

SOFTWARE DE SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTOS EXTERNOS USANDO O MÉTODO LATTICE BOLTZMANN

Kleber Carrapatoso Nascimento Junior
kleber.carrapatoso@gmail.com

Resumo. Este trabalho de formatura se insere no contexto da dinâmica dos fluidos computacionais. Desenvolve-se um software de simulação para escoamentos externos ao redor de cilindros circulares para escoamentos com número de Reynolds entre 100 e 200. Para isso, utiliza-se a linguagem de programação C++ e o método Lattice Boltzmann, que é um método numérico alternativo para a simulação de escoamentos. Enfim, compara-se valores obtidos com o software do coeficiente de arrasto e do número de Strouhal com resultados experimentais relatados na literatura.

Palavras chave: *dinâmica dos fluidos computacional, método Lattice Boltzmann.*

1. Introdução

O método Lattice Boltzmann foi desenvolvido recentemente como um método numérico alternativo para a simulação de escoamentos de fluidos. Diferentemente dos métodos numéricos tradicionais que são baseados na discretização das equações macroscópicas (continuidade e Navier-Stokes), o LBM (Lattice Boltzmann Method) é baseado em uma modelagem microscópica e em equações cinéticas mesoscópicas.

A idéia do LBM é construir modelos simplificados de uma forma que suas propriedades macroscópicas obedecem as equações da continuidade e de Navier-Stokes.

2. Objetivo

O objetivo deste trabalho é de fazer um estudo teórico preliminar do método Lattice Boltzmann e depois de desenvolver um software para a simulação de escoamentos externos ao redor de um cilindro circular. Será considerado um escoamento um escoamento bi-dimensional e incompressível.

3. Metodologia

Para a realização deste projeto, será utilizada a linguagem de programação C++ junto com o método Lattice Boltzmann, que será apresentado a seguir.

Primeiramente, apresentaremos a equação Lattice Boltzmann, conhecida como LBE (*Lattice Boltzmann Equation*), que é a base deste método e em seguida mostraremos a relação das variáveis microscópicas com as macroscópicas. Em seguida, será apresentada a condição inicial. Após apresentaremos diferentes condições de contorno e, para concluir, mostraremos o algoritmo usado no LBM (*Lattice Boltzmann Method*).

3.1. Equação Lattice Boltzmann

Nesta subseção será apresentada a equação Lattice Boltzmann, que determina a evolução temporal das funções de distribuição de velocidade, assim como obter as variáveis macroscópicas a partir das microscópicas.

Seja $f_i(x, t) = f(x, e_i, t)$ a função de distribuição de velocidade das partículas com velocidades e_i , onde $x \in \mathbb{R}^d$ representa a variável de espaço, t o tempo e e_i as velocidades discretizadas (todas medidas no SI).

A equação LBM é dada por [Chen;Doolen(1998)]

$$f_i(x + e_i, t + 1) = f_i(x, t) + \Omega_i(f_i(x, t)) \quad (1)$$

onde Ω representa o operador de colisão. Este operador deve preservar a conservação de massa e momento, assim temos

$$\sum_i \Omega_i = 0, \quad \sum_i e_i \Omega_i = 0. \quad (2)$$

As variáveis macroscópicas do escoamento do fluido, densidade e densidade de momento, são obtidas a partir dos momentos de ordem 0 e 1, respectivamente, da função de distribuição f_i

$$\rho(x, t) = \sum_i f_i(x, t), \quad \rho(x, t)u(x, t) = \sum_i e_i f_i(x, t). \quad (3)$$

3.1.1 Operador BGK

Consideramos o operador de colisão como sendo o operador BGK [Sukop(2006)], que representa um tempo simples de relaxamento τ da função de distribuição à função de equilíbrio, dada por

$$\Omega_i = -\frac{1}{\tau}(f_i - f_i^{eq}). \quad (4)$$

Além disso, temos que a função de equilíbrio é [Sukop(2006)],

$$f_i^{eq} = \omega_i \rho \left[1 + 3e_i \cdot u + \frac{9}{2}(e_i \cdot u)^2 - \frac{3}{2}u^2 \right] \quad (5)$$

onde os diferentes pesos ω dependam do tipo de lattice usado (dimensão e quantidade de velocidades discretas).

A equação Lattice Boltzmann pode se dividir em duas etapas, transporte

$$\bar{f}_i(x + e_i, t + 1) = f_i(x, t) \quad (6)$$

e colisão

$$f_i(x, t) = \bar{f}_i(x, t) - \frac{1}{\tau}(\bar{f}_i(x, t) - f_i^{eq}(x, t)). \quad (7)$$

Pode-se mostrar que, com a hipótese de baixo número de Mach, podemos obter as equações da continuidade e de Navier-Stokes a partir da equação Lattice Boltzmann com operador BGK, com uma viscosidade cinemática

$$\nu = c_s^2 \left(\tau - \frac{1}{2} \right) \quad (8)$$

onde c_s é a velocidade do som.

Sendo assim, o método Lattice Boltzmann é válido para escoamentos com baixo número de Mach.

3.2 Definições do lattice

Definimos o tipo de lattice utilizado, mostrado na Fig. 1, assim como algumas propriedades básicas.

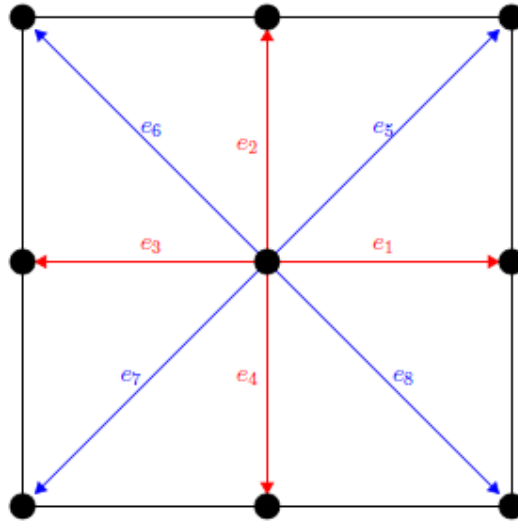


Figura 1. Lattice D2Q9

Dessa forma, obtemos as velocidades discretas, com $e_0 = (0,0)$. Além disso, temos para esse lattice os valores seguintes dos pesos ω da função de equilíbrio da Eq. (5): $\omega_0 = 4/9$, $\omega_i = 1/9$ para $i=1, 2, 3$ e 4 , $\omega_i = 1/36$ para $i=5, 6, 7$ e 8 .

3.3 Condição inicial

Como condição inicial, consideramos o fluido com uma densidade inicial ρ_0 , velocidade horizontal U_0 e velocidade vertical V_0 . Para implementar estas condições, inicializamos todas as funções de distribuição com os valores das funções de equilíbrio definidas na Eq. (5), assim temos

$$f_i(x, 0) = \omega_i \rho_0 \left[1 + 3e_i \cdot (U_0, V_0) + \frac{9}{2} (e_i \cdot (U_0, V_0))^2 - \frac{3}{2} (U_0, V_0)^2 \right]. \quad (9)$$

3.4 Condições de contorno

Apresentaremos diferentes condições de contorno possíveis, assim como a relação entre uma condição de contorno macroscópica e seus valores correspondentes para as variáveis microscópicas.

3.4.1 Entrada

Para simular a entrada do fluido com uma velocidade horizontal U_{in} , velocidade vertical nula e densidade ρ_{in} , utilizamos novamente a função de equilíbrio da Eq. (5), apenas para a primeira coluna do lattice. Assim temos

$$f_i(\bar{x}, t) = \omega_i \rho_{in} \left[1 + 3e_{i,x} U_{in} + \frac{9}{2} (e_{i,x} U_{in})^2 - \frac{3}{2} (U_{in})^2 \right] \quad (10)$$

onde $\bar{x} = (0, y)$ representa a primeira coluna.

3.4.2 Parede

Para simular a condição de contorno de parede utilizamos o esquema chamado *bounce back*. Este esquema, mostrado na Fig. 2, consiste em três etapas. Primeiro propaga-se normalmente as funções de distribuição f_i do nó vizinho a parede (cor branca na Fig. 2) para o nó dentro da parede (cor preta na Fig. 2), como na etapa de transporte. Depois, no passo de tempo seguinte, essas funções são invertidas da seguinte forma

$$\begin{aligned} f_1^{new} &= f_3^{old}, & f_2^{new} &= f_4^{old}, & f_3^{new} &= f_1^{old}, & f_4^{new} &= f_2^{old}, \\ f_5^{new} &= f_7^{old}, & f_6^{new} &= f_8^{old}, & f_7^{new} &= f_5^{old}, & f_8^{new} &= f_6^{old} \end{aligned} \quad (11)$$

e assim, aplicando novamente a etapa de transporte, as funções de distribuição voltam aos seus nós com a direção invertida.

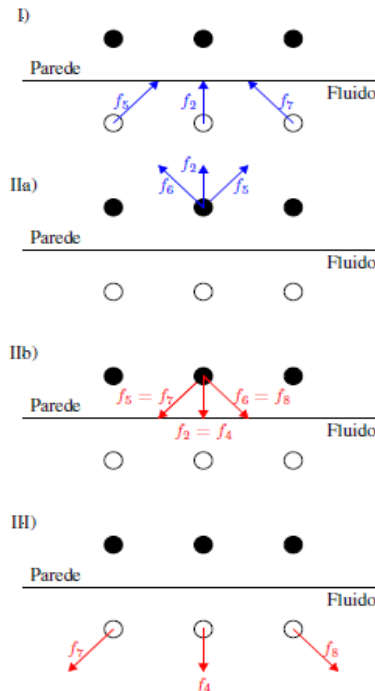


Figura 2. Esquema *bounce back*

3.4.3 Periódica

Podemos aplicar uma condição periódica para as bordas sul e norte do lattice. Essas bordas correspondem a $j = 0$ e $j = N_y$, onde N_y é o número de nós na direção vertical.

3.5 Algoritmo

Mostraremos a seguir como é algoritmo do programa.

1. Inicialização de dados
2. Inicialização da distribuição inicial
3. Laço tempo
 - cálculo das variáveis macroscópicas
 - etapa colisão
 - etapa transporte
 - condições de contorno

4. Resultados e análises

Apresentaremos nesta seção duas simulações realizadas, a primeira de um escoamento sobre placas planas e a segunda ao redor de um cilindro.

4.1. Escoamento sobre placas planas

Foi realizada uma simulação de um escoamento sobre duas placas planas, considerando uma entrada uniforme de velocidade horizontal U_0 e densidade ρ_0 .

Mostramos a seguir, nas Figs. 3, 4 e 5, os resultados obtidos.

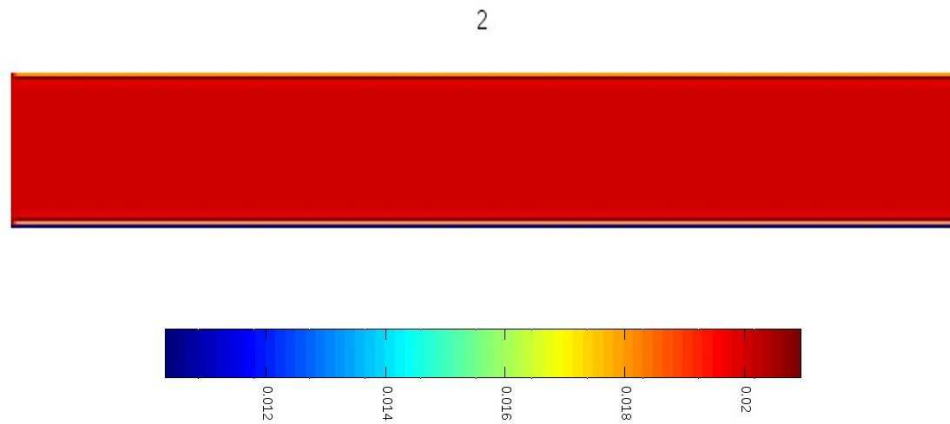


Figura 3. Escoamento sobre placas planas: $t=0.5s$. Gráfico da norma da velocidade

30

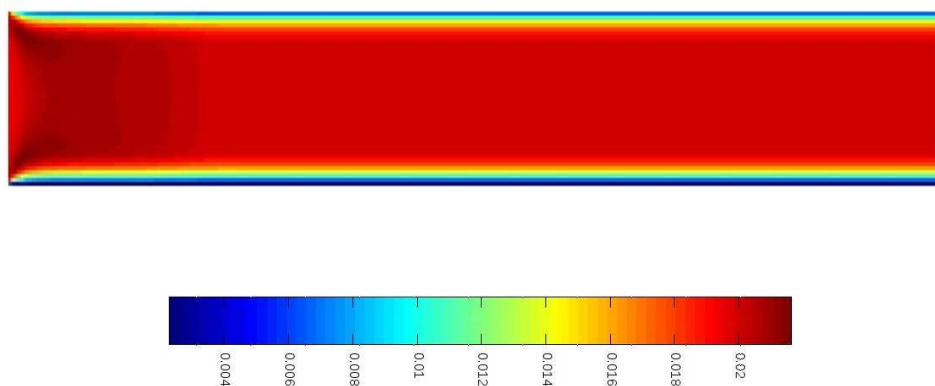


Figura 4. Escoamento sobre placas planas: $t=7.5s$. Gráfico da norma da velocidade

80

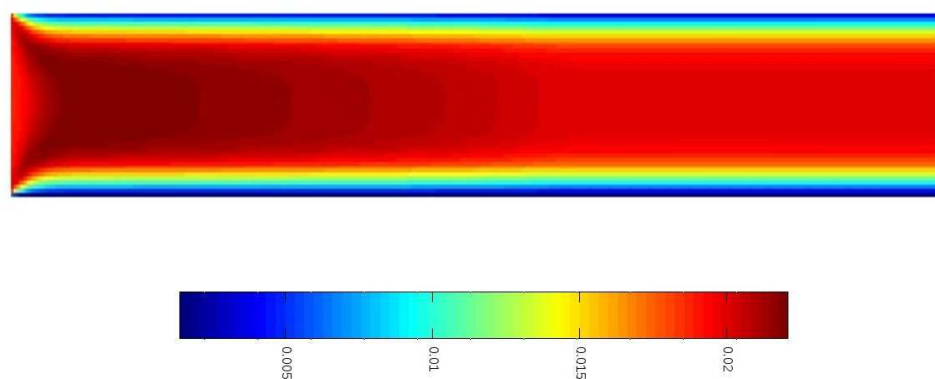


Figura 5. Escoamento sobre placas planas: $t=20s$. Gráfico da norma da velocidade

Percebe-se na Fig. 3, no começo do escoamento, um campo de velocidades quase uniforme, com menores velocidades perto das paredes.

Ao longo do tempo, esse perfil de velocidade muda, como vemos na Fig. 4, com um aumento gradativo da velocidade perto da parede ao centro do perfil.

Enfim, com a Fig. 5, vemos o desenvolvimento de uma camada limite sobre as duas placas planas, como esperado.

4.2. Escoamento ao redor de um cilindro

Foi realizada uma simulação ao redor do cilindro, com condição inicial com densidade ρ_0 e velocidade horizontal U_0 , esta condição também foi usada como entrada. Para as bordas norte e sul do domínio foi usada a condição de contorno periódica. Além disso, na borda do cilindro é usada a condição de parede.

Mostramos a seguir, nas Figs. 6, 7, 8 e 9, os resultados obtidos.

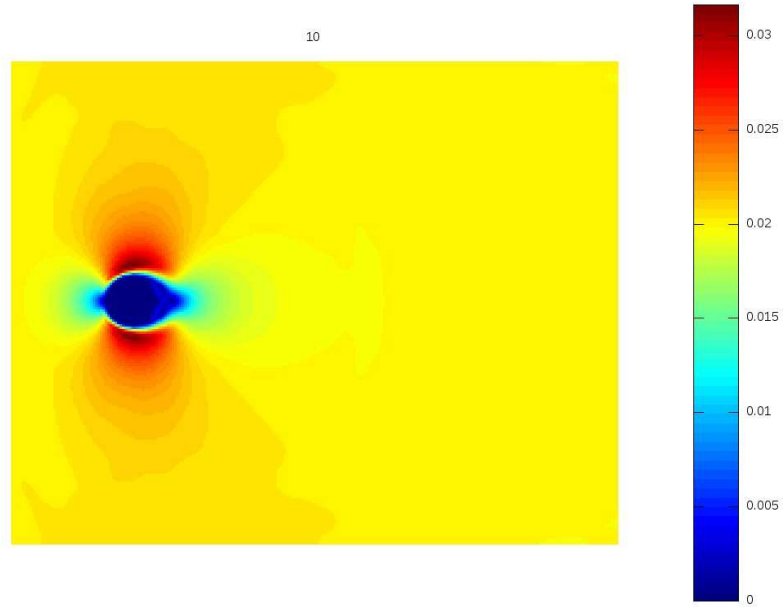


Figura 6. Escoamento ao redor de um cilindro: $t=100s$. Norma da velocidade

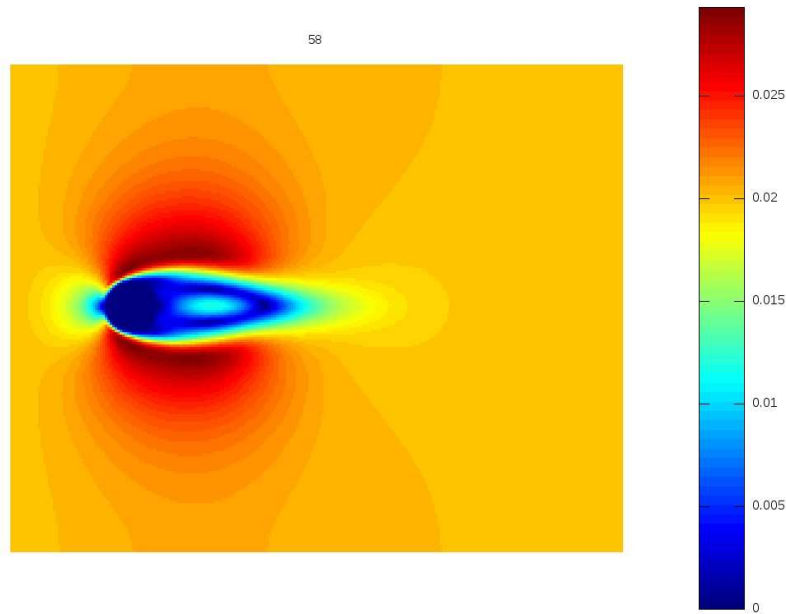


Figura 7. Escoamento ao redor de um cilindro: $t=580s$. Norma da velocidade

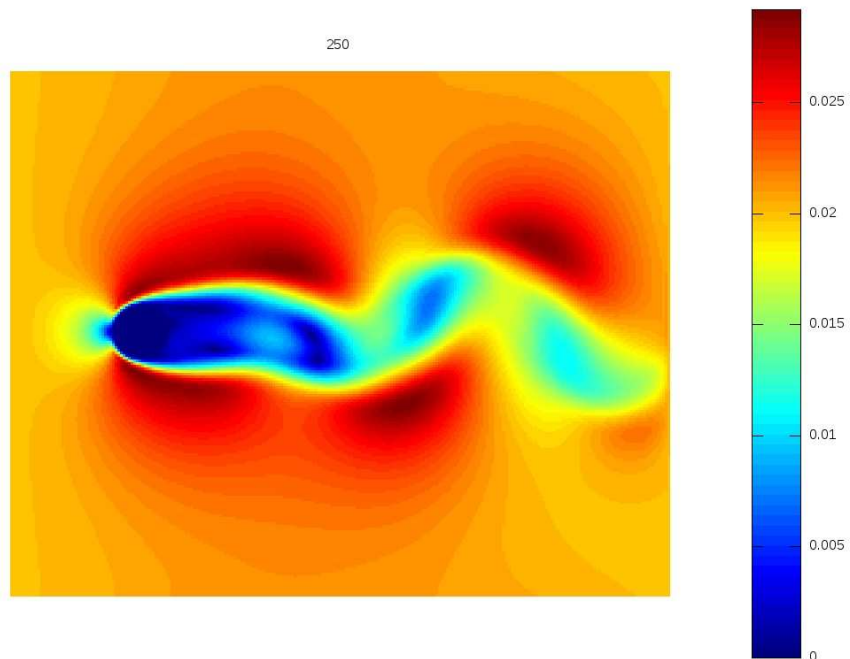


Figura 8. Escoamento ao redor de um cilindro: $t=2500s$. Norma da velocidade

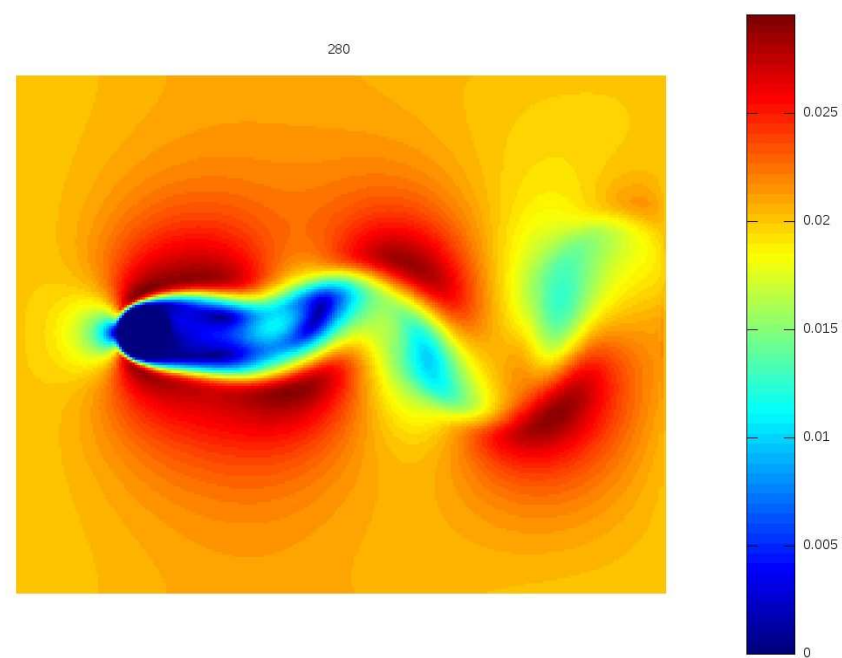


Figura 9. Escoamento ao redor de um cilindro: $t=2800s$. Norma da velocidade

Pode-se perceber claramente a partir da Fig. 6 a formação de dois tipos de região ao redor do cilindro, uma de baixa velocidade na frente e atrás do cilindro e outra de alta velocidade, nas áreas superior e inferior (em comparação a velocidade de entrada do escoamento).

Na figura 7, pode-se ver na parte de trás do cilindro uma região de circulação. Além disso, percebemos também um descolamento da camada limite sobre o cilindro.

Para concluir, vemos nas Figs. 8 e 9, um maior descolamento e a formação de vórtices, assim como era esperado.

4.3. Cálculo do coeficiente de arrasto e número de Strouhal

Para o escoamento ao redor de um cilindro, foram realizadas duas simulações, com número de Reynolds diferentes, para calcular o coeficiente de arrasto e o número de Strouhal. Mostramos a seguir os resultados.

4.3.1 Número de Reynolds $Re=100$

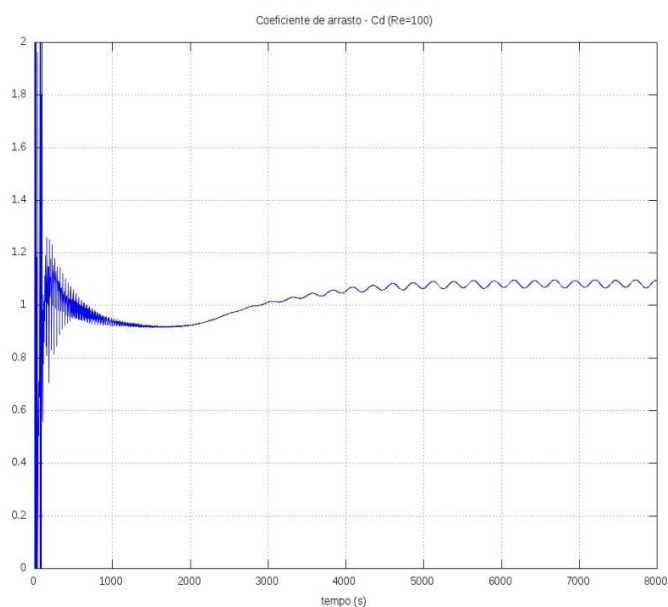


Figura 10. Escoamento ao redor do cilindro: $Re=100$. Coeficiente de arrasto.

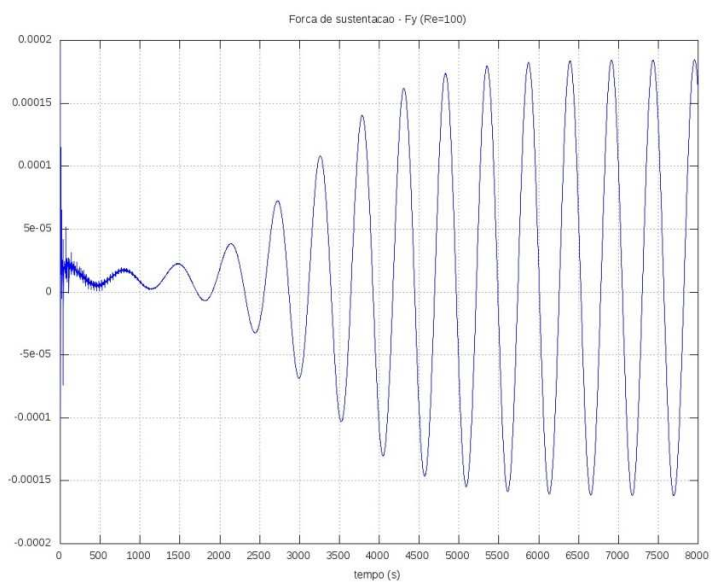


Figura 11. Escoamento ao redor do cilindro: $Re=100$. Força de sustentação.

Pela Fig. 10 obtemos o valor do coeficiente de arrasto $C_d = 1,1$. Além disso, obtemos a partir da Fig. 11 o valor da frequência da força de sustentação $f = \frac{1}{520}$, e com isso podemos calcular o número de Strouhal

$$S_t = \frac{fD}{U} = \frac{1}{520} \frac{2}{0,02} = 0,19 \quad (12)$$

4.3.2 Número de Reynolds $Re=200$

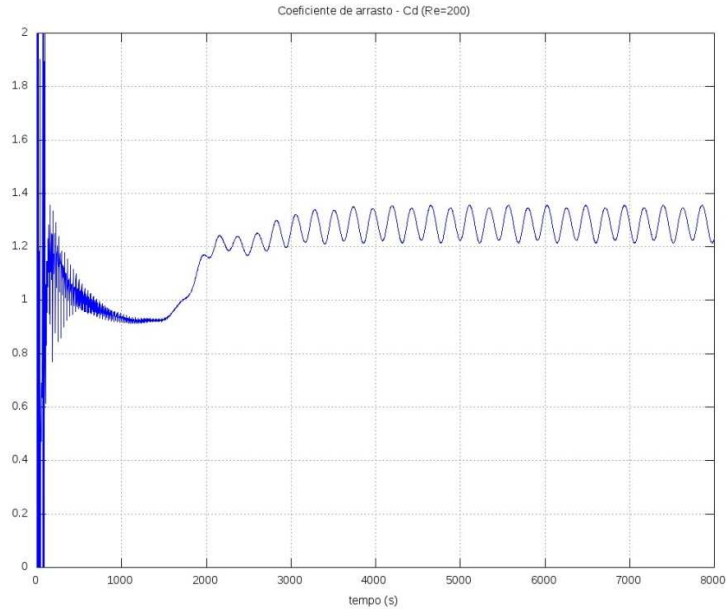


Figura 12. Escoamento ao redor do cilindro: $Re=200$. Coeficiente de arrasto.

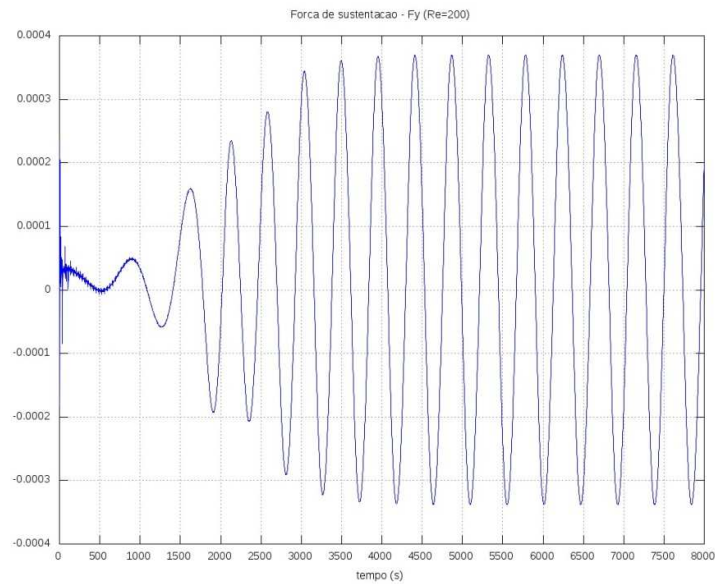


Figura 13. Figura 11. Escoamento ao redor do cilindro: $Re=200$. Força de sustentação.

Pela Fig. 12 obtemos o valor do coeficiente de arrasto $C_d = 1,3$. Além disso, obtemos a partir da Fig. 13 o valor da frequência da força de sustentação $f = \frac{1}{470}$, e com isso podemos calcular o número de Strouhal

$$S_t = \frac{fD}{U} = \frac{1}{470} \frac{2}{0,02} = 0,21 \quad (13)$$

Estes valores de coeficiente de arrasto e número de Strouhal, para $Re=100$ e $Re=200$, estão de acordo com valores experimentais encontrados na literatura.

5. Referências

Chen, S. and Doolen, G.D,1998, "Lattice Boltzmann method for fluid flows", Annu. Rev. Fluid Mech., Vol.30, pp. 329-364.

Sukop, M.C,2006, "Lattice Boltzmann Modeling : An introduction for Geoscientists and Engineers", Springer.

SOFTWARE FOR FLUID FLOWS SIMULATION USING THE LATTICE BOLTZMANN METHOD

Kleber Carrapatoso Nascimento Junior

kleber.carrapatoso@gmail.com

Abstract. This work deals with the computational fluid dynamics. We develop a software to simulate incompressible flows through circular cylinders for flows with Reynold's number between 100 and 200. We use the C++ programming language and the Lattice Boltzmann Method, which is an alternative numerical method for fluid flows simulations. Then, we compare values of drag coefficient and Strouhal's number, obtained with this software, with experimental values known in the literature.

Keywords: *computational fluid dynamics, Lattice Boltzmann method.*