ANÁLISE DE ESTABILIDADE HIDRODINÂMICA DE ESCOAMENTOS MULTIFÁSICOS VIA MÉTODO DE ARNOLDI COM REINÍCIO IMPLÍCITO

Wellington Lombardo Nunes de Mello
tomlnmello@hotmail.com

Jorge L. Baliño
jlbalino@usp.br

Karl Peter Burr
kpburr@gmail.com

Resumo. Este trabalho tem como objetivo a análise de estabilidade hidrodinâmica de modelos de escoamentos multifásicos utilizados em sistemas de produção de petróleo. Esta análise é realizada utilizando o método de Arnoldi com Reinício Implícito para determinar o espectro de autovalores do problema. São desenvolvidas ferramentas computacionais e analíticas capazes de determinar, no espaço de parâmetros, as regiões onde o escoamento ocorre em regime permanente e as regiões onde existem os diferentes tipos de intermitência como a intermitência severa. Para a discretização espacial do escoamento, utiliza-se o método das diferenças finitas. São gerados mapas de estabilidade para um conjunto de dados de entrada de interesse, de modo a se delimitar uma fronteira entre as regiões de escoamento instável e estável. Os mapas de estabilidade obtidos são comparados com trabalhos experimentais presentes na literatura, a fim de se investigar a validade da abordagem utilizada (teoria da estabilidade linear) no modelo de escoamento multifásico.

Palavras chave: *escoamentos multifásicos, estabilidade hidrodinâmica, produção de petróleo, intermitência severa, mapas de estabilidade, método de Arnoldi com Reinício Implícito.*

1. Introdução

A grande maioria dos escoamentos que ocorrem na natureza e na tecnologia são multifásicos. Por exemplo, as nuvens são gotas de líquido mexendo-se em um gás. Petróleo, gás e água coexistem na crosta terrestre. A transferência de calor por ebulição é de fundamental importância na geração de energia elétrica. A ampla presença de escoamentos multifásicos mostra a necessidade de uma descrição geral para compreender seu comportamento.

Em um escoamento multifásico, as diferentes fases são distinguíveis fisicamente uma da outra. Como dentro de cada fase pode haver diferentes componentes e fenômenos turbulentos, a complexidade dos escoamentos multifásicos é muito grande, sendo o principal fator desta complexidade a existência de interfaces, cuja forma e posição ao longo do tempo são impossíveis de se determinar.

Existem na literatura diferentes modelos para tratar problemas de escoamentos multifásicos, dos mais simples (modelo homogêneo) até os mais complexos (como o de escoamentos separados), nos quais se modelam os termos de interação entre as diferentes fases. No entanto, o estado da arte na modelagem de escoamentos multifásicos ainda não evoluiu suficientemente para garantir o bom comportamento matemático das equações resultantes.

Em sistemas de produção de petróleo, o fluido que sai do meio poroso possui gás em solução e vem acompanhado de gás livre e água, dificultando a determinação de parâmetros simples como o gradiente de pressão na coluna de elevação. O conhecimento dos mecanismos de transporte multifásico de gás, petróleo e água tem se tornado importante na tecnologia de exploração *offshore*. A tendência é a substituição de poços satélite conectados por dutos em árvore por condutos de transporte mais compridos até as plataformas.

Com as vazões existentes em dutos, linhas de surgência e *risers*, o padrão de escoamento mais freqüente é o "intermitente", em "golfada" ou *slug*, caracterizado por uma distribuição axial intermitente de líquido e gás. O gás é transportado como bolhas entre golfadas de líquido. Este padrão pode mudar em determinadas condições de geometria e de escoamento e originar um fenômeno indesejável conhecido como "intermitência severa" (*severe slugging*).

A intermitência severa está associada com grandes oscilações de pressão e problemas de dimensionamento nas unidades de separação na plataforma, provocando sua saída de serviço e graves perdas econômicas. Em particular, a empresa Petrobras reportou vários casos de golfadas severas nos sistemas *pipeline-riser*, os primeiros deles durante 1984 - 1985. O cenário típico na exploração *offshore* pode ter camadas de água de aproximadamente 1000 metros de profundidade e *pipelines* de aproximadamente 5000 metros de comprimento.

Este trabalho tem como objetivo a análise de estabilidade hidrodinâmica de modelos de escoamentos multifásicos utilizados em sistemas de produção de petróleo, visando principalmente o desenvolvimento de ferramentas computacionais capazes de traçar mapas de estabilidade que determinam, para um dado conjunto de parâmetros, as regiões onde o escoamento ocorre em regime permanente e auxiliar o contínuo aperfeiçoamento de modelos existentes, aplicando uma nova forma de abordagem do fenômeno: a teoria da estabilidade linear e o método de Arnoldi com Reinício Implícito (IRAM) para determinar o espectro de autovalores.

2. O fenômeno de intermitência severa

A intermitência severa ocorre geralmente num ponto com uma cota baixa na topografia do conduto, por exemplo, num trecho de tubulação descendente (*pipeline*), seguido de um trecho ascendente (*riser*). Uma situação típica é quando o líquido se acumula no fundo do *riser*, bloqueando a passagem de gás e iniciando um ciclo de golfada de períodos da ordem de horas, muito maior que o período de passagem de *slugs* em operação normal.

Na operação em estado permanente, o padrão de escoamento no *pipeline* pode ser estratificado, enquanto no *riser* resulta intermitente, como ilustra a Fig. (1).

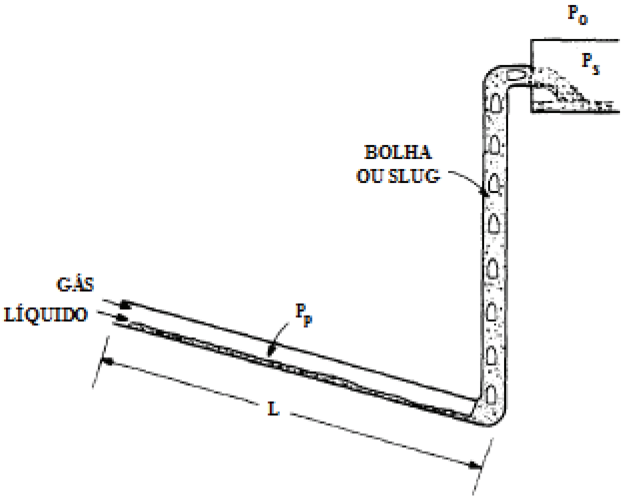

Figura 1. Estado permanente. (Taitel 1986)

Segundo Taitel (1986), um ciclo de intermitência severa pode ser descrito pelas seguintes etapas. Uma vez que o sistema se desestabiliza e a passagem de gás fica bloqueada na base do *riser*, o líquido continua entrando e o gás existente no *riser* continua saindo, sendo possível que o nível de líquido fique abaixo do nível máximo no separador. Como consequência, a coluna do *riser* se torna mais pesada e a pressão na base aumenta, comprimindo o gás no *pipeline* e criando uma região de acúmulo de líquido. A Fig. (2) ilustra esta etapa, conhecida como formação do *slug*.

Quando o nível de líquido atinge o topo enquanto a passagem de gás permanece bloqueada, a pressão na base atinge seu máximo valor e há somente líquido escoando no *riser*, resultando na etapa de produção do *slug*, conforme a Fig. (3).

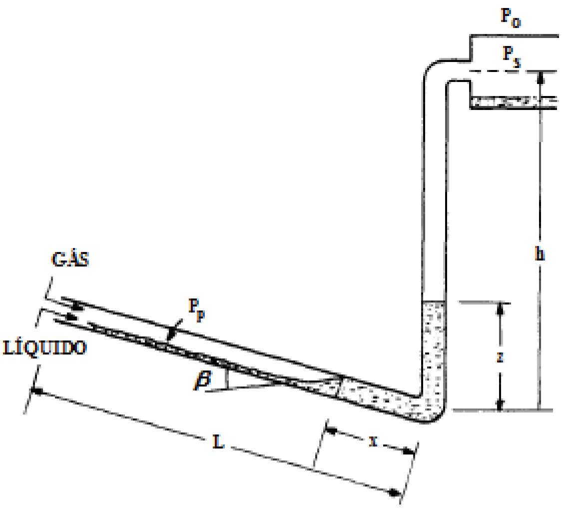

Figura 2. Formação do *slug*. (Taitel 1986)

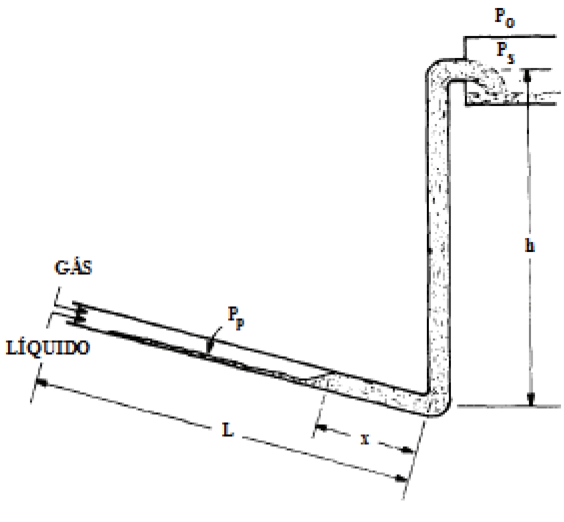

Figura 3. Produção do *slug*. (Taitel 1986)

Como o gás continua entrando no *pipeline*, a frente de acumulação de líquido é puxada de volta até que atinge a base do *riser*, começando a etapa de penetração de gás, conforme a Fig. (4).

À medida que o gás penetra no *riser*, a coluna se torna mais leve, diminuindo a pressão e aumentando a vazão de gás. Quando o gás atinge o topo, a passagem de gás fica liberada através do escoamento estratificado no *pipeline* e do escoamento intermitente/anular no *riser*, causando uma violenta expulsão e uma rápida descompressão que leva novamente o processo à etapa de formação do *slug*. Esta etapa é conhecida como expulsão de gás, conforme a Fig. (5).

As consequências indesejáveis da intermitência severa são o aumento da pressão na cabeça do poço, causando tremendas perdas de produção; as grandes vazões instantâneas, causando instabilidades no sistema de controle de líquido nos separadores e eventualmente um desligamento da plataforma; e oscilações de vazão no reservatório.

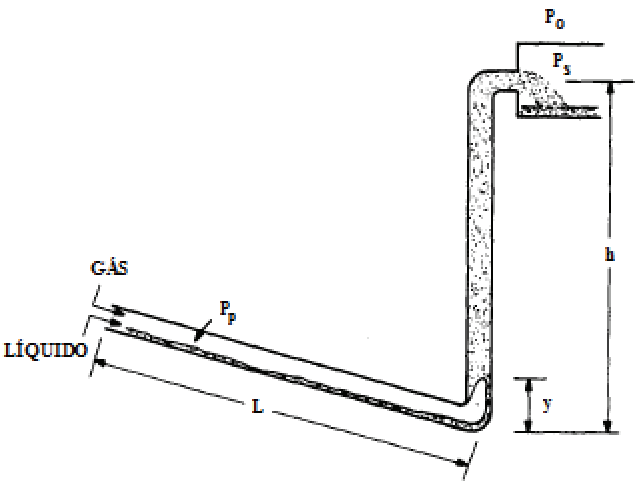

Figura 4. Penetração de gás. (Taitel 1986)

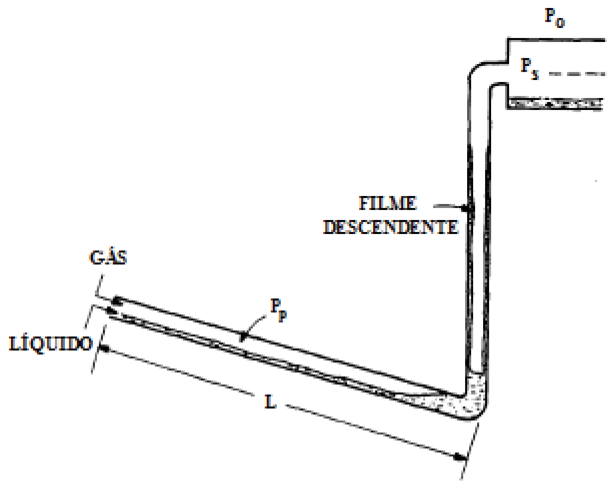

Figura 5. Expulsão de gás. (Taitel 1986)

3. Principais variáveis de interesse e unidades

As principais variáveis de interesse no *pipeline* e no *riser* e as correspondentes unidades são mostradas na Tabela 1.

Tabela 1 - Variáveis de interesse nas equações de governo do *pipeline*.e do *riser*.

Variável	Definição	Unidade
L	Comprimento do *pipeline*	m
α_p	Fração de vazio na *pipeline*	---
Q_{l0}	Vazão volumétrica de líquido na entrada do *pipeline*	m³/s
x	Comprimento da região do *pipeline* com acúmulo de líquido a partir da base do *riser*	m
j_{l1}	Velocidade superficial do líquido no *pipeline*	m/s
L_e	Comprimento equivalente do conduto *buffer* $(L_e = \upsilon_e / A)$, onde υ_b é o volume do *buffer* e A é a área da seção transversal do *pipeline*	m
P_g	Pressão do gás no *pipeline* e na cavidade	Pa
j_{g1}	Velocidade superficial do gás no *pipeline*	m/s
β	Ângulo de inclinação do *pipeline*	radianos
A	Área da seção transversal do *pipeline*	m²
R_g	Constante do gás	m²/(s².K)
T_g	Temperatura absoluta do gás	K
$\dot{m}_{g0}$	Vazão mássica de gás na entrada do *pipeline*	kg/s
α_r	Fração de vazio no *riser*	---
j_l	Velocidade superficial do líquido no *riser*	m/s
P	Pressão no *riser*	Pa
j_g	Velocidade superficial do gás no *riser*	m/s
C_d	Coeficiente adimensional utilizado na relação de deriva para o *riser*	---
U_d	Coeficiente dimensional utilizado na relação de deriva para o *riser*	m/s
f_m	Coeficiente de atrito de Fanning entre fluido e *riser*	---
Re_m	Número de Reynolds para a mistura	---
δ_u	Razão entre viscosidades dinâmicas de gás e líquido	---
ε / D	Razão entre rugosidade e diâmetro do *riser*	---

4. Equacionamento para *riser* vertical

Este trabalho analisa um escoamento bifásico ar-água num sistema *pipeline-riser* com uma configuração simplificada: será considerado um sistema correspondente a um *riser* vertical, sendo constantes os coeficientes de deriva C_d e U_d na lei de escorregamento entre as fases e a fração de vazio α_p no *pipeline*, e desprezando termos de inércia. Neste trabalho, são utilizadas variáveis adimensionalizadas, descritas em Burr (2009), onde também pode ser verificada a dedução completa dos equacionamentos.

A partir das equações para o cálculo do estado estacionário, é obtido um novo equacionamento para pequenas perturbações deste estado estacionário. A análise da estabilidade do estado estacionário para pequenas perturbações poderá então ser realizada para a obtenção dos mapas de estabilidade.

4.1. Equações de governo adimensionais para o estado estacionário

As equações adimensionais necessárias para determinar o estado estacionário são determinadas a partir das equações de governo adimensionais encontradas em Burr (2009), eliminando-se os termos das equações que representam taxas de variação no tempo, e a denotação * indica que a variável tratada é adimensional.

No *pipeline*, resulta:

$$j_{l1}^* = 1 \tag{1}$$

$$P_g^* j_{g1}^* = \dot{m}_{g0}^* \tag{2}$$

$$\alpha_p = \alpha_p(P_g^*, j_{l1}^*, j_{g1}^*) \tag{3}$$

onde a relação que determina α_p em termos de P_g^*, j_{l1}^* e j_{g1}^* se encontra no apêndice A de Burr (2009).

No *riser*, resulta:

$$j_l^* = 1 \tag{4}$$

$$P^* \cdot j_g^* = \dot{m}_{g0}^* \;\Rightarrow\; j_g^* = \dot{m}_{g0}^* / P^* \tag{5}$$

$$j^* = j_l^* + j_g^* = 1 + \dot{m}_{g0}^* / P^* \tag{6}$$

$$\alpha_r = \frac{\dot{m}_{g0}^* / P^*}{C_d \cdot \left(1 + \dot{m}_{g0}^* / P^*\right) + U_d^*} \tag{7}$$

$$\frac{\partial P^*}{\partial s^*} = -\Pi_L \cdot [(1-\alpha_r) + P^* \cdot \alpha_r] \cdot \left(\sin\theta + \frac{4}{\Pi_D} f_m \cdot j^* \cdot |\, j^* \,|\right) \tag{8}$$

onde os coeficientes C_d e U_d*, para *riser* vertical, são dados por $C_d = 1{,}2$ e $U_d^* = 0{,}35A\sqrt{g.D}\,/\,Q_{l0}$, θ = 90º para *riser* vertical e os parâmetros Π_L e Π_D são funções de propriedades geométricas e de escoamento.

As condições de continuidade entre o *riser* e o *pipeline* são dadas pela igualdade entre as variáveis no *pipeline* (j_{l1}*, j_{g1}*, P_g* e α_r (j_{l1}*, j_{g1}*)) e as variáveis na base do *riser* (j_l*, j_g*, P^* e α_r em s* = 0). As condições de contorno no *pipeline* são a vazão volumétrica de líquido adimensionalizada, Q_{l0}* = Q_{l0}, e a vazão mássica de gás adimensionalizada, □$_{g0}$* = □$_{g0}$/(ρ_l.Q_{l0}). No topo do *riser*, a condição de contorno é dada por P(s* = 1, t*) = P_s / (ρ_l R_g T_g).

Integrando o gradiente de pressão dado pela eq.(8) na posição entre o valor local s^* e o valor no topo do *riser* s_s^* e a pressão P^* entre o valor local e o valor no topo do *riser*, pode-se obter o perfil de pressão. Para tanto, deve-se utilizar algum método numérico iterativo para garantir a convergência. Para calcular o perfil de fração de vazio α_r em estado estacionário utiliza-se a eq.(7), onde o perfil de pressão será conhecido. A cada iteração, calculam-se as variáveis j_l^*, j_g^* e α_r que descrevem o regime permanente através das condições acima descritas, definindo completamente o estado estacionário no *riser*. Uma vez determinado o regime permanente no *riser*, as velocidades superficiais j_{l1}^*, j_{g1}^*, e a pressão P_g^* no *pipeline* podem ser determinadas pelas condições de continuidade entre *pipeline* e *riser*. Para caracterizar totalmente o regime estado estacionário no *pipeline*, resta determinar a fração de vazio α_p. Como o equacionamento do cálculo de α_p é bastante extenso, não será aqui demonstrado, mas pode ser consultado na seção 2.7.1 de Baliño (2008).

4.2. Variáveis para as perturbações do estado estacionário

Aplicando pequenas perturbações ao estado estacionário, as variáveis para o *riser* (j_l^*, j_g^*, P^* e α_r) e para o *pipeline* (j_{l1}^*, j_{g1}^* e P_g^*) passam a ser definidas por termos do tipo $a_i^* = \tilde{a}_i + \hat{a}_i$, onde as variáveis com "~" descrevem o estado estacionário e as variáveis com “^” representam a perturbação do estado estacionário. A fração de vazio no *pipeline* será considerada constante, de modo que não há perturbação para α_p.

4.3. Equações de governo adimensionais para as perturbações do estado estacionário

As equações de governo das perturbações do estado estacionário no sistema *pipeline-riser* são obtidas linearizando-se as equações de governo do estado estacionário em relação às variáveis que definem o estado estacionário mais uma perturbação. Para o *pipeline*, resulta:

$$\hat{j}_{l1} = 0 \tag{9}$$

$$\left(\frac{L}{L_r}\cdot\tilde{\alpha}_p + \frac{L_b}{L_r}\right)\cdot\frac{\partial \hat{P}_g}{\partial t} + \tilde{j}_{g1}\cdot\hat{P}_g + \tilde{P}_g\cdot\hat{j}_{g1} = 0 \tag{10}$$

Para o *riser*, pode-se eliminar a perturbação da fração de vazio do *riser* $\hat{\alpha}_r$ e obter o seguinte sistema de equações adimensionais para as perturbações do estado estacionário no *riser* (Burr, 2009):

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} \partial\hat{j}_l/\partial t \\ \partial\hat{j}_g/\partial t \\ \partial\hat{P}/\partial t \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & D_{22} & D_{23} \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} \partial\hat{j}_l/\partial s \\ \partial\hat{j}_g/\partial s \\ \partial\hat{P}/\partial s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} \hat{j}_l \\ \hat{j}_g \\ \hat{P} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{11}$$

onde os elementos não nulos das matrizes $[B_{ij}]$, $[D_{ij}]$ e $[A_{ij}]$, i, j = 1, 2, 3, são funções das variáveis calculadas para o estado estacionário.

As condições de continuidade na forma adimensional para as perturbações do estado estacionário ficam dadas pela igualdade entre as perturbações no *pipeline* ($\hat{j}_{l1}$, $\hat{j}_{g1}$, $\hat{P}_g$ e $\hat{\alpha}_r(\hat{j}_{l1}, \hat{j}_{g1})$) e as variáveis na base do *riser* ($\hat{j}_l$, $\hat{j}_g$, $\hat{P}$ e $\hat{\alpha}_r$ em $s = 0$). As condições de contorno para as perturbações do estado estacionário no *pipeline* são dadas por $Q_{l0} = \square_{g0} = 0$, onde Q_{l0} e $\square_{g0}$ são, respectivamente, as perturbações de $\tilde{Q}_{l0}$ e $\tilde{m}_{g0}$ para o estado estacionário. No topo do *riser*, a condição de contorno para as perturbações do estado estacionário é $\hat{P}\ (t, s=1) = 0$.

4.4. Análise de estabilidade para *riser* vertical

Aplicando a teoria da estabilidade ao modelo desenvolvido, pode-se eliminar a dependência temporal das equações lineares para as perturbações do estado estacionário utilizando a transformada de Laplace, resultando em um sistema de equações diferenciais em termos da variável espacial *s*. Em seguida, pode-se realizar a discretização espacial do *riser* via métodos numéricos, obtendo-se um sistema de equações algébricas cuja solução pode ser escrita em termos de seus autovalores e autovetores.

A aplicação da transformada de Laplace às equações de governo das perturbações do estado estacionário (eq.(9), eq.(10) e eq.(11)), resulta:

- para o *pipeline*:

$$\hat{j}_{l1} = 0 \tag{12}$$

$$\omega\left(\frac{L}{L_r}\cdot\tilde{\alpha}_p + \frac{L_b}{L_r}\right)\cdot\hat{P}_g + \tilde{j}_{g1}\cdot\hat{P}_g + \tilde{P}_g\cdot\hat{j}_{g1} = \left(\frac{L}{L_r}\cdot\tilde{\alpha}_p + \frac{L_b}{L_r}\right)\cdot P_g(0) \tag{13}$$

- para o *riser*:

$$([A] + \omega[B])\cdot\begin{Bmatrix} \hat{j}_l \\ \hat{j}_g \\ \hat{P} \end{Bmatrix} + [D]\cdot\begin{Bmatrix} \partial\hat{j}_l/\partial s \\ \partial\hat{j}_g/\partial s \\ \partial\hat{P}/\partial s \end{Bmatrix} = [B]\cdot\begin{Bmatrix} j_l \\ j_g \\ P \end{Bmatrix} \tag{14}$$

onde $[A]$, $[B]$ e $[D]$ são as matrizes encontradas na eq.(11). As equações (12) e (13) servem como condição de contorno na base do *riser*. No topo do *riser*, a condição de contorno é dada pela transformada de Laplace de $\hat{P}\ (t, s=1) = 0$:

$$\hat{P}\ (s=1, \omega) = 0 \tag{15}$$

4.5. Teoria da estabilidade aplicada ao sistema *pipeline-riser*

A metodologia empregada em Burr e Baliño (2008) para obter mapas de estabilidade é computacionalmente intensiva, pois para cada configuração do sistema é necessário fazer uma simulação temporal das equações de governo e verificar se a solução numérica converge para um regime permanente ou para algum regime intermitente. Quando se está próximo da fronteira de estabilidade, mas para uma configuração de parâmetros do sistema onde o estado estacionário é instável, a evolução do sistema para o regime intermitente é lenta, pois a taxa de crescimento da instabilidade com o tempo é muito pequena, o que leva a grandes períodos de simulação.

A teoria de estabilidade linear fornece uma metodologia que resulta em procedimento computacional mais econômico que o modelo utilizado em Baliño (2006, 2008) para traçar mapas de estabilidade. Uma vez determinado o estado estacionário, escrevem-se as variáveis dependentes como soma de seus valores no estado estacionário e uma perturbação, substituindo-nas nas equações de governo do estado estacionário. Em seguida, linearizam-se as equações de governo das perturbações do estado estacionário. Para determinar a estabilidade do estado estacionário, deve-se resolver o sistema de equações lineares que resulta do procedimento acima.

4.6. Discretização espacial via fórmula de 5 pontos

As equações (12), (13) e (15) são condições de contorno para o sistema de equações diferenciais ordinárias em s de acordo com as condições de continuidade. Para resolver este sistema, será utilizado o método das diferenças finitas para discretizá-lo, obtendo-se um sistema de equações algébricas que pode ser resolvido com métodos apropriados da álgebra computacional. Neste trabalho, o operador $\partial / \partial s$ que aparece no sistema de equações (14) será representado pelo um operador de diferenças finitas centrado, utilizando a fórmula de diferenças finitas de 5 pontos.

Discretizando o intervalo $0 \le s \le 1$ (posição no *riser*) em N pontos, resulta um total de $3N$ variáveis, mas com as condições de contorno dadas pelas equações (12), (13) e (15), na realidade há $3N$ - 3 variáveis desconhecidas. Logo, são necessárias $3N$ - 3 equações para determiná-las. Utilizando a eq.(13) para escrever $\hat{j}_{g1}$ em termos de $\hat{P}_g$, resulta:

$$\hat{j}_{g1} = -\frac{\tilde{j}_{g1}}{\tilde{P}_g}\hat{P}_g - \omega\left(\frac{L}{L_r}\tilde{\alpha}_p + \frac{L_e}{L_r}\right)\frac{\hat{P}_g}{\tilde{P}_g} + \left(\frac{L}{L_r}\tilde{\alpha}_p + \frac{L_e}{L_r}\right)\frac{P_g(0)}{\tilde{P}_g} \tag{16}$$

No nó k = 1, será imposta a forma discreta da equação de conservação do momento linear da mistura, eliminando $\hat{j}_{g1}$ em termos de $\hat{P}_g$ via eq.(16); nos nós k = 2, ..., N - 1 será imposta a forma discreta do sistema de equações (14) e no nó $k = N$ será imposta somente a forma discreta das equações de continuidade para o líquido e o gás.

O resultado da discretização do sistema via diferenças finitas é uma forma discreta para o operador dado pelo sistema de equações (14) mais as condições de contorno (12), (13) e (15), resultando em:

$$\left(\begin{bmatrix} K_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ 0 & 0 & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & 0 & 0 \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ 0 & 0 & M_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} \{\hat{j}_l\} \\ \{\hat{j}_g\} \\ \hat{P}_1 \\ \{\hat{P}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \\ F_3 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{17}$$

onde K_{ij} e M_{ij} são matrizes cujas dimensões e termos podem ser verificados em Burr (2009). Os elementos não nulos dos blocos K_{ij} e M_{ij} e dos vetores $\{F_k\}$ podem ser encontrados em Burr (2009).

A matriz $[M]$ é singular na equação (17). Como tentativa de evitar tal singularidade, pode-se reescrever a quarta linha do sistema de equações (17) na seguinte forma:

$$\{\hat{P}\} = -K_{44}^{-1}(K_{41}\{\hat{j}_l\} + K_{42}\{\hat{j}_g\} + K_{43}\hat{P}_1) \tag{18}$$

onde K_{44}^{-1} é a matriz inversa da matriz K_{44}. Substituindo-se a equação matricial (18) na equação (17), pode-se eliminar o vetor $\{\hat{P}\}$ (eliminando $N-2$ equações), resultando num problema de autovalores de dimensão $2N-1$.

Para determinar a estabilidade do estado estacionário, basta determinar os autovalores do seguinte problema de autovalores e autovetores:

$$\left(\begin{bmatrix} G_{11} & 0 & 0 \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ 0 & 0 & H_{33} \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} \{\hat{j}_l\} \\ \{\hat{j}_g\} \\ \hat{P}_1 \end{Bmatrix} = 0 \tag{19}$$

onde ω_k, $k = 1, ..., 2N - 1$ são os autovalores; G_{ij} e H_{ij} são matrizes cujos termos podem ser verificados em Burr (2009).

Como as matrizes $[G]$ e $[H]$ não são simétricas, os autovalores ω_k são, em geral, números complexos do tipo $\omega_k = \sigma_k + i\theta_k$. Se $\sigma_k < 0$, a solução tende para zero quando $t \rightarrow \infty$ e, portanto, perturbações do estado estacionário desaparecem com o tempo. Neste caso, o estado estacionário será estável. Se ao menos um $\sigma_k > 0$, a solução cresce quando $t \rightarrow \infty$, de modo que perturbações do estado estacionário crescem com o tempo. Neste caso, o estado estacionário será instável.

Desta forma, basta calcular o autovalor de maior parte real do problema de autovalores e autovetores, dado pela eq.(19), para determinar se o estado estacionário é instável ou não. A análise de estabilidade linear do sistema *pipeline-riser* consiste em determinar, no espaço de parâmetros do sistema, as regiões em que o estado estacionário é instável e estável, bem como determinar a fronteira entre estas duas regiões. Esta fronteira pode ser obtida buscando-se no espaço de parâmetros a superfície onde a parte real do autovalor de maior parte real é nula ($\sigma_{k,MAX} = 0$).

4.7. Estudos numéricos de estabilidade

As curvas de estabilidade numérica podem ser obtidas fixando-se um valor de vazão de líquido Q_{l0} e variando a vazão de gás $\square_{g0}$ em incrementos até passar da condição instável a estável, condição verificada pelo conjunto de autovalores obtido. A construção da curva de estabilidade utilizando o programa computacional desenvolvido por Baliño (2008) resulta em uma tarefa muito trabalhosa. Para a construção da curva, é necessária mais de uma centena de simulações a fim de se alcançar a precisão desejada. Esta construção pode ser realizada de maneira mais econômica, do ponto de vista computacional, utilizando a teoria de estabilidade linear.

5. Programação computacional para traçar mapas de estabilidade

O objetivo principal deste trabalho é desenvolver rotinas computacionais baseadas no modelo e discretização desenvolvidos na seção 4 para sistemas *pipeline-riser* e traçar mapas de estabilidade a partir destas. Para o desenvolvimento das rotinas, optou-se pela utilização do programa de simulação numérica *Matlab*, que já contém a teoria de álgebra linear implementada. O programa computacional completo envolve as rotinas aqui desenvolvidas, rotinas próprias do *Matlab* e rotinas desenvolvidas por Oliveira (2009). Os resultados obtidos utilizando o pacote de rotinas computacionais desenvolvido podem ser utilizados para validar os resultados da teoria de estabilidade linear e/ou de formas simplificadas dela que dêem origem a expressões analíticas de critérios de estabilidade.

6. Simulações e procedimento de cálculo

O programa considera uma grade j_g x j_l e, portanto, uma grade $\square_{g0}$ x Q_{l0}. Para cada par (j_g x j_l) (($\square_{g0}$ x Q_{l0})) da grade, o programa realiza o cálculo do estado estacionário e determina os autovalores. Em seguida, faz a verificação da estabilidade do estado estacionário e gera o mapa de estabilidade. O programa também gera curvas de nível indicando o número de autovalores com parte real positiva e o maior valor da parte real dos autovalores, e gera um arquivo com as variáveis calculadas, a fim de auxiliar a análise dos resultados obtidos.

Os parâmetros geométricos do *riser* e do *pipeline* correspondem aos apresentados por Taitel (1990), enquanto as propriedades físicas correspondem aos fluidos água e ar à temperatura de 20 ºC. Foram rodadas simulações mantendo uma pressão absoluta de separação P_s = 1 *bar*, para um ângulo de inclinação do *pipeline* $\beta = -5°$ e comprimentos equivalentes de *buffer* L_e = 1,69 m, 5,1 m e 10 m.

A seguir, é apresentado um resumo da sequência de cálculo realizada pelo programa computacional desenvolvido:

1 - Definir os parâmetros de entrada e e as grades j_g x j_l e $\square_{g0}$ x Q_{l0} na rotina principal **main_stab_criteria_5p.**

2 - Rodando o programa, a rotina principal irá chamar a rotina **stab_criteria_5p** para cada ponto da grade definida. Dentro da rotina **stab_criteria_5p**, calculam-se as variáveis em estado estacionário chamando-se a rotina **steadystate** desenvolvida por Oliveira (2009).

3 - Em seguida, são construídos os vetores A_{ij} e B_{ij} dados pela eq.(11) através de rotinas apropriadas desenvolvidas.

4 – Agora, a rotina **stab_criteria_5p** chama as rotinas que montam as matrizes G e H.

5 - Na sequência, o programa faz a chamada da rotina **espectro** diversas vezes para capturar por partes o espectro de autovalores do problema. Utiliza-se a função **eigs** do pacote ARPACK do *Matlab* com a opção dada pelo comando *which*. Como G e H são matrizes não simétricas e H é singular, não é possível utilizar a função **eig** que resolve diretamente o problema $G \cdot \hat{x} = \lambda \cdot H \cdot \hat{x}$. Na realidade, utiliza-se a função **eigs** para determinar parte dos autovalores do seguinte problema: $(G - \sigma \cdot H)^{-1} H \cdot \hat{x} = nu \cdot \hat{x}$, onde $nu = 1/(\lambda - \sigma)$ e o valor de σ deve ser escolhido pelo usuário (para o problema de estabilidade, recomenda-se $\sigma = 0$ e *which* como a opção maior parte real).

6 - Para implementar esta estratégia, faz-se a fatoração LU da matriz $(G - \sigma \cdot H)$. Então, a função **eigs** recebe a rotina **ksmifun** e esta calcula y de acordo com a sequência $z = H \cdot \hat{x}$ e $(G - \sigma \cdot H) \cdot y \cdot \hat{x} = z$, onde $y = 1/(\lambda - \sigma)$.

7 - A rotina **stab_criteria_5p** então analisa quantos autovalores possuem parte real negativa e quantos possuem parte real positiva. Se todos os autovalores possuírem parte real negativa, retorna-se a variável key = 0 (estado estacionário estável); se algum autovalor possuir parte real positiva, retorna-se key = 1 (estado estacionário instável).

8 - Determinado o espectro de autovalores, o programa retorna à rotina principal os seguintes parâmetros: o valor da variável *key*, o número de autovalores com parte real positiva, o maior valor da parte real dentre os autovalores calculados e o espectro de autovalores obtido.

9 - Após efetuar o procedimento acima para cada ponto da grade, o programa plota o ponto em um mapa de estabilidade. Se *key* = 0, o ponto da grade é plotado na cor vermelha; se *key* = 1, o ponto é plotado na cor azul.

10 - Após a realização de todo o procedimento anterior para a grade inteira, o programa gera os gráficos com as curvas de nível indicando o número de autovalores com parte real positiva e com as curvas de nível indicando o maior valor da parte real dos autovalores do espectro calculado.

8. Resultados

8.1. Comprimento equivalente L_e = 1,69m

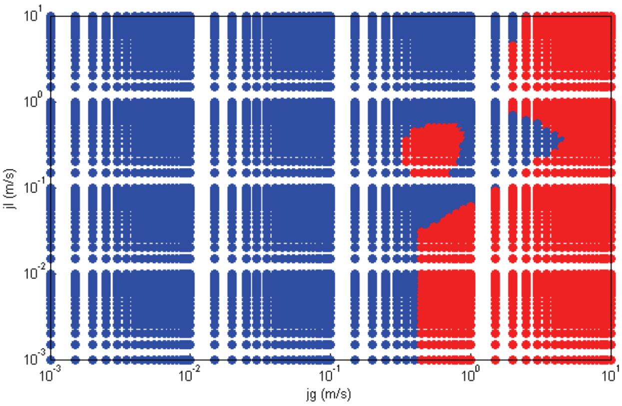

Figura 6. Mapa de estabilidade para L_e = 1,69m.

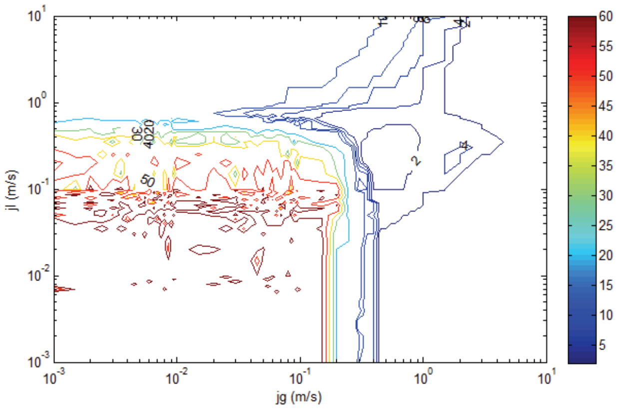

Figura 7. Número de autovalores com parte real positiva.

8.2. Comprimento equivalente L_e = 5,1m

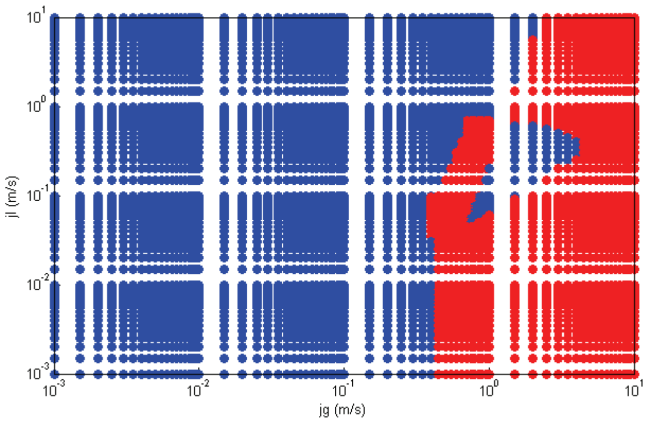

Figura 8. Mapa de estabilidade para L_e = 5,1m.

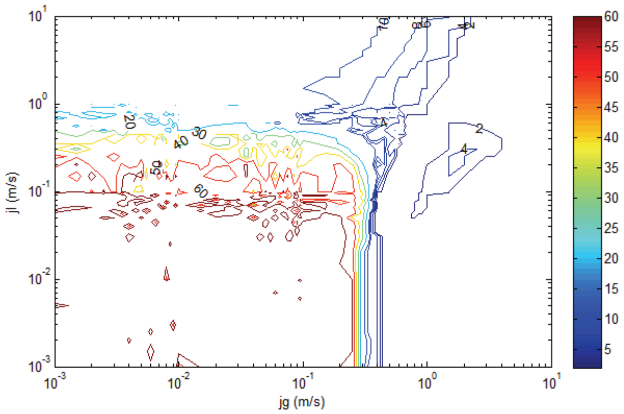

Figura 9. Número de autovalores com parte real positiva.

8.3. Comprimento equivalente L_e = 10m

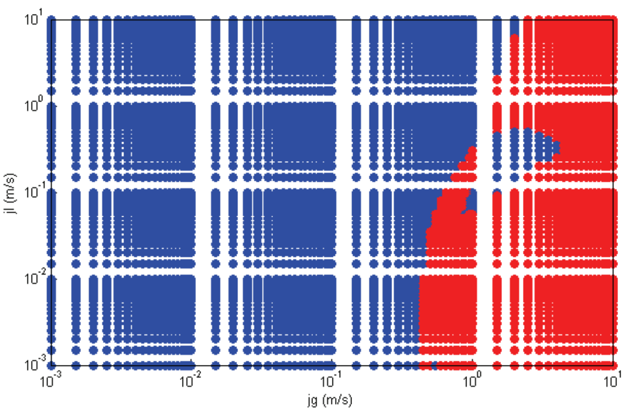

Figura 10. Mapa de estabilidade para L_e = 10m.

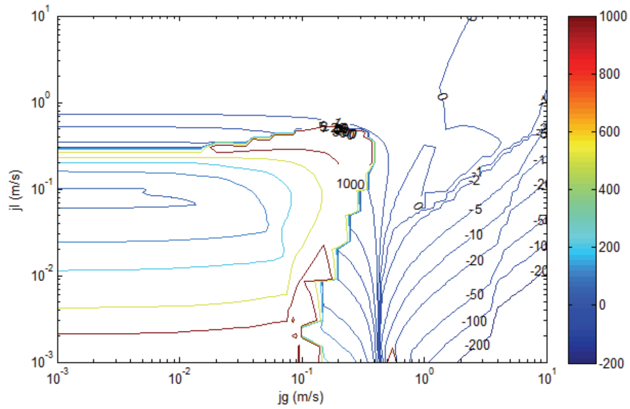

Figura 11. Maior valor da parte real.

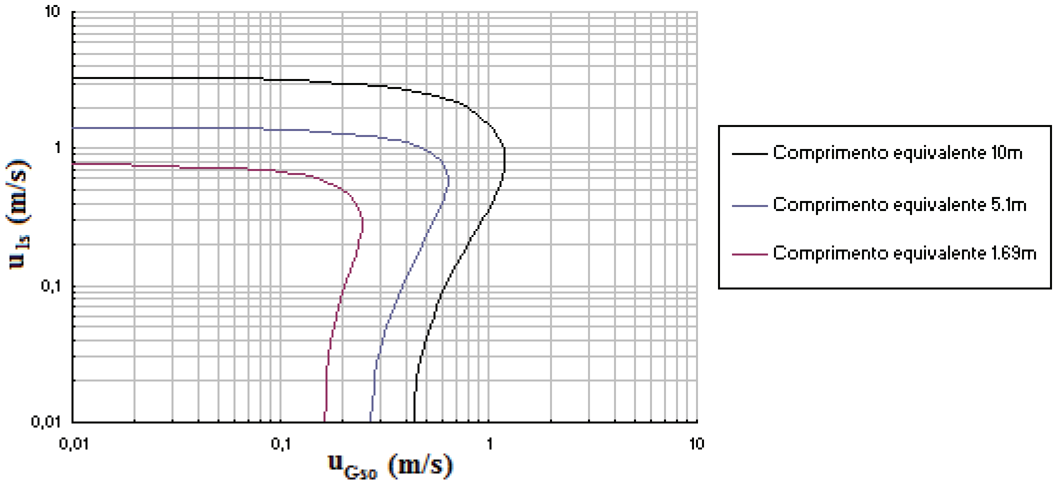

Figura 12. Curvas de estabilidade para comprimentos equivalentes L_e = 1,69m, 5,1m e 10m.

8.4. Análise dos resultados

Observa-se nos mapas de estabilidade das Fig. (6), (8) e (10) que é delimitada parte de uma possível fronteira entre as regiões estável e instável, semelhante ao comportamento exibido nos mapas de estabilidade em geral, mas o programa computacional desenvolvido não conseguiu recuperar o trecho horizontal da fronteira de estabilidade completando tal fronteira. Na Fig.(6), correspondente à simulação para comprimento equivalente de *buffer* L_e = 1,69m, é notável uma região estável quase circular isolada dentro da região determinada como instável, indicando mais um ponto problemático.

Ainda em relação aos mapas de estabilidade, nota-se que o trecho aproximadamente vertical da fronteira de estabilidade tende sempre a um valor próximo de $j_g \approx$ 0,45m/s. Conforme resultados obtidos em simulações do programa desenvolvido por Baliño (2008) em FORTRAN, representados na Fig.(12), este comportamento é coerente apenas para L_e = 10m, sendo que o esperado para L_e = 5,1m era $j_g \approx$ 0,25m/s e para L_e = 1,69m era $j_g \approx$ 0,15m/s.

Com o intuito de entender as causas destas discrepâncias, foram gerados gráficos indicando o número de autovalores com parte real positiva e o maior valor da parte real do espectro de autovalores para cada ponto da grade.

A partir das curvas de nível das Fig. (7) e (9), observa-se que há um pequeno número de autovalores com parte real positiva (2 a 8 autovalores) em determinadas regiões instáveis próximas à fronteira de estabilidade que deveriam ser estáveis. Conforme a Fig.(11) (maior valor da parte real do espectro de autovalores para L_e = 10m), notou-se que, nas regiões onde o número de autovalores com parte real positiva era pequeno, o valor da parte real do autovalor que apresentava maior parte real também era pequeno, indicando que estes autovalores estavam próximos do eixo imaginário e, portanto, próximos da fronteira de estabilidade. Possivelmente, a utilização de um modelo mais completo (por exemplo, incluir termos de inércia) provoque a passagem destes autovalores do lado direito (parte real positiva) para o lado esquerdo do eixo imaginário (parte real negativa), tornando estas configurações estáveis.

Uma das principais dificuldades encontradas neste trabalho foi determinar os autovalores do problema. Devido à singularidade apresentada pela matriz M na eq.(17), não foi possível determinar os autovalores utilizando uma função convencional do *Matlab*. Uma alternativa utilizada foi eliminar o vetor de pressões conforme eq.(18), eliminando a última linha da matriz M (linha nula), mas mesmo desta forma o problema da singularidade permaneceu e até o momento sua causa é desconhecida.

Para tratar o problema de singularidade verificado, o trabalho propôs utilizar o Método de Arnoldi com Reinício Implícito (Lehoucq *et al*, 1998) para tentar obter o espectro de autovalores. Segundo este método, o problema pode ser transformado no seguinte problema: $(G-\sigma\cdot H)^{-1}H\cdot\hat{x}=nu\cdot\hat{x}$, onde $nu=1/(\lambda-\sigma)$ e o valor de σ deve ser escolhido. Para implementar esta estratégia, é necessário realizar fatoração LU da matriz $G-\sigma\cdot H$, e calcular iterativamente nu e, indiretamente, os autovalores λ.

No entanto, todo método iterativo implica em um erro, o qual é determinado pela precisão que se deseja trabalhar. Estes erros somados a erros numéricos eventualmente cometidos pelo *software Matlab* podem fazer com que autovalores que deveriam ter parte real negativa sejam calculados com parte real positiva, originando as regiões onde há poucos autovalores com parte real positiva como nas Fig. (7) e (9).

A adição de termos de inércia ao equacionamento possivelmente eliminaria tal singularidade e tornaria o modelo mais próximo de um escoamento real, mas tornaria o equacionamento muito mais complexo e foge ao escopo deste trabalho. Uma excelente continuação para este trabalho seria complementar o modelo com os termos inerciais e implementar as alterações necessárias nas rotinas computacionais.

Uma alternativa que vinha sendo implementada até o momento da entrega deste trabalho era diagonalizar as matrizes G e H na eq.(19), obtendo um bloco de matrizes cujos autovalores são nulos (bloco responsável pela singularidade verificada), e um bloco cujos autovalores são finitos e não nulos. Desta forma, bastaria resolver apenas o problema envolvendo o segundo bloco mencionado.

9. Conclusões

Os principais objetivos deste trabalho foram concretizados: aplicou-se a teoria da estabilidade linear no estudo de escoamentos multifásicos e desenvolveram-se rotinas em *Matlab* para a análise da estabilidade do estado estacionário.

Com base na teoria de estabilidade linear, foram desenvolvidas as equações que governam as perturbações do estado estacionário em um escoamento em um sistema *pipeline-riser* simplificado. O equacionamento foi implementado em rotinas computacionais no *Matlab*, as quais foram devidamente testadas quanto ao seu correto funcionamento. Assim, possibilitou-se a análise da estabilidade do estado estacionário de forma mais simples e mais econômica que o modelo utilizado em Baliño (2006), através de mapas de estabilidade gerados a partir do espectro de autovalores obtido.

Até a data de entrega deste trabalho, os resultados da análise de estabilidade pela teoria de estabilidade linear não foram satisfatórios. O modelo prediz regiões instáveis para configurações experimentalmente comprovadas estáveis. A singularidade da matriz H do problema estudado faz necessário o uso de um método iterativo para o cálculo dos autovalores, implicando em erros numéricos inerentes a este tipo de cálculo.

É importante salientar que a aplicação da teoria da estabilidade linear aqui utilizada para traçar mapas de estabilidade é um trabalho original, jamais empregado para analisar o comportamento de escoamentos multifásicos como o do modelo estudado, e que todas as rotinas foram testadas e funcionam corretamente, de modo que os interessados em continuar este trabalho possam utilizá-las sem necessidade de revisão ou de refazer os testes.

Como continuação deste trabalho, sugere-se pesquisar e aplicar ao modelo: novas alternativas para o cálculo do espectro de autovalores (como separar o problema singular do problema com autovalores finitos), considerar *riser* de geometria catenária e fração de vazio no *pipeline* variável no tempo e adicionar termos inerciais ao equacionamento, a fim de eliminar o problema da singularidade, adequando o equacionamento às alterações eventualmente propostas.

10 Referências

Baliño, J. L., 2008, "Análise de intermitência severa em *risers* de geometria catenária", Tese de Livre Docência, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 141 p.

Baliño, J. L., 2006, "Análise de intermitência severa em risers de geometria catenária", Relatório Final Projeto Petrobras/FUSP 0050.0007646.04.2, 191 p.

Burr, K. P. and Baliño, J. L., 2008, "Stationary state assymptotic solution for two-phase flows in pipeline-riser systems of general geometry", V Congresso Nacional de Engenharia Mecânica (CONEM 2008), Salvador, Brasil, Agosto.

Burr, K. P., 2009, "Análise de estabilidade para riser em catenária: resumo de equações", São Paulo, 45 p.

Oliveira, R. R. A. de, 2009, "Implementação numérica e análises paramétricas para estudos de Intermitência Severa em sistemas de produção de petróleo", São Paulo, 66p.

Taitel, Y., 1986, "Stability of severe slugging", Int. J. Multiphase Flow 12, pp. 203-217.

Taitel, Y. et al., 1990, "Severe Slugging in a riser system: experiments and modeling", Int. J. Multiphase Flow 16, pp. 57-68.

Lehoucq, R.B., Sorensen, D.C., & Yang, C., 1998, "ARPACK Users' Guide: Solution of Large-Scale Eigenvalue Problems with Implicitly Restarted Arnoldi Methods", SIAM Publications, Philadelphia, 152p.

11. Direitos autorais

ANALYSIS OF HYDRODYNAMIC STABILITY OF MULTIPHASE FLOWS VIA IMPLICITLY RESTARTED ARNOLDI METHOD

Wellington Lombardo Nunes de Mello
tomlnmello@hotmail.com

Jorge L. Baliño
jlbalino@usp.br

Karl Peter Burr
kpburr@gmail.com

Abstract..The objective of this work is to analyze the hydrodynamic stability of multiphase flow models in oil production systems. This analysis is made via the Implicitly Restarted Arnoldi Method to obtain the eigenvalue spectrum of the problem. Special computational and analytical tools are developed in order to evaluate the regions where the steady-state flow occurs and the regions where exist different types of intermittency, like severe slugging. The finite difference method is used for the flow spatial discretization. In order to draw a boundary between the unstable and stable flow regions, stability maps are generated for a certain input data. The obtained maps are compared with experimental works found in literature, this way is possible to validate the approach used (Theory of Linear Stability).

Keywords. *multiphase flows, hydrodynamic stability, petroleum production, severe slugging, stability maps, Implicitly Restarted Arnoldi method.*