{-10it} + 2e^{it/e} + 4e^{10it}$ e $\sigma = 10$

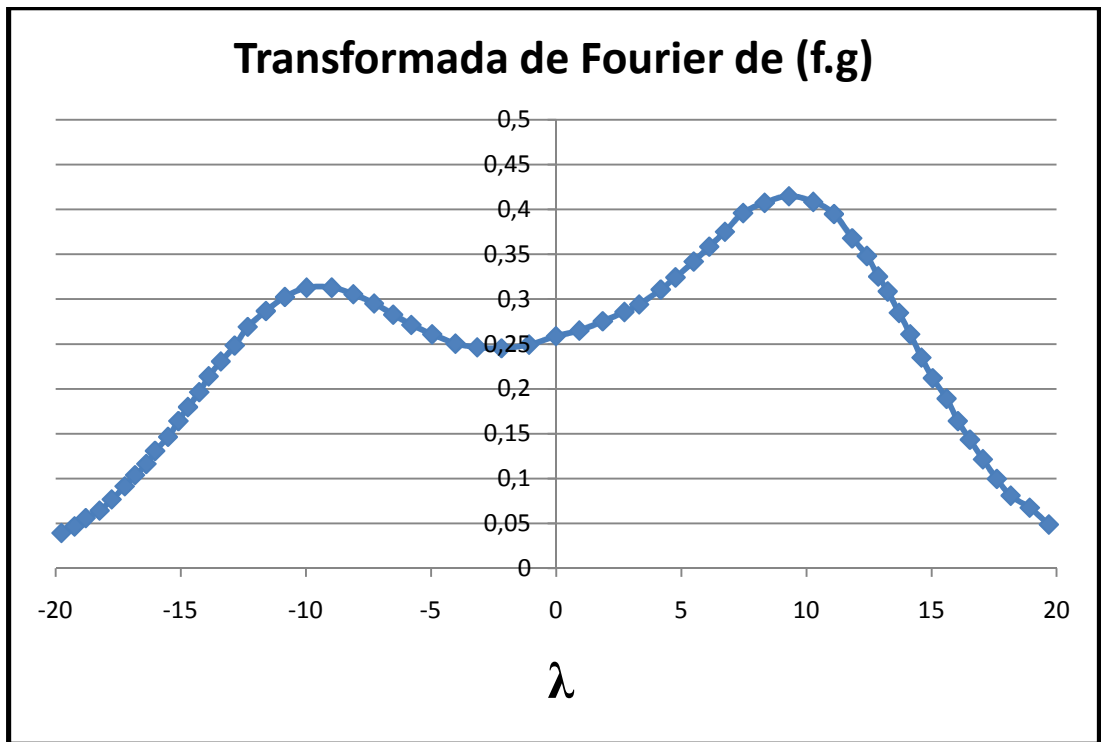


Figura 4 - $f = 3e^{-10it} + 2e^{it/e} + 4e^{10it}$ e $\sigma = 10$

- Caso 4: $f = 3e^{-5it} + 2e^{it} + 4e^{3it}$ e $\sigma = 1$

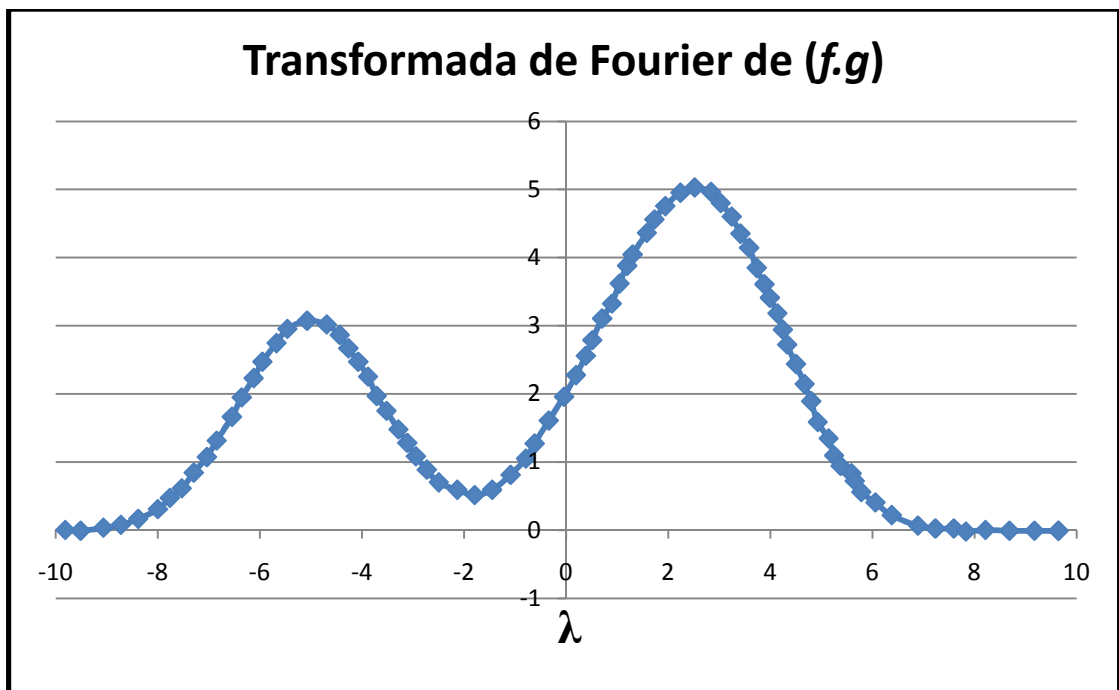


Figura 5 - $f = 3e^{-5it} + 2e^{it} + 4e^{3it}$ e $\sigma = 1$

A partir dos quatro casos analisados acima podemos inferir duas características da convolução entre o filtro gaussiano e uma função quase-periódica. Primeiramente a influência do valor do “desvio-padrão” σ na velocidade do decaimento da curva, isto é, um valor elevado de σ faz com que a extensão da curva aumente e sua magnitude diminua, podendo causar interações entre diferentes valores de λ_i , conforme podemos ver nas Fig. (4) e (5).

Outro resultado relevante foi o efeito de mutilação de valores de λ_i quando estes estão relativamente próximos de si, por exemplo, no caso 4 houve o completo desaparecimento de $\lambda_2 = 1$, devido sua proximidade de $\lambda_3 = 3$ e deste último possuir um coeficiente de fourier de maior magnitude. Além do fato de $\sigma = 1$, se usarmos um valor menor de σ , em torno de 0,2, é possível diferenciar λ_2 e λ_3 .

Apesar dos problemas apresentados acima, uma metodologia utilizando um filtro gaussiano tem um grande potencial de aplicação, pois utilizando as propriedades estatísticas da distribuição normal é possível estabelecer intervalos de confiança para os valores λ_i .

4.2.2. Filtro Lorentziano

Utilizamos o filtro lorentziano $l: J \rightarrow \mathbb{R}$ para retirar os ruídos dos sinais, e também evitar a realização de operações sobre as funções de delta de Dirac, da mesma forma que no caso de um filtro gaussiano. Porém no caso do filtro de Lorentz a resposta frequencial obtida é uma função de densidade Cauchy-Lorentz. Este se torna extremamente útil quando se supõe que o erro na estimativa do sinal possui uma distribuição Cauchy-Lorentz, suposição coerente visto que as perturbações serão potencializadas nos arredores dos valores λ_i . Do ponto de vista matemático, o filtro lorentziano l modifica o sinal de entrada pela convolução deste último com a função lorentziana. Abaixo vemos o resultado da aplicação deste filtro para o caso de uma função $f: J \rightarrow X$ quase-periódica de representação $f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a(\lambda_n) e^{i\lambda_n t}$:

$$l(t) = \frac{b}{t^2 + b^2}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(f.l) = \mathcal{F}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b}{t^2 + b^2} f(t) e^{-i\lambda t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a(\lambda_n) e^{i\lambda_n t} \frac{b}{t^2 + b^2} e^{-i\lambda t} dt \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a(\lambda_n) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b}{t^2 + b^2} e^{i\lambda_n t} e^{-i\lambda t} dt \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a(\lambda_n) \cdot \delta(\lambda - \lambda_n) * \frac{b}{\lambda^2 + b^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a(\lambda_n) \cdot \frac{b}{\lambda_n^2 + b^2}
\end{aligned}$$

4.2.3. Aplicação da transformada de Fourier em funções quase-periódicas

Suponhamos que os expoentes de Fourier, λ_i , de uma determinada função quase-periódica $f: J \rightarrow X$, onde $f(t) \sim \sum_{i=1}^{\infty} a(\lambda_i) e^{i\lambda_i t}$, possam ser representados através de uma função $\lambda_i = \phi(i)$. Utilizando o filtro gaussiano $g = 1/(\sqrt{2\pi}\sigma) \exp(-t^2/2\sigma^2)$ podemos escrever o seguinte sistema equação implícita de $\phi(i)$:

$$\begin{aligned}
\varphi(f.g) = \mathcal{F}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{(-\frac{t^2}{2\sigma^2})} f(t) e^{-i\lambda t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a(\lambda_i) e^{i\lambda_i t} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{(-\frac{t^2}{2\sigma^2})} e^{-i\lambda t} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \sum_{i=1}^{\infty} a(\lambda_i) \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-\frac{t^2}{2\sigma^2})} e^{i\lambda_i t} e^{-i\lambda t} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \sum_{i=1}^{\infty} a(\lambda_i) \delta(\lambda - \lambda_i) * \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma} \cdot a(\lambda_i) \cdot \exp\left(-\frac{\lambda_i^2}{2\sigma^2}\right) \\
(13) \quad \varphi(f.g) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma} \cdot a(\lambda_i) \cdot \exp\left(-\frac{\phi(i)^2}{2\sigma^2}\right)
\end{aligned}$$

Consideremos o caso de uma função $\phi(j) = \sqrt{2b \ln j} \sigma$:

$$\varphi(f.g) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma} \cdot a(\lambda_j) \cdot \exp\left(\frac{-\phi(j)^2}{2\sigma^2}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma} \cdot a(\lambda_j) \cdot \exp\left(\frac{-(\sqrt{2b \ln j} \sigma)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\varphi(f \cdot g) = \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma} \cdot a(\lambda_j) \cdot \exp[-b \ln j] \right] = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma} \cdot a(\lambda_j) \cdot j^{-b}$$

Se soubermos os valores de $a(\lambda_j)$, podemos facilmente identificar que a lei que rege os valores dos expoentes de Fourier λ_j é a expressão $\sqrt{2 \ln j} \sigma$, e também calcular o respectivo valor de b .

Analisemos também o caso da função $\phi(j) = \sqrt{2b} \sigma \cdot j$:

$$\varphi(f \cdot g) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma} \cdot a(\lambda_j) \cdot \exp\left(\frac{-\phi(j)^2}{2\sigma^2}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma} \cdot a(\lambda_j) \cdot \exp\left(\frac{-(\sqrt{2b} \cdot \sigma \cdot j)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\varphi(f \cdot g) = \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma} \cdot a(\lambda_j) \cdot \exp[-b \cdot j^2] \right]$$

Analogamente ao exemplo anterior, podemos facilmente identificar que a expressão geral dos expoentes de Fourier λ_j é dada pela equação $\phi(j) = \sqrt{2b} \sigma \cdot j$.

Em ambos os casos podemos verificar que apesar de estarmos trabalhando sobre um conjunto infinito de números, o fato desse ser enumerável recursivamente permite que encontrássemos uma base $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \dots$ deste conjunto, tal que qualquer expoente de Fourier λ_m pode ser expresso nesta base. Entretanto antes de formalizar o conceito de base de um conjunto enumerável estudemos um exemplo a fim de entender as particularidades desse problema.

Exemplo - 4: $\lambda_1 = \ln 3, \lambda_2 = \ln 18, \lambda_3 = \ln 24$

Primeiramente generalizemos para o caso de um expoente $\lambda_m = \ln q$, assim aplicando o teorema geral da aritmética pode-se reescrever essa expressão:

$$\lambda_m = \ln q = \ln p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot p_3^{m_3} \dots p_n^{m_n} = m_1 \ln p_1 + m_2 \ln p_2 + \dots + m_n \ln p_n$$

Para valores $m_i \in \mathbb{N}$ e $p_i \in \mathbb{N}$ tal que p_i seja um número primo, podemos definir que a base de um conjunto $\ln q$ ($q = 1,2,3 \dots$) é o conjunto $\{\ln p_i\}$ ($p_i = 2,3,5 \dots$). Assim os expoentes λ_1 , λ_2 e λ_3 podem ser reescritos conforme abaixo:

$$\lambda_1 = \ln 3, \quad \lambda_2 = \ln 18 = \ln 2 \cdot 3^2 = \ln 2 + 2 \ln 3$$

$$\lambda_3 = \ln 24 = \ln 2^3 \cdot 3 = 3 \ln 2 + \ln 3$$

Assim em uma primeira análise poderíamos dizer que a representação das coordenadas de λ_1 , λ_2 e λ_3 na base $\{\ln p_i\}$ é:

$$\lambda_1 = \{0; 1; 0; \dots\}, \lambda_2 = \{1; 2; 0; \dots\} \text{ e } \lambda_3 = \{3; 2; 0; \dots\}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \{\ln p_i\}$$

Porém esta representação é errônea, pelo fato do conjunto dos expoentes de Fourier ser um conjunto enumerável, isto é, $\lambda_1 = \ln 3, \lambda_2 = \ln 18$ e $\lambda_3 = \ln 24$ é diferente de $\lambda_1 = \ln 3, \lambda_2 = \ln 24$ e $\lambda_3 = \ln 18$, logo não pode ter a mesma representação. Assim como o objetivo é ordenar um conjunto enumerável as coordenadas do vetor na base não devem ser apenas números inteiros, mas também racionais.

- *Base de um conjunto enumerável:*

Dado um conjunto enumerável $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \dots$ de números reais, o conjunto $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \dots\}$ é considerado uma base e somente se as seguintes propriedades são verificadas:

1 – Os valores $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \dots$ são independentes linearmente, isto é, a expressão abaixo é verdadeira para todos os valores de m , somente se todos os valores r_i são nulos.

$$r_1\beta_1 + r_2\beta_2 + \dots + r_m\beta_m = 0$$

2 – Qualquer valor α_i pode ser representado por um número suficientemente grande de m , isto é,

$$\alpha_i = r_1\beta_1 + r_2\beta_2 + \dots + r_m\beta_m$$

sendo os coeficientes r_1, r_2, \dots, r_n números racionais.

Devemos portanto mostrar que para uma dada sequência $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \dots$ existe uma base $\{\beta_n\}$. Para isso primeiramente escolhemos como primeiro termo β_1 o primeiro valor α_{n1} da sequência $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \dots$ que seja diferente de zero, em seguida retiramos dessa todos os valores α_i que possam ser escritos da seguinte forma $r_1\beta_1 + r_i\alpha_i = 0$, onde os valores r_i sejam racionais. Escolhemos o segundo valor da base β_2 como sendo o primeiro valor α_{n2} , diferente de zero, da sequência remanescente, e como no procedimento anterior retiramos da sequência todos os valores α_i que possam ser escritos da seguinte forma $r_1\beta_1 + r_2\beta_2 + r_i\alpha_i = 0$, sendo os coeficientes da equação números racionais. Definimos $\beta_3 = \alpha_{n3}$, onde este último é o primeiro termo diferente de zero da sequência remanescente, e assim em diante.

No caso da sequência enumerável ser finita podemos facilmente ver que a base dessa é igual à:

$$\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\} = \{\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \dots, \alpha_{nn}\}$$

no caso contrário este procedimento continuará infinitamente, sendo a base representada da seguinte forma:

$$\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \dots\} = \{\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \dots, \alpha_{nn} \dots\}$$

Aplicando esses novos conceitos ao próximo exemplo:

Exemplo - 5: $\lambda_1 = \ln 3, \lambda_2 = \ln 18, \lambda_3 = \ln 24, \lambda_4 = \ln 25$

$$\beta_1 = \ln 3$$

$$r_1\beta_1 + r_2\alpha_2 = 0 \rightarrow r_1/r_2 = -\beta_1/\alpha_2 = -\ln 18 / \ln 3$$

$$r_1\beta_1 + r_3\alpha_3 = 0 \rightarrow r_1/r_3 = -\beta_1/\alpha_3 = -\ln 24 / \ln 3$$

$$r_1\beta_1 + r_4\alpha_4 = 0 \rightarrow r_1/r_4 = -\beta_1/\alpha_4 = -\ln 25 / \ln 3$$

Como os valores de r_1/r_i ($i = 2, 3$ e 4) são irracionais nenhum número é retirado da sequência.

$$\beta_2 = \ln 18$$

$$r_1\beta_1 + r_2\beta_2 + r_3\alpha_3 = r_1 \ln 3 + r_2 \ln 18 + r_3 \ln 24 = 0 \rightarrow r_1 = 5, r_2 = -3, r_3 = 1$$

$$r_1\beta_1 + r_2\beta_2 + r_4\alpha_4 = r_1 \ln 3 + r_2 \ln 24 + r_4 \ln 25 = 0 \rightarrow r_1 \approx -5,827, r_2 = 1, r_3 = 1$$

Assim excluimos o valor $\ln 24$, logo a base será formada por $\{\ln 3; \ln 18; \ln 25\}$, pois r_1 é irracional.

4.3. Sistema Não-Linear de Expoentes de Fourier:

Analisemos o caso da função representada abaixo, onde desejamos saber os valores dos expoentes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e λ_4 :

$$f(t) = 2 \cdot e^{\ln 3t} + 32 \cdot e^{\ln 3t} - 2 \cdot e^{\ln 6t} + e^{\ln 12t}$$

Utilizando os conceitos apresentados anteriormente podemos montar o seguinte sistema de equações para obter os expoentes de Fourier, supondo que os valores $a(\lambda_i)$ e $f(t)$ sejam conhecidos

$$f(1) = 102 = 2 \cdot e^{\lambda_1} + 32 \cdot e^{\lambda_2} - 2 \cdot e^{\lambda_3} + e^{\lambda_4} = 2x_1 + 32x_2 - 2x_3 + x_4$$

$$f(2) = 204 = 2 \cdot e^{2\lambda_1} + 32 \cdot e^{2\lambda_2} - 2 \cdot e^{2\lambda_3} + e^{2\lambda_4} = 2x_1^2 + 32x_2^2 - 2x_3^2 + x_4^2$$

$$f(3) = 306 = 2 \cdot e^{3\lambda_1} + 32 \cdot e^{3\lambda_2} - 2 \cdot e^{3\lambda_3} + e^{3\lambda_4} = 2x_1^3 + 32x_2^3 - 2x_3^3 + x_4^3$$

$$f(4) = 408 = 2 \cdot e^{4\lambda_1} + 32 \cdot e^{4\lambda_2} - 2 \cdot e^{4\lambda_3} + e^{4\lambda_4} = 2x_1^4 + 32x_2^4 - 2x_3^4 + x_4^4$$

$$\begin{bmatrix} 2x_1 + 32x_2 - 2x_3 + x_4 \\ 2x_1^2 + 32x_2^2 - 2x_3^2 + x_4^2 \\ 2x_1^3 + 32x_2^3 - 2x_3^3 + x_4^3 \\ 2x_1^4 + 32x_2^4 - 2x_3^4 + x_4^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 102 \\ 204 \\ 306 \\ 408 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 32 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 102 \\ 204 \\ 306 \\ 408 \end{bmatrix}$$

Vemos que para obter os valores de λ_i basta resolver o sistema não-linear de x_1, x_2, x_3 e x_4 , onde podemos identificar uma matriz de Vandermonde de dimensão 4, e calcular $\lambda_i = \ln x_i$, onde $(i = 1, 2, 3, 4)$. O resultado obtido acima nos permite supor que no caso de um número finito de λ_i é possível estabelecer um sistema de equações para a obtenção dos valores dos expoentes de Fourier.

Assim definamos uma $f: J \rightarrow X$ quase-periódica, apresentada abaixo, onde $a(\lambda_i)$ é um número pertencente à \mathbb{R} , porém não nulo.

$$f(t) \sim \sum_{j=1}^n a(\lambda_j) e^{i\lambda_j t}$$

Supondo que essa função f é conhecida por amostragem em n instantes diferentes igualmente espaçados, $t = t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$, onde $t_{i+1} - t_i = \delta$. Sejam as constantes x_j definidas como sendo iguais à $e^{i\lambda_j \delta}$, é possível reescrever a função f no ponto t_k como sendo igual à:

$$f(t_k) \sim \sum_{j=1}^n a(\lambda_j) e^{i\lambda_j t_k} = \sum_{j=1}^n a(\lambda_j) e^{i\lambda_j \delta k} = \sum_{j=1}^n a(\lambda_j) x_j^k$$

Logo podemos escrever o seguinte sistema de equações,

$$f(t_1) = \sum_{j=1}^n a(\lambda_j) x_j \dots f(t_2) = \sum_{j=1}^n a(\lambda_j) x_j^2 \dots f(t_n) = \sum_{j=1}^n a(\lambda_j) x_j^n$$

que reescrito em forma matricial tem a seguinte aparência:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^m & x_2^m & \dots & \dots & x_n^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(\lambda_1) \\ a(\lambda_2) \\ \vdots \\ a(\lambda_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t_1) \\ f(t_2) \\ \vdots \\ f(t_m) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{m-1} & x_2^{m-1} & \dots & \dots & x_n^{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a(\lambda_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t_1) \\ f(t_2) \\ \vdots \\ f(t_m) \end{bmatrix}$$

$$V(x) \cdot A \cdot x = f$$

Podemos facilmente verificar que como no exemplo anterior o sistema possui solução, afinal a matriz V é uma matriz de Vandermonde de determinante igual à $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_{i+1} - x_i)$, e como os valores de λ_i são diferentes entre si, temos que $\det(V) \neq 0$. Além do que os valores dos coeficientes de Fourier $a(\lambda_i)$ são conhecidos e diferente de zero também, logo o determinante de A também é não nulo, afinal definimos que os únicos termos da função quase-periódica que são considerados expoentes de Fourier são aqueles que possuem coeficientes de Fourier diferentes de zero..

4.3.1. Sistema de Equações Não-Lineares de Vandermonde

Em uma primeira reflexão podemos pensar que a melhor abordagem para a resolução do sistema linear acima seria a simples inversão da matriz de Vandermonde, através de um processo iterativo, isto é, dados os valores dos coeficientes de Fourier conhecidos $a(\lambda_i)$ e a partir de um valor inicial de x^0 , a matriz de Vandermonde $V(x^0)$ é calculada e assim sua inversa $V^{-1}(x^0)$, logo um valor x^1 pode ser estimado. Sendo esse procedimento repetido até que a diferença $x^{k+1} - x^k$ seja inferior ao parâmetro de correção.

Entretanto em uma implementação numérica pode-se verificar que esta não é uma boa solução, sendo este processo extremamente instável numericamente.

Assim após a realização de uma pesquisa bibliográfica sobre o tema de resolução de sistemas não-lineares de Vandermonde, decidimos implementar a metodologia proposta por (G. Trapp e W. Squire,1976)^[16] que consiste da inclusão de uma parâmetro de correção ε , conforme exposto abaixo:

$$\begin{bmatrix} x_1 + \varepsilon_1 & x_2 + \varepsilon_2 & \cdots & x_n + \varepsilon_n \\ (x_1 + \varepsilon_1)^2 & (x_2 + \varepsilon_2)^2 & \cdots & (x_n + \varepsilon_n)^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (x_1 + \varepsilon_1)^n & (x_2 + \varepsilon_2)^n & \cdots & (x_n + \varepsilon_n)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = f$$

Se desprezarmos os efeitos de todos valores de ε_i de ordem superior a um,

$$\begin{bmatrix} x_1 + \varepsilon_1 & \cdots & x_n + \varepsilon_n \\ x_1^2 + 2x_1\varepsilon_1 & \cdots & x_n^2 + 2x_n\varepsilon_n \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^n + nx_1^{n-1}\varepsilon_1 & \cdots & x_n^n + nx_n^{n-1}\varepsilon_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = f$$

$$\left(\begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_n \\ 2x_1\varepsilon_1 & \cdots & 2x_n\varepsilon_n \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ nx_1^{n-1}\varepsilon_1 & \cdots & nx_n^{n-1}\varepsilon_n \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = f$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 2x_1 & \cdots & 2x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ nx_1^{n-1} & \cdots & nx_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} = f$$

$$V(x^k)Ax^k + \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 2x_1 & \cdots & 2x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ nx_1^{n-1} & \cdots & nx_n^{n-1} \end{bmatrix} A\varepsilon^k = f$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} A\varepsilon^k = f - V(x^k)Ax^k$$

$$D \cdot V(x^k) \cdot A \cdot \varepsilon^k = f - V(x^k)A \cdot x^k$$

$$V(x^k)A\varepsilon^k = D^{-1} \cdot (f - V(x^k)A \cdot x^k)$$

$$\varepsilon^k = A^{-1}V(x^k)^{-1}D^{-1} \cdot (f - V(x^k)A \cdot x^k)$$

Onde a matriz D^{-1} é diagonal e definida por $d_{ii} = 1/i$, e a matriz A também é uma matriz diagonal, porém formada pelos coeficientes de Fourier, $a_{ii} = a(\lambda_i)$. O

procedimento de iteração busca obter uma solução para o sistema de equação apresentado abaixo:

$$\begin{cases} V(x^k)A\varepsilon = D^{-1} \cdot (f - V(x^k)A \cdot x^k) \\ x^{k+1} = x^k + \varepsilon^k \end{cases}$$

A partir de um valor inicial x^0 , o parâmetro ε^0 é estimado, e consequentemente x^1 , este procedimento é repetido até que o valor de ε^k seja inferior ao valor de convergência pré-estabelecido.

No caso de valores reais de x_i um coeficiente de correção α é adicionado ao processo, conforme exposto abaixo:

$$\text{Se } |\varepsilon^k| \leq \alpha|x^k| \rightarrow x^{k+1} = x^k + \varepsilon^k$$

$$\text{porém se } |\varepsilon^k| > \alpha|x^k| \rightarrow x^{k+1} = x^k + \alpha\varepsilon^k|x^k|/|\varepsilon^k|$$

- *Inversão da Matriz de Vandermonde*

A inversa de uma matriz de Vandermonde $V^{-1}(x)$ de ordem n pode ser decomposta em duas matrizes L e U , triangulares superiores e inferiores respectivamente, conforme exposto abaixo:

- *Matriz L:*

$$L = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{x_1 - x_2} & \frac{1}{x_1 - x_2} \frac{1}{x_1 - x_3} & \dots & \dots & \frac{1}{x_1 - x_2} \dots \frac{1}{x_1 - x_n} \\ 0 & \frac{1}{x_2 - x_1} & \frac{1}{x_2 - x_1} \frac{1}{x_2 - x_3} & \dots & \dots & \frac{1}{x_2 - x_1} \dots \frac{1}{x_2 - x_n} \\ 0 & 0 & \frac{1}{x_3 - x_1} & \frac{1}{x_3 - x_1} \frac{1}{x_3 - x_2} & \ddots & \frac{1}{x_3 - x_1} \dots \frac{1}{x_3 - x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \frac{1}{x_n - x_1} \dots \frac{1}{x_n - x_{n-1}} \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{cases} l_{11} = 1 \\ l_{ij} = 0, & \text{se } i > j \\ l_{ij} = 0 \end{cases}$$

- Matriz U :

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ -x_1 & 1 & 0 & \dots \\ x_1x_2 & -(x_1 + x_2) & 1 & \dots \\ -x_1x_2x_3 & x_1x_3 + x_1x_2 + x_2x_3 & -(x_1 + x_2 + x_3) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{cases} u_{ii} = 1 \\ u_{0j} = 0 \\ u_{ij} = 0, & \text{se } i < j \\ u_{ij} = u_{i-1j-1} - u_{ij-1} \cdot x_{j-1} \end{cases}$$

Logo a inversa da matriz de Vandermonde $V(x)$ pode ser expressa como sendo igual à:

$$V^{-1}(x) = L \cdot U$$

4.3.2. Simulação da Metodologia Trapp-Squire

Utilizamos alguns exemplos para testar a aplicação e a estabilidade da rotina MatLab desenvolvido para a solução de sistemas não-lineares de Vandermonde, e conseqüentemente a obtenção dos expoentes de Fourier de uma função quase-periódica.

No caso de uma matriz de Vandermonde de ordem 5 de valores $x = [1; 2; 3; 4; 5]$ e valores iniciais $x^0 = [-1; 0,1; 1,5; 3,5; 6]$, o número de iterações até a convergência foi de 8 iterações e a diferença $|x^{k+1} - x^k|^2 = 1,3724 \cdot 10^{-29}$. Se utilizamos valores iniciais mais dispersos para este mesmo sistema, $x^0 = [-1; 0,5; 1,5; 8i; 60]$, há uma convergência na ordem de $1,0549 \cdot 10^{-18}$, após 63 iterações.

Quando trabalhamos nos casos de valores x_i complexos, a metodologia se mostra ainda mais precisa e refinada. Por exemplo, para uma matriz de Vandermonde de ordem 5 de valores $x = [-2i; -i; i; 2i; 5]$, quando a solução inicial é $x^0 = [-5i; -1,5i; 4i; 6i; 5]$ o número de iterações é de 10 e a diferença entre $|x^{k+1} - x^k|^2 = 1,8904 \cdot 10^{-31}$. Se utilizarmos $x^0 = [-20i; -3i; 4i; 80i; 5]$, isto é, valores

relativamente dispersos, o número de iterações será de 28, e o erro de convergência igual à $|x^{k+1} - x^k|^2 = 3,062 \cdot 10^{-22}$. Finalmente, para valores iniciais ainda piores x^0 igual à $[-500i; -38i; 24i; 600i; 6]$, a convergência nos resultados ocorre em 33 iterações.

Vejamos o caso de matrizes de Vandermonde de ordem maiores:

- $n = 10$ e $x = [-5i; -3i; -2i; -i; -5; i; 2i; 3i; 5i; 8]$:

- Para $x^0 = [-6i; -4i; -2,2i; -2i; -i; i; 1,2i; 2i; 3i; 1; 8]$ o número de iterações até a convergência foi de 264, e o erro de convergência $|x^{k+1} - x^k|^2$ foi igual à $2,045 \cdot 10^{-29}$.
- Se $x^0 = [-10i; -8i; -2,9i; 6i; 0; 1; 1,2; 6; 9i; 20i]$ o número de iterações até a convergência foi de 389, e a diferença $|x^{k+1} - x^k|^2$ igual à $7,3658 \cdot 10^{-21}$.

- $n = 15$ e $x = [9i; 8i; 7i; 6i; 5i; 4i; 3i; 2i; 1i; 8; -1i; -2i; -3i; -5i; -6i]$:

- Se $x^0 = [-10i; -8i; -2,9i; 6i; 0; 1; 3; 6; 9i; 20i; 3,5i; 2,5i; -8,5i; -4; -6,9]$ o número de iterações até a convergência foi de 40907, e o erro de convergência $|x^{k+1} - x^k|^2$ igual à $4,1802 \cdot 10^{-20}$.

Assim podemos afirmar que quando os valores x_i são complexos a convergência é obtida, mesmo nos casos de soluções iniciais mal condicionadas, ou sistema de grande ordem.

Testemos agora a robustez do código para o caso de problemas onde a matriz A , definida anteriormente, é diferente da identidade, isto é, existe algum $a_{ii} \neq 1$.

- $n = 4$, $x = [1; 2; 3; 4]$ e $A = [1; 2; 3; 4]$:

- Para $x^0 = [0,9; 1,9; 2,9; 3,9]$ o número de iterações até a convergência foi de 5, e o erro de convergência $|x^{k+1} - x^k|^2$ foi igual à $1,2345 \cdot 10^{-27}$.

- Para $x^0 = [0.7; 1.8; 2.8; 4.5]$ o número de iterações até a convergência foi de 5, e o erro de convergência $|x^{k+1} - x^k|^2$ foi igual à $7.4922 \cdot 10^{-9}$.
- Se $x^0 = [0.9; 1.9; 2.9; 3.5]$ o número de iterações até a convergência foi de 7, e a diferença de convergência $|x^{k+1} - x^k|^2$ igual à $7,2759 \cdot 10^{-24}$. Entretanto devido ao valor inicial mal condicionado a solução obtida foi $x_s = [0.9685; 3.2282; 2.2095; 3.9867]$, que podemos verificar facilmente verificar também é uma solução ao sistema não linear abaixo.

$$\begin{bmatrix} x_{s1} & x_{s2} & x_{s3} & x_{s4} \\ x_{s1}^2 & x_{s2}^2 & x_{s3}^2 & x_{s4}^2 \\ x_{s1}^3 & x_{s2}^3 & x_{s3}^3 & x_{s4}^3 \\ x_{s1}^4 & x_{s2}^4 & x_{s3}^4 & x_{s4}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 100 \\ 354 \\ 1300 \end{bmatrix}$$

- $n = 5$ $x = [1; 2; 3; 4; 5]$ e $A = [1; 1; 1; 1; 1.1]$:

- Para o mesmo $x^0 = [-1; 0,1; 1,5; 3,5; 6]$ anterior tentamos refazer o sistema de ordem 5 estudado anterior, porém desta vez com a matriz A definida acima o sistema não atinge a convergência, mesmo após 1984172 iterações.
- Se utilizarmos o mesmo $x^0 = [-1; 0,1; 1,5; 3,5; 6]$, porém definirmos a matriz A como sendo $[\pi^e; \pi^e; \pi^e; \pi^e; \pi^e]$ a convergência ocorre após 9 iterações apenas, com uma diferença $|x^{k+1} - x^k|^2$ igual à $2,3061 \cdot 10^{-26}$.
- Para um $x^0 = [0.9; 1,5; 2,7; 3,1; 4,5]$ melhor condicionado a convergência ocorre após 7 iterações apenas, com uma diferença $|x^{k+1} - x^k|^2$ igual à $1,6014 \cdot 10^{-24}$.

Este comportamento demonstra que a convergência ocorre com robustez quando a matriz A é composta de valores a_{ii} iguais entre si, isto é, $a_{ii} \{i = 1,2,3 \dots\}$ igual à uma constante c , seja esta real ou complexa. Entretanto este comportamento também demonstra que o sistema se mostra mais instável quando os valores de a_{ii} são diferentes entre si.

4.3.3. Simulação da Metodologia Trapp-Squire em matrizes não quadradas

A fim de aumentar a precisão e a abrangência da metodologia devemos generalizá-la para o caso de matrizes de Vandermonde retangulares $m \times n$, onde $m > n$, conforme exposto abaixo:

$$\begin{bmatrix} x_1 + \varepsilon_1 & x_2 + \varepsilon_2 & \cdots & x_n + \varepsilon_n \\ (x_1 + \varepsilon_1)^2 & (x_2 + \varepsilon_2)^2 & \cdots & (x_n + \varepsilon_n)^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (x_1 + \varepsilon_1)^m & (x_2 + \varepsilon_2)^m & \cdots & (x_n + \varepsilon_n)^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = f$$

$$\begin{bmatrix} x_1 + \varepsilon_1 & \cdots & x_n + \varepsilon_n \\ x_1^2 + 2x_1\varepsilon_1 & \cdots & x_n^2 + 2x_n\varepsilon_n \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^m + mx_1^{m-1}\varepsilon_1 & \cdots & x_n^m + mx_n^{m-1}\varepsilon_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = f$$

$$\left(\begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^m & \cdots & x_n^m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_n \\ 2x_1\varepsilon_1 & \cdots & 2x_n\varepsilon_n \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ mx_1^{m-1}\varepsilon_1 & \cdots & mx_n^{m-1}\varepsilon_n \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = f$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{m-1} & \cdots & x_n^{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 2x_1 & \cdots & 2x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ mx_1^{m-1} & \cdots & mx_n^{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} = f$$

$$V(x^k)_{m \times n} A x^k + \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 2x_1 & \cdots & 2x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ mx_1^{m-1} & \cdots & mx_n^{m-1} \end{bmatrix} A \varepsilon^k = f$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{m-1} & \cdots & x_n^{m-1} \end{bmatrix} A \varepsilon^k = f - V(x^k)_{m \times n} A x^k$$

$$D \cdot V(x^k)_{m \times n} \cdot A \cdot \varepsilon^k = f - V(x^k)_{m \times n} A \cdot x^k$$

$$V(x^k)_{m \times n} A \varepsilon^k = D^{-1} \cdot (f - V(x^k)_{m \times n} A \cdot x^k)$$

Vemos então que a matriz $V(x^k)_{m \times n}$ não possui inversa, visto que não é quadrada, logo usando o conceito de matriz pseudo-inversa *Moore–Penrose*, vide apêndice 3, podemos escrever ε^k como sendo:

$$A\varepsilon^k = V(x^k)_{m \times n}^+ D^{-1} \cdot (f - V(x^k)_{m \times n} A \cdot x^k)$$

$$A\varepsilon^k = (V(x^k)_{m \times n}^* V(x^k)_{m \times n})^{-1} V(x^k)_{m \times n}^* D^{-1} \cdot (f - V(x^k)_{m \times n} A \cdot x^k)$$

$$\varepsilon^k = A^{-1} (V(x^k)_{m \times n}^* V(x^k)_{m \times n})^{-1} V(x^k)_{m \times n}^* D^{-1} \cdot (f - V(x^k)_{m \times n} A \cdot x^k)$$

Testando este novo algoritmo no exemplo anterior:

- $n = 4$, $x = [1; 2; 3; 4]$ e $A = [1; 2; 3; 4]$:

- Para o mesmo valor de x^0 igual à $= [0.9; 1.9; 2.9; 3.5]$, que nos conduzia a um valor errôneo, se fixarmos o valor de m igual à 5 o número de iterações até a convergência foi de 8, e a convergência $|x^{k+1} - x^k|^2$ igual à $2.25 \cdot 10^{-25}$, sendo que desta vez a solução correta e igual à $x_s = [1; 2; 3; 4]$.

Se trabalharmos sobre sistemas de ordem maiores:

- $n = 6$, $m = 8$, $x = [1; 2; 3; 4; 5; 6]$ e $A = [1; 2; 1.8; 3; 1.5; 1.2]$:

- Para o valor de x^0 igual à $= [0.9; 1.8; 2.5; 3.7; 4.5; 6.2]$, o número de iterações até a convergência foi de 6, e a convergência $|x^{k+1} - x^k|^2$ igual à $5.19 \cdot 10^{-24}$.

- $n = 8$, $m = 11$, $x = [1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8]$ e $A = [1; 1.1; 3i; 1.2; 1; -1; 3; i]$:

- Para o valor de x^0 igual à $= [0.9; 1.7; 3.2; 4.3; 5.2; 5.9; 7.2; 7.8]$, o número de iterações até a convergência foi de 9, e a convergência $|x^{k+1} - x^k|^2$ igual à $7.66 \cdot 10^{-15}$.

Assim podemos verificar que a metodologia estruturada a partir da matriz pseudo-inversa de Moore–Penrose produz bons resultados na obtenção dos expoentes

de Fourier, mesmo no caso de uma matriz A formada por coeficientes de Fourier diferentes entre si.

4.3.4. Função dos expoentes de Fourier

Se supormos que os expoentes de Fourier λ_i , de uma determinada função quase-periódica $f: J \rightarrow X$, onde $f(t) \sim \sum_{i=1}^{\infty} a(\lambda_i) e^{i\lambda_i t}$, possam ser representados através de uma função $\lambda_i = \phi(i)$, da mesma forma que no item 4.2.3. Podemos calcular os coeficientes que definem esta função a partir da metodologia estruturada na resolução de sistemas não lineares de Vandermonde.

Supondo que $\phi(i) = a \ln i$, para $\{i \in N / i > 1\}$ e $a \in \mathbb{R}$. Reformulemos este problema na forma de um sistema não linear a fim de poder resolvê-lo numericamente:

$$\lambda_j = a \ln j \rightarrow x_j = e^{a \ln j \delta i}$$

Logo para um valor de $a = 0,123$, os cinco primeiros valores de λ_j e x_j são respectivamente:

- $\lambda = [0,085; 0,135; 0,171; 0,198; 0,220]$:
- $x = [1,279i; 1,446i; 1,636i; 1,850i; 2,092i]$

- Para um valor de x^0 igual à $[1,2i; 2,1i; 3; -4i; 5]$, o número de iterações até a convergência foi de 100, e $|x^{k+1} - x^k|^2$ igual à $7,08 \cdot 10^{-21}$, sendo os valores de λ_i obtidos $[0,085; 0,135; 0,171; 0,198; 0,220]$. Permitindo assim facilmente reconstruir a função $\phi(i)$, sendo o valor de a encontrado igual à 0.1226.

Supondo que $\phi(i) = a\sqrt{i}$, para $i \in N$ e $a = 0,523$, os seis primeiros valores de λ_j e x_j são respectivamente:

- $\lambda = [0,523; 0,740; 0,906; 1,046; 1,117; 1,281]$
- $x = [0,866 + 0,500i; 0,7385 + 0,674i; 0,617 + 0,787i; 0,501 + 0,865i;$

$0,438 + 0,899i; 0,289 + 0,958i]$

- Para um valor de x^0 igual à $[1,9i, 2,9i; 6; -3i; 8; -0,33i]$, o número de iterações até a convergência foi de 32, e a diferença $|x^{k+1} - x^k|^2$ igual à $3,45 \cdot 10^{-23}$, e $\lambda_n = [0,523; 0,740; 0,906; 1,046; 1,117; 1,28]$. Reconstruindo a função $\phi(i)$ obtemos a igual à 0,5233.

5. Aplicações

Existem inúmeros campos de aplicação das funções quase-periódicas: teoria do eletromagnetismo, teoria do plasma, mecânica do contínuo, mecânica quântica, sistemas dinâmicos, astronomia, vibrações, ondas do mar, etc. Essas duas últimas áreas de aplicação serão brevemente apresentadas abaixo:

Ondas do mar: Seakeeping consiste na verificação da capacidade do navio de sustentar a velocidade para a qual foi planejado, quando submetido aos efeitos de sua movimentação no mar: aceleração na proa, emersão do propulsor, incidência de água no convés e as solicitações do mar. Este método faz parte de uma das etapas da concepção de um navio, conjuntamente com a seleção do sistema propulsor, a análise da forma, compartimentos, etc. Entre os diversos parâmetros que devemos levar em conta neste estudo, o espectro de mar é o que mais nos interessa. Pois quando um navio está viajando pelo mar é excitado por ondas aleatórias, que podem ser representadas pela superposição de várias ondas regulares. Cada parcela destas ondas regulares contribui com uma parcela de energia, que é proporcional a amplitude daquela parcela de onda. Visto que não existe um período oscilação dessas ondas, $\omega_n = \sqrt{n}$, a teoria clássica das funções periódicas não é suficiente para modelagem deste sistema dinâmico, logo o uso das funções quase-periódicas é necessário para um estudo robusto.

Outro exemplo da importância da aplicação das funções quase-periódicas em problemas físicos é na construção de plataformas em alto mar de extração de petróleo. Estas serão continuamente expostas aos efeitos das ondas do mar, logo um estudo do espectro do mar deve ser realizado a fim de que não haja nenhuma frequência de oscilação da estrutura que possa entrar em ressonância com as frequências de solicitação, o que poderia levar a estrutura inteira ao colapso.

Vibrações: Placas, cavidades, cascas e barras possuem modos de vibrações complexos que na maioria das vezes são modelados por funções quase-periódicas.

6. *Considerações Finais*

A obtenção dos expoentes de Fourier através da resolução de sistemas não lineares de Vandermonde demonstrou ser uma metodologia precisa e robusta, dados os bons resultados numéricos obtidos tanto em sistemas reais como em complexos, além de ser aplicável no caso de sistemas com muitas variáveis.

Os resultados deste método se tornam ainda mais apurados quando combinados com conhecimentos prévios da função $\phi(i)$, que rege o comportamento do expoentes de Fourier λ_i . Na realidade em muitos sistemas físicos esta informação é conhecida, pois esta lei representa o modelo físico, sendo as características específicas do sistema representadas pelas constantes, como mostrado no tópico 4.3.4.

7. Bibliografia

- [1] - Harald Bohr : (1933) *Almost Periodic Functions*
- [2] - Bas Spitters: (2005) *Almost Periodic Functions, Constructively*
- [3] - Lynn H. Loomis: (1933) *An Introduction to Abstract Harmonic Analysis*
- [4] - Douglas N. Arnold: (1997) *Functional Analysis*
- [5] - Thomas William Körner: (1993) *Exercises for Fourier Analysis*
- [6] - Antônio Leitão : (2005) *Topics in Inverse Problems*
- [7] – Levitan & Zhikov: (1978) *Almost Periodic functions and differential equations*
- [8] - http://www.oceanica.ufrj.br/deno/prod_academic/relatorios/2003-2006/Rodrigo+Paulo/relat2/seakeeping.htm
- [9] - http://books.google.com.br/books?id=349gXpidNIYC&dq=almost+periodic+function+exercises&hl=en&source=gbs_summary_s&cad=0
- [10] - http://en.wikipedia.org/wiki/Linear_least_squares#computation
- [11] - http://en.wikipedia.org/wiki/Non-linear_least_squares
- [12] - http://www.ultramarine.com/hdesk/runs/samples/sea_keep/doc.htm
- [13] - http://en.wikipedia.org/wiki/Arzel%C3%A0-Ascoli_theorem
- [14] - http://en.wikipedia.org/wiki/Recursively_enumerable_set
- [15] - http://www.iop.org/EJ/article/0036-0279/54/3/L12/RMS_54_3_L12.pdf?request-id=eb86fb80-0591-4bc0-8b95-dec6b308ddb7
- [16] - L. Richard Turner: (1966) *Inverse of the Vandermonde Matrix With Application*
- [17] - G.Trapp; W. Squire: *Solving Nonlinear Vandermonde System*
- [18] - http://en.wikipedia.org/wiki/Moore%E2%80%93Penrose_pseudoinverse#Full_rank

Anexos:

Anexo.1 Rotina Matlab – Matrizes Retangulares

```
% Dimensionamento das matrizes
```

```
f=size(m,m);  
A=size(n,n);  
d=size(m,m);  
H=size(m,m);  
V=size(n,m);  
y=size(n);
```

```
% Criando uma matriz diagonal A de  
coeficientes de Fourier
```

```
for k=1:n  
    for j=1:n  
        if(k==j)  
            A(k,j)=a(j);  
        else  
            A(k,j)=0;  
        end  
    end  
end
```

```
%Construção do vetor f
```

```
for k=1:m  
    f(k)=0;  
end  
  
for k=1:m  
    for j=1:n  
        f(k)=f(k)+ar(j)*xr(j)^k;  
    end  
end
```

```
%Construção da matriz inversa da  
diagonal "D"
```

```
for k=1:m  
    for j=1:m  
        if (k==j)  
            d(k,j)=1/j;  
        else d(k,j)=0;  
        end  
    end  
end
```

```
while (abs_e > 0.0000000001^2)
```

```
%Construção da matriz de Vandermonde  
a partir do vetor x
```

```
for k=1:m  
    for j=1:n  
        V(k,j)=x(j)^(k-1);  
    end  
end
```

```
%Construção da matriz de Hermetiana  
V'*V
```

```
H=V'*V;
```

```
%Calcula o vetor epsilon "e"
```

```
e=A\(H\V')*d*(conj(f')-V*A*x);
```

```
%Atualiza o vetor x e calcula a  
convergência
```

```
abs_e=e'*e;  
abs_x=x'*x;
```

```
for k=1:n  
    if(abs_e <= c*abs_x)  
        x(k)=x(k)+ e(k);  
    else  
        x(k)=x(k)+c*e(k)*abs_x/abs_e;  
    end  
end
```

```
%Calcula o numero de iterações para  
convergência
```

```
count=count+1;
```

```
end
```

```
%Calcula o valor dos expoentes de  
Fourier
```

```
for k=1:n  
    y(k)=-li*log(x(k))/eps;  
end
```

```
solucao=x  
real=xr  
iteracoes=count  
lambda=conj(y')
```

```
end
```

Anexo.2 Rotina Matlab – Matrizes Quadradas

```

% Dimensionamento das matrizes
f=size(n,n);
A=size(n,n);
d=size(n,n);
v=size(n,n);
l=size(n,n);
aux=size(n,n);
u=size(n,n);
inv_v=size(n,n);
y=size(n);

% Criando uma matriz diagonal A de
coeficientes de Fourier
for k=1:n
    for j=1:n
        if(k==j)
            A(k,j)=a(j);
        else
            A(k,j)=0;
        end
    end
end

%Construção do vetor f
for k=1:n
    f(k)=0;
end

for k=1:n
    for j=1:n
        f(k)=f(k)+ar(j)*xr(j)^k;
    end
end

%Construção da matriz inversa da
diagonal "D"
for k=1:n
    for j=1:n
        if (k==j)
            d(k,j)=1/j;
        else d(k,j)=0;
        end
    end
end

while (abs_e > 0.000000001^2)

%Construção da matriz de Vandermonde a
partir do vetor x
for k=1:n
    for j=1:n
        v(k,j)=x(j)^(k-1);
    end
end

%Construção da matriz inversa L de
Vandermonde
for k=1:n
    for j=1:n
        l(k,j)=1;
    end
end

        if(k~=j)
            l(k,j)=l(k-1,j)*1/(x(j)-
x(k));
        else
            for p=1:j-1
                l(k,j)=l(k,j)/(x(j)-
x(p));
            end
        end
    end
end
end

%Construção da matriz inversa U de
Vandermonde
for j=1:n
    aux(1,j)=0;
end

for k=1:n
    for j=1:n
        if (k==j)
            aux(k+1,j+1)=1;
        else if (k > j)
            aux(k+1,j+1)=0;
        else
            aux(k+1,j+1)=aux(k,j)-
aux(k+1,j)*x(j-1);
        end
    end
end

for k=1:n
    for j=1:n
        u(k,j)=aux(k+1,j+1);
    end
end

% Transposta da inversa da matriz de
Vandermonde
aux=u*1;

for k=1:n
    for j=1:n
        inv_v(k,j)=aux(j,k);
    end
end

%Calcula o vetor epsilon "e"
e=A\inv_v*d*(conj(f')-v*A*x);

%Atualiza o vetor x e calcula a convergência
abs_e=e'*e;
abs_x=x'*x;

for k=1:n
    if(abs_e <= c*abs_x)
        x(k)=x(k)+ e(k);
    else
        x(k)=x(k)+c*e(k)*abs_x/abs_e;
    end
end
end

```

Apêndices:

Apêndice.1 Funções Periódicas

- *Valor médio de uma função:*

Dada uma função $\varphi(x)$ contínua no intervalo $-\infty \leq x \leq \infty$, chamamos de valor médio de φ , isto é, $M\{\varphi\}$ ou $M\{\varphi(x)\}$, a integral $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \varphi(t) dt$. Duas definições decorrentes do valor médio são as seguintes:

- Duas funções φ e ψ são ditas ortogonais se $M\{\varphi\bar{\psi}\} = M\{\bar{\varphi}\psi\} = 0$.
- Uma função ψ é dita normalizada se $M\{\psi\bar{\psi}\} = M\{|\psi|^2\} = 1$.
- *Sistema ortonormal de funções:*

As funções $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ formam um sistema ortonormal $\{\varphi(x)\}$ se $M\{\varphi_i \varphi_j\} = 0$, para $i \neq j$, e $M\{\varphi_i \bar{\varphi}_i\} = 1 \forall i \in \mathbb{N}$. Um exemplo de sistema ortonormal são as funções e^{inx} , onde $n \in \mathbb{Z}$, pois:

$$M\{e^{inx} e^{imx}\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \int_{-t}^t e^{inx} e^{imx} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{inx} e^{imx} dx$$

$$M\{e^{inx} e^{imx}\} = \frac{e^{i(n+m)2\pi} - 1}{2\pi(n+m)} = 0 \quad \text{se } m \neq n$$

$$M\{e^{inx} e^{-inx}\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \int_{-t}^t e^{inx} e^{-inx} dt$$

$$M\{e^{inx} e^{-inx}\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-inx} dx = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- *Função puramente periódica (ou Função periódica):*

Uma função f é dita periódica se existe um valor $\tau \in J$, tal que a seguinte relação é válida $f(x + \tau) = f(x)$ para qualquer $x \in \mathfrak{R}$. Assim podemos verificar algumas propriedades.

Apêndice.2 Séries de Fourier de funções periódicas

A série de Fourier de uma função periódica $f(x) \in L^2[0, p]$, de período p , é a representação desta em uma soma infinita de exponenciais complexa:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x}$$

Em que o n -ésimo coeficiente a_n , chamado de coeficiente de Fourier, é definido pela seguinte expressão $a_n = M\{f(x)e^{-i\lambda_n x}\}$.

Dadas duas funções periódicas $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x}$ e $g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{i\lambda_n x}$, de período p , f e $g \in L^2[0, p]$ e $k \in \mathfrak{R}$, as seguintes operações sobre as séries de Fourier são válidas:

- A série de Fourier da função $kf(x)$ é $\sum_{n=1}^{\infty} k a_n e^{i\lambda_n x}$.

Prova: Dada $f \in L^2[0, p] \Rightarrow kf \in L^2[0, p]$, além disso $d_n = M\{kf(x)e^{-i\lambda_n x}\} = kM\{f(x)e^{-i\lambda_n x}\} = k a_n$

- A série de Fourier da soma de duas funções $(f + g)(x)$ é igual à soma dos coeficientes das respectivas séries $(f + g)(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) e^{i\lambda_n x}$.

Prova: Dada $f, g \in L^2[0, p] \Rightarrow (f + g) \in L^2[0, p]$. Além disso

$$d_n = M\{[f(x) + g(x)]e^{-i\lambda_n x}\} = M\{f(x)e^{-i\lambda_n x}\} + M\{g(x)e^{-i\lambda_n x}\} = a_n + b_n$$

- A série de Fourier de uma função $f(x + k)$ é $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k} e^{i\lambda_n x} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-i\lambda_n k} e^{i\lambda_n x}$

Prova: Dada $f \in L^2[0, p]$ e $g(x) = f(x + k)$ a função $g \in L^2[0, p]$, assim $d_n = M\{f(x + k)e^{-i\lambda_n x}\} = M\{f(x - k + k)e^{-i\lambda_n(x-k)}\} = a_n e^{-i\lambda_n k}$

- A série de Fourier do produto de duas funções $(fg)(x)$ é igual à $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i\lambda_n x}$, sendo $c_n = \sum_{u+v=n} a_u b_v$.

Prova: Devido à complexidade não provaremos o teorema da multiplicação, porém se o leitor desejar poderá consultar sua demonstração no livro “Almost Periodic Functions” – Harald Bohr[1].

Apêndice.3 Matriz Pseudo-Inversa de Moore–Penrose

A matriz pseudo-inversa A^+ da matriz $A_{m \times n}$, real ou complexa, é definida como sendo a única matriz $m \times n$ que satisfaz os quatros critérios abaixo:

1. $AA^+A = A$, onde AA^+ não precisa ser igual à matriz identidade.
2. $A^+AA^+ = A^+$, onde A^+ é a fraca inversa da matriz A .
3. $(AA^+)^* = AA^+$, onde AA^+ é a matriz Hermitiana.
4. $(A^+A)^* = A^+A$, onde A^+A é a matriz Hermitiana.

Onde a matriz A^* é a matriz conjugada composta de A , no caso de elementos reais $A^* = A^T$.

Quando a matriz A é de ordem cheia, isto é, linhas (ou colunas) linearmente independentes, a seguinte simplificação é válida:

Se as colunas da matriz A são linearmente independentes, então A^*A admite inversa, logo a seguinte expressão pode ser escrita:

$$A^+ = (A^*A)^{-1}A^*$$

Se as linhas da matriz A são linearmente independentes, então AA^* admite inversa, logo a seguinte expressão pode ser escrita:

$$A^+ = A^*(AA^*)^{-1}$$

Evidentemente no caso de linhas e colunas linearmente independentes:

$$A^+ = A^{-1}$$

Apêndice.4 Fourier-Stieltjes Álgebra

A álgebra de Fourier ocorre naturalmente na análise harmônica de grupos localmente compactos, desempenhando um importante papel na teoria de dualidade

destes grupos. Tanto a álgebra de Fourier-Stieltjes como a álgebra de Fourier de um grupo localmente compacto foram introduzidas por Pierre Eymard em 1964.

Seja $B(G)$ uma álgebra de Fourier–Stieltjes e $A(G)$ uma álgebra de Fourier tal que o grupo local e compacto G seja abeliano. Seja $M(\hat{G})$ a medida algébrica das finitas medidas \hat{G} e $L_1(\hat{G})$ a convolução algébrica das funções integráveis em \hat{G} , onde \hat{G} é o carácter do grupo abeliano G .

A transformada de Fourier-Stieltjes de uma medida finita μ em \hat{G} é uma função $\hat{\mu}$ em G , tal que:

$$\hat{\mu}(x) = \int_{\hat{G}} X(x) d\mu(x), \quad x \in G$$