

**ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**STERGIOS PERICLES TSILOUFAS**

**Estudo da estabilidade secundária do escoamento ao redor de um  
aerofólio**

**São Paulo**

**2009**

**STERGIOS PERICLES TSILOUFAS**

**Estudo da estabilidade secundária do escoamento ao redor de um  
aerofólio**

Trabalho de formatura do curso de Engenharia  
Mecânica da Escola Politécnica.

Área de Concentração: Eng. Mecânica  
de Energia e Fluidos

Orientador: Prof. Dr. Julio Romano  
Meneghini

**São Paulo**

**2009**

## **FICHA CATALOGRÁFICA**

**Tsiloufas, Stergios Pericles**

**Estudo da estabilidade secundária do escoamento ao redor de um aerofólio / S.P. Tsiloufas. – São Paulo, 2009.  
p. 70**

**Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.**

**1. Escoamento 2. Estabilidade 3. Aerodinâmica de aeronaves  
4. Asas de aeronaves 5. Métodos numéricos em dinâmica dos  
fluidos I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Depar-  
tamento de Engenharia Mecânica II. t.**

A Pericles, Jamil, Farid,  
Stergios e suas discussões  
sobre física nos almoços de  
domingo, responsáveis por  
despertar meu prazer e cu-  
riosidade pela ciência.

## AGRADECIMENTOS

Desde já garanto que não lembrarei de todos, e estendo meu agradecimento àqueles que não citei e se sentiram em falta, e até a você, leitor deste trabalho.

Agradeço a Pericles, meu pai, engenheiro e exemplo como homem; a Idalina, minha mãe, pelo apoio e orientação nas decisões que tomei; meus irmãos Georgios e Thalles, a melhor companhia que alguém poderia ter no cotidiano agitado de São Paulo; Marcela, sempre atenciosa e carinhosa, e ao restante de minha enorme família, pelo suporte, atenção e acolhimento, seja na capital, seja no interior.

Os amigos, politécnicos ou macaubalenses, sempre presentes para compartilhar os problemas ou as alegrias, agradeço sem citar nomes, mas sabendo que os que realmente importam se sentirão incluídos.

Agradeço o professor Julio Meneghini, mentor em três anos de iniciação científica, pelos conselhos, cobranças e orientações que resultaram nesse trabalho de formatura.

Por fim, agradeço aos professores, funcionários e colegas da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. O sonho de tantos se torna realidade para mim, e espero retribuir para a sociedade os frutos que ela semeou investindo nesse recém-formado engenheiro.

"A pesquisa básica é como atirar uma seta para o ar e, depois, pintar um alvo onde quer que ela caia."

*H.B. Adkins (1949)*

"É tarefa da ciência reduzir as verdades profundas a trivialidades."

*Niels Bohr (1949)*

"Se uma parte da física não puder ser explicada a uma garçonete, então não é uma parte muito boa da física."

*Ernest Rutherford (1932)*

## RESUMO

Este trabalho se preocupa com as instabilidades tridimensionais do escoamento ao redor de um aerofólio. O objetivo é investigar como o escoamento passa de bidimensional para tridimensional na esteira, fenômeno conhecido como transição secundária, estudando a influência do número de Reynolds baseado na corda e do ângulo de ataque.

Inicialmente, é apresentada a teoria de estabilidade de Floquet, a qual permite a análise de estabilidade de um escoamento base bidimensional com respeito a perturbações infinitesimais tridimensionais. O campo base periódico é calculado usando-se o método dos elementos espectrais. Também são mostrados alguns casos da literatura que utilizam a mesma metodologia para estudar a transição secundária em outras geometrias.

Um estudo de convergência de malhas é feito para garantir a independência da discretização do domínio computacional. Os resultados são curvas do módulo dos multiplicadores de Floquet em função dos números de onda das perturbações, mostrando os comprimentos característicos na direção da envergadura dos modos tridimensionais. É possível usar esses resultados para executar simulações quase-tridimensionais do escoamento ao redor de asas uniformes, com grande economia de recursos computacionais e pouca perda de resolução na física do fenômeno.

Um estudo com essas simulações quase-tridimensionais é apresentado de modo a comparar os resultados obtidos com a teoria de estabilidade linear de Floquet. Neste trabalho se encontram resultados para ângulos de ataque variando entre  $5^\circ$  e  $20^\circ$ , com número de Reynolds entre 400 e 1800.

**Palavras-chave:** *Escoamento ao redor de aerofólios, Transição secundária da esteira, Análise de estabilidade de Floquet*

# ABSTRACT

This work is concerned with three-dimensional instabilities of the flow past an airfoil. The purpose is to investigate how the flow goes from two-dimensional to three-dimensional in the wake, phenomenon known as secondary transition, studying the influence of the Reynolds number based on chord and of the angle of attack.

Initially it is presented the Floquet stability theory, which allows the stability analysis of a two-dimensional base flow with respect to infinitesimal three-dimensional perturbations. The time-periodic base flow is computed using the spectral element method. It is also shown some literature cases which utilize the same methodology to study the secondary transition in different geometries.

A mesh convergence test is carried out in order to guarantee the computational domain independence. The results are the modulus of the Floquet multiplier versus the wavelength of the perturbation, showing the characteristic spanwise length of the three-dimensional modes. It is possible to use these results to perform quasi-three-dimensional simulations of the flow past uniform wings, with great computational resources saving and low resolution loss on the physics of the phenomenon.

A study with quasi-three-dimensional is presented in order to compare the results obtained with the linear Floquet stability theory. In this work it can be found results for angle of attack range from  $5^\circ$  e  $20^\circ$ , with Reynolds number between 400 and 1800.

**Keywords:** *Flow past airfoils, Wake secondary transition, Floquet stability analysis*

# SUMÁRIO

<b>Lista de Figuras</b> .....	<b>iii</b>
<b>Lista de Tabelas</b> .....	<b>vi</b>
<b>Lista de Símbolos</b> .....	<b>vii</b>
<b>1 Introdução</b> .....	<b>1</b>
<b>2 Revisão bibliográfica</b> .....	<b>3</b>
2.1 Escoamento ao redor de fólios .....	3
2.2 Método dos elementos espectrais .....	4
2.3 Teoria de estabilidade de Floquet .....	5
<b>3 Métodos utilizados</b> .....	<b>9</b>
3.1 Método dos elementos espectrais .....	9
3.1.1 Simulações quase-tridimensionais .....	10
3.2 Teoria de estabilidade de Floquet .....	12
3.3 Análise não-linear .....	13
<b>4 Preparação das simulações</b> .....	<b>16</b>
4.1 Escolha dos casos .....	16
4.2 Convergência de malhas .....	17
4.2.1 Ordem da função base .....	19
4.2.2 Comprimento a jusante .....	19
4.2.3 Distância lateral .....	20

4.2.4	Malha resultante .....	20
4.3	Estudo de malhas para análise de Floquet .....	21
<b>5</b>	<b>Resultados.....</b>	<b>23</b>
5.1	Simulações aerodinâmicas: NACA 0012 .....	23
5.1.1	Simulações para ângulo de ataque $\alpha = 5^\circ$ .....	23
5.1.2	Simulações para ângulo de ataque $\alpha = 10^\circ$ .....	26
5.1.3	Simulações para ângulo de ataque $\alpha = 20^\circ$ .....	28
5.2	Análise de estabilidade de Floquet: NACA 0012 .....	29
5.2.1	Simulações para ângulo de ataque $\alpha = 10^\circ$ .....	30
5.2.2	Simulações para ângulo de ataque $\alpha = 20^\circ$ .....	30
5.2.2.1	Modo subharmônico .....	32
5.2.2.2	Modo quase-periódico .....	34
5.3	Simulações quase-tridimensionais e análise não-linear: NACA 0012 .....	35
5.3.1	Modo subharmônico .....	36
5.3.2	Modo quase-periódico .....	38
5.4	Comparação entre geometrias .....	39
5.4.1	NACA 0012 e AGARD AR-303 .....	39
5.4.2	NACA 0012 e cilindro .....	42
<b>6</b>	<b>Conclusões e comentários.....</b>	<b>44</b>
6.1	Futuros desenvolvimentos .....	45
	<b>Referências .....</b>	<b>47</b>
	<b>Apêndice A - Artigo para COBEM 2009 .....</b>	<b>49</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Varição do coeficiente de sustentação com ângulo de ataque (ANDERSON, 1991). . . . .	4
Figura 2.2	Varição do número de Strouhal com o número de Reynolds para o escoamento ao redor de um cilindro circular fixo. Resultados experimentais e numéricos. ○ Williamson (1989), ● Hammache e Gharib (1991), + Barkley e Henderson (1996). $Re_1$ mostra a instabilidade primária, $Re_2$ indica o surgimento do modo A e $Re'_2$ indica o surgimento do modo B. Retirado de Barkley e Henderson (1996). . . . .	6
Figura 2.3	Análise qualitativa entre os modos A e B para $Re_D = 260$ . Contornos de vorticidade $\omega_x$ são mostrados para (a) $\lambda = 3,28 D$ e (b) $\lambda = 0,82 D$ . Retirado de Barkley e Henderson (1996). . . . .	7
Figura 4.1	Malha usada como referência para estudo de convergência. (a) Domínio computacional. (b) Detalhe na proximidade do aerofólio. . . . .	18
Figura 4.2	Malha utilizada para NACA 0012, $\alpha = 20^\circ$ . (a) Domínio computacional. (b) Detalhe na proximidade do aerofólio. . . . .	21
Figura 4.3	Malha utilizada para estudo de estabilidade. NACA 0012, $\alpha = 20^\circ$ . (a) Domínio computacional. (b) Detalhe na proximidade do aerofólio. . . . .	22
Figura 5.1	Contornos instantâneos de $\omega_z$ : NACA 0012, $\alpha = 5^\circ$ . (a) $Re = 1000$ . (b) $Re = 1200$ (c) $Re = 1500$ . . . . .	24
Figura 5.2	NACA 0012, $Re = 1500$ , $\alpha = 5^\circ$ . Curva temporal do $C_L$ . . . . .	25
Figura 5.3	Contornos instantâneos de $\omega_z$ : NACA 0012, $\alpha = 5^\circ$ , $Re = 1000$ . (a) Visualização na proximidade do fólio (resultado presente). (b) Linhas de corrente em detalhe (resultado presente). (c) Resultado encontrado em Theofilis e Sherwin (2001). . . . .	26
Figura 5.4	NACA 0012, $Re = 1200$ , $\alpha = 10^\circ$ . (a) Curva temporal do $C_L$ . (b) Contornos instantâneos de $\omega_z$ . . . . .	27
Figura 5.5	NACA 0012, $Re = 500$ , $\alpha = 20^\circ$ . (a) Curva temporal do $C_L$ . (b) Contornos	

instantâneos de $\omega_z$ . . . . .	29
Figura 5.6 NACA 0012, $\alpha = 10^\circ$ . Espectro dos multiplicadores de Floquet. . . . .	30
Figura 5.7 NACA 0012, $\alpha = 20^\circ$ . (a) Espectro dos multiplicadores de Floquet. (b) Curva de estabilidade neutra. . . . .	31
Figura 5.8 escoamento remontado a partir do campo base bidimensional e das perturbações tridimensionais. As iso-superfícies translúcidas são de $\omega_z$ . As iso-superfícies sólidas escuras e claras representam valores de $\omega_x$ negativos e positivos, respectivamente. NACA 0012, $Re = 500$ , $\alpha = 20^\circ$ , $\beta = 11$ . . . . .	32
Figura 5.9 NACA 0012, $\alpha = 20^\circ$ , $Re = 500$ . Contornos de $\omega_x$ . (a) Posição da estação de aquisição de dados de $\omega_x$ em $x = 1,5c$ . Linhas tracejadas e pontilhadas mostram valores de $\omega_z$ iguais a -2 e 2, respectivamente. (b) Contornos de $\omega_x$ do modo instável para $x = 1,5c$ . O tempo foi adimensionalizado usando o período de desprendimento de vórtices. . . . .	33
Figura 5.10 escoamento remontado a partir do campo base bidimensional e das perturbações tridimensionais. As iso-superfícies translúcidas são de $\omega_z$ . As iso-superfícies sólidas escuras e claras representam valores de $\omega_x$ negativos e positivos, respectivamente. NACA 0012, $Re = 590$ , $\alpha = 20^\circ$ , $\beta = 3$ . . . . .	35
Figura 5.11 Resultados obtidos no estudo do modo subharmônico. NACA 0012, $Re = 500$ , $\alpha = 20^\circ$ . (a) Crescimento e saturação da amplitude da perturbação tridimensional correspondente. Em preto resultado da simulação quase-tridimensional, em azul a equação de Landau, em vermelho resultado derivado da análise linear de Floquet. (b) Derivada do logaritmo da amplitude em função do quadrado da amplitude. + Resultados numéricos. - Reta que melhor aproxima os dados. . . . .	37
Figura 5.12 Resultados obtidos no estudo do modo quase-periódico. NACA 0012, $Re = 585$ , $\alpha = 20^\circ$ . (a) Evolução da amplitude da perturbação com comprimento de onda $L = (2\pi/3)c = 2,09c$ . (b) Evolução da amplitude da perturbação com comprimento de onda $L/3 = (2\pi/9)c = 0,70c$ . . . . .	39
Figura 5.13 Comparação entre o espectro dos multiplicadores de Floquet em função do número de onda das instabilidades tridimensionais adimensionalizado pela corda. $Re = 500$ , $\alpha = 20^\circ$ . . . . .	41
Figura 5.14 Comparação entre os modos instáveis para duas geometrias de fólhos. $Re = 500$ , $\alpha = 20^\circ$ , $\beta = 11$ . Contornos de $\omega_x$ . As linhas contínuas e tracejadas representam iso-linhas positivas e negativas de $\omega_z$ , respectivamente. (a) NACA	

0012. (b) AGARD AR-303. .... 42

## LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1	Escolha dos valores de $Re$ para as simulações com aerofólio. ....	17
Tabela 4.2	Influência da ordem da função base. ....	19
Tabela 4.3	Influência da posição da condição de <i>outflow</i> . ....	19
Tabela 4.4	Influência da posição da condição de <i>velocity inlet</i> nas laterais. ....	20
Tabela 5.1	Resultados aerodinâmicos do perfil NACA 0012, $\alpha = 5^\circ$ . ....	25
Tabela 5.2	Resultados aerodinâmicos do perfil NACA 0012, $\alpha = 10^\circ$ . ....	28
Tabela 5.3	Resultados aerodinâmicos do perfil NACA 0012, $\alpha = 20^\circ$ . ....	28
Tabela 5.4	Comparação entre valores da taxa de crescimento $\sigma$ , $\alpha = 20^\circ$ , $Re = 500$ . ...	36
Tabela 5.5	Comparação entre resultados aerodinâmicos do perfil NACA 0012 com AGARD AR-303, $\alpha = 20^\circ$ , $Re = 500$ . ....	40
Tabela 5.6	Comparação dos $Re_w$ e $St_w$ críticos e de $\lambda$ dos modos de Floquet para cilindro circular fixo e fólio. ....	43

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\beta$	Número de onda do modo tridimensional na análise de Floquet
$\lambda$	Comprimento de onda do modo tridimensional na análise de Floquet
$\mu$	Multiplicador de Floquet
$\nu$	Viscosidade cinemática
$\omega$	Vorticidade $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$
$\rho$	Massa específica
$C_D$	Coefficiente de arrasto
$C_L$	Coefficiente de sustentação
$c_D$	Coefficiente de arrasto por unidade de comprimento na direção da envergadura
$c_L$	Coefficiente de sustentação por unidade de comprimento na direção da envergadura
$a$	Velocidade do som
$c$	Corda do aerofólio
$t$	Instante de tempo
$T$	Período de oscilação
$f$	Frequência de desprendimentos de vórtices
$U$	Velocidade do escoamento ao longe
$D$	Diâmetro do cilindro
$\mathbf{u}$	Velocidade do escoamento
Re	Número de Reynolds ( $\text{Re} = \frac{Uc}{\nu}$ )
St	Número de Strouhal ( $\text{St} = \frac{fc}{U}$ )
Ma	Número de Mach ( $\text{Ma} = \frac{U}{a}$ )

# 1 INTRODUÇÃO

Aerofólios são objetos projetados para gerar uma força de sustentação quando imersos, com movimento relativo, em algum fluido. Aplicações destes corpos são amplamente encontrados na indústria aeronáutica (perfis de asas), automobilística ("asas" de carros de alta performance), de energia (palhetas de turbinas), naval (superfícies controladoras de submarinos), entre outros.

Diversos estudos buscando otimizar a forma dos perfis de modo a aumentar a sustentação e reduzir o arrasto estão disponíveis na literatura. Entretanto, a preocupação com os aspectos fundamentais do escoamento, como as instabilidades na esteira, ainda não foram abordadas com a atenção devida.

Mesmo que normalmente os aerofólios sejam empregados em escoamentos com número de Reynolds baseado na corda,  $Re$ , da ordem de  $10^6$  ou mais, a preocupação deste trabalho se dá na transição secundária da esteira, que ocorre para  $Re$  da ordem de  $10^3$ . A transição primária se dá quando o escoamento deixa de se comportar em regime permanente para então apresentar estruturas dependentes no tempo, sendo estas periódicas ou não. Um exemplo clássico de transição primária amplamente estudado na literatura é o início do desprendimento de vórtices no cilindro circular fixo, que ocorre para número de Reynolds baseado no diâmetro da ordem de 150 (WILLIAMSON, 1988). Já a transição secundária, o foco deste trabalho, é quando o escoamento, mesmo em corpos com comprimento infinito na direção da envergadura, i.e. sem efeitos de ponta, passa a ter componentes de velocidade nessa direção. É a transição do escoamento bidimensional para o tridimensional.

A motivação do trabalho é a preocupação de estudar as estruturas tridimensionais que aparecem no escoamento a partir desta transição, determinando seus modos e comprimentos de onda  $\lambda$  característicos. Além do  $Re$ , outro parâmetro avaliado neste trabalho será o ângulo de ataque  $\alpha$ . A geometria de aerofólio escolhida para o estudo foi o NACA 0012. Um pequeno estudo da influência da geometria também foi abordado, comparando um dos resultados encontrados para o NACA 0012 com o perfil assimétrico AGARD AR-303.

Neste trabalho utilizou-se simulações numéricas diretas (DNS) com métodos espec-

trais para obtenção de um campo base bidimensional no qual foi efetuada a avaliação de estabilidade utilizando a teoria de Floquet. Por meio dos métodos empregados é possível estudar um escoamento tridimensional, desde que com algumas ressalvas, utilizando simulações 2D. Deste modo, o objetivo prático deste trabalho é, através da melhor compreensão das instabilidades tridimensionais, determinar uma metodologia que possa capturar a física das instabilidades tridimensionais envolvidas no escoamento ao redor de um aerofólio, mas com ganho computacional devido à redução do domínio estudado.

Ao fim do trabalho, como apêndice, encontra-se o artigo apresentado pelo autor no Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica (COBEM) de 2009, mostrando alguns resultados preliminares obtidos na época da submissão.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 Escoamento ao redor de fólhos

O escoamento ao redor de corpos aerodinâmicos, como os aerofólhos, é geralmente estudado por meio da teoria potencial, que admite o fluido como sendo ideal (incompressível e invíscido) e o escoamento como sendo irrotacional. A validade desta teoria é devido à própria geometria dos fólhos, que são projetados para manter o escoamento colado à parede e evitar o desprendimento de vórtices, que aumenta o arrasto e diminui a sustentação.

Livros-texto adotados em cursos de engenharia, como White (2002) e Munson, Young e Okiishi (2004), explicam de forma didática a teoria do escoamento potencial. Anderson (1991) é uma boa referência para estudar a teoria potencial aplicada a fólhos, inclusive mostrando o resultado clássico do coeficiente de sustentação bidimensional  $c_L$ :

$$c_L = c_{L,0} + 2\pi \sin \alpha \approx c_{L,0} + 2\pi\alpha \quad (2.1)$$

Essa equação tem validade para perfis em que  $t \ll c$ , onde  $t$  é a espessura do fólho e  $c$  é a corda, além de ângulos de ataque  $\alpha \ll 1$ . Conforme o ângulo de ataque vai crescendo, é mais difícil para o escoamento se manter colado à parede, e o fólho passa a se comportar como um corpo rombudo. Isso gera uma queda abrupta na sustentação, como visualizado na Fig. 2.1, no fenômeno conhecido como estol. Uma consequência importante é o início do desprendimento de vórtices na esteira do fólho. Como neste trabalho precisamos de um campo base bidimensional periódico para efetuar a análise de Floquet (ver Sec.3.2), as primeiras simulações foram efetuadas para altos ângulos de ataque, a fim de forçar essa separação do escoamento e facilitar a obtenção de resultados.

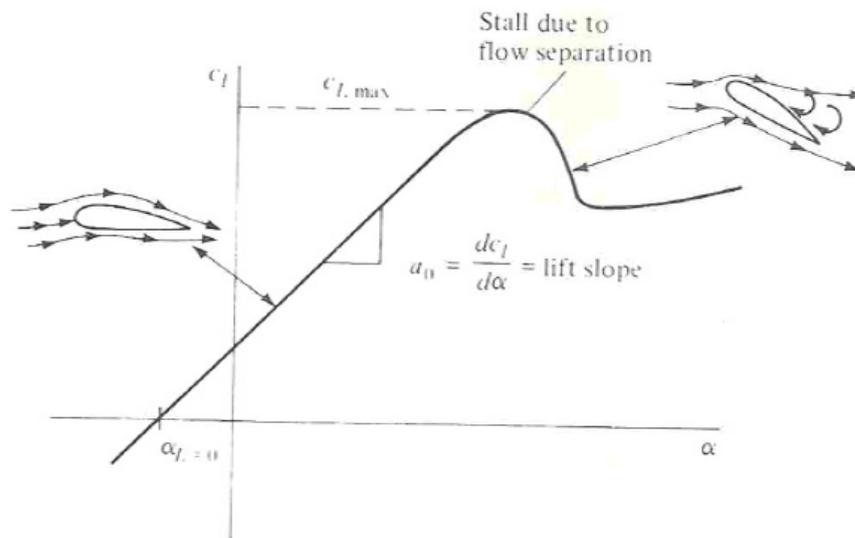


Figura 2.1: Variação do coeficiente de sustentação com ângulo de ataque (ANDERSON, 1991).

## 2.2 Método dos elementos espectrais

Uma boa descrição do método dos elementos espectrais, com abordagem completa, pode ser vista em Karniadakis e Sherwin (1999).

Existem vários trabalhos que utilizam o método espectral/*hp* para simulação de escoamento ao redor de aerofólios, embora com interesse distinto do presente trabalho. Isto mostra o grau de amadurecimento e confiabilidade do método.

Stoevesandt et al. (2006) trata do escoamento ao redor de um perfil de pá de turbina com Reynolds baseado na corda  $Re = 5000$  e  $\alpha = 12^\circ$ , investigando como a turbulência afeta o estol dinâmico.

Kirby e Karniadakis (2003) apresenta técnicas para *de-aliasing* em malhas não estruturadas, buscando amenizar os problemas que estas malhas geram nos algoritmos espectrais/*hp*. Um dos estudos de caso é o escoamento compressível ao redor de um perfil NACA 0015, com  $Re = 45000$  e ângulo de ataque variando de  $0^\circ$  a  $50^\circ$ .

Lomtev e Karniadakis (1999) busca um método descontínuo de Galerkin para resolver escoamentos viscosos com ondas de choque, utilizando malhas não estruturadas. Um dos casos estudados é o escoamento transônico ao redor de um perfil NACA 0012, com número de Mach  $Ma = 0,8$ , Reynolds  $Re = 73$  e  $\alpha = 10^\circ$ . Outro caso estudado é o perfil NACA 4420,  $Ma = 2$ ,  $Re = 2400$  e  $\alpha = 10^\circ$ .

Abdessemed (2007) executa a análise de Floquet no escoamento ao redor de uma pá

de turbina de baixa pressão, com  $Re$  variando de 900 a 10000.

Outros trabalhos consultados foram Barkley e Henderson (1996), Carmo (2005), Carmo et al. (2008) e Gioria et al. (2009), todos tratando do escoamento ao redor de cilindros.

## 2.3 Teoria de estabilidade de Floquet

Iooss e Joseph (1990) detalham de modo básico a teoria de estabilidade de Floquet, determinando matematicamente o método.

Barkley e Henderson (1996) efetua a análise de estabilidade linear ao escoamento ao redor de um cilindro circular fixo de diâmetro  $D$ , para valores de Reynolds baseados no diâmetro entre 140 e 300. O presente trabalho se baseia neste artigo e utiliza metodologia de estudo semelhante. Os resultados encontrados por Barkley e Henderson consistem na identificação de maneira numérica dos modos A ( $Re_D$  crítico  $\approx 188$ ,  $\lambda \approx 4D$ ), que mantém a simetria espaço-temporal da esteira, e B ( $Re_D$  crítico  $\approx 259$ ,  $\lambda \approx 0,8D$ ), que não mantém a simetria espaço-temporal da esteira, reproduzindo os resultados experimentais de Williamson (1988).

Pode-se notar a transição do escoamento de bidimensional para tridimensional analisando a curva do número de Strouhal baseado no diâmetro pelo número de Reynolds, como mostrado na Fig. 2.2. Há uma visível quebra de continuidade, causada pelo aparecimento das instabilidades tridimensionais tanto do modo A, quanto do modo B.

Outra diferença entre o modo A e B está na região onde cada um deles é mais forte. O modo A se apresenta com maior intensidade nos núcleos dos vórtices enquanto que o modo B é mais intenso nas *braids* (regiões de interligação entre os vórtices), como pode ser visto na Fig. 2.3.

Blackburn, Marques e Lopez (2005) prosseguiram a investigação no caso do cilindro circular fixo para números de Reynolds mais altos e encontraram um modo quase-periódico para  $Re = 377$ , com comprimento característico  $\lambda \approx 1,8D$ . Modos quase-periódicos se caracterizam por apresentarem autovalores complexos, o que implica, fisicamente, no aparecimento de um período de oscilação das instabilidades diferente do período do campo base. Análises deste tipo de modo, além de uma discussão sobre características estacionárias ou propagantes de modos quase-periódicos, são encontradas e serviram como referência para o atual trabalho.

Em Marques, Lopez e Blackburn (2004), encontra-se que apenas três tipos de modos (A, B e o quase-periódico) podem ser observados em uma esteira bidimensional periódica com simetria espaço-temporal do tipo  $\mathcal{H}$ , como aquela encontrada no cilindro:

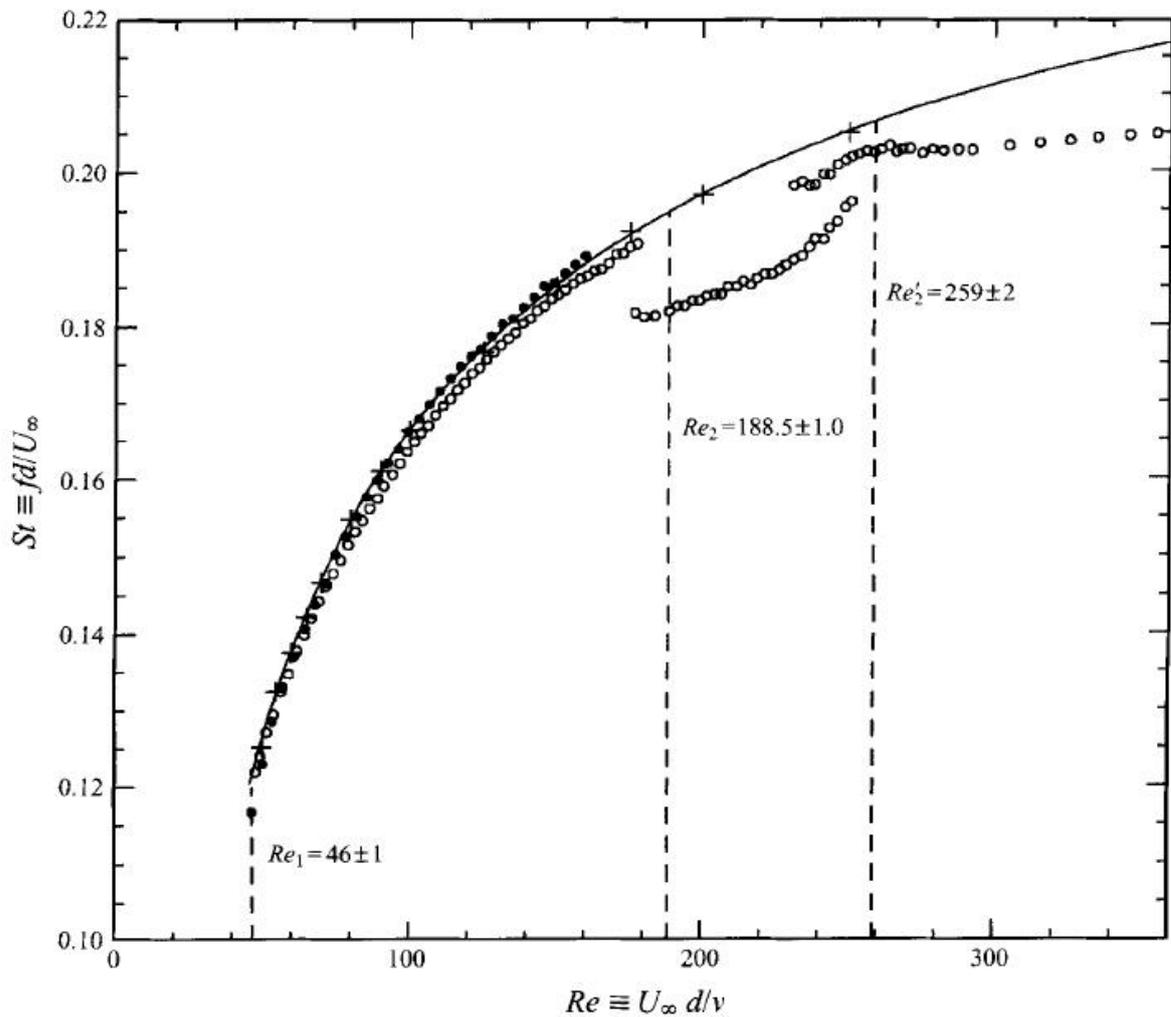


Figura 2.2: Variação do número de Strouhal com o número de Reynolds para o escoamento ao redor de um cilindro circular fixo. Resultados experimentais e numéricos.  $\circ$  Williamson (1989),  $\bullet$  Hammache e Gharib (1991),  $+$  Barkley e Henderson (1996).  $Re_1$  mostra a instabilidade primária,  $Re_2$  indica o surgimento do modo A e  $Re'_2$  indica o surgimento do modo B. Retirado de Barkley e Henderson (1996).

$$\mathcal{H}(u, v)(x, y, t) = \mathcal{H}(u, -v)(x, y, t + \frac{1}{2}T) \quad (2.2)$$

Outro trabalho utilizado como referência foi Carmo et al. (2008), no qual é efetuada a análise de estabilidade de Floquet para dois cilindros desalinhados. Modos diferentes aparecem, devido à influência do segundo cilindro na esteira do primeiro. Uma diferença importante é o aparecimento de modos sub-harmônicos, que são modos cujo período é o dobro do período do campo base.

Gioria et al. (2009) efetua a análise de Floquet para a um cilindro circular oscilante. O efeito das oscilações é mudar o padrão de desprendimento de vórtices e alterar significativa-

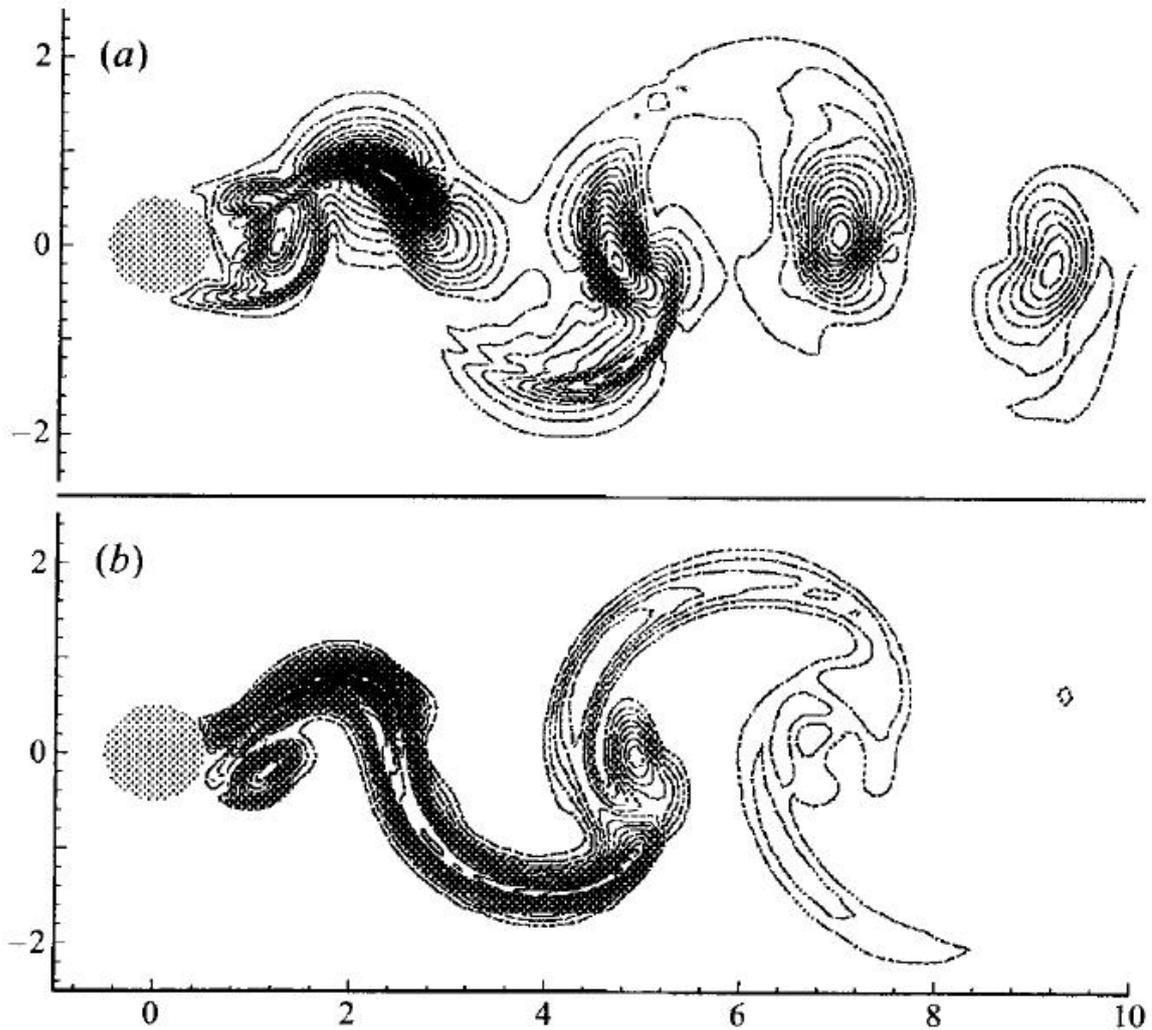


Figura 2.3: Análise qualitativa entre os modos A e B para  $Re_D = 260$ . Contornos de vorticidade  $\omega_x$  são mostrados para (a)  $\lambda = 3,28 D$  e (b)  $\lambda = 0,82 D$ . Retirado de Barkley e Henderson (1996).

mente o comportamento quanto a perturbações tridimensionais em relação ao cilindro circular fixo. Para baixas amplitudes de oscilação, o escoamento torna-se mais estável e conforme aumenta-se essa amplitude, as características dos modos instáveis também alteram-se significativamente, ora aparecendo apenas um modo, ora dois modos.

Theofilis e Sherwin (2001) trata da análise de estabilidade do escoamento ao redor de um perfil NACA 0012. No entanto, não há análise de Floquet, pois a preocupação do trabalho é com a bolha de separação formada no bordo de fuga, não com a transição na esteira. As condições do estudo são  $Re = 1000$  e  $\alpha = 5^\circ$ .

Não foi encontrado na literatura algum estudo sobre análise de Floquet em perfil de aerofólios. O resultado mais próximo é Abdessemed (2007), que discute a análise de Floquet

em pás de turbinas de baixa pressão (geometria T-106), com  $Re$  variando de 900 a 10000. Há uma boa discussão sobre o modo de gerar malhas para geometrias aerodinâmicas e os problemas que malhas de elementos triangulares proporcionam ao método dos elementos espectrais.

Segundo Abdessemed, as instabilidades primárias aparecem para  $Re = 905$ . Já as instabilidades secundárias são indiferentes à mudança de parâmetros, o que levanta a questão de quanto pode-se comparar geometrias aerodinâmicas, como o apresentado no presente trabalho, com geometrias rombudas, como escoamento ao redor de cilindros. Para  $Re \approx 910$  aparece um modo de  $|\mu|$  ligeiramente maior que 1 para grandes comprimentos de onda ( $\lambda \approx 5,8c$ ) e não foram encontrados modos significativamente instáveis. Uma análise linear não-modal é efetuada depois para estudar os mecanismos de transição em escoamentos paralelos. O presente trabalho discute as evidências encontradas neste trabalho.

## 3 MÉTODOS UTILIZADOS

Esta seção busca dar uma breve introdução teórica sobre os métodos utilizados neste trabalho. Para maiores detalhes sobre o método dos elementos espectrais, consulte Karniadakis e Sherwin (1999). Já para teoria de estabilidade de Floquet, a descrição aqui apresentada é baseada em Iooss e Joseph (1990).

### 3.1 Método dos elementos espectrais

O método mais comum de utilização em dinâmica dos fluidos computacional (*computational fluid dynamics*, ou CFD) é o método dos volumes finitos, que tem como princípio discretizar o espaço em pequenos volumes, nos quais são aplicadas as equações de transporte das quantidades analisadas (temperatura, quantidade de movimento, massa). Quanto menor os volumes, se aproximando de volumes infinitesimais, mais próximo da solução exata do problema. Contudo, isso aumenta consideravelmente o tempo de computação.

O método dos elementos espectrais (*spectral element method*, ou SEM) dá uma abordagem diferente ao problema. O SEM é uma mescla do método espectral puro com o método dos elementos finitos, utilizando as vantagens de cada um. Do método dos elementos espectrais existe a alta ordem das funções de aproximação, garantindo alta resolução e convergência exponencial. Do método dos elementos finitos ele herda a divisão do domínio, permitindo o estudo de geometrias complexas e refinamento local em áreas de interesse.

No SEM, as funções base são definidas para cada elemento. A convergência do método depende do refinamento da malha (refinamento  $h$ ) e do aumento do grau de interpolação (refinamento  $p$ ). Por isso, o método dos elementos espectrais é chamado de método  $hp$ .

O refinamento do tipo  $h$  consiste na diminuição do tamanho dos elementos, deixando a malha mais fina em regiões onde o erro tende a ser maior, normalmente regiões onde se espera que haja grandes gradientes, tais como na proximidade de paredes e regiões de descolamento. É o refinamento presente no método dos elementos finitos. No limite, fazendo-se o tamanho mé-

dio dos elementos  $\Delta x \rightarrow 0$ , obtém-se a solução exata do problema. Inversamente, discretizando o domínio inteiro com um único elemento, obtém-se o método espectral puro.

Já o refinamento do tipo  $p$  consiste no aumento da ordem da função base interpoladora utilizada em cada elemento, obtendo uma convergência exponencial, mantido o tamanho da malha constante e aumentando o grau destas funções.

A aplicação do método  $hp$  em dinâmica de escoamentos incompressíveis apresenta grande vantagem sobre métodos de baixa ordem. De fato, quando é necessária integração para vários períodos e alta precisão, o método dos elementos espectrais tem tempo computacional mais vantajoso do que o método dos volumes finitos tradicional. Por exemplo, para precisão de 1%, mesmo integrando em apenas um período, um método de sexta ordem tem custo computacional equivalente a 37% do gasto por método de segunda ordem e 90% do método de quarta ordem.

Neste trabalho, considera-se o escoamento de um fluido incompressível de massa específica  $\rho$  e viscosidade dinâmica constante  $\mu$  ao redor de um aerofólio. A velocidade ao longe  $U$  e a corda  $c$  do aerofólio podem ser usadas como valores de referência para obter as equações de Navier-Stokes adimensionalizadas, mostradas na eq. (3.1). As incógnitas do problema são o campo de velocidades  $\mathbf{u}$  e de pressões  $p$ .

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (3.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.1b)$$

onde  $\text{Re} = U c / \nu$  é o número adimensional de Reynolds. A viscosidade cinemática  $\nu$  é definida como  $\nu = \mu / \rho$ .

### 3.1.1 Simulações quase-tridimensionais

Simulações quase-tridimensionais são efetuadas neste trabalho utilizando uma expansão espectral na direção da envergadura. O primeiro passo é reduzir o problema do infinito para uma dimensão finita  $L$  nesta direção. Serão considerados os escoamentos que satisfaçam:

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{u}(x, y, z + L, t) \quad (3.2)$$

O escoamento tridimensional  $\mathbf{u}$  pode ser escrito em termos de modos bidimensionais de Fourier  $\hat{\mathbf{u}}_q$  por meio da transformada de Fourier:

$$\hat{\mathbf{u}}_q(x, y, t) = \frac{1}{L} \int_0^L \mathbf{u}(x, y, z, t) e^{-i(2\pi/L)qz} dz \quad (3.3)$$

Inversamente, podemos escrever o campo tridimensional como uma composição de modos bidimensionais utilizando a transformada inversa de Fourier, já mostrada na forma discretizada:

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{u}}_q(x, y, t) e^{i(2\pi/L)qz} \quad (3.4)$$

Substituindo a expansão nos modos de Fourier nas equações de Navier-Stokes, obtemos equações para cada modo de Fourier:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_q}{\partial t} = -\mathbf{N}_q - \tilde{\nabla} \hat{p}_q + \frac{1}{\text{Re}} \tilde{\nabla}^2 \hat{\mathbf{u}}_q \quad (3.5a)$$

$$\tilde{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{u}}_q = 0 \quad (3.5b)$$

onde  $\beta_q = (2\pi/L)q$ ;  $\tilde{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, i\beta_q)$ ;  $\tilde{\nabla}^2 = (\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, -\beta_q^2)$ .

O acoplamento entre os modos se dá pelo termo convectivo  $\mathbf{N}_q$ , que pode ser escrito como:

$$\mathbf{N}_q = \frac{1}{L} \int_0^L [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] e^{-i(2\pi/L)qz} dz \quad (3.6)$$

A representação do campo final de velocidades é dado por uma expansão truncada:

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \sum_{-m}^m \hat{\mathbf{u}}_q(x, y, t) e^{i(2\pi/L)qz} \quad (3.7)$$

Computacionalmente é mais vantajoso calcular a evolução temporal dos modos bidimensionais de Fourier  $\hat{\mathbf{u}}_q(x, y, t)$  do que do campo completo de velocidades  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , devido à facilidade para paralelização dos cálculos. Como o campo  $\mathbf{u}$  é real, os modos de Fourier satisfazem uma condição de simetria  $\hat{\mathbf{u}}_{-q} = \hat{\mathbf{u}}_q^*$ , sendo apenas metade do espectro necessário ( $q > 0$ ).

Vantagens na representação do campo de velocidades por meio de modos de Fourier incluem:

- possibilidade de conexão entre padrões fortemente tridimensionais específicos com os modos de Fourier. Da análise de estabilidade linear (mostrada na Sec. 3.2) obtemos infor-

mações sobre quais modos interagirão mais fortemente com o campo base bidimensional para formar esses padrões;

- o sinal de amplitude de cada modo em função do tempo nos dá uma medida da interação entre as diferentes escalas na esteira tridimensional;
- a amplitude média no tempo dos modos de Fourier é uma boa indicação da qualidade de resolução dos cálculos efetuados.

O código utilizado para simulação neste trabalho é o  $\mathcal{N}_{\varepsilon\kappa\tau\alpha r}$ , desenvolvido pelo Imperial College of Science, Technology and Medicine, de Londres.

## 3.2 Teoria de estabilidade de Floquet

Na análise de estabilidade considera-se o escoamento como a combinação de um campo base  $\mathbf{U}(x, y, t)$  e uma perturbação tridimensional  $\mathbf{u}'(x, y, z, t)$ , sendo que  $\mathcal{O}(\mathbf{u}') \ll \mathcal{O}(\mathbf{U})$ . Deste modo, podemos linearizar a equação de Navier-Stokes, obtendo:

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} = -(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u}' - (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{U} - \nabla p' + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{u}' \quad (3.8a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0 \quad (3.8b)$$

onde  $p'$  é a perturbação de pressão. A condição de contorno de entrada para a perturbação é  $\mathbf{u}' = 0$ .

A teoria de Floquet trata da estabilidade quando o campo base não é estacionário, e sim T-periódico. Nesta teoria, monta-se o operador linear  $\mathbf{L}$ , também T-periódico por ser função de  $\mathbf{U}$ , que evolui a perturbação de um instante  $t$  para o instante  $t + T$ . Assim, a eq. (3.8a) pode ser entendida como o seguinte autoproblema:

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} = \mathbf{L}(\mathbf{u}') \quad (3.9)$$

Os autovalores deste operador  $\mathbf{L}$  são os chamados expoente de Floquet ( $\sigma$ ) e determinam a estabilidade do sistema, já que as soluções T-periódicas da eq. (3.9) são uma composição de soluções do tipo  $\tilde{\mathbf{u}}(x, y, z, t) e^{\sigma t}$ . É mais comum tratar do problema com respeito do multiplicador de Floquet  $\mu \equiv e^{\sigma T}$ . Caso  $|\mu| < 1$ , a perturbação decresce até zero com o tempo; caso  $|\mu| > 1$  então o modo é instável, e a perturbação permanece do escoamento.

Uma outra simplificação pode ser feita: assumir que o problema é homogêneo na direção da envergadura, o que possibilita que as perturbações sejam escritas segundo a integral de Fourier, como mostrado na eq. (3.10).

$$\mathbf{u}'(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{u}}(x, y, t) e^{i\beta z} d\beta \quad (3.10)$$

Uma vez que modos com diferentes números de onda  $\beta = 2\pi/\lambda$  não se acoplam e o campo base  $\mathbf{U}$  é bidimensional, perturbações do tipo

$$\mathbf{u}'(x, y, z, t) = (\hat{\mathbf{u}} \cos \beta z, \hat{\mathbf{v}} \cos \beta z, \hat{\mathbf{w}} \cos \beta z) \quad (3.11a)$$

$$p'(x, y, z, t) = \hat{p} \cos \beta z \quad (3.11b)$$

permanecem da mesma forma quando submetidos ao operador linear  $\mathbf{L}$ .

Como as componentes da perturbação de velocidade e pressão só dependem de  $x, y$  e  $t$ , o problema de estabilidade tridimensional se transforma em diversos problemas de estabilidade bidimensional, apenas variando-se o número de onda  $\beta$ .

O código utilizado para efetuar a análise de Floquet computa os autovalores da matriz  $\mathbf{A}$  correspondente ao operador linear  $\mathbf{L}$ , tal que:

$$\{\mathbf{u}'\}_{n+1} = [\mathbf{A}] \{\mathbf{u}'\}_n \quad (3.12)$$

O método de Arnoldi é utilizado para computar os autovalores, calculados no espaço de Krylov, que diminui a ordem da matriz  $\mathbf{A}$  sem alterar significativamente o multiplicador de Floquet de maior módulo, que é o que determina a estabilidade do sistema.

Para cada caso apresentado neste trabalho, buscou-se avaliar o módulo dos multiplicadores de Floquet em um intervalo de números de onda  $\beta$ . O interesse é nos números de onda que apresentam a maior taxa de crescimento para cada situação (número de Reynolds, ângulo de ataque, perfil do aerofólio), logo procura-se os picos da curva  $|\mu| \times \beta$ . Estes picos são os modos mais instáveis, e governam o crescimento das perturbações do sistema linearizado.

### 3.3 Análise não-linear

A análise de estabilidade de Floquet é linear e prediz com eficácia o valor de Reynolds no qual ocorre a transição secundária, bem como o comprimento de onda das instabilidades e a

topologia do modo instável. Como são utilizadas as equações de Navier-Stokes linearizadas (eq. (3.8)), os resultados são válidos para pequenas perturbações comparadas ao campo base. Porém, quando essas perturbações são instáveis pela teoria de Floquet, elas tendem a crescer exponencialmente atingindo um ponto em que não são mais desprezíveis frente ao escoamento base. Deste modo, para avaliar a evolução dessas instabilidades, efeitos não-lineares devem ser levados em conta utilizando as simulações quase-tridimensionais.

Uma maneira de quantificar a evolução das instabilidades é pela amplitude complexa  $A(t)$  do modo considerado. A equação de Landau tem sido utilizada com sucesso para modelar o comportamento de sistemas hidrodinâmicos próximos a bifurcações de estabilidade (para exemplos, consultar Henderson (1997) e Sheard, Thompson e Hourigan (2004)). A idéia por trás da equação é que para pequenas perturbações o termo linear rege o comportamento de  $dA/dt$ , e conforme a amplitude  $A$  vai crescendo, novos termos se tornam importantes. A eq. (3.13) mostra a equação truncada até o termo de terceira ordem.

$$\frac{dA}{dt} = (\sigma + i\omega)A - l(1 + ic)|A|^2A + \dots \quad (3.13)$$

O termo  $(\sigma + i\omega)$  é o autovalor do modo instável obtido na análise linear. A parte real  $\sigma$  é a taxa de crescimento das perturbações a cada período para aproximações de primeira ordem, logo o modo é estável para  $\sigma < 0$  e vice-versa. Ainda em primeira aproximação, as perturbações oscilam com frequência angular dada pela parte complexa  $\omega$ .

O parâmetro  $l$  é a parte real do termo de terceira ordem e o seu sinal define a classificação da transição. Caso  $l > 0$ , a transição é dita supercrítica, não apresentando histerese, e deve ser propriamente descrita pela equação de Landau de terceira ordem. A explicação é que quando  $l$  é positivo, então a parte real do coeficiente de terceira ordem é negativo e contrabalança o crescimento dado pelo termo linear, fazendo com que  $dA/dt$  decresça até o momento que a amplitude da perturbação sature em um patamar. Se  $l < 0$ , será necessário no mínimo um termo de quinta ordem na equação de Landau, visto que o termo de terceira ordem vai contribuir para aumentar ainda mais a taxa de crescimento das perturbações, e observações numéricas e experimentais indicam que a amplitude deve saturar em algum ponto. Neste caso, a transição é dita subcrítica. Já o coeficiente  $c$  é chamado de constante de Landau e modela a frequência de oscilação na saturação.

Para obter os valores de  $l$  e  $\sigma$ , escreve-se a amplitude complexa na forma polar  $A(t) = \rho(t)e^{i\Phi(t)}$ . Deste modo, as partes real e imaginária da eq. (3.13) podem ser escritas como:

$$\frac{d \log(\rho)}{dt} = \sigma - l\rho^2 \quad (3.14a)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \omega - lc\rho^2 \quad (3.14b)$$

Se plotarmos os valores de  $d \log |A|/dt$  por  $|A|^2$ , então a eq. (3.14a) pode ser usada e temos que  $\sigma$  é o valor em que a curva intercepta o eixo  $y$  e  $-l$  é igual à inclinação da curva. Se o gráfico é linear, temos que a equação de Landau truncada no termo de terceira ordem é suficiente para modelar o crescimento das perturbações, caso contrário será necessário no mínimo o uso da equação de Landau de quinta ordem.

Por fim, a amplitude de oscilação deve ser definida em termos das variáveis do escoamento. Neste trabalho usou-se a definição de Carmo et al. (2008), que define a amplitude como:

$$|A(t)| = \sqrt{\int_{\Omega} |\hat{\mathbf{u}}_1(x, y, t)|^2 d\Omega} \quad (3.15)$$

onde  $\Omega$  é uma seção transversal do domínio considerado e  $\hat{\mathbf{u}}_1(x, y, t)$  é o coeficiente do modo de Fourier correspondente à perturbação investigada.

## 4 PREPARAÇÃO DAS SIMULAÇÕES

### 4.1 Escolha dos casos

A geometria principal escolhida para as simulações foi o perfil NACA 0012, por ser um fôlio amplamente descrito e estudado na literatura. A geometria AGARD AR-303 foi escolhida para uma comparação com o NACA 0012 e por apresentar a um hiper-sustentador (*slat*), que seria o foco de uma etapa posterior deste trabalho. No entanto, como visto na Sec. 3.2, a análise de estabilidade de Floquet necessita um campo base periódico, e o escoamento na cavidade do *slat* não satisfaz essa condição, impossibilitando a análise. Mesmo assim, optou-se por usar a geometria AGARD AR-303 com o *slat* retraído.

Três valores de ângulos de ataque foram escolhidos,  $\alpha$  igual a  $5^\circ$ ,  $10^\circ$  e  $20^\circ$ , de forma a caracterizar o aerofólio trabalhando como corpo afilado em ângulos de ataque mais baixos e sua condição em estol para  $\alpha$  mais elevado, além da transição. Para  $\alpha = 5^\circ$ , resultados de simulações aerodinâmicas podem ser comparados com Theofilis e Sherwin (2001).

Quanto ao número de Reynolds, não foi encontrado na literatura qualquer estudo sobre transição secundária em aerofólios, o que dificulta fazer uma estimativa inicial dessa faixa de transição. No entanto, tomando como exemplo o caso do cilindro circular de diâmetro  $D$ , temos que as primeiras instabilidades tridimensionais aparecem para  $Re_D$  da ordem de 200 e que a esteira tem largura da ordem de grandeza de  $D$ . Essa largura terá ordem de grandeza proporcional à projeção da corda  $c$  do fôlio na direção transversal ao escoamento, ou seja,  $c \sin \alpha$ . Sendo assim, podemos montar a Tab. 4.1, que estima o  $Re$  crítico baseado na corda da transição por meio da relação:

$$Re_D = Re \sin \alpha \Leftrightarrow Re = \frac{Re_D}{\sin \alpha} \quad (4.1)$$

Assim, para cada ângulo de ataque, a transição será procurada em torno destes valores de  $Re$ . No entanto, deve-se notar que o código utilizado não apresenta bons resultados para regimes turbulentos (GIORIA, 2008), o que causa alguns problemas para os valores de ângulo de

Tabela 4.1: Escolha dos valores de Re para as simulações com aerofólio.

Ângulo de ataque $\alpha$	$\sin \alpha$	Estimativa de $Re_{critico}$
5°	0,087	2295
10°	0,174	1151
20°	0,342	584

ataque mais baixos.

## 4.2 Convergência de malhas

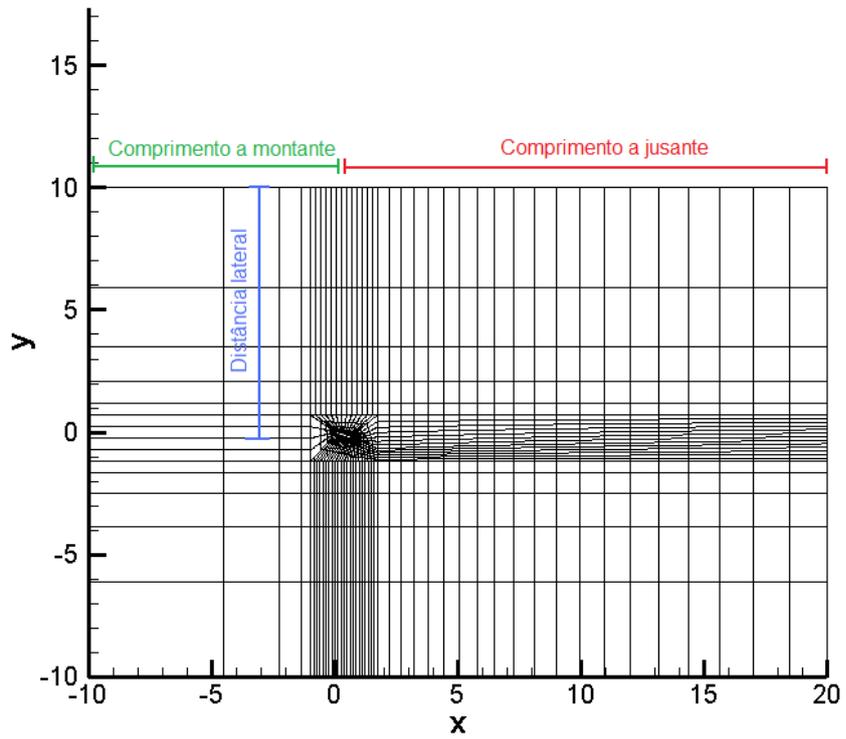
Como qualquer outro método numérico, a precisão do método dos elementos espectrais depende da discretização do domínio computacional. O estudo de convergência de malhas torna-se importante para determinar a malha ótima, isto é, a grade computacional menos refinada possível, de modo a reduzir o tempo de simulação, mas que garanta resultados dentro de uma faixa de tolerância. No presente trabalho, o estudo foi feito para a geometria AGARD AR-303 com *slat* recolhido, que pode ser visualizada em Moir (2004) e Andreou, Graham e Shin (2006), e baseou-se na metodologia adotada em Barkley e Henderson (1996) e Carmo et al. (2008).

Elementos quadriláteros estruturados foram utilizados, pois o código utilizado tem problemas de convergência com malhas de elementos triangulares. Dois tipos diferentes de estudo de convergência foram efetuados:

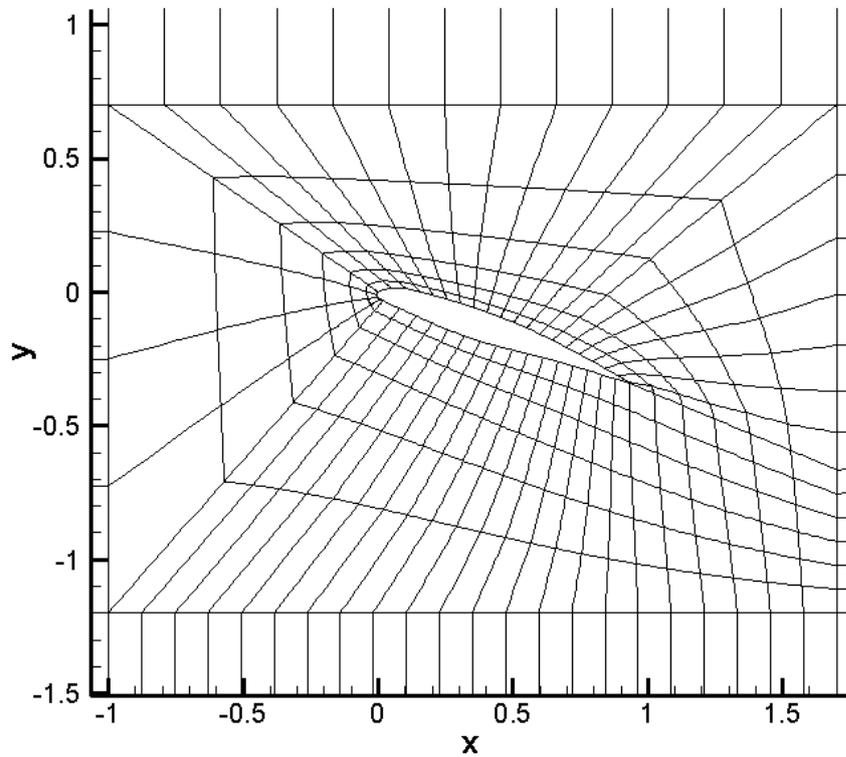
1. Influência da ordem do polinômio interpolador;
2. Influência da posição das fronteiras do domínio computacional (condições de contorno).

Foi criada uma malha base, mostrada na Fig. 4.1, com as seguintes características: polinômio interpolador de 9ª ordem, condição de *velocity inlet*  $10c$  a montante e  $10c$  nas laterais, e condição de *outflow*  $20c$  a jusante, onde  $c$  é a corda do aerofólio. A partir desta malha foram geradas outras, variando-se estes parâmetros. Como critério de convergência tomou-se variação menor que 1% dos seguintes parâmetros: valores médios e RMS do coeficiente de sustentação, valores médios e RMS do coeficiente de arrasto e número de Strouhal baseado na corda do aerofólio ( $\overline{C}_L$ ,  $C'_L$ ,  $\overline{C}_D$ ,  $C'_D$  e  $St = f c/U$ , respectivamente).

A seguir é mostrado o resultado deste estudo. O comprimento a montante não foi estudado, pois segundo Carmo et al. (2008) não há influência. As simulações foram efetuadas para  $Re = 500$ .



(a)



(b)

Figura 4.1: Malha usada como referência para estudo de convergência. (a) Domínio computacional. (b) Detalhe na proximidade do aerofólio.

### 4.2.1 Ordem da função base

As funções base utilizada no  $\mathcal{N}_{\varepsilon\kappa\tau\alpha r}$  são polinômios. Como visto, a malha padrão tem polinômio interpolador de ordem 9. Foram estudados polinômios de ordem 8 e 10 também. O resultado se encontra na Tab. 4.2.

Tabela 4.2: Influência da ordem da função base.

Ordem do polinômio	$\overline{C}_L$	$C'_L$	$\overline{C}_D$	$C'_D$	St
8 <sup>a</sup> ordem	0,9230	0,9276	0,4115	0,4117	0,546
9 <sup>a</sup> ordem	0,9231	0,9276	0,4115	0,4117	0,549
10 <sup>a</sup> ordem	0,9231	0,9276	0,4115	0,4117	0,551

Percebe-se que o polinômio de 8<sup>a</sup> ordem já atende aos requisitos necessários. No entanto, a fim de melhorar a visualização dos contornos de vorticidade ( $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$ ), decidiu-se pela utilização de polinômio de 9<sup>a</sup> ordem. Isto porque o método dos elementos finitos não garante a continuidade das derivadas, o que causa alguns saltos nos valores de  $\omega$ .

### 4.2.2 Comprimento a jusante

A condição de *outflow* implica que as derivadas na direção normal à fronteira são nulas. Para que isso represente a realidade, esta condição de contorno deve estar a uma distância razoável do objeto perturbador do escoamento, no caso, o aerofólio.

A Tab. 4.3 mostra os resultados para as malhas estudadas. A distância entre o fólio e a condição de saída varia entre 11 cordas e 30 cordas.

Tabela 4.3: Influência da posição da condição de *outflow*.

Comprimento a jusante	$\overline{C}_L$	$C'_L$	$\overline{C}_D$	$C'_D$	St
11c	0,9208	0,9253	0,4107	0,4109	0,551
15c	0,9230	0,9275	0,4114	0,4116	0,551
20c	0,9231	0,9276	0,4115	0,4117	0,549
25c	0,9235	0,9280	0,4116	0,4118	0,549
30c	0,9235	0,9280	0,4116	0,4118	0,549

Como o número de elementos entre as malhas com 25c e 30c não sofreu grande alteração, o que não implica em grande aumento do custo computacional, optou-se pela escolha de 30 cordas a jusante do fólio.

### 4.2.3 Distância lateral

Nas laterais da malha foi utilizada a condição de *velocity inlet*, o que implica em imposição de velocidade nesta fronteira. Ora, a velocidade só é conhecida em uma região afastada do fólio, onde as perturbações não são mais sentidas. Deste modo, a distância dessas fronteiras deve ser estudada para evitar o fenômeno de blocagem do escoamento, comum também em ensaios em túneis de vento, nos quais muitas vezes não é possível controlar a largura de passagem do fluido.

Durante as simulações, notou-se que essa foi a condição mais crítica. Foram estudadas malhas com distância lateral variando entre  $10c$  e  $50c$ , e os resultados se encontram na Tab. 4.4.

Tabela 4.4: Influência da posição da condição de *velocity inlet* nas laterais.

Distância lateral	$\overline{C}_L$	$C'_L$	$\overline{C}_D$	$C'_D$	St
10c	0,9231	0,9276	0,4115	0,4117	0,549
15c	0,9183	0,9227	0,4099	0,4101	0,549
20c	0,9148	0,9191	0,4085	0,4087	0,549
25c	0,9132	0,9175	0,4082	0,4084	0,549
30c	0,9116	0,9159	0,4075	0,4077	0,549
35c	0,9109	0,9152	0,4072	0,4075	0,550
40c	0,9105	0,9148	0,4071	0,4073	0,552
45c	0,9102	0,9145	0,4070	0,4072	0,552
50c	0,9100	0,9143	0,4069	0,4072	0,552

Embora seja importante a distância da condição de contorno especificada nas laterais, não há grandes gradientes ao longe do fólio, o que justifica o uso de grandes células nesta região. Sendo assim, as malhas foram geradas apenas esticando-se os elementos nas laterais, o que não acarreta maior custo computacional, visto que o número de elementos não se altera. Deste modo buscou-se a maior precisão, sendo o motivo pelo qual se tomou a malha com 50 cordas nas laterais para as simulações aerodinâmicas.

### 4.2.4 Malha resultante

A malha resultante deste estudo de convergência é a mostrada na Fig. 4.2, já com a geometria do NACA 0012. A malha consiste de aproximadamente 950 elementos quadriláteros estruturados, com condições de contorno 10 cordas à montante, 50 nas laterais e 30 a jusante do fólio, e polinômio de 9ª ordem como função base.

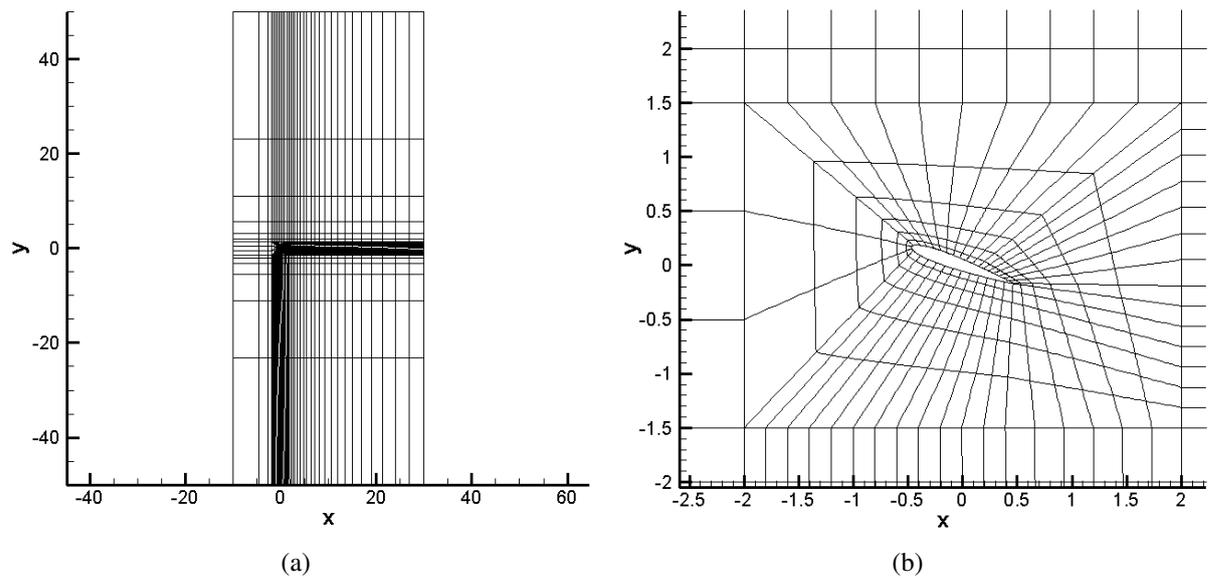


Figura 4.2: Malha utilizada para NACA 0012,  $\alpha = 20^\circ$ . (a) Domínio computacional. (b) Detalhe na proximidade do aerofólio.

### 4.3 Estudo de malhas para análise de Floquet

Neste trabalho não se efetuou um estudo de convergência de malhas para a análise de Floquet, seguiu-se o padrão adotado por Carmo et al. (2008) e Gioria et al. (2009). A malha adotada para a análise de estabilidade é uma versão reduzida da malha original, com distância a jusante e lateral menor.

O parâmetro mais importante é o número de *snapshots* do escoamento base. Durante a análise de Floquet, não se calcula novamente o escoamento base, apenas toma-se uma interpolação do escoamento calculado anteriormente. O número de fatias do campo base é muito influente no estudo dos multiplicadores de Floquet, e seguindo a recomendação de Carmo et al. (2008) utilizou-se 32 destes. Outro fator determinante é o tamanho do espaço de Krylov, domínio no qual se resolve o problema de autovalores. Foi utilizado espaço de ordem 20, seguindo recomendação de Gioria (2008). A malha utilizada é mostrada na Fig. 4.3. Note que o detalhe ao redor do aerofólio não sofreu alteração.

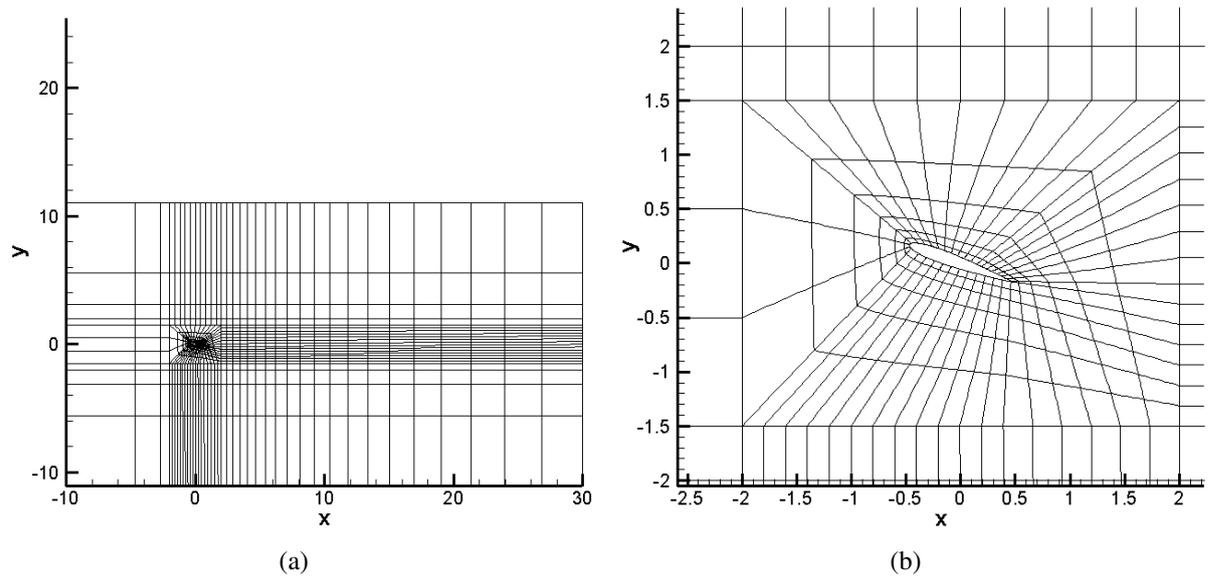


Figura 4.3: Malha utilizada para estudo de estabilidade. NACA 0012,  $\alpha = 20^\circ$ . (a) Domínio computacional. (b) Detalhe na proximidade do aerofólio.

## 5 RESULTADOS

### 5.1 Simulações aerodinâmicas: NACA 0012

Com a malha já definida, o próximo passo é realizar simulações aerodinâmicas com o perfil NACA 0012. Para efetuar a análise de Floquet é necessário um campo base bidimensional periódico. O ângulo de ataque é um dos parâmetros a ser avaliados no estudo, sendo escolhidos os valores de  $\alpha = 5^\circ$ , que indicam um ângulo de ataque comum em aplicações aeronáuticas até  $\alpha = 20^\circ$ , de modo a facilitar o descolamento das linhas de corrente e geração periódica de vórtices (estol).

Nas simulações, tanto a corda do aerofólio quanto a velocidade imposta ao longe são unitárias, e o número de Reynolds é dado como o inverso da viscosidade cinemática  $\nu$ . O passo temporal  $\Delta t$  foi escolhido para que o número de Courant-Friedrich-Lewis (CFL) se estabilizasse em valores menores que 1, garantindo a convergência dos cálculos para cada instante de tempo.

O Strouhal e os valores médios e RMS dos coeficientes de forças foram tomados desconsiderando-se os valores para  $t < 30s$ , de modo a eliminar o transiente inicial. O Strouhal foi calculado utilizando uma FFT do sinal de  $C_L$ .

#### 5.1.1 Simulações para ângulo de ataque $\alpha = 5^\circ$

Para  $\alpha = 5^\circ$  o escoamento se comporta como em geometrias afiladas, se distanciando do comportamento corpos rombudos. Deste modo, espera-se que não haja desprendimento de vórtices na proximidade do aerofólio, e sim que as linhas de corrente contornem o corpo suavemente. De fato, um comportamento interessante é notado.

Para  $Re = 1000$ , a esteira ainda não passou pela transição primária, ou seja, formam-se duas camadas de vorticidades opostas que não se misturam, chamadas de bolhas de recirculação. Para  $Re = 1200$  há um início de oscilação da esteira, mas não suficiente para iniciar o desprendimento de vórtices. Quando  $Re = 1500$ , a esteira ao longe se desestabiliza e começa o

enrolamento sucessivo das camadas limites criadas na parede do fólho, desprendendo vórtices. A visualização dessa transição pode ser vista na Fig. 5.1.

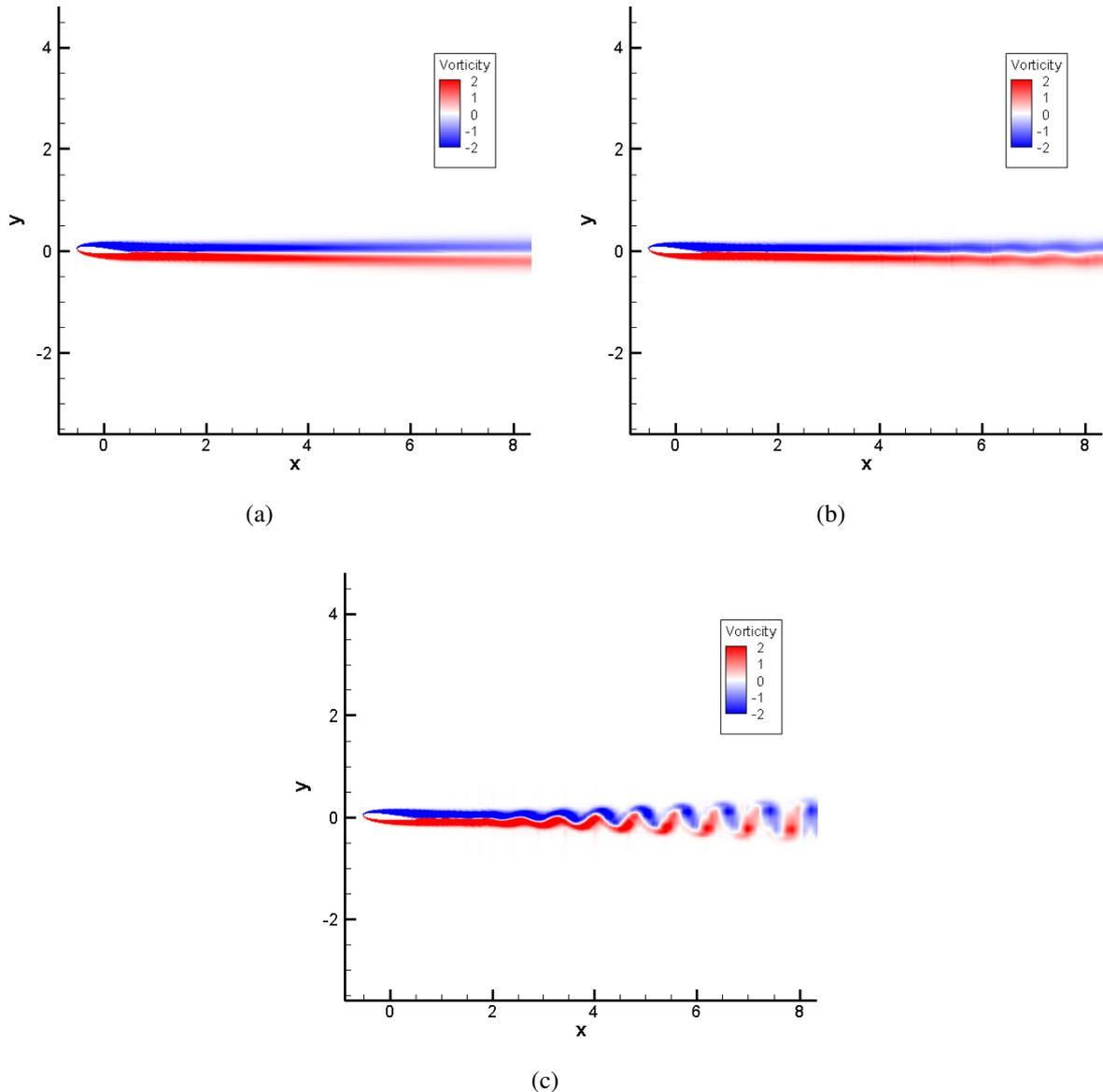


Figura 5.1: Contornos instantâneos de  $\omega_z$ : NACA 0012,  $\alpha = 5^\circ$ . (a)  $Re = 1000$ . (b)  $Re = 1200$  (c)  $Re = 1500$ .

No entanto, essa flutuação é pouco sentida na sustentação do fólho, como pode ser visto na Fig. 5.2, porque as instabilidades primárias do escoamento acontecem em uma região ao longe do fólho, tendo pouca influência nas regiões mais próximas. Isto se dá pelo fato de o escoamento em questão apresentar uma característica convectiva mais forte que difusiva, o que faz com que a informação se propague preferencialmente na direção do escoamento.

A Tab. 5.1 mostra os resultados aerodinâmicos para os valores de  $Re$  estudados.

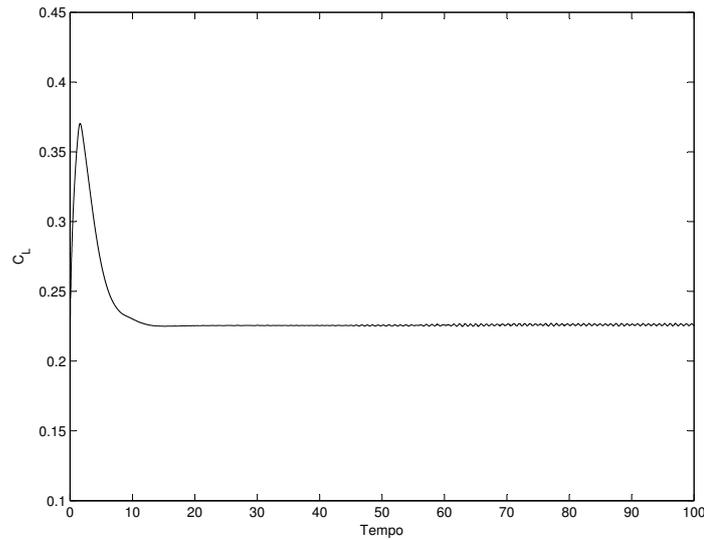


Figura 5.2: NACA 0012,  $Re = 1500$ ,  $\alpha = 5^\circ$ . Curva temporal do  $C_L$ .

Tabela 5.1: Resultados aerodinâmicos do perfil NACA 0012,  $\alpha = 5^\circ$ .

$Re$	$\overline{C}_L$	$C'_L$	$\overline{C}_D$	$C'_D$	$St$
1000	0,2455	-	0,1278	-	-
1200	0,2375	0,2375	0,1168	0,1168	1,0143
1500	0,2258	0,2258	0,1047	0,1047	1,1571
1600	0,2225	0,2225	0,1015	0,1015	1,1668
1800	0,2147	0,2147	0,0959	0,0959	1,2894

Para  $Re = 1000$  o escoamento se comporta como regime permanente, não havendo, portanto, valores RMS dos coeficientes de arrasto e sustentação, nem frequência de desprendimento de vórtices. Os resultados obtidos para esse número de  $Re$  podem ser comparados com Theofilis e Sherwin (2001), como mostrado na Fig. 5.3. Pode-se perceber a semelhança entre os resultados, mostrando a bolha de recirculação que se forma no bordo de fuga do fólio, o que de certa forma confirma a validação do método dos elementos espectrais no presente estudo.

O escoamento, embora tenha flutuações para valores de Reynolds superiores a 1500, não é periódico. As oscilações na esteira ocorrem de modo aleatório, indicando um início de turbulência na esteira, sendo esta um típico fenômeno aleatório. O valor de Reynolds relativamente elevado corrobora essa teoria. Deste modo, não há como efetuar a análise de Floquet para este caso.

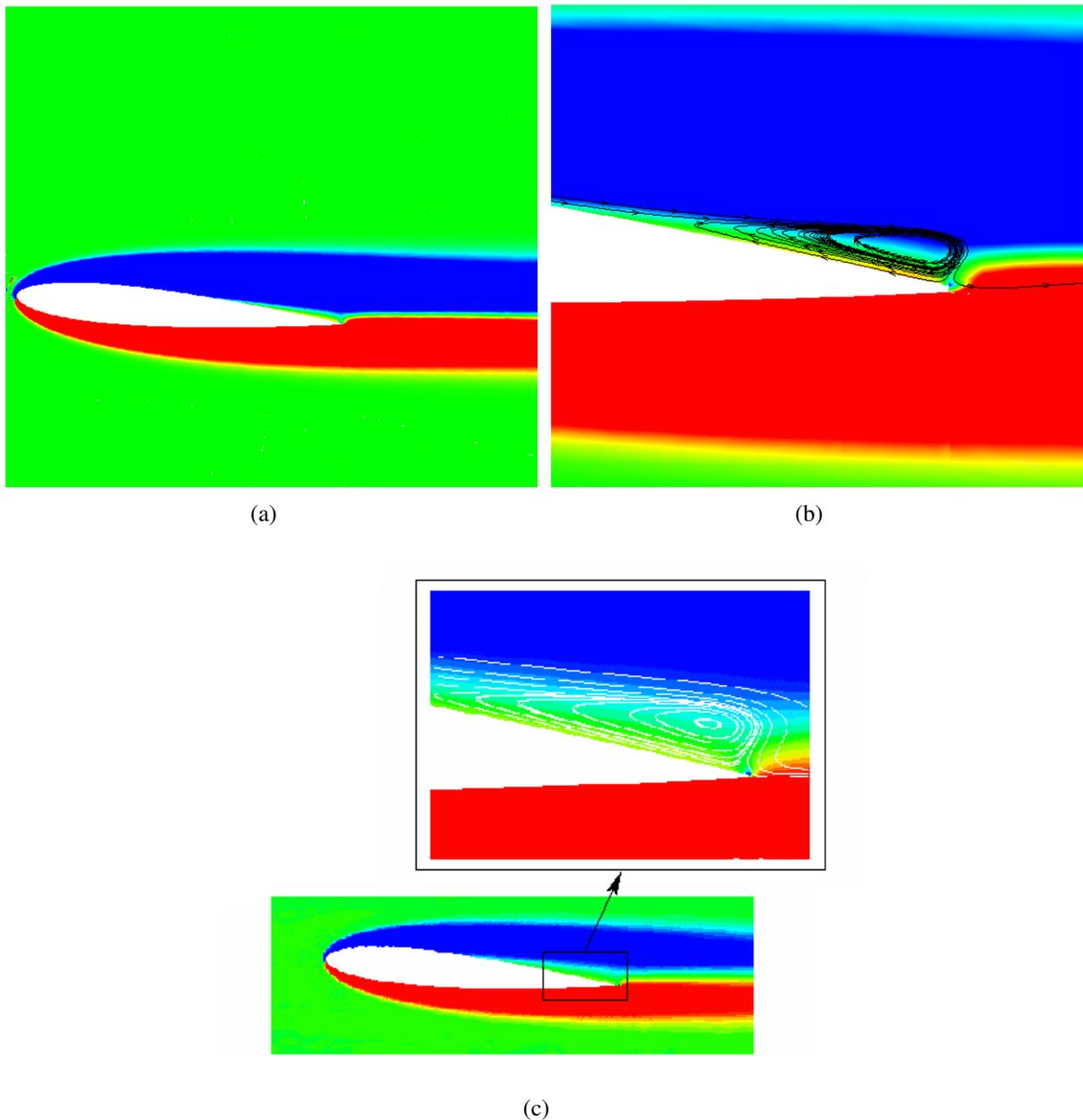
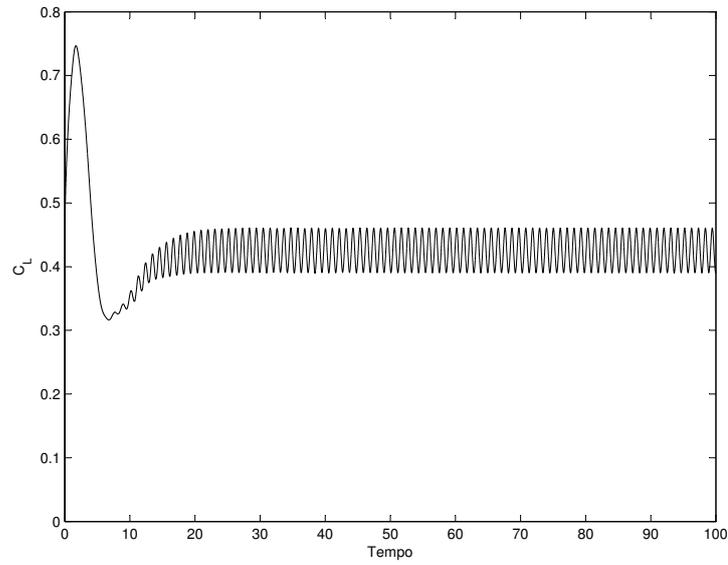


Figura 5.3: Contornos instantâneos de  $\omega_z$ : NACA 0012,  $\alpha = 5^\circ$ ,  $Re = 1000$ . (a) Visualização na proximidade do fôlio (resultado presente). (b) Linhas de corrente em detalhe (resultado presente). (c) Resultado encontrado em Theofilis e Sherwin (2001).

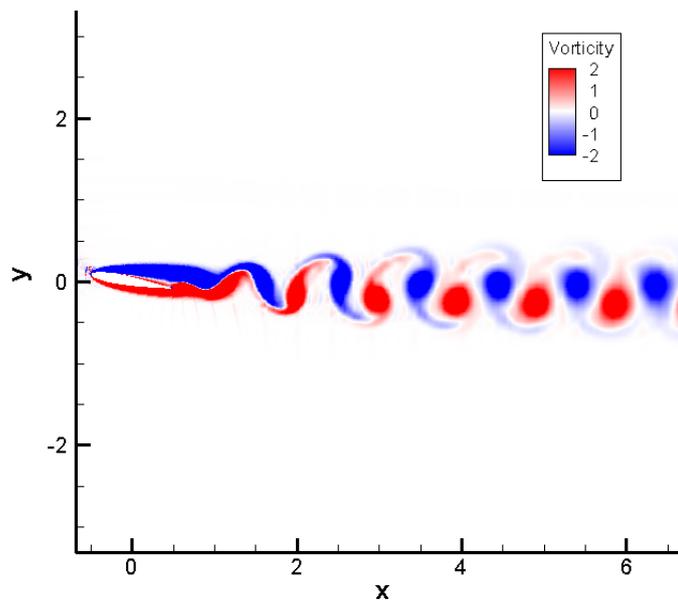
### 5.1.2 Simulações para ângulo de ataque $\alpha = 10^\circ$

Para  $\alpha = 10^\circ$ , simulações foram efetuadas com valores de  $Re$  iguais a 1000, 1100 e 1200. A Fig. 5.4 mostra uma visualização do escoamento para  $Re = 1200$ , junto com o sinal temporal do  $C_L$ , mostrando a periodicidade do escoamento.

Na Tab. 5.2, encontram-se os resultados aerodinâmicos para ângulo de ataque  $\alpha =$



(a)



(b)

Figura 5.4: NACA 0012,  $Re = 1200$ ,  $\alpha = 10^\circ$ . (a) Curva temporal do  $C_L$ . (b) Contornos instantâneos de  $\omega_z$ .

$10^\circ$ . Como esperado, o número de Strouhal é menor que para  $\alpha = 5^\circ$ , devido ao aumento da espessura média da esteira, o que tende a diminuir a frequência média de desprendimento de vórtices.

Devido à periodicidade do escoamento, podemos aplicar a teoria de Floquet neste caso.

Tabela 5.2: Resultados aerodinâmicos do perfil NACA 0012,  $\alpha = 10^\circ$ .

Re	$\overline{C}_L$	$C'_L$	$\overline{C}_D$	$C'_D$	St
1000	0,4171	0,4174	0,1661	0,1661	0,8857
1100	0,4215	0,4220	0,1629	0,1629	0,9143
1200	0,4251	0,4258	0,1601	0,1601	0,9429

### 5.1.3 Simulações para ângulo de ataque $\alpha = 20^\circ$

O ponto importante é perceber se o escoamento é periódico na esteira do fôlio, para que possa ser utilizada a teoria de Floquet. Um modo de perceber isso é pelo gráfico do  $C_L$  em função do tempo, como visualizado na Fig. 5.5(a). A Fig. 5.5(b) mostra os contornos instantâneos de  $\omega_z$ , onde também percebe-se a periodicidade do escoamento.

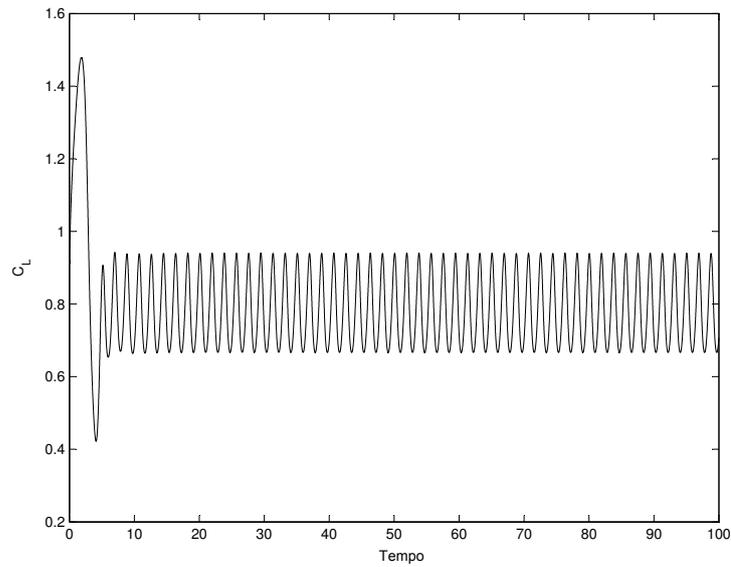
Para o ângulo de ataque de  $20^\circ$  foram efetuadas simulações com valores de Re varrendo de 400 a 650, pelo fato de ser a faixa de aparecimento das primeiras instabilidades secundárias. Temos que  $\Delta t = 0,0002$  unidades de tempo adimensional. O número de Strouhal baseado na corda (St) nesta faixa é  $\approx 0,52$ , o que deve ser próximo do valor para uma placa plana com o mesmo ângulo  $\alpha$ .

A Tab. 5.3 mostra os resultados das simulações aerodinâmicas para os valores de Re estudados e uma visualização da curva do coeficiente de sustentação pelo tempo pode ser encontrada na Fig. 5.5(a).

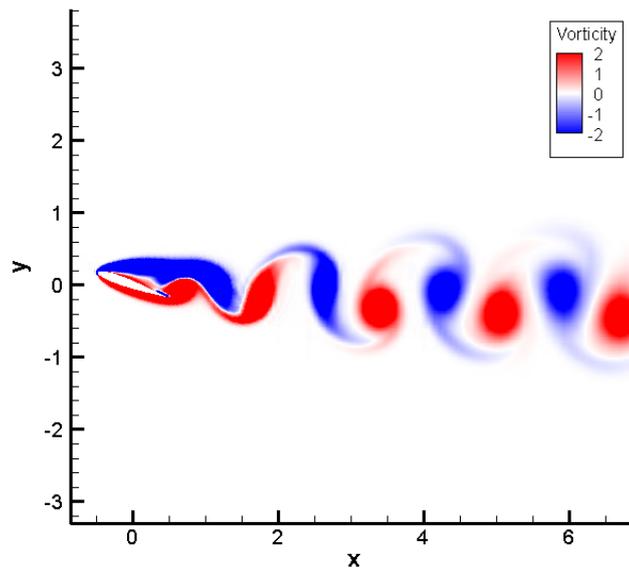
Tabela 5.3: Resultados aerodinâmicos do perfil NACA 0012,  $\alpha = 20^\circ$ .

Re	$\overline{C}_L$	$C'_L$	$\overline{C}_D$	$C'_D$	St
400	0,7414	0,7444	0,4051	0,4052	0,5034
450	0,7633	0,7677	0,4083	0,4085	0,5210
460	0,7670	0,7718	0,4091	0,4092	0,5286
470	0,7714	0,7764	0,4100	0,4101	0,5286
500	0,7836	0,7897	0,4128	0,4230	0,5286
550	0,8042	0,8117	0,4181	0,4183	0,5382
600	0,8237	0,8235	0,4235	0,4237	0,5501
650	0,8406	0,8506	0,4284	0,4287	0,5430

Com as simulações aerodinâmicas prontas, pode-se partir para a análise do crescimento das instabilidades tridimensionais utilizando a teoria de Floquet.



(a)



(b)

Figura 5.5: NACA 0012,  $Re = 500$ ,  $\alpha = 20^\circ$ . (a) Curva temporal do  $C_L$ . (b) Contornos instantâneos de  $\omega_z$ .

## 5.2 Análise de estabilidade de Floquet: NACA 0012

Nas simulações para análise de estabilidade, a perturbação tridimensional é evoluída durante um período do escoamento, e os autovalores do operador linear que evolui a perturbação determinam a taxa de crescimento deste modo 3D, como visto na Seção 3.2. O estudo consiste em determinar o módulo dos multiplicadores de Floquet ( $|\mu|$ ) para diversos valores de número de onda  $\beta = 2\pi/\lambda$ , lembrando que  $|\mu| > 1$  determina um modo instável.

### 5.2.1 Simulações para ângulo de ataque $\alpha = 10^\circ$

Para  $\alpha = 10^\circ$ , não foram encontrados modos instáveis na faixa de Re estudada. A Fig. 5.6 mostra os valores dos multiplicadores de Floquet em função dos números de onda  $\beta$  para os Re estudados.

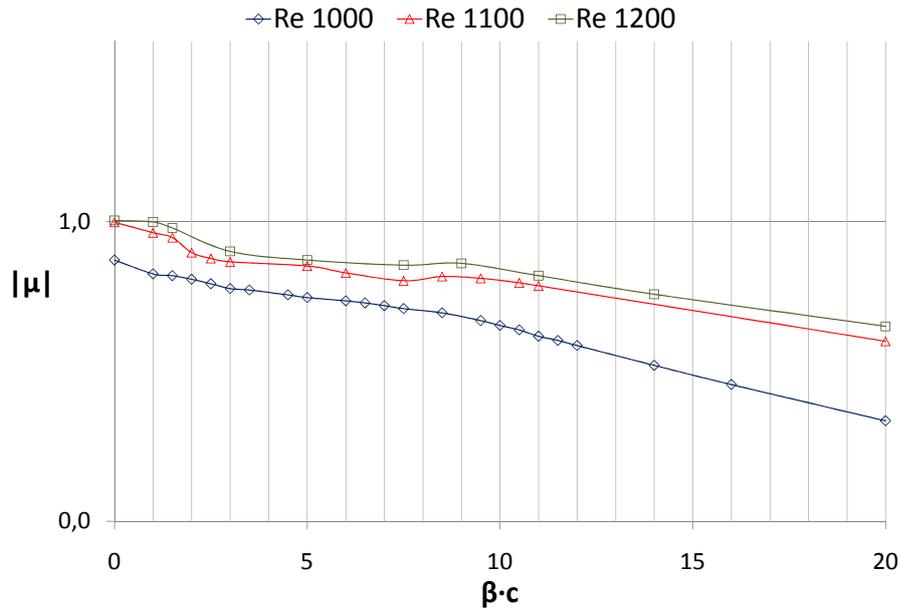


Figura 5.6: NACA 0012,  $\alpha = 10^\circ$ . Espectro dos multiplicadores de Floquet.

Há uma tendência para formação de um modo instável para  $\beta \approx 9$ , e o modo tridimensional, para os valores de Reynolds estudados, apresenta a característica de ter multiplicador real positivo, i.e. tem o mesmo período  $T$  do escoamento base, como visto na eq. (5.1).

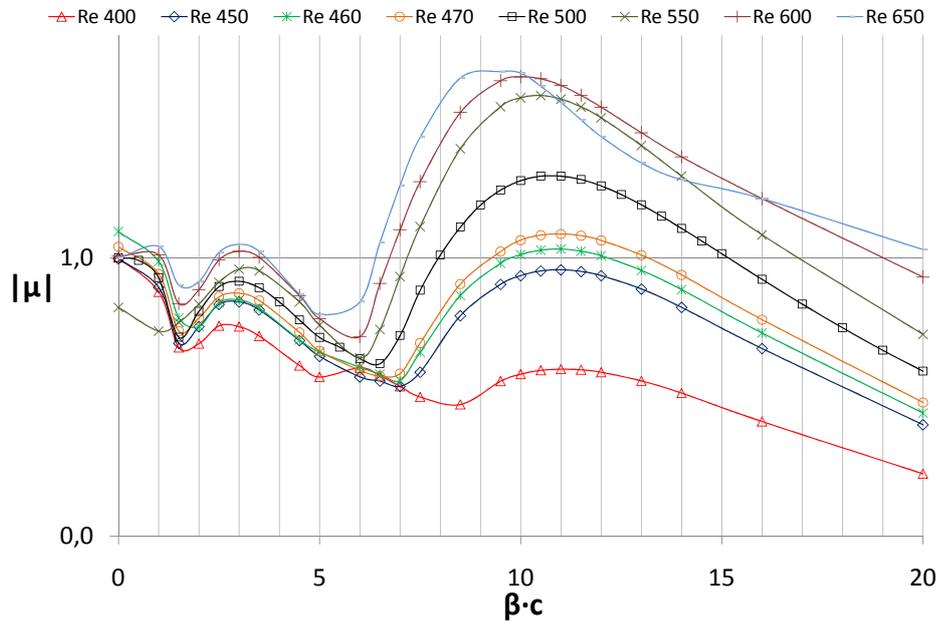
$$\omega_x(x, y, z, t) = \omega_x(x, y, z, t + T) \quad (5.1)$$

Simulações para Re maiores não foram efetuadas devido à não periodicidade do campo base nestes casos, tornando impossível a análise de estabilidade de Floquet. Obviamente, um estudo posterior para maiores valores de Reynolds será necessário, mesmo que empregando outros métodos de análise de estabilidade, o que foge ao escopo deste trabalho.

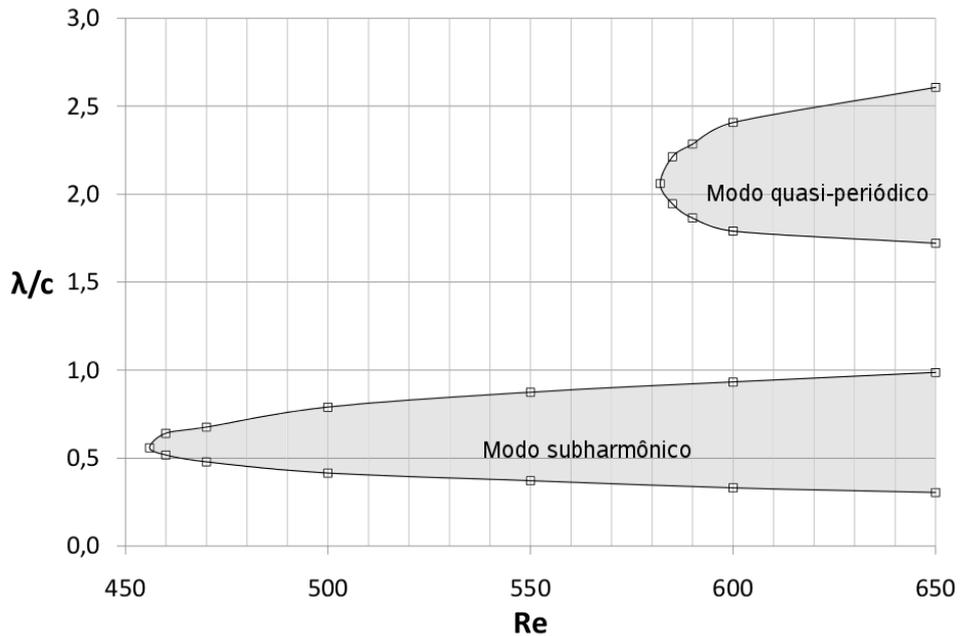
### 5.2.2 Simulações para ângulo de ataque $\alpha = 20^\circ$

O resultado para os número de Reynolds estudados é mostrado na Fig. 5.7(a), que apresenta a curva dos módulos dos multiplicadores de Floquet  $|\mu|$  pelo número de onda  $\beta$  das instabilidades,

além da curva de estabilidade neutra.



(a)



(b)

Figura 5.7: NACA 0012,  $\alpha = 20^\circ$ . (a) Espectro dos multiplicadores de Floquet. (b) Curva de estabilidade neutra.

Analisando a Fig. 5.7(a), notamos que o primeiro modo instável aparece para  $Re \approx 460$  e tem comprimento de onda na direção da envergadura  $\lambda \approx 0,57c$ . Nota-se claramente outro pico na curva, correspondendo a um modo de comprimento de onda maior ( $\lambda \approx 2,1c$ ), com

valor de Reynolds crítico próximo a 585.

É interessante também estudar a curva de estabilidade neutra para este caso, mostrada na Fig. 5.7(b). Esta última retrata as regiões instáveis no mapa dos comprimentos de onda  $\lambda$  pelo número de Reynolds  $Re$ . As regiões dentro das curvas correspondem aos modos instáveis, detalhados a seguir.

### 5.2.2.1 Modo subharmônico

A bifurcação do primeiro modo instável ocorre para  $Re = 456$ . Para melhor caracterizar este modo, pode-se remontar o campo 3D de velocidades e pressão do escoamento utilizando-se o campo base bidimensional e o campo de perturbações tridimensional gerado pela análise dos autovalores, este último calculado na direção da envergadura por meio de uma expansão senoidal. O resultado pode ser visualizado na Fig. 5.8, para  $\beta = 11$  ( $\lambda = 0,57c$ ).

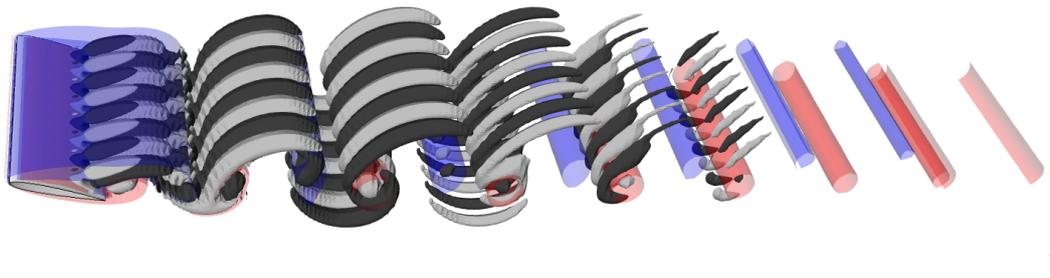


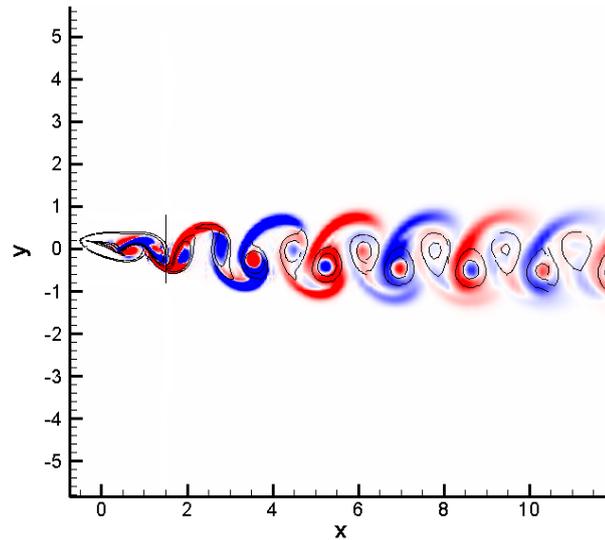
Figura 5.8: Escoamento remontado a partir do campo base bidimensional e das perturbações tridimensionais. As iso-superfícies translúcidas são de  $\omega_z$ . As iso-superfícies sólidas escuras e claras representam valores de  $\omega_x$  negativos e positivos, respectivamente. NACA 0012,  $Re = 500$ ,  $\alpha = 20^\circ$ ,  $\beta = 11$ .

Percebe-se claramente que as tridimensionalidades não são mais fortes nos núcleos dos vórtices principais, mas sim nas regiões que os interligam (*braids*). As instabilidades se formam na região próxima à esteira e decaem rapidamente. Também pode-se notar que o modo tridimensional tem período  $2T$ , consequência do multiplicador de Floquet ser um real negativo, ou seja, de fase igual a  $\pi$ . Tal modo recebe o nome de subharmônico, e tem a seguinte característica:

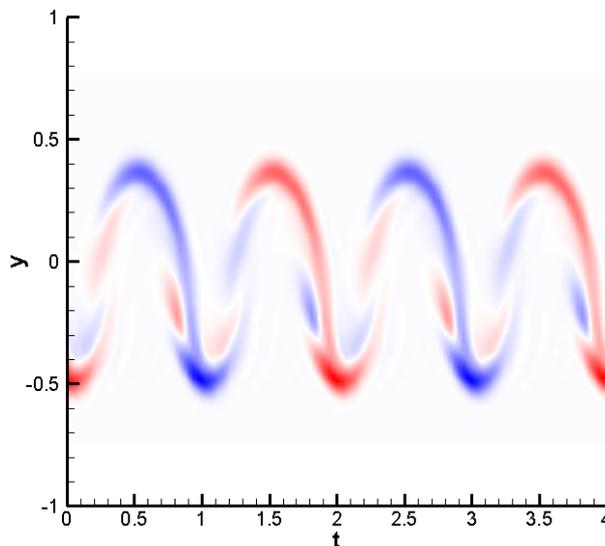
$$\omega_x(x, y, z, t) = \omega_x(x, y, z, t + 2T) \quad (5.2)$$

Uma outra maneira de visualizar a característica de dobrar o período desse modo é colocando uma estação na esteira do fólio, como visualizado na Fig. 5.9(a). Simulando alguns

períodos do modo instável podemos verificar a intensidade de vorticidade  $\omega_x$  que cruza essa estação para cada instante de tempo, adimensionalizado pelo período  $T$  de desprendimento de vórtices, e montar a Fig. 5.9(b). Percebe-se claramente que o modo tridimensional se repete a cada dois períodos  $T$ , caracterizando o modo subharmônico.



(a)



(b)

Figura 5.9: NACA 0012,  $\alpha = 20^\circ$ ,  $Re = 500$ . Contornos de  $\omega_x$ . (a) Posição da estação de aquisição de dados de  $\omega_x$  em  $x = 1,5c$ . Linhas tracejadas e pontilhadas mostram valores de  $\omega_z$  iguais a -2 e 2, respectivamente. (b) Contornos de  $\omega_x$  do modo instável para  $x = 1,5c$ . O tempo foi adimensionalizado usando o período de desprendimento de vórtices.

Um aerofólio com ângulo de ataque elevado começa a se comportar como corpo rombudo. No entanto, a transição secundária na geometria estudada difere consideravelmente do fenômeno que ocorre na esteira de um cilindro circular fixo, a começar pela assimetria causada

pelo ângulo de ataque. Isso faz com que a vorticidade na direção  $x$  não seja simétrica em relação ao eixo  $Ox$ , como visto na Fig. 5.9(b).

Apesar de apresentar desprendimento de vórtices como no caso do cilindro, a esteira do fólio apresenta na transição tridimensional modo com comprimento de onda adimensionalizado menor que os modos encontrados por Williamson (1988) e Barkley e Henderson (1996). O fato de o modo tridimensional ser subharmônico também o difere dos modos A e B do cilindro fixo. No entanto, o modo C descrito por Sheard, Thompson e Hourigan (2003) no escoamento ao redor anéis circulares e encontrado por Carmo et al. (2008) para cilindros desalinhados também é subharmônico.

### 5.2.2.2 Modo quase-periódico

Um segundo modo instável surge para  $Re = 582$ , com comprimento de onda característico  $\lambda \approx 2,1c$  - correspondente a  $\beta = 3$ . Investigar este modo torna-se interessante devido ao seu maior comprimento de onda, o que implica na necessidade de um maior domínio na direção da envergadura para perfeita caracterização do modo em uma simulação quase-tridimensional.

Este modo apresenta multiplicadores de Floquet complexos, i.e. é um modo quase-periódico. Esta característica faz com que as componentes tridimensionais do escoamento apresentem um período característico diferente do período  $T$  de desprendimento de vórtices do campo base, o que pode ser visto no escoamento como uma onda estacionária ou propagante na direção da envergadura. Este tipo de modo pode ser representado por:

$$\omega_x(x, y, z, t) = \omega_x(x, y, z + k_z, t + T) \quad (5.3)$$

Analogamente ao modo subharmônico, podemos remontar o campo 3D de velocidades do modo quase-periódico utilizando o campo base bidimensional e as perturbações geradas na análise de Floquet. O resultado pode ser visualizado na Fig. 5.10, para  $\beta = 3$  ( $\lambda = 2,09c$ ).

Modos quase-periódicos também são encontrados em escoamentos ao redor de cilindros, como mostrado em Blackburn, Marques e Lopez (2005). Na bifurcação quase-periódica, duas soluções distintas podem aparecer simultaneamente, uma correspondendo a uma onda propagante e outra correspondendo a uma onda estacionária, ambas moduladas pelo campo base bidimensional. No entanto, a diferenciação entre estes dois comportamentos não é possível utilizando apenas a teoria de estabilidade linear de Floquet, sendo necessário simulações tridimensionais para fazer esta verificação.

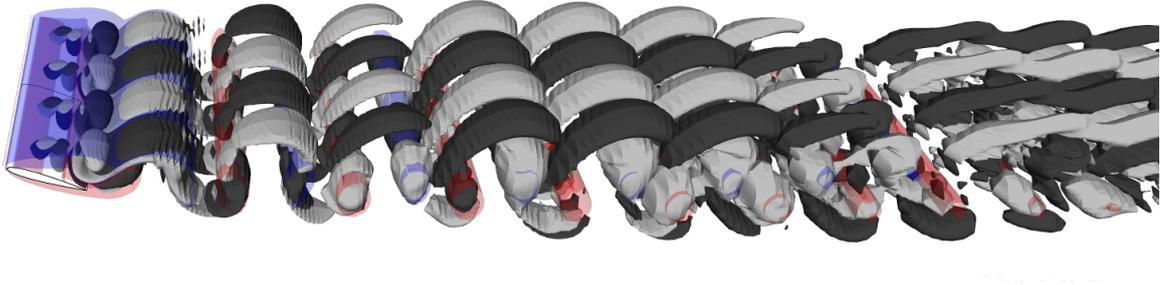


Figura 5.10: Escoamento remontado a partir do campo base bidimensional e das perturbações tridimensionais. As iso-superfícies translúcidas são de  $\omega_z$ . As iso-superfícies sólidas escuras e claras representam valores de  $\omega_x$  negativos e positivos, respectivamente. NACA 0012,  $Re = 590$ ,  $\alpha = 20^\circ$ ,  $\beta = 3$ .

### 5.3 Simulações quase-tridimensionais e análise não-linear: NACA 0012

Nesta seção, são apresentados os resultados de simulações quase-tridimensionais efetuadas para a geometria NACA 0012 com ângulo de ataque igual a  $\alpha = 20^\circ$ . Essas simulações são diretas (DNS), mas com uma decomposição em modos de Fourier na direção da envergadura. Sendo assim, as mesmas malhas utilizadas nas simulações bidimensionais podem ser usadas, sendo necessário informar apenas o tamanho do domínio computacional na direção da envergadura. O termo quase-tridimensionais vem do fato que é utilizada uma condição de contorno periódica nesta direção. O número de modos  $N$  é escolhido segundo a recomendação de Henderson (1997):

$$N = \frac{L}{c} \sqrt{Re} \quad (5.4)$$

onde  $L$  é o comprimento do domínio computacional na direção da envergadura,  $c$  é o comprimento característico - no caso a corda do fólio - e  $Re$  é o número de Reynolds baseado nesse comprimento.

As condições iniciais das simulações efetuadas foram os campos remontados a partir das simulações bidimensionais e das análises de Floquet. Outra maneira seria iniciar o escoamento a partir de um campo unitário, i.e. impulsivamente, e forçar as instabilidades tridimensionais a partir de um ruído branco. Um inconveniente é o alto custo computacional, visto que a cada período, as instabilidades tridimensionais tendem a ser multiplicadas por um fator  $|\mu|$ . Trabalhando em um  $Re$  ligeiramente acima da bifurcação de estabilidade teremos que  $|\mu|$  terá

valor muito próximo, porém superior, a 1, o que tornará a taxa de crescimento razoavelmente lenta.

### 5.3.1 Modo subharmônico

Para o estudo do modo subharmônico, a simulação efetuada teve como parâmetros  $Re = 500$  e comprimento  $L$  do domínio computacional na direção da envergadura igual ao comprimento característico da perturbação investigada  $\lambda = (2\pi/11)c = 0,57c$ . A Fig. 5.11(a) mostra os resultados do crescimento da amplitude do modo instável obtido de três modos: simulações quase-tridimensionais, aplicação da equação de Landau e análise linear de Floquet.

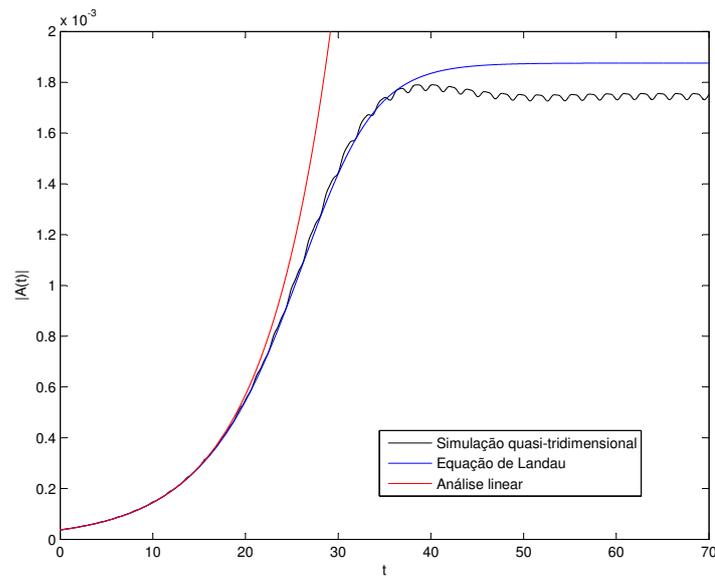
Os coeficientes da equação de Landau foram tirados a partir da Fig. 5.11(b), usando a metodologia mostrada na Sec. 3.3. Não se preocupou-se com os parâmetros  $\omega$  e  $c$  que modelam a parte imaginária da amplitude complexa  $A$  pois eles não dizem nada a respeito do crescimento do modo, apenas trazem informações sobre a frequência de oscilação das instabilidades. Como o modo é subharmônico, sabe-se que essa frequência é igual a metade da frequência de despreendimento de vórtices do escoamento base.

Temos que  $l > 0$  neste caso, o que indica um modo supercrítico, que pode ser descrito pela equação de Landau de terceira ordem. Outra evidência é que a curva  $d \log |A|/dt$  em função de  $|A|^2$  apresenta um caráter muito linear até próximo à saturação. O termo que descreve o crescimento da amplitude em primeira ordem é  $\sigma$ , e pode-se comparar o resultado da análise de Floquet com a equação de Landau, como mostrado na Tab. 5.4.

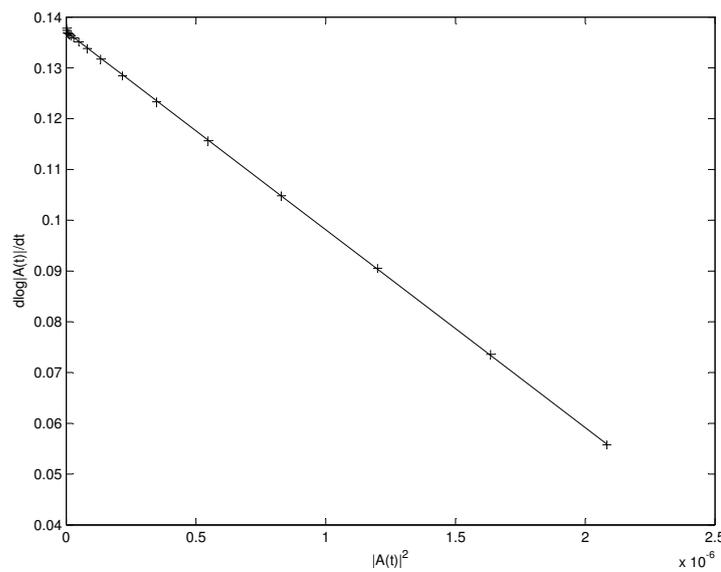
Tabela 5.4: Comparação entre valores da taxa de crescimento  $\sigma$ ,  $\alpha = 20^\circ$ ,  $Re = 500$ .

Caso	$\sigma$
Análise de Floquet	0,1377
Equação de Landau	0,1371

A grande proximidade entre os valores indica que em primeira ordem a análise de estabilidade de Floquet realmente traz resultados confiáveis. Analisando a Fig. 5.11(a), percebe-se que a curva correspondente à análise linear (Floquet) acompanha o crescimento real até certo ponto, a partir do qual o termo de terceira ordem da equação de Landau passa a ser importante. A equação de Landau acerta o crescimento das perturbações e o momento da saturação, porém superestima o patamar dessa estabilização. Deste modo, o termo de quinta ordem, que seria o próximo da equação, deve ser negativo de modo a compensar esse erro e aproximar os dois resultados. Os três resultados também tendem a se aproximar para simulações com valores de  $Re$



(a)



(b)

Figura 5.11: Resultados obtidos no estudo do modo subharmônico. NACA 0012,  $Re = 500$ ,  $\alpha = 20^\circ$ . (a) Crescimento e saturação da amplitude da perturbação tridimensional correspondente. Em preto resultado da simulação quase-tridimensional, em azul a equação de Landau, em vermelho resultado derivado da análise linear de Floquet. (b) Derivada do logaritmo da amplitude em função do quadrado da amplitude. + Resultados numéricos. - Reta que melhor aproxima os dados.

mais próximos da bifurcação,  $Re_{critical} = 456$ . Neste caso, a aproximação linear acompanhará a curva real até um ponto mais próximo da saturação e a diferença entre o patamar de saturação da equação de Landau e o real também diminuirá.

### 5.3.2 Modo quase-periódico

Como visto na Sec. 5.2.2, um segundo modo instável aparece a partir de  $Re = 582$ . Para estudar esse modo, partiu-se da solução da análise de Floquet para  $Re = 585$ , com comprimento do domínio computacional na direção da envergadura igual a  $L = (2\pi/3)c = 2,09c$ , o mesmo da perturbação instável do modo quase-periódico.

A Fig. 5.12(a) mostra como a amplitude desse modo instável evolui no tempo. De acordo com a análise de estabilidade de Floquet, este modo deveria ser instável, mas pelo gráfico percebemos que a amplitude da perturbação tem uma tendência de subida mas depois é amortecida e tende a zero no escoamento. Uma possível explicação é que a energia do modo decai devido à interação com as perturbações de outros comprimentos de onda.

Como visto na Sec. 3.1.1, a maneira como são feitas as simulações quase-tridimensionais utilizando a expansão de Fourier na direção da envergadura faz com que sejam calculadas as energias de cada modo de Fourier independentemente. O primeiro modo, correspondente à Fig. 5.12(a), tem comprimento de onda igual a  $L$ . Podemos verificar o que ocorre com outros modos e buscar alguma indicação de que a interação entre esses modos inibe o crescimento da perturbação correspondente ao modo quase-periódico. A escolha óbvia é analisar o terceiro modo de Fourier, aquele que tem comprimento de onda correspondente ao modo subharmônico,  $\lambda = L/3 = 0,70c$ , que é instável para esse valor de  $Re$ , como visto na Fig. 5.7(b). A evolução temporal da amplitude deste modo é mostrada na Fig. 5.12(b).

Comparando as duas figuras, é interessante notar que a amplitude do modo subharmônico começa a crescer justamente quando a amplitude do modo quase-periódico inicia o decaimento. A conclusão é que, embora ambos os modos individualmente tenham características instáveis para esse valor de  $Re$ , a interação entre eles faz com que o modo subharmônico absorva a energia do modo quase-periódico, amortecendo este último e fazendo sua amplitude tender a zero. Essa é uma diferença significativa em relação ao caso do cilindro circular fixo, estudado em Barkley e Henderson (1996).

Tem-se que a dissipação viscosa ocorre para as menores estruturas do escoamento, amortecendo a energia das maiores estruturas. Desta maneira, o fenômeno do amortecimento do modo quase-periódico observado no escoamento ao redor do NACA 0012 só é possível pelo fato de o modo se tornar instável após quando já existia no escoamento um modo de menor comprimento de onda. Para o cilindro, o primeiro modo instável (modo A) tem comprimento característico maior que o modo B, impedindo que esse fenômeno ocorra.

A aproximação pela equação de Landau não pode ser efetuada para o modo quase-

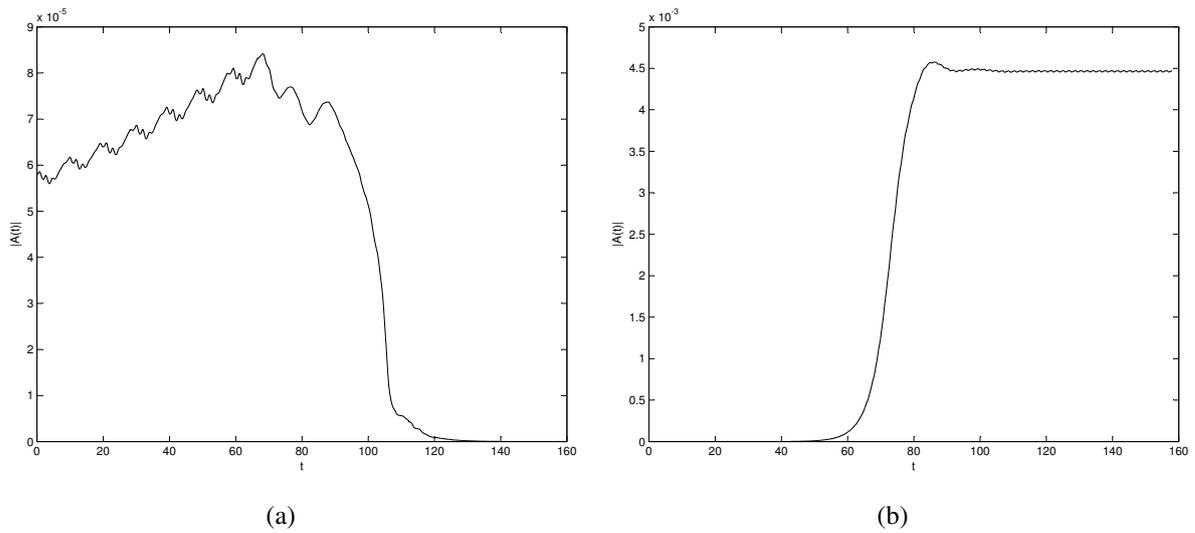


Figura 5.12: Resultados obtidos no estudo do modo quase-periódico. NACA 0012,  $Re = 585$ ,  $\alpha = 20^\circ$ . (a) Evolução da amplitude da perturbação com comprimento de onda  $L = (2\pi/3)c = 2,09c$ . (b) Evolução da amplitude da perturbação com comprimento de onda  $L/3 = (2\pi/9)c = 0,70c$ .

periódico, visto que a amplitude da perturbação não se comporta da maneira esperada. Para o modo subharmônico também não se usou a aproximação por Landau, pois  $Re$  está, nesse caso, bem acima do Reynolds crítico da bifurcação.

## 5.4 Comparação entre geometrias

De modo a enriquecer o estudo, apresenta-se aqui comparações dos resultados para o perfil NACA 0012 com duas geometrias diferentes: o fólio AGARD AR-303 e o cilindro circular fixo, sendo que para esse último foram tomados apenas dados da literatura, não sendo efetuada nenhuma simulação.

### 5.4.1 NACA 0012 e AGARD AR-303

Nesta seção, buscamos mostrar uma comparação entre resultados para dois perfis de fólios diferentes: o NACA 0012, amplamente discutido neste trabalho, e o AGARD AR-303, perfil assimétrico cuja geometria pode ser encontrada em Moir (2004) e Andreou, Graham e Shin (2006).

Apenas um caso foi escolhido para fazer a comparação: ângulo de ataque  $\alpha = 20^\circ$  e  $Re = 500$ . As malhas utilizadas têm as mesmas dimensões daquelas usadas para o NACA

0012, tanto para simulações aerodinâmicas quanto para análise de Floquet. A Tab. 5.5 mostra os resultados dos coeficientes das simulações aerodinâmicas para as duas geometrias.

Tabela 5.5: Comparação entre resultados aerodinâmicos do perfil NACA 0012 com AGARD AR-303,  $\alpha = 20^\circ$ ,  $Re = 500$ .

<b>Geometria</b>	$\overline{C}_L$	$C'_L$	$\overline{C}_D$	$C'_D$	St
<b>NACA 0012</b>	0,7836	0,7897	0,4128	0,4230	0,5286
<b>AGARD AR-303</b>	0,9220	0,9266	0,4117	0,4119	0,5294

Analisando os resultados nota-se que o perfil AGARD AR-303 apresenta maior  $C_L$ , o que era esperado devido ao seu arqueamento - fólio não simétrico - o que aumenta a sustentação para um mesmo ângulo de ataque. Isso ocorre porque o arqueamento do fólio aumenta a circulação ao redor do corpo, o que seria como aumentar o ângulo de ataque efetivo.

Já o arrasto e frequência de desprendimento de vórtices permanecem na mesma faixa de grandeza, os quais devem ser os mesmos para uma placa plana de espessura  $\delta \rightarrow 0$  nas mesmas condições de  $\alpha$  e  $Re$ . Isso mostra um certo grau de universalidade nos resultados para esse ângulo de ataque.

Efetuada a análise de estabilidade de Floquet para as duas geometrias, com  $Re = 500$  e  $\alpha = 20^\circ$ , obtemos os multiplicadores mostrados na Fig. 5.13.

Percebe-se claramente a semelhança entre as duas curvas. Ambas apresentam picos para números de onda na mesma faixa,  $\beta = 3$  e  $\beta = 11$ , com modos instáveis de mesma características espaço-temporais, i.e. um modo subharmônico de comprimento de onda  $\lambda \approx 2\pi/11$  ficando instável primeiro e um segundo modo quase-periódico, de  $\lambda \approx 2\pi/3$ , se tornando instável posteriormente.

A maior diferença é que para a geometria AGARD AR-303 a transição se dá para um  $Re$  mais baixo, embora o valor do Reynolds crítico não tenha sido investigado neste trabalho. Esse fato se deve provavelmente ao arqueamento do fólio, que aumenta a circulação ao redor do mesmo e faz com que o fluido perca energia devido à aceleração necessária para fazer a "curva" mais acentuada para acompanhar a geometria da parede. Deste modo, aumenta-se a tendência à instabilização do escoamento, tanto para desprendimento de vórtices quanto para a formação de estruturas tridimensionais.

Visualizações do modo instável para  $Re = 500$ ,  $\alpha = 20^\circ$ ,  $\beta = 11$  e ambas as geometrias são mostradas na Fig. 5.14, como contornos de  $\omega_x$ . As linhas contínuas e tracejadas representam iso-linhas de  $\omega_z$ .

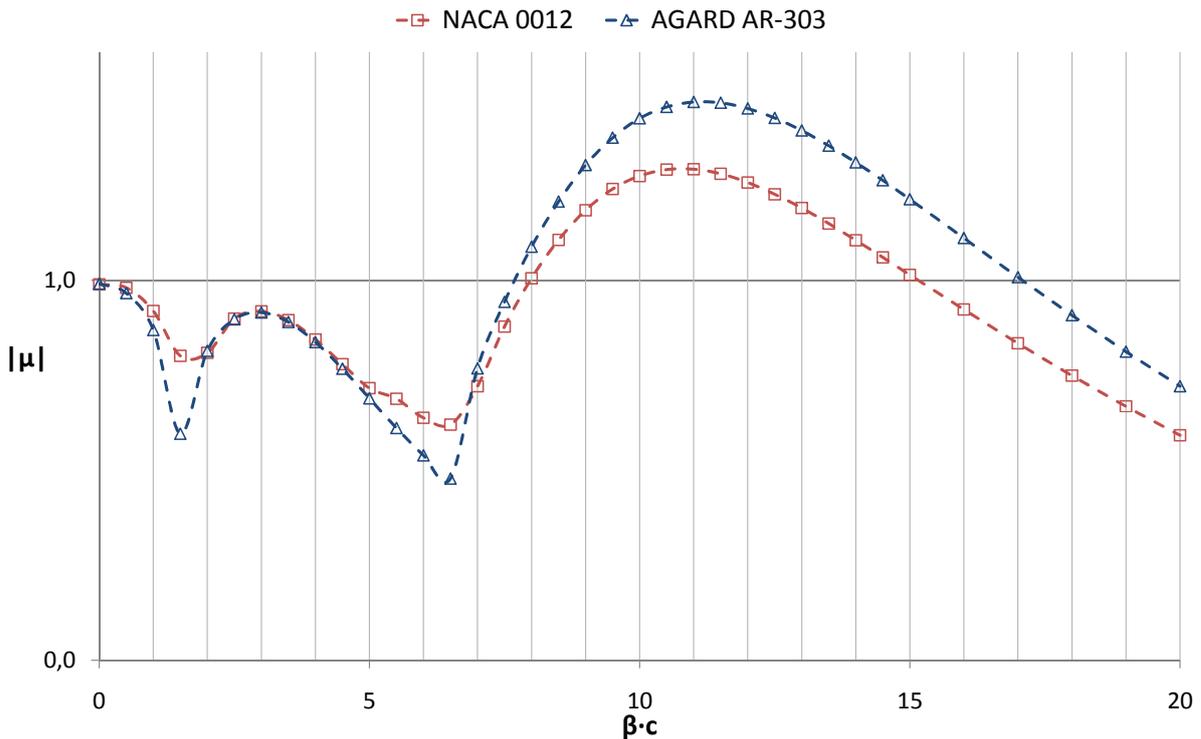
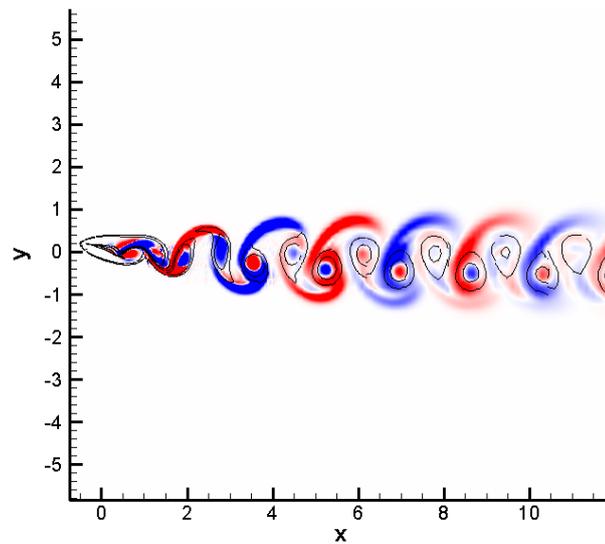


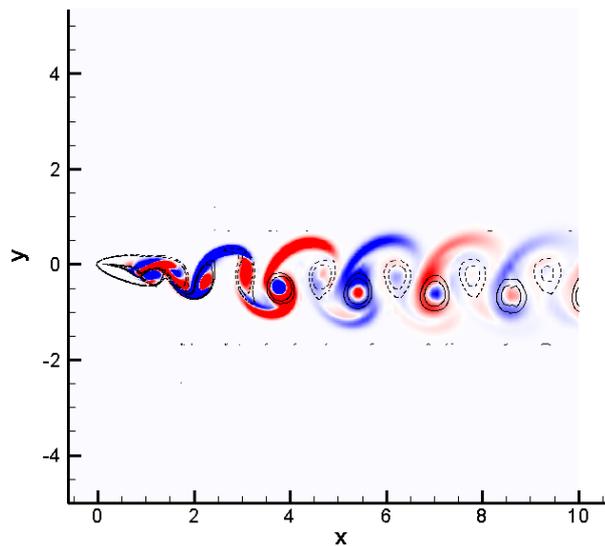
Figura 5.13: Comparação entre o espectro dos multiplicadores de Floquet em função do número de onda das instabilidades tridimensionais adimensionalizado pela corda.  $Re = 500$ ,  $\alpha = 20^\circ$ .

Os dois modos instáveis apresentam aspectos bastantes similares, a começar pela característica de dobrar o período  $T$  do campo base. Como já mostrado na Tab. 5.5, o número de Strouhal  $St$ , que é a frequência de desprendimento de vórtices adimensionalizada, nos dois casos tem diferença de apenas 0,15%, o que indica que a distância entre um vórtice e outro tem pouca diferença na comparação entre geometrias. O formato das regiões com maior intensidade de  $\omega_x$  também apresenta grande similaridade.

Embora não tenha sido possível efetuar o estudo para valores de  $\alpha$  menores, é muito provável que em situações que o escoamento não descole, a geometria do fólio passe a ser de profunda relevância na avaliação dos modos instáveis. É de se esperar que não haja muita diferença entre os modos na comparação com  $\alpha$  elevado, pois o escoamento se descola e o fólio se comporta como uma placa plana na mesma situação. O arqueamento e a espessura pouco influenciam após a transição secundária porque as linhas de corrente não acompanham a geometria do corpo, e os parâmetros principais para avaliação dos modos passam a ser a corda do fólio e seu ângulo de ataque, além do ponto de separação.



(a)



(b)

Figura 5.14: Comparação entre os modos instáveis para duas geometrias de fólios.  $Re = 500$ ,  $\alpha = 20^\circ$ ,  $\beta = 11$ . Contornos de  $\omega_x$ . As linhas contínuas e tracejadas representam iso-linhas positivas e negativas de  $\omega_z$ , respectivamente. (a) NACA 0012. (b) AGARD AR-303.

## 5.4.2 NACA 0012 e cilindro

Embora o cilindro e o aerofólio sejam geometrias diferentes em sua essência, buscou-se uma comparação entre elas de modo a verificar se na condição de estol, na qual o fólho se comporta como um corpo rombudo, existe uma similaridade na transição secundária da esteira.

Nessa comparação, não se pode usar a corda  $c$  do aerofólio como parâmetro característico de comprimento para o número de Reynolds, Strouhal ou para o comprimento característico das perturbações. No cilindro, esse parâmetro é o diâmetro  $D$ , que em primeira aproximação

indica bem a largura  $w$  da esteira que se forma a jusante. Para o fólio, a largura da esteira pode ser aproximada por  $w = c \sin \alpha$ . Se considerarmos para o fólio os números de Reynolds na transição e Strouhal do campo base escalados com o tamanho da esteira ( $Re_w = Re \sin \alpha$  e  $St_w = St \sin \alpha$ ), e compararmos com o cilindro, temos os resultados mostrados na Tab. 5.6.

Tabela 5.6: Comparação dos  $Re_w$  e  $St_w$  críticos e de  $\lambda$  dos modos de Floquet para cilindro circular fixo e fólio.

Caso	$Re_w$	$St_w$	$\lambda$	Característica do modo
<b>Cilindro, modo A</b> <sup>1</sup>	188	0,20	$4D$	Mantém simetria espaço temporal
<b>Cilindro, modo B</b> <sup>1</sup>	259	0,21	$0,8D$	Quebra simetria espaço temporal
<b>Cilindro, modo QP</b> <sup>2</sup>	377	0,21	$1,7D$	Quase-periódico
<b>NACA 0012, <math>\alpha = 20^\circ</math></b>	156	0,18	$0,6c$	Subharmônico
<b>NACA 0012, <math>\alpha = 20^\circ</math></b>	199	0,19	$2,1c$	Quase-periódico

<sup>1</sup>(BARKLEY; HENDERSON, 1996)

<sup>2</sup>(BLACKBURN; MARQUES; LOPEZ, 2005)

A análise dos resultados mostra que a frequência de oscilação do campo base tem uma boa correlação com o tamanho da esteira. Já os valores de Reynolds da transição estão numa faixa bem próxima na ordem de 200. Apesar disso, os modos em si diferem em suas características básicas. Além dos modos para o fólio não se assemelharem aos modos A e B em suas características de simetria espaço-temporal, os seus comprimentos característicos também diferem. O modo A apresenta  $\lambda = 4D$  e aparece antes do modo B, que tem o comprimento menor  $\lambda = 0,8D$ . Já para o fólio em estol, o primeiro modo instável - subharmônico - surge com  $\lambda = 0,57c$ , muito menor que o segundo modo instável, quase-periódico, com  $\lambda = 2,09c$ .

As principais diferenças observadas na transição se devem principalmente à ausência de simetria na esteira do fólio, o que possibilita o surgimento de outros modos. Segundo Marques, Lopez e Blackburn (2004), para sistemas que apresentam simetria do tipo  $\mathcal{H}$ , como o cilindro, apenas os modos A, B e quase-periódico são possíveis. Deste modo, é a assimetria gerada pelo ângulo de ataque do fólio que permite o aparecimento de um modo subharmônico.

## 6 CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS

Os resultados presentes mostram que a transição na esteira para o aerofólio em configuração de estol é diferente do caso do cilindro fixo, a começar pela assimetria da geometria, mesmo que ambas apresentem desprendimento de vórtices.

No NACA 0012, para ângulos de ataque  $\alpha$  iguais a  $5^\circ$  e  $10^\circ$  não foi possível efetuar a análise de estabilidade de Floquet, pois para os valores de  $Re$  nos quais a bifurcação deveria ocorrer o escoamento base não se mostrou periódico devido ao surgimento de pequenas flutuações, que podem ser devidas às escalas turbulentas que aparecem para esses valores de Reynolds. Outros métodos de análise de estabilidade devem ser utilizados para estudar esses casos. Já para  $\alpha = 20^\circ$  a transição secundária foi estudada tanto pela análise de Floquet quanto por análises não-lineares.

O primeiro modo instável para  $\alpha = 20^\circ$  é subharmônico, surge para  $Re = 456$ , tem origem na região próxima a esteira e é mais intenso nos *braids*. Esse modo apresenta nenhuma semelhança com os modos A e B descritos por (BARKLEY; HENDERSON, 1996) para o cilindro circular fixo, mas divide a característica de dobrar o período com o modo C encontrado por Carmo et al. (2008) no escoamento ao redor de dois cilindros circulares desalinhados. Por meio de análises não-lineares, verificou-se que esse modo é supercrítico, ou seja, não apresenta características de histerese na transição, e sua evolução temporal pode ser muito bem aproximada usando a equação de Landau de terceira ordem. Além disso, a taxa de crescimento da amplitude encontrada usando a teoria de Floquet é a mesma que a da análise não-linear, o que mostra a validade da análise linear, pelo menos na determinação das características básicas dos modos e do valor de  $Re$  crítico.

O segundo modo instável encontrado na análise de Floquet é quase-periódico e surge para  $Re = 582$ . Ele se assemelha ao modo subharmônico por se originar na região próxima à esteira e ser mais intenso nos *braids*. No escoamento ao redor de cilindros circulares fixos, um modo com características similares aparece para  $Re$  mais elevados que os valores críticos dos modos A e B, como visto em Blackburn, Marques e Lopez (2005).

Um resultado importante encontrado utilizando a análise não linear foi que o modo quase-periódico não consegue se desenvolver no escoamento, mesmo para valores de  $Re$  maiores que 582. Isso ocorre devido à competição com o modo subharmônico, de comprimento característico menor, cuja amplitude cresce exatamente quando o outro modo decai. Isso ocorre pelo acoplamento entre os modos e pela cascata de energia, segundo a qual a energia se transfere no escoamento das maiores para as menores escalas.

Enquanto os modos A e B do cilindro possuem o mesmo período do campo base bidimensional, os modos instáveis encontrados para o fôlio apresentam o período igual ao dobro do campo base (subharmônico) ou com uma frequência desacoplada (quase-periódico). É a quebra de simetria da esteira provocada pelo ângulo de ataque que é responsável pelo surgimento desses modos. No entanto, quando adimensionalizamos os números de Reynolds e Strouhal pela largura da esteira, obtemos que a transição ocorre para valores de  $Re_w$  numa mesma ordem de grandeza e que  $St_w$  assume um valor praticamente igual na bifurcação.

Uma comparação com outra geometria de aerofólio, AGARD AR-303, também foi efetuada e verificou-se que, embora os valores de  $Re$  críticos da transição sejam diferentes, a topologia do primeiro modo instável se assemelha para ambos os casos. Isso indica que após o descolamento que ocorre no estol, o formato do fôlio não é tão importante para determinar as características das perturbações que permanecem no escoamento, sendo os parâmetros importantes o ponto de descolamento e o ângulo de ataque, além do próprio número de Reynolds.

## 6.1 Futuros desenvolvimentos

O crescimento da capacidade de computação dos processadores modernos abre cada vez mais portas para o estudo da estabilidade de escoamentos, possibilitando o tratamento de problemas de ordens de grandeza elevadas e geometrias mais complexas.

Embora a teoria de estabilidade de Floquet seja uma ferramenta poderosa na análise de estabilidade de escoamentos periódicos e estacionários, suas limitações incluem a necessidade de assumir uma direção homogênea no escoamento, o que nem sempre representa a realidade, e o tratamento das equações linearizadas de Navier-Stokes, o que caracteriza apenas o comportamento assintótico do sistema.

Próximos trabalhos nessa área devem se preocupar principalmente no estudo da estabilidade secundária da esteira de fôlios com ângulos de ataque mais baixos. Para isso, novas técnicas que não dependam da periodicidade do campo base devem ser estudadas e implementadas. Um caminho promissor é usar a metodologia empregada em Bagheri et al. (2009), que

efetua uma análise de estabilidade global usando simulações tridimensionais para caracterização de modos instáveis. Além disso, estudos de estabilidade para valores mais elevados de Reynolds podem ajudar em aplicações como aeroacústica, determinando comprimentos característicos que serviriam como ponto de partida para estudo de perturbações de pressão na escala do som audível.

## REFERÊNCIAS

- ABDESSEMED, N. *Stability analysis of the flow past a low-pressure turbine blade*. Tese (Doutorado) — Imperial College of Science, Technology and Medicine, 2007.
- ANDERSON, J. D. *Fundamentals of aerodynamics*. 2nd. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, 1991.
- ANDREOU, C.; GRAHAM, W.; SHIN, H. C. Aeroacoustic study of airfoil leading edge high-lift devices. In: *12th AIAA/CEA8 Aeroacoustics Conference (27th AIAA Aeroacoustics Conference)*. [S.l.: s.n.], 2006.
- BAGHERI, S. et al. Global stability of a jet in crossflow. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 624, p. 33–44, 2009.
- BARKLEY, D.; HENDERSON, R. D. Three-dimensional Floquet stability analysis of the wake of a circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 322, p. 215–241, 1996.
- BLACKBURN, H. M.; MARQUES, F.; LOPEZ, J. M. Symmetry breaking of two-dimensional time-periodic wakes. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 522, p. 395–411, 2005.
- CARMO, B. S. *Estudo numérico do escoamento ao redor de cilindros alinhados*. Dissertação (Mestrado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2005.
- CARMO, B. S. et al. Wake transition in the flow around two circular cylinders in staggered arrangements. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 597, p. 1–29, 2008.
- GIORIA, R. S. *Guia para Nektar e código para análise de Floquet*. 2008. Comunicação particular.
- GIORIA, R. S. et al. Floquet stability analysis of the flow around an oscillating cylinder. *Journal of Fluid and Structures*, v. 25, p. 676–686, 2009.
- HAMMACHE, M.; GHARIB, M. An experimental study of the parallel and oblique vortex shedding from circular cylinders. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 232, p. 567–590, 1991.
- HENDERSON, R. D. Nonlinear dynamics and pattern formation in turbulent wake transition. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 352, p. 65–112, 1997.
- IOOSS, G.; JOSEPH, D. D. *Elementary stability and bifurcation theory*. 2nd. ed. [S.l.]: Springer-Verlag, 1990.
- KARNIADAKIS, G. E.; SHERWIN, S. J. *Spectral/hp element methods for computational fluid dynamics*. 2nd. ed. [S.l.]: Oxford University Press, 1999.
- KIRBY, R. M.; KARNIADAKIS, G. E. De-aliasing on non-uniform grids: algorithms and applications. *Journal of Computational Physics*, v. 191, p. 249–264, 2003.

LOMTEV, I.; KARNIADAKIS, G. E. A discontinuous Galerkin method for the Navier-Stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 29, p. 587–603, 1999.

MARQUES, F.; LOPEZ, J. M.; BLACKBURN, H. M. Bifurcations in systems with  $Z_2$  spatiotemporal and  $O(2)$  spatial symmetry. *Physica D*, v. 189, p. 247–276, 2004.

MOIR, I. R. M. *Measurements on a two-dimensional airfoil with high-lift devices*. [S.l.], 2004.

MUNSON, B. R.; YOUNG, D. F.; OKIISHI, T. H. *Fundamentos da mecânica dos fluidos*. [S.l.]: Edgar Blücher, 2004.

SHEARD, G. J.; THOMPSON, M. C.; HOURIGAN, K. From spheres to circular cylinders: the stability and flow structures of bluff ring wakes. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 492, p. 147–180, 2003.

SHEARD, G. J.; THOMPSON, M. C.; HOURIGAN, K. From spheres to circular cylinders: non-axisymmetric transitions in the flow past rings. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 506, p. 45–78, 2004.

STOEVE SANDT, B. et al. Direct numerical simulation of the turbulent flow around an airfoil using spectral/hp method. In: *European Conference on Computational Fluid Dynamics*. [S.l.: s.n.], 2006.

THEOFILIS, V.; SHERWIN, S. J. Global instabilities in trailing-edge laminar separated flow on a NACA 0012 airfoil. In: *International Symposium on Air Breathing Engines (ISABE)*. [S.l.: s.n.], 2001.

WHITE, F. M. *Mecânica dos fluidos*. 4th. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, 2002.

WILLIAMSON, C. H. K. The existence of two stages in the transition to three-dimensionality of a cylinder wake. *Physics of Fluids*, v. 31, n. 11, p. 3165–3168, 1988.

WILLIAMSON, C. H. K. Oblique and parallel modes of vortex shedding in the wake of a circular cylinder at low Reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 206, p. 579–627, 1989.

## **APÊNDICE A - ARTIGO PARA COBEM 2009**

# FLOQUET STABILITY ANALYSIS OF THE FLOW AROUND AN AIRFOIL

**Stergios Pericles Tsiloufas, stergios.tsiloufas@poli.usp.br**

**Rafael dos Santos Gioria, rafael.gioria@poli.usp.br**

**Julio R. Meneghini, jmeneg@usp.br**

NDF, Department of Mechanical Engineering, Polytechnic School, University of São Paulo, Brazil

**Bruno S. Carmo, b.carmo@ic.ac.uk**

Department of Aeronautics, Imperial College, London, UK

**Abstract.** *This work is concerned with the three-dimensional instabilities of the flow around an airfoil profile in stalled configuration. The goal is to investigate how the flow becomes unstable in the wake, studying the influence of the Reynolds number based on the chord ( $Re$ ) and the angle of attack ( $\alpha$ ). For each  $Re$  and  $\alpha$ , the stability analysis of the two-dimensional flow is carried out with respect to three-dimensional infinitesimal perturbations, using the Floquet stability theory. The time-periodic base flow is computed with the spectral/hp element method. The results are the modulus of the Floquet multiplier versus the wavelength of the perturbation, showing the characteristic spanwise length of the three-dimensionality. It is possible to use these results in order to perform quasi-three-dimensional simulations of the flow past uniform wings, with great computational time saving and low resolution loss on the physics of the phenomena.*

**Keywords:** *Secondary wake transition, Floquet analysis, stalled airfoil*

## 1. INTRODUCTION

Flow past airfoils has obvious importance in aerospace applications. Although numerous studies concerned with the influence of angle of attack, Reynolds number, Mach number and geometry in the lift coefficient can be found in literature, the same can not be said about stability analysis of the wake. The main objective of this work is to investigate the secondary transition of the flow around an airfoil profile, obtaining the critical values of  $Re$  for which the wake becomes three-dimensional. The methodology used is the Floquet stability analysis of a base flow calculated using the spectral/hp elements method.

Barkley and Henderson (1996) used the Floquet theory to study the transition for the fixed circular cylinder and found two unstable modes. Mode A does not present a break in the spatio-temporal symmetry, has a characteristic length of 4 diameters and first occurs for  $Re = 188$ . Mode B presents a break in the spatio-temporal symmetry, has characteristic length of 0.8 diameters and first occurs for  $Re = 259$ .

Theofilis and Sherwin (2001) performed a stability analysis of the flow past a NACA 0012 airfoil profile. Main parameters are  $Re = 1000$  and  $\alpha = 5^\circ$ . The concern was the separation bubble formed on the trailing-edge, not the transition in the wake.

Abdessemed (2007) deals with the stability analysis of the flow past a low pressure turbine blade. Primary instabilities of the wake occurs for  $Re = 905$  and secondary instabilities were found to be indifferent to parameter change. It brings the question if it is possible to compare bluff geometries with aerodynamic ones.

Carmo et al. (2008) performed a similar study for two circular cylinders of diameter  $D$  in staggered arrangements with fixed streamwise separation of  $5D$  and cross-stream separation varying from  $0$  to  $3D$ . The influence of the second cylinder causes the vortex shedding pattern to be changed, and the flow presents unstable modes different from the single fixed cylinder geometry. Subharmonic modes can be noticed in the secondary transition of the wake.

This work is organized as follows. Section 2 shows a brief overview on the methods used in this paper. In Sec. 3, the convergence test performed is presented, along with the resulting two-dimensional mesh. Both aerodynamic and stability results are shown in Sec. 4, and the conclusions can be found in Sec. 5.

## 2. METHODOLOGY

### 2.1 Direct numerical simulations

We consider the flow of a viscous fluid past a NACA 0012 airfoil profile. The fluid is assumed to have constant dynamic viscosity  $\mu$  and specific mass  $\rho$ . The incompressible flow depends on three parameters: the airfoil chord  $c$ , the free stream-velocity  $U$  and the kinematics viscosity  $\nu = \mu/\rho$ , so the control parameter of the problem can be taken as the Reynolds number based on chord  $Re = cU/\nu$ . For any instant  $t$ , the fluid state is determined by the velocity field  $\mathbf{u}(x, y, z, t)$  and the pressure field  $p(x, y, z, t)$ . Using  $U$  and  $c$  as reference values for velocity and length, we can write

the non-dimensional Navier-Stokes equations that govern the problem.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

Karniadakis and Sherwin (1999) describes the spectral/hp elements method, which is used to solve numerically the incompressible Navier-Stokes equations.

## 2.2 Floquet stability theory

In stability analysis, the flow is considered as a combination of a base field  $\mathbf{U}(x, y, t)$  and a three-dimensional perturbation  $\mathbf{u}'(x, y, z, t)$ , with  $\mathcal{O}(\mathbf{u}') \ll \mathcal{O}(\mathbf{U})$ . Hence, we can linearize the Navier-Stokes equation, obtaining:

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} = -(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u}' - (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{U} - \nabla p' + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{u}' \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0 \quad (4)$$

where  $p'$  is the pressure perturbation. The inlet boundary condition for the perturbation is  $\mathbf{u}' = 0$ . Floquet theory deals with the stability of T-periodic base flow, and a more complete description of the method can be found in Iooss and Joseph (1990). The T-periodic, function of  $\mathbf{U}$ , linear operator  $\mathbf{L}$  is mounted, and it evolves the perturbation from a instant  $t$  to the instant  $t + T$ . Therefore, we can understand the Eq. (3) as the eigen-problem shown in Eq. (5), restricted by the Eq. (4).

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} = \mathbf{L}(\mathbf{u}') \quad (5)$$

The eigenvalues of the operator  $\mathbf{L}$  are the so called Floquet exponents  $\sigma$ . The T-periodic solutions of Eq. (5) are a composition of solutions  $\tilde{\mathbf{u}}(x, y, z, t) e^{\sigma t}$ . Normally the stability is evaluated with respect of the Floquet multiplier  $\mu \equiv e^{\sigma T}$ . If  $|\mu| < 1$ , then the perturbation is damped and asymptotically goes to zero; if  $|\mu| > 1$ , then the mode is unstable, and the perturbation grows in the flow.

Another simplification can be made: to assume the problem is homogenous in spanwise direction, so we can write the perturbation using the Fourier integral, as shown in Eq. (6).

$$\mathbf{u}'(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{u}}(x, y, t) e^{i\beta z} d\beta \quad (6)$$

As modes with different wavenumbers  $\beta = 2\pi/\lambda$  do not couple and the base flow  $\mathbf{U}$  is two-dimensional, perturbations of the form

$$\mathbf{u}'(x, y, z, t) = (\hat{\mathbf{u}} \cos \beta z, \hat{\mathbf{v}} \cos \beta z, \hat{\mathbf{w}} \cos \beta z) \quad (7)$$

$$p'(x, y, z, t) = \hat{p} \cos \beta z \quad (8)$$

remain under the same form under the operator  $\mathbf{L}$ .

The velocity and pressure components of the perturbation are functions of  $x, y$  and  $t$ , so the three-dimensional problem becomes several two-dimensional stability problems, each one with a characteristic wavenumber  $\beta$ . The numeric code used to perform the Floquet analysis computes the eigenvalues of the matrix  $\mathbf{A}$  correspondent to the linear operator  $\mathbf{L}$  over one period:

$$\{\mathbf{u}'\}_{n+1} = [\mathbf{A}] \{\mathbf{u}'\}_n \quad (9)$$

The Arnoldi method is used to evaluate the eigenvalues, computed in the Krylov space, set with dimension 20 in all cases of this work. The use of the Krylov space reduces the order of the matrix  $\mathbf{A}$  without a significant change of the largest Floquet multiplier, which is the one that determines the stability of the system.

The concern of this work relies on the peaks of the curve  $|\mu| \times \beta$ , which are the most unstable modes, the ones that rule the growing of the perturbations of the linearized system. We are interested in the secondary transition of the wake, i.e. the Reynolds number for which the flow becomes three-dimensional.

Table 1. Influence of basis function order.

Basis function order	$\overline{C}_L$	$C'_L$	$\overline{C}_D$	$C'_D$	St
<b>8th order</b>	0.9230	0.9276	0.4115	0.4117	0.546
<b>9th order</b>	0.9231	0.9276	0.4115	0.4117	0.549
<b>10th order</b>	0.9231	0.9276	0.4115	0.4117	0.551

Table 2. Influence of the outflow boundary position.

Downstream length	$\overline{C}_L$	$C'_L$	$\overline{C}_D$	$C'_D$	St
11 <i>c</i>	0.9208	0.9253	0.4107	0.4109	0.551
15 <i>c</i>	0.9230	0.9275	0.4114	0.4116	0.551
20 <i>c</i>	0.9231	0.9276	0.4115	0.4117	0.549
25 <i>c</i>	0.9235	0.9280	0.4116	0.4118	0.549
30 <i>c</i>	0.9235	0.9280	0.4116	0.4118	0.549

Table 3. Influence of the velocity inlet boundary position on each lateral.

Lateral length	$\overline{C}_L$	$C'_L$	$\overline{C}_D$	$C'_D$	St
10 <i>c</i>	0.9231	0.9276	0.4115	0.4117	0.549
15 <i>c</i>	0.9183	0.9227	0.4099	0.4101	0.549
20 <i>c</i>	0.9148	0.9191	0.4085	0.4087	0.549
25 <i>c</i>	0.9132	0.9175	0.4082	0.4084	0.549
30 <i>c</i>	0.9116	0.9159	0.4075	0.4077	0.549
35 <i>c</i>	0.9109	0.9152	0.4072	0.4075	0.550
40 <i>c</i>	0.9105	0.9148	0.4071	0.4073	0.552
45 <i>c</i>	0.9102	0.9145	0.4070	0.4072	0.552
50 <i>c</i>	0.9100	0.9143	0.4069	0.4072	0.552

### 3. CONVERGENCE TEST

A convergence test was performed for reliability of the results and in order to optimize the mesh for two-dimensional aerodynamic calculations. The case studied in this work is the flow around the NACA 0012 airfoil. The methodology used is based on Carmo et al. (2008). The parameters tested were the extension of the computational domain, varying the length downstream and on each side, and the order of the basis function. It was used the mean and RMS values of the lift and drag coefficients,  $\overline{C}_L$ ,  $C'_L$ ,  $\overline{C}_D$ ,  $C'_D$ , and the Strouhal number based on chord  $St = f c/U$  as reference values. The St was computed using a FFT of the temporal  $C_L$  signal. Results are shown in Tab. 1, Tab. 2 and Tab. 3.

The resulting mesh has extension of 10*c* upstream, 30*c* downstream and 50*c* on each side, with nearly 950 quadrilateral cells and a ninth-degree polynomial used as basis function. Figure 1 shows the computational grid. A unitary velocity condition was applied in the upstream and both lateral boundaries. Outflow condition was applied in the downstream boundary, i.e. sets all normal derivatives as zero. The airfoil is assumed to have a finite trailing-edge thickness of 0.005*c* and its boundary condition is set as viscous wall, satisfying non-slip condition.

## 4. RESULTS

### 4.1 Base flow calculations

In order to obtain a two-dimensional periodic base flow, the flow around the NACA 0012 airfoil profile with an angle of attack  $\alpha = 20^\circ$  was investigated. This high value of  $\alpha$  causes the flow to detach and vortex shedding occurs, which is a classic periodic phenomenon. In aeronautics, this condition is referred to as stall, and in flight conditions it is not desirable, since there is an abrupt drop of lift.

In the present study, the range of Reynolds number investigated varied from 400 to 550. The time step was taken as  $\Delta t = 0.0002$  time units in order to reduce the Courant-Friedrich-Lewis number (CFL) to values below 1, granting the convergence of the result. The aerodynamic results for each Re are shown in Tab. 4.

The base flow must be periodic, otherwise it is impossible to perform the Floquet stability analysis. We can see if this condition is accomplished by looking at the temporal signal of the lift coefficient and the contours of z component of

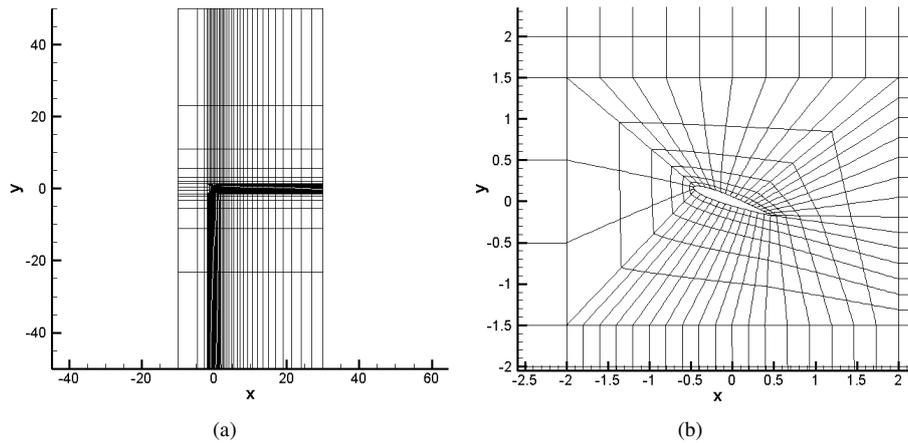


Figure 1. NACA 0012 grid,  $\alpha = 20^\circ$ . (a) Computational domain. (b) Near airfoil detail.

Table 4. Aerodynamic results. NACA 0012,  $\alpha = 20^\circ$ .

Re	$\overline{C}_L$	$\overline{C}'_L$	$\overline{C}_D$	$\overline{C}'_D$	St
400	0.7414	0.7444	0.4051	0.4052	0.5034
450	0.7633	0.7677	0.4083	0.4085	0.5210
460	0.7670	0.7718	0.4091	0.4092	0.5286
470	0.7714	0.7764	0.4100	0.4101	0.5286
500	0.7836	0.7897	0.4128	0.4230	0.5286
550	0.8042	0.8117	0.4181	0.4183	0.5382

vorticity  $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$ , both shown in Fig. 2.

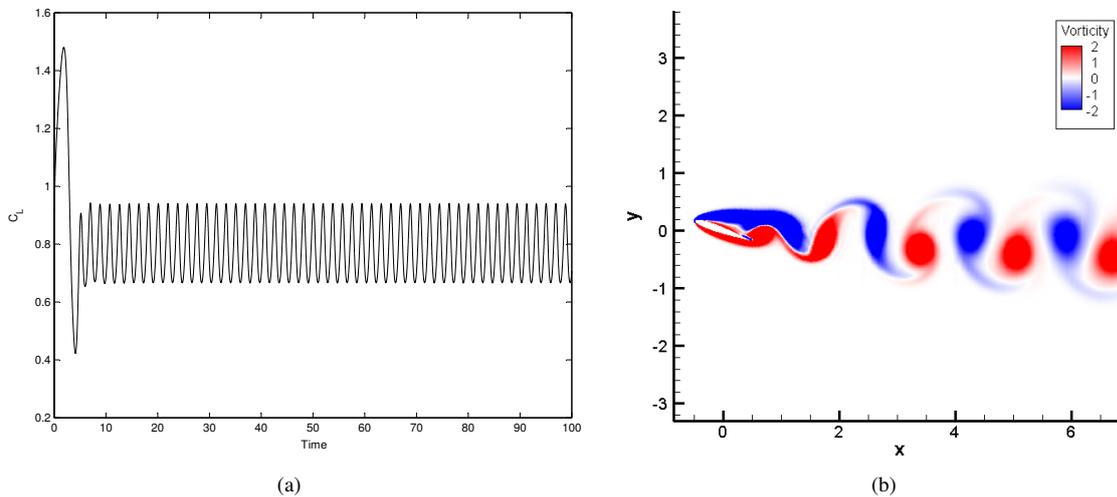


Figure 2. NACA 0012,  $Re = 500$ ,  $\alpha = 20^\circ$ . (a) Temporal  $C_L$  signal. (b) Instant contours of  $\omega_z$ .

The vortex shedding pattern is the same for other  $Re$  values. Given the periodicity of the base flow, we can proceed to the application of Floquet stability analysis in this problem.

#### 4.2 Stability analysis

In stability analysis, a three-dimensional perturbation is evolved during a period of the base flow, and the growing rate of the mode is defined by the eigenvalues of the of the linear operator  $\mathbf{L}$ , which takes the perturbation along one period as seen in Sec. 2.2.

The study consists in finding the modulus of the Floquet multipliers ( $|\mu|$ ) for each value of the wavenumber  $\beta = 2\pi/\lambda$ .

$|\mu| > 1$  determines an unstable mode. The results, for each Reynolds number studied, are shown in Fig. 3(a), in addition to the neutral stability curve.

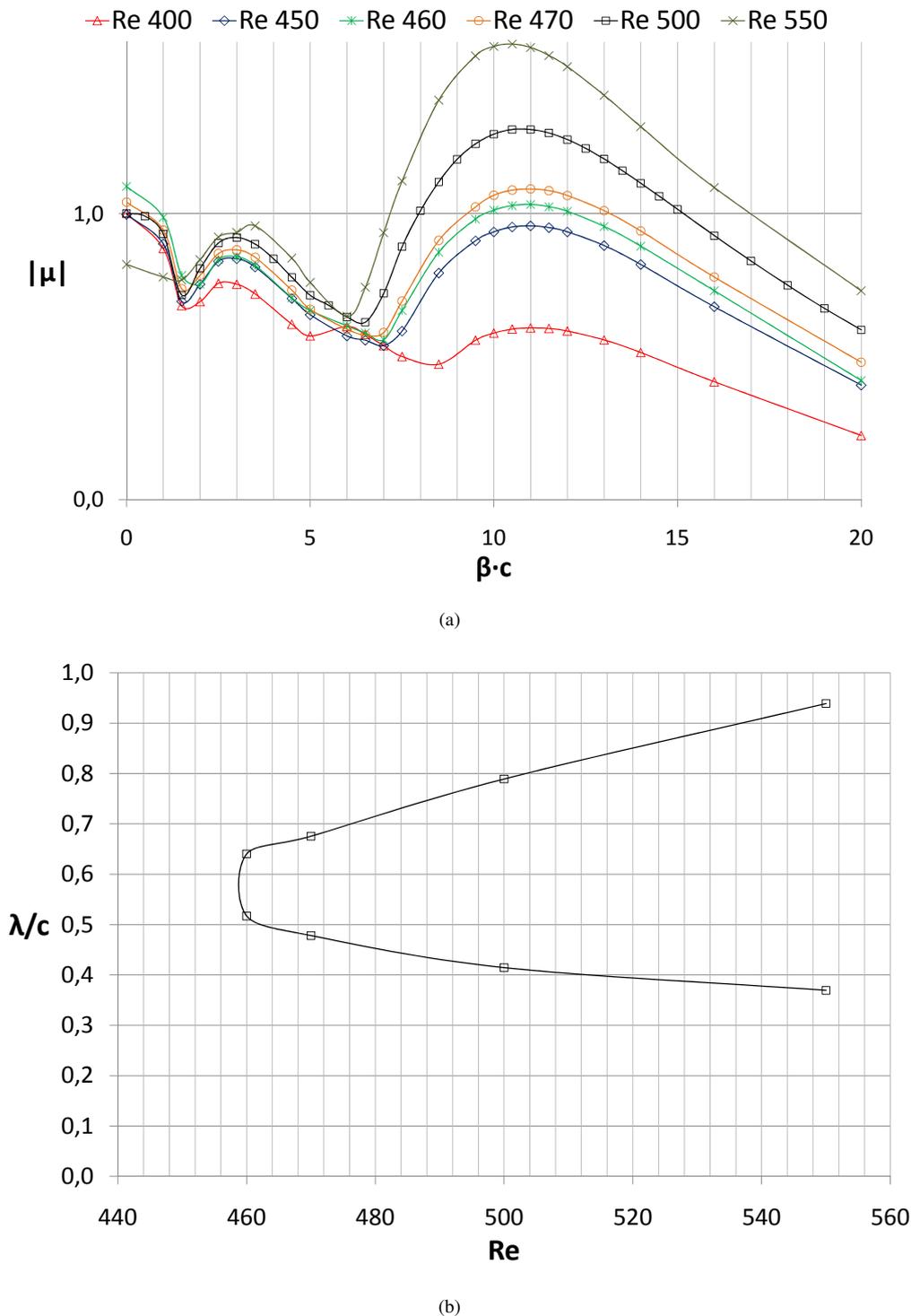


Figure 3. NACA 0012,  $\alpha = 20^\circ$ . (a) Floquet multipliers spectrum. (b) Neutral stability curve.

An unstable mode that appears with  $Re \approx 460$ , with characteristic wavenumber  $\beta \approx 11$  (wavelength  $\lambda \approx 0.57c$ ). Another peak is found at  $\beta \approx 3$ , and this mode should become unstable for higher values of  $Re$ . It is possible to reconstruct the three-dimensional flow using the base flow and the perturbations, as shown in Fig. 4, in order to get more information of the unstable mode structure. We can notice that the three-dimensional mode is originated in the near wake region, and is stronger in the vortices braids. It has period  $2T$ , where  $T$  is the period of the base flow, which indicates a subharmonic mode:

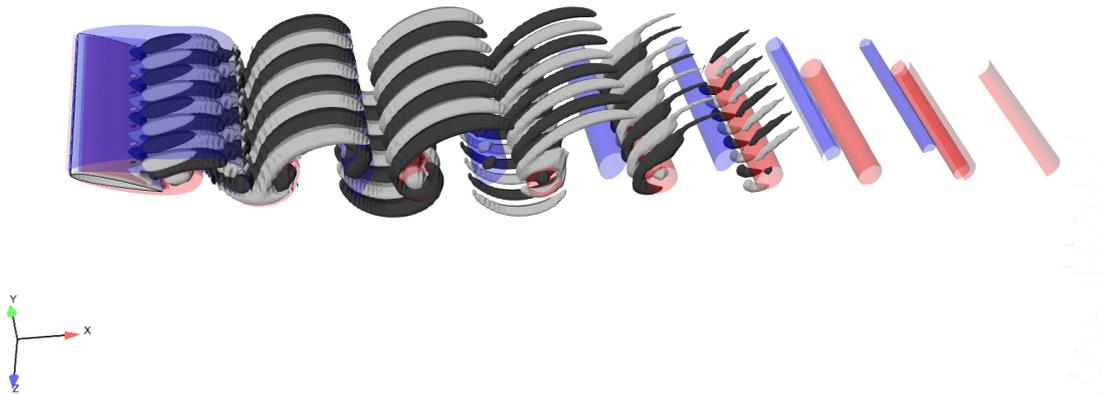


Figure 4. Reconstructed three-dimensional flow. Translucent surfaces are iso-surfaces of  $\omega_z$ . Solid dark and light surfaces are iso-surfaces of  $\omega_x$ . NACA 0012,  $Re = 500$ ,  $\alpha = 20^\circ$ ,  $\beta = 11$ .

$$\omega_x(x, y, z, t) = \omega_x(x, y, z, t + 2T) \quad (10)$$

Mathematically, this characteristic is the result of real negative Floquet multipliers. Complex multipliers, as the ones found in the mode with  $\beta \approx 3$ , give rise to quasi-periodic modes, i.e. the three-dimensional mode has a different period than the base flow.

## 5. CONCLUSIONS AND PERSPECTIVES

The results presented show that the wake transition in the flow past an airfoil in stalled configuration is quite different from that on the circular cylinder case, beginning with the asymmetry of the geometry, even though both present a strong vortex shedding pattern. The unstable mode found is sub-harmonic, originated in near wake region and stronger in the vortices braids, regarding no semblances with modes A or B described in Barkley and Henderson (1996).

Further works intend to study the influence of the angle of attack  $\alpha$  in the secondary transition of the wake. There is a motivation in verifying if, with lower values of  $\alpha$ , the behavior of the instabilities can be compared with bluff geometries, such as the circular cylinder.

Since Floquet theory deals with a linearized problem, a non-linear analysis is required, in order to evaluate the final amplitude of the perturbations remaining in the flow. Also, complete three-dimensional direct numerical simulations will be performed in order to validate the method.

## 6. ACKNOWLEDGEMENTS

We would like to acknowledge the financial support provided by Fapesp, CNPq, and Embraer. The authors also would like to acknowledge Prof. S. Sherwin for his assistance with the spectral/hp element method and the Floquet stability analysis. All the computing resources were provided by NDF - University of São Paulo.

## 7. REFERENCES

- Abdessemed, N., 2007, "Stability analysis of the flow past a low-pressure turbine blade", Ph.D. thesis, Imperial College of Science, Technology and Medicine.
- Barkley, D., Henderson, R. D., 1996, "Three-dimensional Floquet stability analysis of the wake of a circular cylinder", *Journal of Fluid Mechanics* 322, 215–241.
- Carmo, B. S., Sherwin, S. J., Bearman, P. W., Willden, R. H. J., 2008, "Wake transition in the flow around two circular cylinders in staggered arrangements", *Journal of Fluid Mechanics* 597, 1–29.
- Iooss, G., Joseph, D. D., 1990, "Elementary stability and bifurcation theory", 2nd Edition, Springer-Verlag.
- Karniadakis, G. E., Sherwin, S. J., 1999, "Spectral/hp element methods for computational fluid dynamics", 2nd Edition, Oxford University Press.
- Theofilis, V., Sherwin, S. J., 2001, "Global instabilities in trailing-edge laminar separated flow on a naca 0012 airfoil", In: *International Symposium on Air Breathing Engines (ISABE)*.

## 8. Responsibility notice

The author(s) is (are) the only responsible for the printed material included in this paper