

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO ESCOLA POLITÉCNICA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

**SOFTWARE DE SIMULAÇÃO DE  
ESCOAMENTOS EXTERNOS USANDO O  
MÉTODO LATTICE BOLTZMANN**

KLEBER CARRAPATOSO NASCIMENTO JUNIOR

São Paulo

2010



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO ESCOLA POLITÉCNICA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

**SOFTWARE DE SIMULAÇÃO DE  
ESCOAMENTOS EXTERNOS USANDO O  
MÉTODO LATTICE BOLTZMANN**

KLEBER CARRAPATOSO NASCIMENTO JUNIOR

Trabalho de formatura apresentado à Escola  
Politécnica da Universidade de São Paulo para  
obtenção do título de Graduação em Engenharia

Orientador: Fábio Saltara

Área de Concentração:  
Engenharia Mecânica

São Paulo

2010

## **FICHA CATALOGRÁFICA**

**Nascimento Junior, Kleber Carrapatoso**

**Software de simulação de escoamentos externos usando o método Lattice Boltzmann / K.C. Nascimento Junior. – São Paulo, 2010.**

**p. 40**

**Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.**

**1. Mecânica dos fluidos computacional I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II. t.**

## **Resumo**

Este trabalho de formatura se insere no contexto da dinâmica dos fluidos computacionais. Desenvolve-se um software de simulação para o escoamento incompressível externo ao redor de cilindros circulares, utilizando a linguagem de programação *C++* e o método Lattice Boltzmann que será apresentado.

## **Abstract**

This work deals with the computational fluid dynamics. We develop a software to simulate incompressible flows through circular cylinders, using the *C++* programming language and the Lattice Boltzmann Method, which is presented therein.

---

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Objetivos . . . . .	1
1.2	Metodologia . . . . .	1
1.3	Etapas a serem desenvolvidas . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Método Lattice Boltzmann</b>	<b>3</b>
2.1	Equação Lattice Boltzmann . . . . .	3
2.2	Obtenção das equações macroscópicas . . . . .	3
2.2.1	Expansão Chapman-Enskog . . . . .	4
2.2.2	Operador BGK . . . . .	5
2.2.3	Obtenção da equação da continuidade . . . . .	6
2.2.4	Obtenção da equação de Navier-Stokes . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Aplicação a escoamentos externos</b>	<b>8</b>
3.1	Definições . . . . .	8
3.2	Condição inicial . . . . .	10
3.3	Condições de contorno . . . . .	11
3.3.1	Entrada ( <i>Inlet</i> ) . . . . .	11
3.3.2	Parede ( <i>Wall</i> ) . . . . .	11
3.3.3	Periódica ( <i>Periodic</i> ) . . . . .	11
3.4	Implementação do código . . . . .	13
3.4.1	Variáveis Macroscópicas . . . . .	13
3.4.2	Etapa de colisão . . . . .	14
3.4.3	Etapa de convecção . . . . .	14
3.4.4	Algoritmo . . . . .	15
3.5	Simulações e análise dos resultados . . . . .	15
3.5.1	Escoamento sobre placas planas . . . . .	16
3.5.2	Escoamento ao redor de um cilindro . . . . .	21
3.5.3	Cálculo do coeficiente de arrasto e do número de Strouhal . . . . .	26

---

# LISTA DE TABELAS

1.1 Cronograma . . . . .	2
--------------------------	---

---

## LISTA DE FIGURAS

3.1	Lattice . . . . .	8
3.2	Lattice D2Q9 . . . . .	9
3.3	Esquema <i>Bounce-Back</i> . . . . .	12
3.4	Tipos de nós : verde-> outside-boundary node; preto-> outside node; vermelho-> cylinder-boundary node; azul-> inside node . . . . .	13
3.5	Escoamento sobre placas planas: $t = 0.5 s$ . Gráfico da norma da ve- locidade $ u  = ( u_x ^2 +  u_y ^2)^{1/2}$ . . . . .	17
3.6	Escoamento sobre placas planas: $t = 2.5 s$ . Gráfico da norma da ve- locidade $ u  = ( u_x ^2 +  u_y ^2)^{1/2}$ . . . . .	18
3.7	Escoamento sobre placas planas: $t = 7.5 s$ . Gráfico da norma da ve- locidade $ u  = ( u_x ^2 +  u_y ^2)^{1/2}$ . . . . .	19
3.8	Escoamento sobre placas planas: $t = 20 s$ . Gráfico da norma da ve- locidade $ u  = ( u_x ^2 +  u_y ^2)^{1/2}$ . . . . .	20
3.9	Escoamento ao redor de um cilindro: $t = 100 s$ . Gráfico da norma da velocidade $ u  = ( u_x ^2 +  u_y ^2)^{1/2}$ . . . . .	22
3.10	Escoamento ao redor de um cilindro: $t = 580 s$ . Gráfico da norma da velocidade $ u  = ( u_x ^2 +  u_y ^2)^{1/2}$ . . . . .	23
3.11	Escoamento ao redor de um cilindro: $t = 2500 s$ . Gráfico da norma da velocidade $ u  = ( u_x ^2 +  u_y ^2)^{1/2}$ . . . . .	24
3.12	Escoamento ao redor de um cilindro: $t = 2800 s$ . Gráfico da norma da velocidade $ u  = ( u_x ^2 +  u_y ^2)^{1/2}$ . . . . .	25
3.13	Escoamento ao redor de um cilindro: $R_e = 100$ . Coeficiente de arrasto.	26
3.14	Escoamento ao redor de um cilindro: $R_e = 100$ . Força de sustentação .	27
3.15	Escoamento ao redor de um cilindro: $R_e = 200$ . Coeficiente de arrasto.	28
3.16	Escoamento ao redor de um cilindro: $R_e = 200$ . Força de sustentação .	29

# INTRODUÇÃO

O método Lattice Boltzmann foi desenvolvido recentemente como um método numérico alternativo para a simulação de escoamentos de fluidos. Diferentemente dos métodos numéricos tradicionais que são baseados na discretização das equações macroscópicas (continuidade e Navier-Stokes), o LBM (*Lattice Boltzmann Method*) é baseado em uma modelagem microscópica e em equações cinéticas mesoscópicas. A idéia do LBM é construir modelos simplificados de uma forma que suas propriedades macroscópicas obedeçam as equações de continuidade e de Navier-Stokes.

## 1.1 Objetivos

O objetivo deste trabalho é de fazer um estudo teórico preliminar do método Lattice Boltzmann e depois de desenvolver um software para a simulação de escoamentos externos ao redor de um cilindro circular. Será considerado um escoamento um escoamento bi-dimensional e incompressível.

## 1.2 Metodologia

Para a realização deste projeto, será utilizada a linguagem de programação  $C++$  junto com o método Lattice Boltzmann para o desenvolvimento do software. O programa desenvolvido deverá prever o coeficiente de arrasto  $C_d$  e o número de Strouhall  $S_t$  na faixa de número de Reynolds  $100 < Re < 200$ . Finalmente, para validar o programa, os resultados serão comparados com resultados experimentais relatados na literatura.

## 1.3 Etapas a serem desenvolvidas

Durante o projeto, as etapas a serem desenvolvidas são : análise da literatura, desenvolvimento do software, simulações , comparação com experimentos, além da documentação . O cronograma físico é mostrado abaixo.

Tabela 1.1: Cronograma

	jul	ago	set	out	nov	dez
Análise da literatura	X	X				
Desenvolvimento do software			X	X		
Simulações			X	X	X	
Relatório final				X	X	
Comparação com experimentos				X	X	
Artigo técnico e pôster					X	X

# MÉTODO LATTICE BOLTZMANN

Neste capítulo estudaremos o método Lattice Boltzmann. Primeiramente, apresentaremos a equação Lattice Boltzmann que é a base deste método e em seguida obteremos as equações da continuidade e de Navier-Stokes a partir dela.

## 2.1 Equação Lattice Boltzmann

Nesta seção será apresentada a equação lattice Boltzmann, chamada LBE (*Lattice Boltzmann Equation*). Além disso, obteremos as equações macroscópicas da dinâmica dos fluidos a partir da mesma.

Seja  $f_i(x, t) = f(x, e_i, t)$  a função de distribuição de velocidade das partículas na direção  $i$ , onde  $x \in \mathbb{R}^d$  (normalmente  $d = 2$  ou  $3$ ) representa a variável de espaço,  $t$  de tempo e  $e_i$  as velocidades discretizadas.

A equação LBE é dada por [1, 4, 3]

$$f_i(x + e_i, t + 1) = f_i(x, t) + \Omega_i(f(x, t)), \quad i = 0, 1, \dots, M \quad (2.1)$$

onde  $\Omega_i(f(x, t))$  representa o operador de colisão. Este operador deve preservar a conservação de massa e momento, assim temos

$$\sum_i \Omega_i = 0, \quad \sum_i e_i \Omega_i = 0. \quad (2.2)$$

As variáveis macroscópicas do fluido densidade  $\rho$  e densidade de momento  $\rho u$  são definidas pelos momentos de ordem 0 e 1, respectivamente, da função de distribuição  $f_i$

$$\rho = \sum_i f_i, \quad \rho u = \sum_i f_i e_i. \quad (2.3)$$

## 2.2 Obtenção das equações macroscópicas

Expandindo a equação 2.1 em séries de Taylor até a segunda ordem, temos

$$(\partial_t + e_i \cdot \nabla) f_i + \left( \frac{1}{2} e_i e_i : \nabla^2 + \partial_t e_i \cdot \nabla + \frac{1}{2} \partial_t^2 \right) f_i = \Omega_i \quad (2.4)$$

onde  $e_i e_i : \nabla^2 f_i$  representa

$$\sum_{\alpha=1}^d \sum_{\beta=1}^d (e_i)_\alpha (e_i)_\beta \partial_\alpha (\partial_\beta f_i).$$

### 2.2.1 Expansão Chapman-Enskog

Utilizaremos em seguida, para obter as equações macroscópicas, a expansão de Chapman-Enskog. Essa expansão consiste em separar a variável de tempo  $t$  em duas escalas de tempo  $t_1$  e  $t_2$ . Definimos  $t_1$  como a escala de tempo para fenômenos rápidos como a convecção e  $t_2$  para fenômenos lentos como a difusão .

Sendo assim, utilizando um parâmetro  $\varepsilon$ , expandimos a derivada  $\partial_t$

$$\partial_t = \varepsilon \partial_{t_1} + \varepsilon^2 \partial_{t_2} + O(\varepsilon^3). \quad (2.5)$$

Da mesma forma, expandimos a derivada espacial, mas de apenas uma ordem

$$\nabla = \varepsilon \nabla_{x_1} + O(\varepsilon^2). \quad (2.6)$$

Usamos a mesmo tipo de perturbação para  $f_i$  ao redor da distribuição de equilíbrio  $f_i^{(0)}$  e obtemos

$$f_i = f_i^{(0)} + \varepsilon f_i^{(1)} + O(\varepsilon^2). \quad (2.7)$$

e a distribuição de equilíbrio  $f_i^{(0)}$  conserva massa e momento, como a equação (2.3)

$$\rho = \sum_i f_i = \sum_i f_i^{(0)}, \quad \rho u = \sum_i f_i e_i = \sum_i f_i^{(0)} e_i. \quad (2.8)$$

Além disso, temos de [1, 4, 3] que a função de distribuição do equilíbrio pode ser escrita como

$$f_i^{(0)} = \rho \omega_i \left[ 1 + \frac{u \cdot e_i}{c_s^2} + \frac{(u \cdot e_i)^2}{2c_s^4} - \frac{u^2}{2c_s^2} \right] \quad (2.9)$$

onde  $\omega_i$  é um peso.

Inserindo as equações (2.5), (2.6), (2.7) em (2.4) e utilizando o mesmo tipo de expansão para o operador  $\Omega_i$ , temos

$$\begin{aligned} \Omega_i &= \varepsilon \left[ (\partial_{t_1} + e_i \cdot \nabla_{x_1}) f_i^{(0)} \right] \\ &+ \varepsilon^2 \left[ (\partial_{t_1} + e_i \cdot \nabla_{x_1}) f_i^{(1)} + \left( \partial_{t_2} + \frac{1}{2} \partial_{t_1}^2 + \partial_{t_1} e_i \cdot \nabla_{x_1} + \frac{1}{2} e_i e_i : \nabla_{x_1}^2 \right) f_i^{(0)} \right] \\ &= \Omega_i^{(0)} + \varepsilon \Omega_i^{(1)} + \varepsilon^2 \Omega_i^{(2)} \end{aligned} \quad (2.10)$$

e considerando os termos de ordens diferentes em  $\varepsilon$  independentes (representam diferentes ordens de magnitude), obtemos

$$\Omega_i^{(1)} = (\partial_{t_1} + e_i \cdot \nabla_{x_1}) f_i^{(0)} \quad (2.11)$$

$$\Omega_i^{(2)} = (\partial_{t_1} + e_i \cdot \nabla_{x_1}) f_i^{(1)} + \left( \partial_{t_2} + \frac{1}{2} \partial_{t_1}^2 + \partial_{t_1} e_i \cdot \nabla_{x_1} + \frac{1}{2} e_i e_i : \nabla_{x_1}^2 \right) f_i^{(0)}. \quad (2.12)$$

## 2.2.2 Operador BGK

Consideramos agora  $\Omega_i$  como o operador de colisão BGK [1, 4, 3], que representa um tempo simples de relaxamento  $\tau$  da função de distribuição à função de equilíbrio  $f_i^{(0)}$

$$\Omega_i = -\frac{1}{\tau} (f_i - f_i^{(0)}) \quad (2.13)$$

e utilizando (2.7) temos

$$\Omega_i = -\frac{1}{\tau} \left( \varepsilon f_i^{(1)} + \varepsilon^2 f_i^{(2)} + O(\varepsilon^3) \right). \quad (2.14)$$

A partir desta última equação e (2.2)

$$\sum_i \Omega_i^{(k)} = -\frac{1}{\tau} \sum_i f_i^{(k)} = 0, \quad k > 0, \quad (2.15)$$

$$\sum_i e_i \Omega_i^{(k)} = -\frac{1}{\tau} \sum_i e_i f_i^{(k)} = 0, \quad k > 0. \quad (2.16)$$

Calculando o momento de ordem zero de (2.11), temos

$$\sum_i \Omega_i^{(1)} = \partial_{t_1} \sum_i f_i^{(0)} + \nabla_{x_1} \cdot \sum_i e_i f_i^{(0)} = 0 \quad (2.17)$$

que implica em

$$\partial_{t_1} \rho + \nabla_{x_1} \cdot \rho u = 0. \quad (2.18)$$

Calculamos agora o momento de ordem zero da equação (2.12)

$$\begin{aligned} \sum_i \Omega_i^{(2)} &= \partial_{t_1} \sum_i f_i^{(1)} + \nabla_{x_1} \cdot \sum_i e_i f_i^{(1)} + \partial_{t_2} \sum_i f_i^{(0)} + \frac{1}{2} \partial_{t_1}^2 \sum_i f_i^{(0)} \\ &+ \partial_{t_1} \nabla_{x_1} \cdot \sum_i e_i f_i^{(0)} + \frac{1}{2} \nabla_{x_1}^2 : \sum_i e_i e_i f_i^{(0)} = 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

e então, como os dois primeiros termos são nulos, chegamos a

$$\partial_{t_2} \rho + \frac{1}{2} \partial_{t_1}^2 \rho + \partial_{t_1} \nabla_{x_1} \cdot \rho u + \frac{1}{2} \nabla_{x_1}^2 : \sum_i e_i e_i f_i^{(0)} = 0. \quad (2.20)$$

Utilizando os mesmos argumentos anteriores, podemos calcular o momento de ordem 1 das equações (2.11) e (2.12). Assim, obtemos respectivamente

$$\partial_{t_1} \rho u + \nabla_{x_1} \cdot \sum_i e_i e_i f_i^{(0)} = 0. \quad (2.21)$$

e

$$\begin{aligned} \nabla_{x_1} \cdot \sum_i e_i e_i f_i^{(1)} + \partial_{t_2} \rho u + \frac{1}{2} \partial_{t_1}^2 \rho u \\ + \partial_{t_1} e_i \cdot \sum_i e_i e_i f_i^{(0)} + \frac{1}{2} \nabla_{x_1}^2 : \sum_i e_i e_i e_i f_i^{(0)} = 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

### 2.2.3 Obtenção da equação da continuidade

À partir de (2.18) e (2.20), obtemos facilmente

$$\partial_{t_2} \rho + \frac{1}{2} \left( \partial_{t_1} \nabla_{x_1} \cdot \rho u + \nabla_{x_1}^2 : \sum_i e_i e_i f_i^{(0)} \right) = 0. \quad (2.23)$$

Como a expressão dentro dos parênteses é o divergente de (2.21), obtemos que

$$\partial_{t_2} \rho = 0.$$

Sendo assim, utilizando que  $\partial_t \rho = \varepsilon \partial_{t_1} \rho$  em (2.18), obtemos a equação da continuidade

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \rho u = 0.$$

### 2.2.4 Obtenção da equação de Navier-Stokes

Para obtermos a equação de Navier-Stokes, primeiramente combinamos as equações (2.21) e (2.22) para chegar a

$$\partial_t \rho u + \nabla \cdot \left[ \Pi^{(0)} + \varepsilon \Pi^{(1)} + \left( 1 + \frac{1}{2} \partial_t \right) c_s^2 \rho \mathbb{I} + \frac{\varepsilon}{2} \partial_{t_1} \Pi^{(0)} + \frac{1}{2} \nabla \cdot \sum_i e_i e_i e_i f_i^{(0)} \right] = 0. \quad (2.24)$$

onde  $c_s$  é a velocidade do som,  $\mathbb{I}$  é a matrix identidade e

$$\Pi^{(k)} = \sum_i (e_i e_i - c_s^2 \mathbb{I}) f_i^{(k)}$$

foram introduzidos para facilitar a notação.

Calculando os momentos de segunda ordem  $\Pi^{(k)}$  e de terceira ordem  $\sum_i e_i e_i e_i f_i^{(0)}$  [4], chegamos a equação de Navier-Stokes em uma de suas formas

$$\partial_t \rho u + \nabla \cdot \left[ \rho u u + p \mathbb{I} - \rho c_s^2 \left( \tau - \frac{1}{2} \right) (\nabla u + \{\nabla u\}^T) \right] = 0$$

e a viscosidade cinemática é dada por

$$\nu = c_s^2 \left( \tau - \frac{1}{2} \right).$$

É muito importante ressaltar que nessa passagem da equação Lattice Boltzmann para Navier-Stokes, a hipótese de baixo número de Mach  $Ma = |u|/c_s$  é necessária. Sendo assim, o modelo Lattice Boltzmann é válido para escoamentos com baixo número de Mach.

## APLICAÇÃO A ESCOAMENTOS EXTERNOS

Neste capítulo será mostrado o desenvolvimento do software até o momento, assim como as perspectivas de desenvolvimento para o futuro.

O método Lattice Boltzmann será utilizado para a simulação de um escoamento externo bi-dimensional ao redor de um cilindro.

### 3.1 Definições

Primeiramente construímos o Lattice a ser usado como na figura 3.1

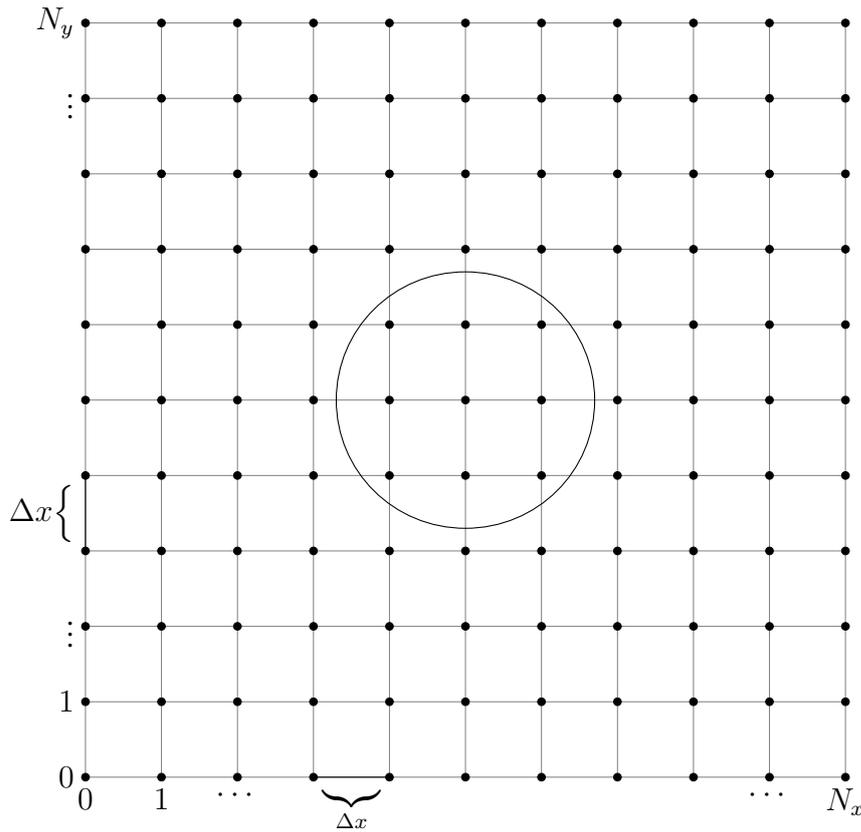


Figura 3.1: Lattice

Assim, temos  $N_x + 1$  nós na direção horizontal e  $N_y + 1$  na vertical. As distâncias horizontal e vertical entre nós será notada  $\Delta x$ .

Em seguida, definimos o tipo de Lattice D2Q9 mostrado na figura 3.1, em duas dimensões e nove discretizações das velocidades.

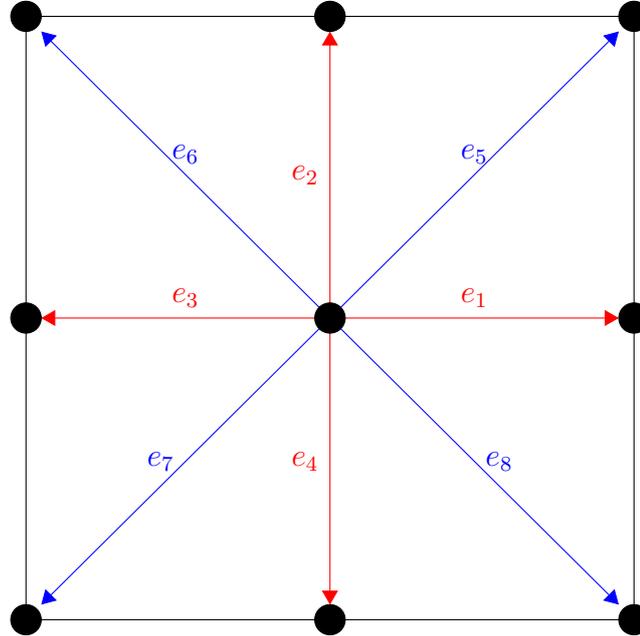


Figura 3.2: Lattice D2Q9

Á partir da figura observamos que

$$\begin{aligned}
 e_0 &= (0, 0), \\
 e_1 &= (1, 0), & e_5 &= (1, 1), \\
 e_2 &= (0, 1), & e_6 &= (-1, 1), \\
 e_3 &= (-1, 0), & e_7 &= (-1, -1), \\
 e_4 &= (0, -1), & e_8 &= (1, -1),
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

em unidades do lattice, ou de uma forma mais geral

$$\begin{aligned}
 e_0 &= (0, 0), \\
 e_1 &= (c, 0), & e_5 &= (c, c), \\
 e_2 &= (0, c), & e_6 &= (-c, c), \\
 e_3 &= (-c, 0), & e_7 &= (-c, -c), \\
 e_4 &= (0, -c), & e_8 &= (c, -c),
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde  $c = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ .

Dessa maneira, representa-se um nó pelas variáveis  $(i, j)$ , com  $i \in \{0, 1, 2, \dots, N_x\}$

e  $j \in \{0, 1, 2, \dots, N_y\}$  e as funções de distribuição para cada nó por  $f_v(i, j)$ , com  $v = 0, 1, \dots, 8$  para as diferentes velocidades discretas.

Relembramos a equação Lattice Boltzmann LBE com operador BGK

$$f_v(x + e_v, t + 1) = f_v(x, t) - \frac{1}{\tau} (f_v(x, t) - f_v^{(0)}(x, t)). \quad (3.3)$$

onde  $v$  representa as diferentes direções de velocidade, neste caso  $v = 0, 1, \dots, 8$ .

Além disso, para o Lattice D2Q9 temos [3] que a função de equilíbrio  $f_v^{(0)}$  é dada por

$$f_v^{(0)} = \omega_v \rho \left[ 1 + 3 e_v \cdot u + \frac{9}{2} (e_v \cdot u)^2 - \frac{3}{2} u^2 \right] \quad (3.4)$$

com  $\omega_0 = 4/9$ ,  $\omega_v = 1/9$  para  $v = 1, 2, 3$  e  $4$ , e  $\omega_v = 1/36$  para  $v = 5, 6, 7$  e  $8$ .

A equação Lattice Boltzmann pode ser dividida em duas etapas :

**Transporte/Convecção** (*Streaming*)

$$\tilde{f}_v(x + e_v, t + 1) = f_v(x, t). \quad (3.5)$$

**Colisão** (*Collision*)

$$f_v(x + e_v, t + 1) = \tilde{f}_v(x + e_i, t + 1) - \frac{1}{\tau} (\tilde{f}_v(x + e_i, t + 1) - f_v^{(0)}(x, t)). \quad (3.6)$$

## 3.2 Condição inicial

Como condição inicial do escoamento, consideramos o fluido com densidade  $\rho(t = 0) = \rho_0$  e velocidades horizontal  $u_x(t = 0) = U_0$  e vertical  $u_y(t = 0) = V_0$ . Para simularmos estas condições iniciais utilizamos a função de equilíbrio (3.4) reescrita a seguir

$$f_v^{(0)} = \omega_v \rho \left[ 1 + 3 e_v \cdot u + \frac{9}{2} (e_v \cdot u)^2 - \frac{3}{2} u^2 \right] \quad (3.7)$$

onde  $\omega_0 = 4/9$ ,  $\omega_v = 1/9$  para  $v = 1, 2, 3$  e  $4$ , e  $\omega_v = 1/36$  para  $v = 5, 6, 7$  e  $8$ .

Assim, para  $t = 0$ , inicializamos as funções de distribuição de velocidades de todo o domínio da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \forall i = 0, 1, \dots, N_x, \forall j = 0, 1, \dots, N_y \\ f_v(i, j) &= f_v^{(0)}(\rho_0, U_0, V_0) \\ &= \omega_v \rho_0 \left[ 1 + 3 e_v \cdot (U_0, V_0) + \frac{9}{2} (e_v \cdot (U_0, V_0))^2 - \frac{3}{2} (U_0, V_0)^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

### 3.3 Condições de contorno

Apresentaremos a seguir diferentes condições de contorno possíveis, assim como a relação entre uma condição de contorno macroscópica e seus valores correspondentes para as variáveis microscópicas.

#### 3.3.1 Entrada (*Inlet*)

Para simular a entrada do fluido com uma velocidade horizontal  $U_{in}$ , velocidade vertical nula e densidade  $\rho_{in}$ , utilizamos novamente a função de equilíbrio (3.4), apenas para a primeira coluna do lattice. Assim temos,

$$\forall j = 0, 1, \dots, N_y$$

$$f_v(i, 0) = f_v^{(0)}(\rho_{in}, U_{in}, 0) = \omega_v \rho_{in} \left[ 1 + 3 e_{x_v} U_{in} + \frac{9}{2} (e_{x_v} U_{in})^2 - \frac{3}{2} U_{in}^2 \right]. \quad (3.9)$$

#### 3.3.2 Parede (*Wall*)

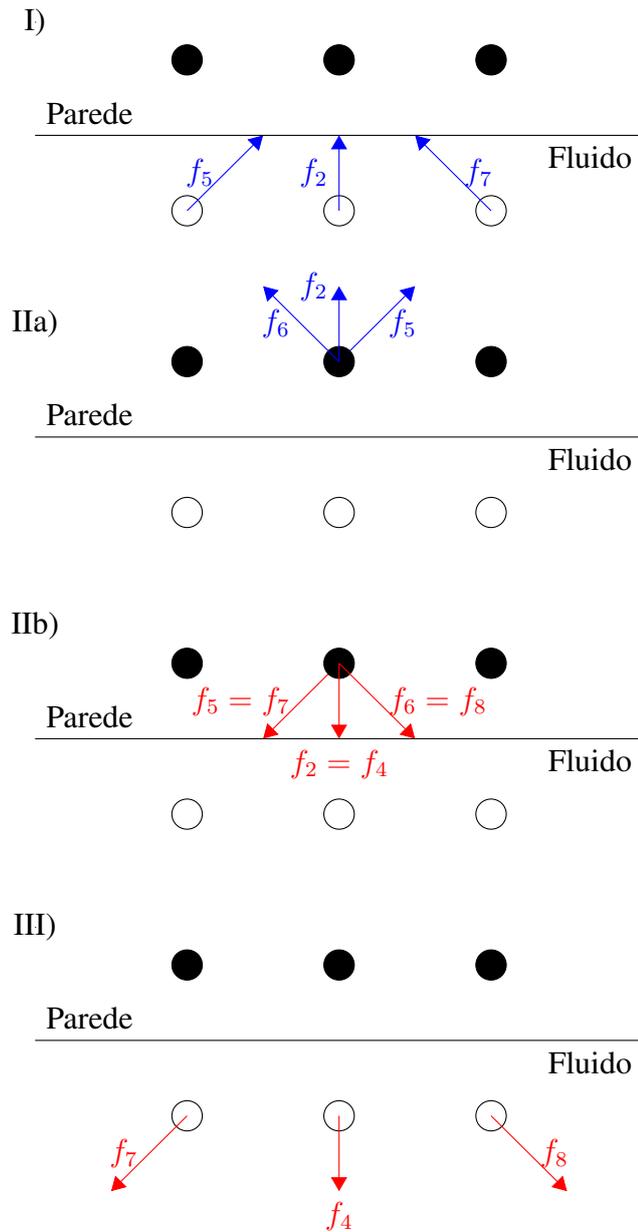
Para simular a condição de contorno de parede utilizamos o esquema *bounce back*. Esse método, mostrado na figura 3.3, consiste em três etapas. Primeiro propaga-se normalmente as funções de distribuição  $f_v$  do nó vizinho a parede (cor branca na figura 3.3) para o nó dentro da parede (cor preta na figura 3.3), como na etapa de transporte/*streaming*. Depois, no passo de tempo seguinte, essas funções são invertidas da seguinte forma

$$\begin{aligned} f_1^{new} &= f_3^{old}, & f_5^{new} &= f_7^{old} \\ f_2^{new} &= f_4^{old}, & f_6^{new} &= f_8^{old} \\ f_3^{new} &= f_1^{old}, & f_7^{new} &= f_5^{old} \\ f_4^{new} &= f_2^{old}, & f_8^{new} &= f_6^{old} \end{aligned} \quad (3.10)$$

e assim ao aplicarmos novamente a etapa de transporte, as funções de distribuição voltam ao seus nós de origem com a direção invertida.

#### 3.3.3 Periódica (*Periodic*)

Podemos aplicar também uma condição periódica para as bordas sul e norte do lattice. Essas bordas correspondem a  $j = 0$  e  $j = N_y$  respectivamente. Essa condição é aplicada na etapa de transporte.

Figura 3.3: Esquema *Bounce-Back*

Mostramos em seguida como fazer os cálculos para o caso  $j = 0$  (e o caso  $j = N_y$  pode ser obtido analogamente)

$$\begin{aligned}
 f_2^{new}(i, 0) &= f_4^{old}(i, N_y) \\
 f_5^{new}(i, 0) &= f_1^{old}(i - 1, N_y) \\
 f_6^{new}(i, 0) &= f_2^{old}(i + 1, N_y)
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

e as outras funções são obtidas normalmente.

## 3.4 Implementação do código

Mostraremos, em pseudo-código, nesta seção como foram desenvolvidas as diferentes etapas do programa para simulação até o momento.

Definimos diferentes tipos de nós como mostrado na figura 3.4

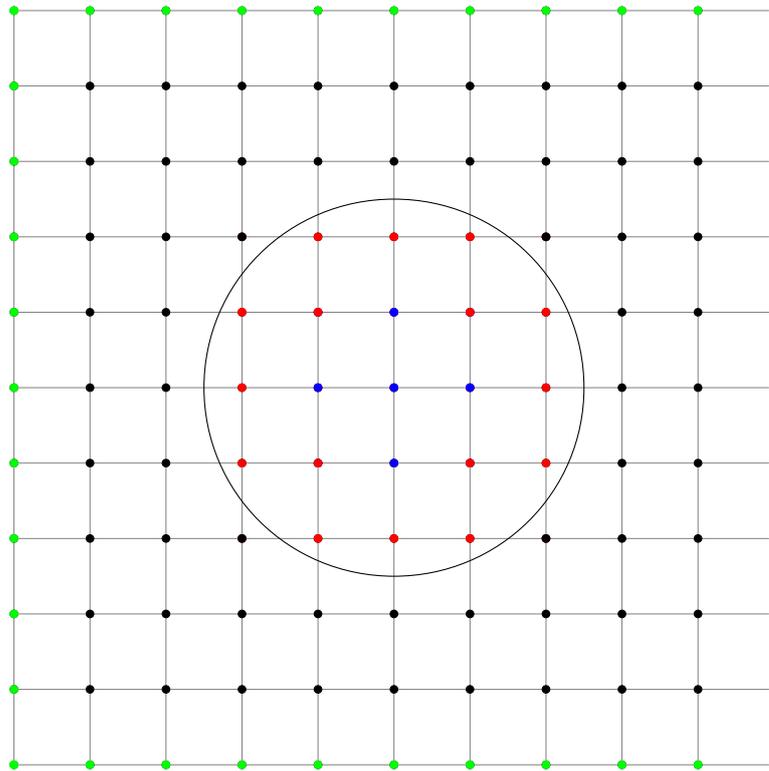


Figura 3.4: Tipos de nós : verde-> outside-bounbary node; preto-> outside node; vermelho-> cylinder-boundary node; azul-> inside node

### 3.4.1 Variáveis Macroscópicas

Para o cálculo das variáveis macroscópicas  $\rho$  e  $u$ , usamos as equações (2.3):

```
// Variáveis Macroscópicas rho e u=(ux,uy)
for i=0,1,...,Nx
  for j=0,1,...,Ny
    ux(i,j)=0;
    uy(i,j)=0;
    rho(i,j)=0;

    if( (i,j) não é inside node)
```

```

    for v=0,1,...,8
        rho(i,j) = rho(i,j) + f(i,j,v);
        ux(i,j) = ux(i,j) + ex(v)*f(i,j,v);
        uy(i,j) = uy(i,j) + ey(v)*f(i,j,v);
    end

    ux(i,j) = ux(i,j)/rho(i,j);
    uy(i,j) = uy(i,j)/rho(i,j);
end
end
end

```

### 3.4.2 Etapa de colisão

Nesta etapa utilizamos a equação (3.6):

```

// etapa colisão
for i=0,1,...,Nx
    for j=0,1,...,Ny

        if( (i,j) é outside node)

            for v=0,1,...,8
                f(i,j,v) = ftemp(i,j,v) - ( ftemp(i,j,v) - feq(i,j,v) )/tau;
            end

        end

    end
end
end

```

### 3.4.3 Etapa de convecção

Na etapa de convecção utilizamos a equação (3.5) e o modelo de Lattice da figura 3.1 para “mover” a densidade  $f_v$  para o nó vizinho mais próximo segundo a direção de  $v$ :

```

// etapa convecção
for i=0,1,...,Nx
    for j=0,1,...,Ny

```

```
f0temp(i, j) = f0(i, j);  
f1temp(i, j) = f1(i-1, j);  
f2temp(i, j) = f2(i, j-1);  
f3temp(i, j) = f3(i+1, j);  
f4temp(i, j) = f4(i, j+1);  
f5temp(i, j) = f5(i-1, j-1);  
f6temp(i, j) = f6(i+1, j-1);  
f7temp(i, j) = f7(i+1, j+1);  
f8temp(i, j) = f8(i-1, j+1);  
  
end  
end
```

### 3.4.4 Algoritmo

Mostraremos a seguir como será o algoritmo completo do programa, no qual é necessário implementar condições para o contorno do cilindro, onde ocorrem colisões das partículas do fluido no obstáculo.

1. Início
2. Leitura de dados
3. Inicialização da distribuição inicial
4. Laço de tempo
  - cálculo das variáveis macroscópicas
  - etapa de colisão
  - etapa de convecção
  - condições de contorno
5. Fim

## 3.5 Simulações e análise dos resultados

Mostraremos nessa seção dois tipos de simulação realizados, uma simulação de um escoamento sobre placas planas e um escoamento ao redor de um cilindro.

Em ambas as simulações utilizaremos gráficos da norma da velocidade  $|u| = (|u_x|^2 + |u_y|^2)^{1/2}$ .

### 3.5.1 Escoamento sobre placas planas

Foi realizada uma simulação de um escoamento sobre duas placas planas, considerando uma entrada uniforme de velocidade horizontal  $U_0$  e densidade  $\rho_0$  e as placas planas como parede, utilizando as condições de contorno explicadas anteriormente.

#### Dados da simulação :

$$\begin{aligned}\Delta x &= 0.05, & \nu &= 0.002 \\ N_x &= 400, & \Delta t &= 0.05 \\ N_y &= 50, & \tau &= 0.62 \\ \rho_0 &= 1, & c_s^2 &= \frac{1}{3} \\ U_0 &= 0.02, & Ma &= 0.034641 \\ R_e &= 100\end{aligned}$$

**Resultado e análise:** Mostramos a seguir, nas figuras 3.5 a 3.8, os resultados obtidos

Percebemos pela figura 3.5, no começo do escoamento, um campo de velocidades quase uniforme, com menores velocidades perto das paredes.

Ao longo do tempo, esse perfil de velocidade muda, como vemos nas figuras 3.6 e 3.7, com um aumento gradativo da velocidade perto da parede ao centro do perfil.

Enfim, com a figura 3.8, vemos o desenvolvimento de uma camada limite sobre as duas placas planas, como esperado.

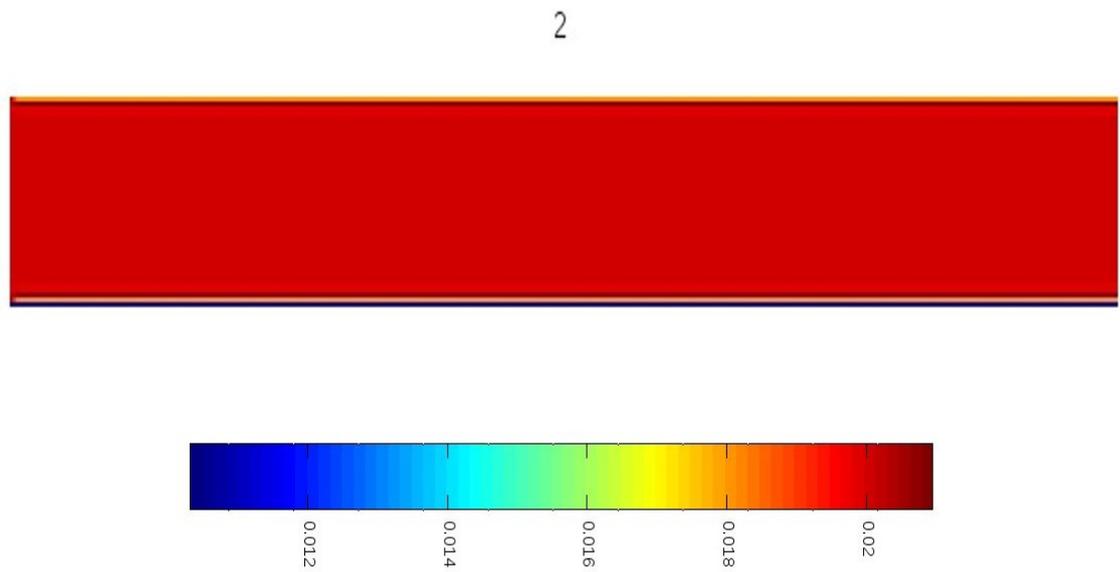


Figura 3.5: escoamento sobre placas planas:  $t = 0.5$  s. Gráfico da norma da velocidade  $|u| = (|u_x|^2 + |u_y|^2)^{1/2}$

10

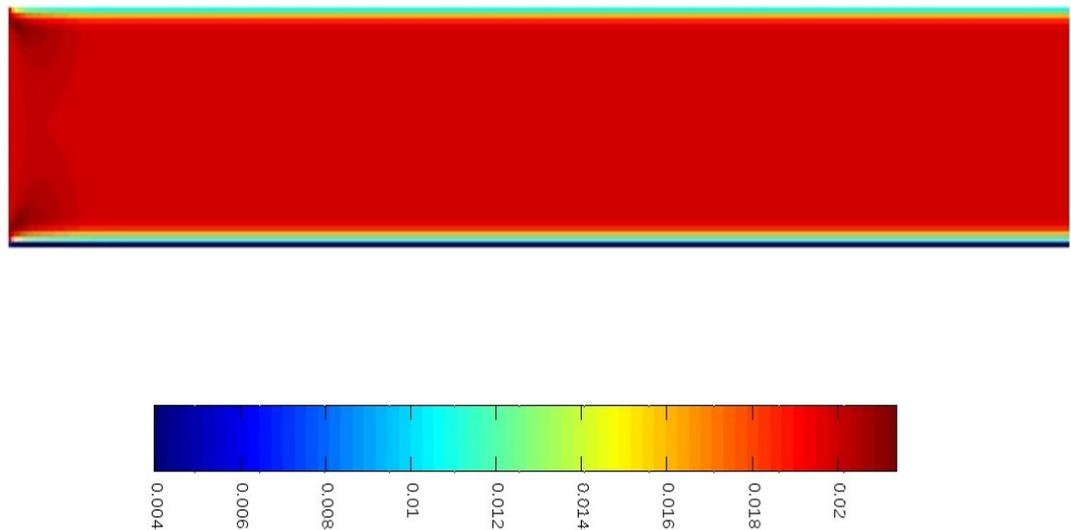


Figura 3.6: escoamento sobre placas planas:  $t = 2.5 s$ . Gráfico da norma da velocidade  $|u| = (|u_x|^2 + |u_y|^2)^{1/2}$

30

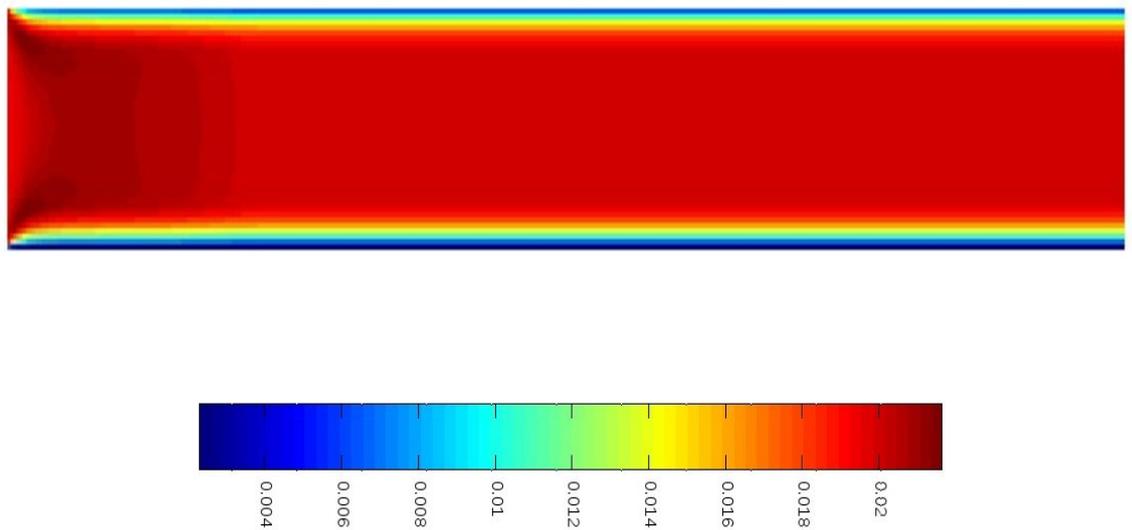


Figura 3.7: escoamento sobre placas planas:  $t = 7.5 s$ . Gráfico da norma da velocidade  $|u| = (|u_x|^2 + |u_y|^2)^{1/2}$

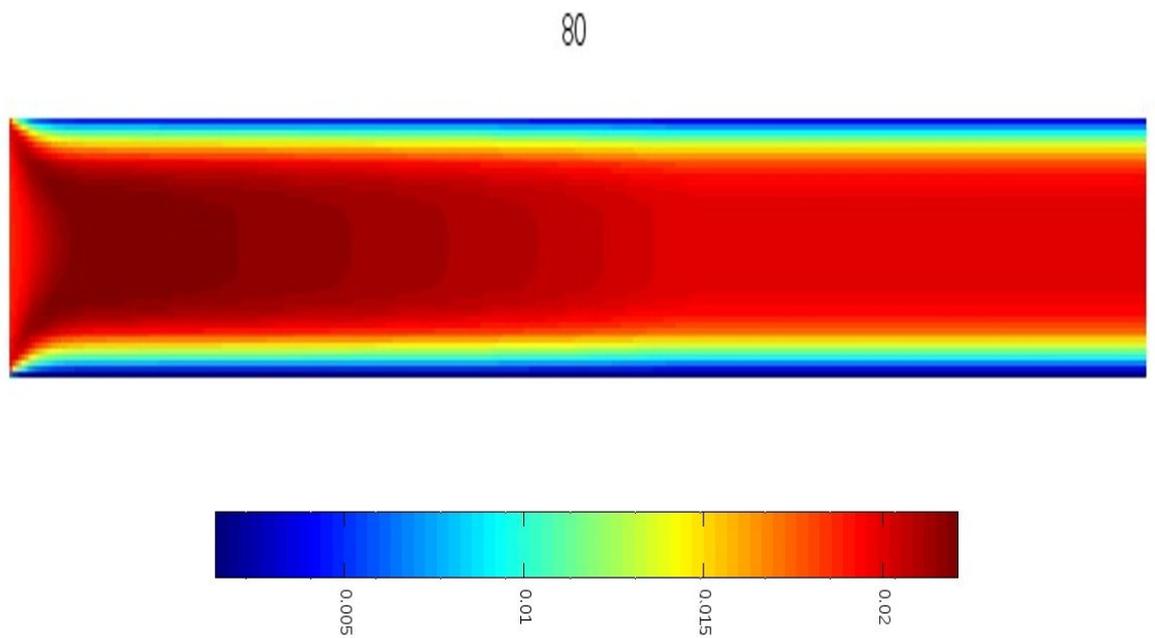


Figura 3.8: escoamento sobre placas planas:  $t = 20$  s. Gráfico da norma da velocidade  $|u| = (|u_x|^2 + |u_y|^2)^{1/2}$

### 3.5.2 Escoamento ao redor de um cilindro

Foi realizada uma simulação ao redor do cilindro, com condição inicial com densidade  $\rho_0$  e velocidade horizontal  $U_0$ , esta condição também foi usada como entrada. Para as bordas norte e sul do domínio foi usada a condição de contorno periódica. Além disso, na borda do cilindro é usada a condição de parede.

#### Dados da simulação :

$$\begin{aligned} \Delta x &= 0.1, & \nu &= 0.0004 \\ N_x &= 250, & \Delta t &= 0.1 \\ N_y &= 200, & \tau &= 0.512 \\ \rho_0 &= 1, & c_s^2 &= \frac{1}{3} \\ U_0 &= 0.02, & M_a &= 0.034641 \\ R_e &= 100 \\ r_c &= 1; \quad x_c = 5, & y_c &= 10 \text{ (dados do cilindro)} \end{aligned}$$

**Resultado e análise:** Mostramos a seguir, nas figuras 3.9 a 3.12, os resultados obtidos

Pode-se perceber claramente a partir da figura 3.9 a formação de dois tipos de região ao redor do cilindro, uma de baixa velocidade na frente e atrás do cilindro e outra de alta velocidade, nas áreas superior e inferior (em comparação a velocidade de entrada do escoamento).

Na figura 3.10, pode-se ver na parte de trás do cilindro uma pequena região de circulação .

Ao longo do tempo essa região aumenta, como vemos na figura 3.11, onde há também um descolamento da camada limite sobre o cilindro e a formação de vórtices.

Para concluir, vemos na figura 3.12 um maior descolamento e a continuação dos vórtices, assim como era esperado.

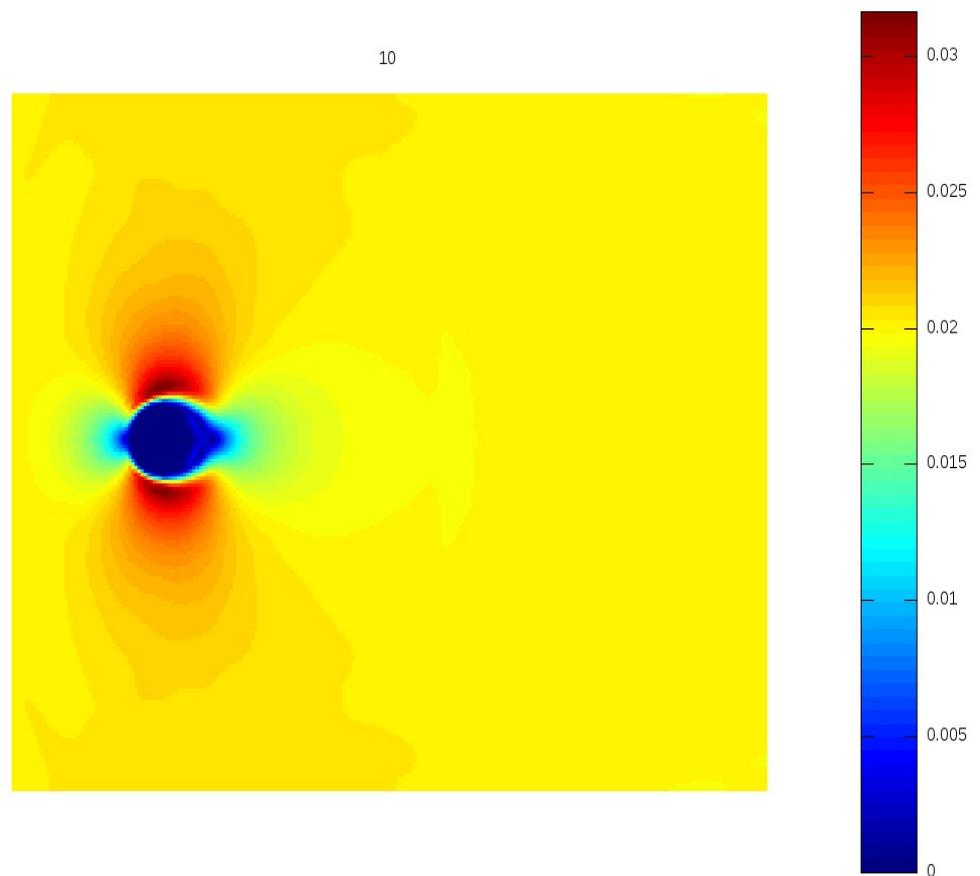


Figura 3.9: escoamento ao redor de um cilindro:  $t = 100$  s. Gráfico da norma da velocidade  $|u| = (|u_x|^2 + |u_y|^2)^{1/2}$

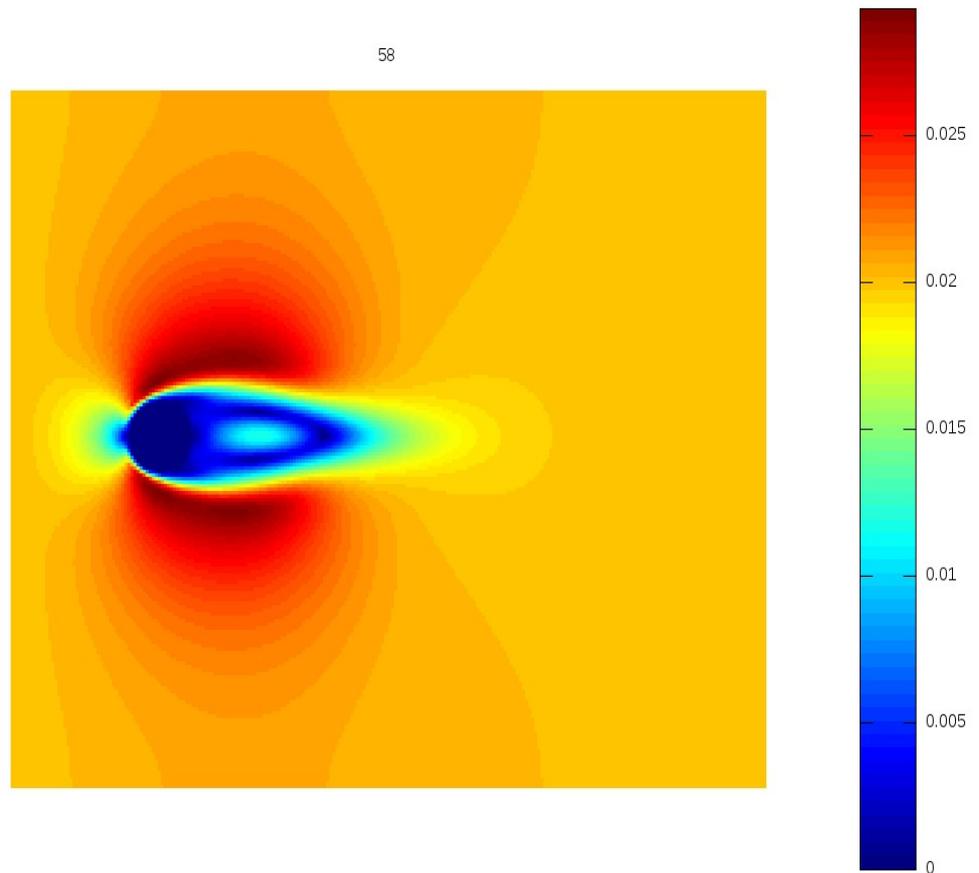


Figura 3.10: escoamento ao redor de um cilindro:  $t = 580$  s. Gráfico da norma da velocidade  $|u| = (|u_x|^2 + |u_y|^2)^{1/2}$

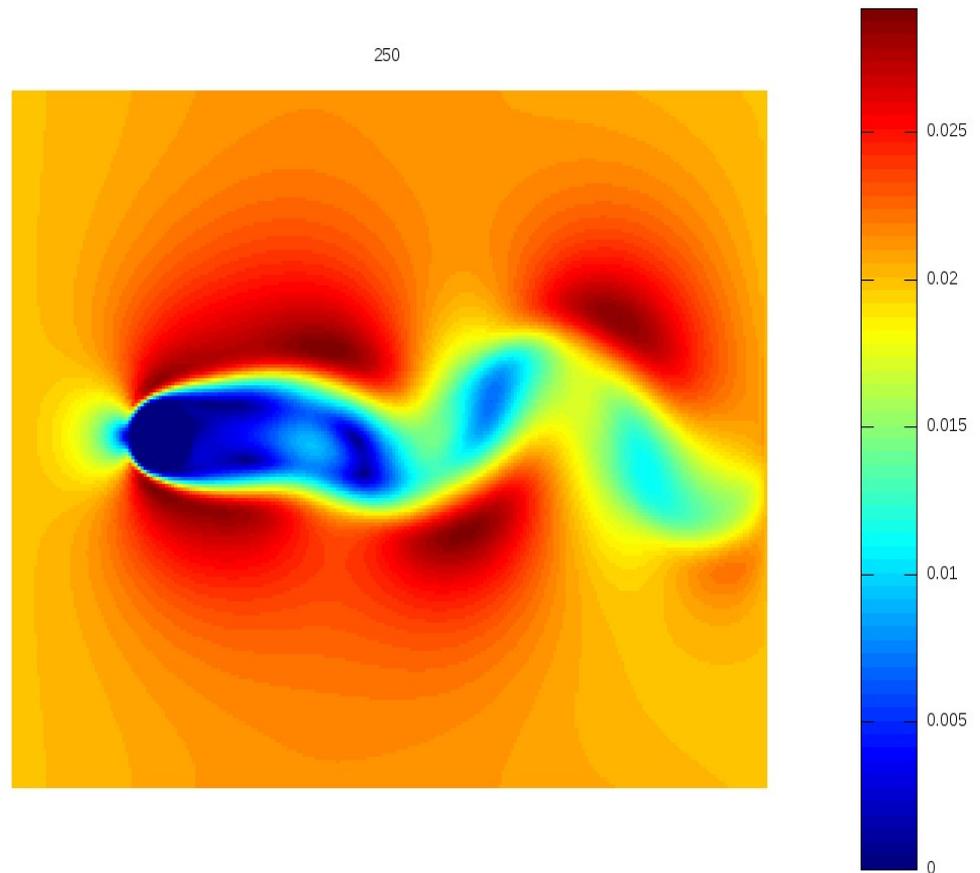


Figura 3.11: escoamento ao redor de um cilindro:  $t = 2500$  s .Gráfico da norma da velocidade  $|u| = (|u_x|^2 + |u_y|^2)^{1/2}$

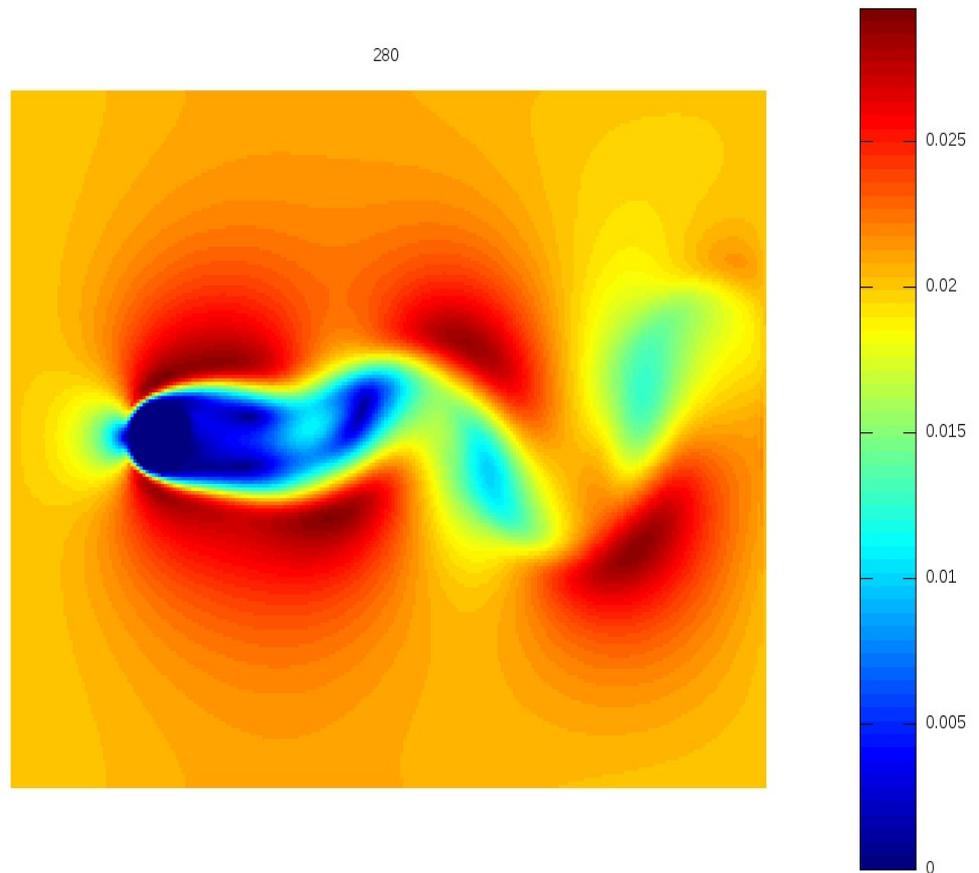


Figura 3.12: escoamento ao redor de um cilindro:  $t = 2800$  s. Gráfico da norma da velocidade  $|u| = (|u_x|^2 + |u_y|^2)^{1/2}$

### 3.5.3 Cálculo do coeficiente de arrasto e do número de Strouhal

Para o escoamento ao redor de um cilindro, foram realizadas duas simulações , com número de Reynolds diferente, para calcular o coeficiente de arrasto  $C_d$  e o número de Strouhal  $S_t$ .

Apresentamos em seguida estas simulações .

#### Número de Reynolds $R_e = 100$

Para  $R_e = 100$ , obtemos os gráficos seguintes do coeficiente de arrasto e da força de sustentação .

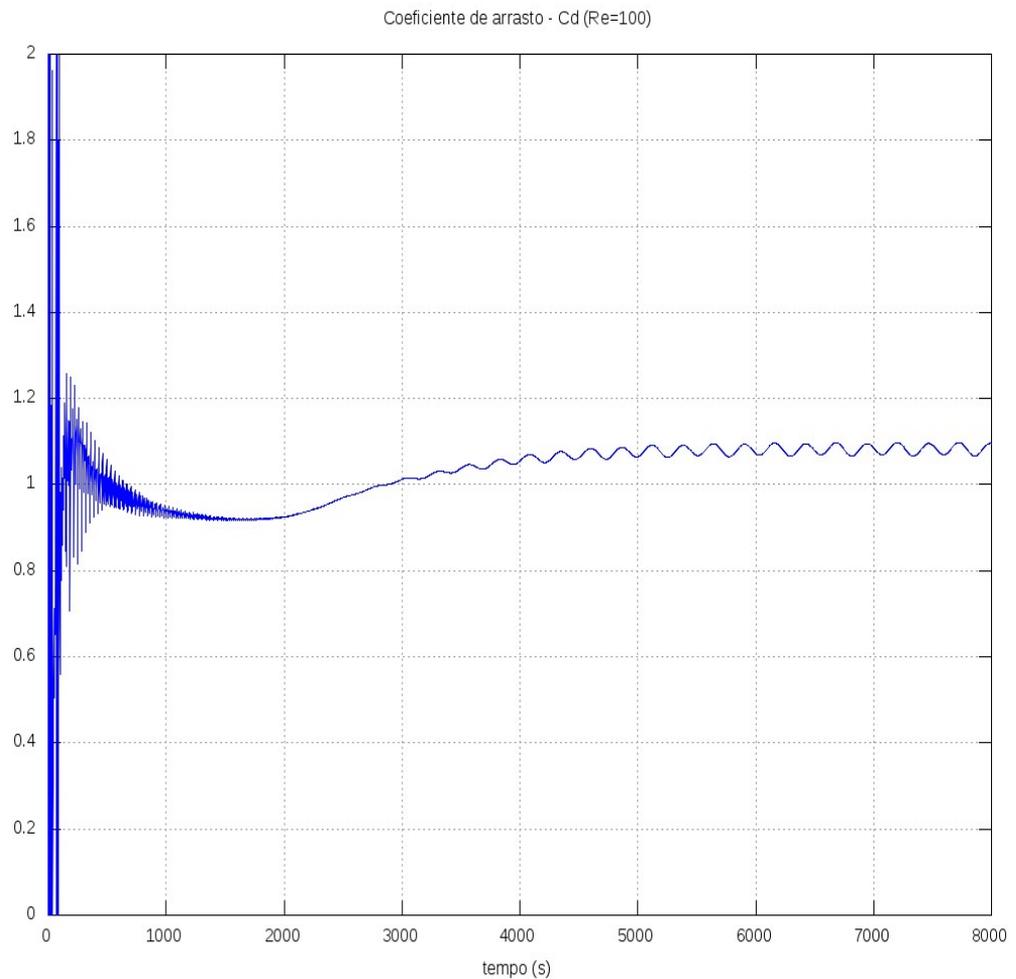


Figura 3.13: Escoamento ao redor de um cilindro:  $R_e = 100$ . Coeficiente de arrasto.

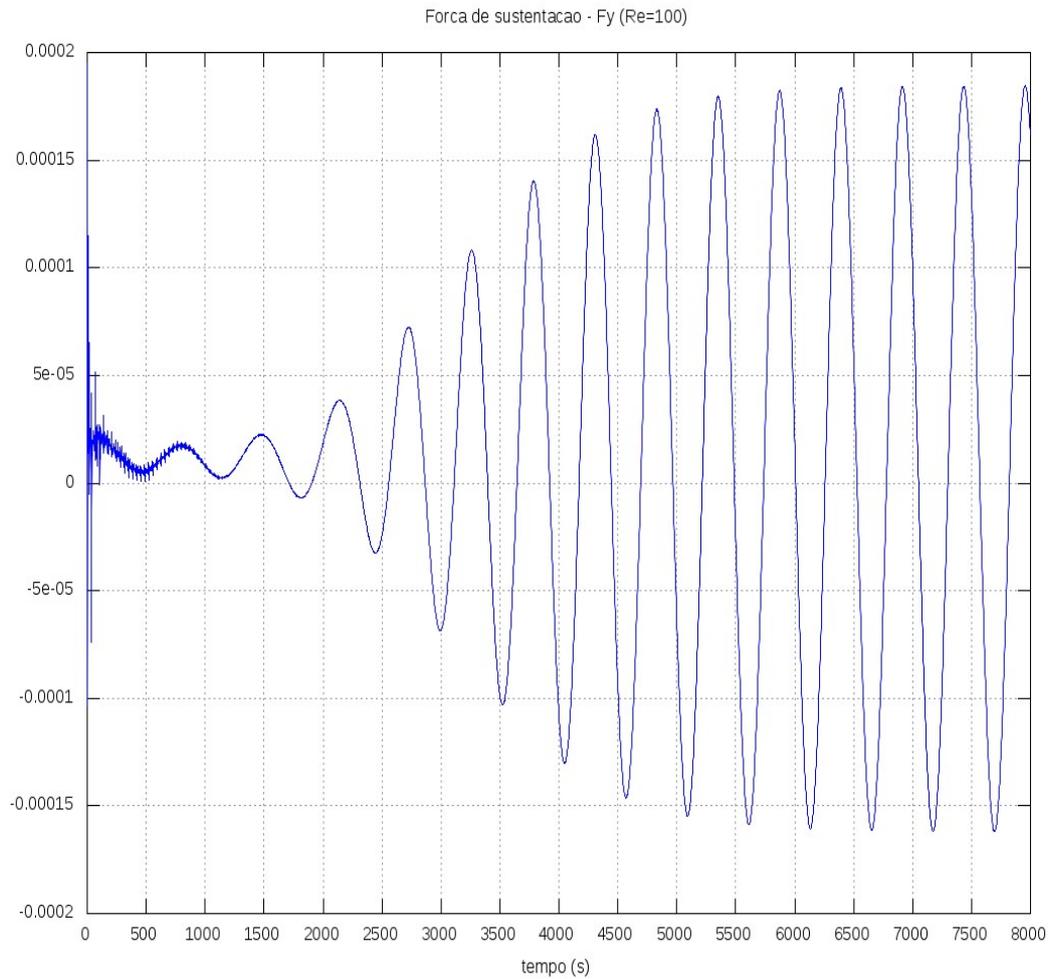


Figura 3.14: Escoamento ao redor de um cilindro:  $Re = 100$ . Força de sustentação .

Pelos gráficos, obtemos o valor do coeficiente de arrasto  $C_d = 1,1$ . Além disso, obtemos a frequência da força de sustentação  $f = \frac{1}{520}$ , e com isso podemos calcular o número de Strouhal

$$S_t = \frac{fD}{U} = \frac{1}{520} \frac{2}{0,02} = 0,19. \quad (3.12)$$

**Número de Reynolds**  $Re = 200$

Para  $Re = 200$ , obtemos os gráficos seguintes do coeficiente de arrasto e da força de sustentação .

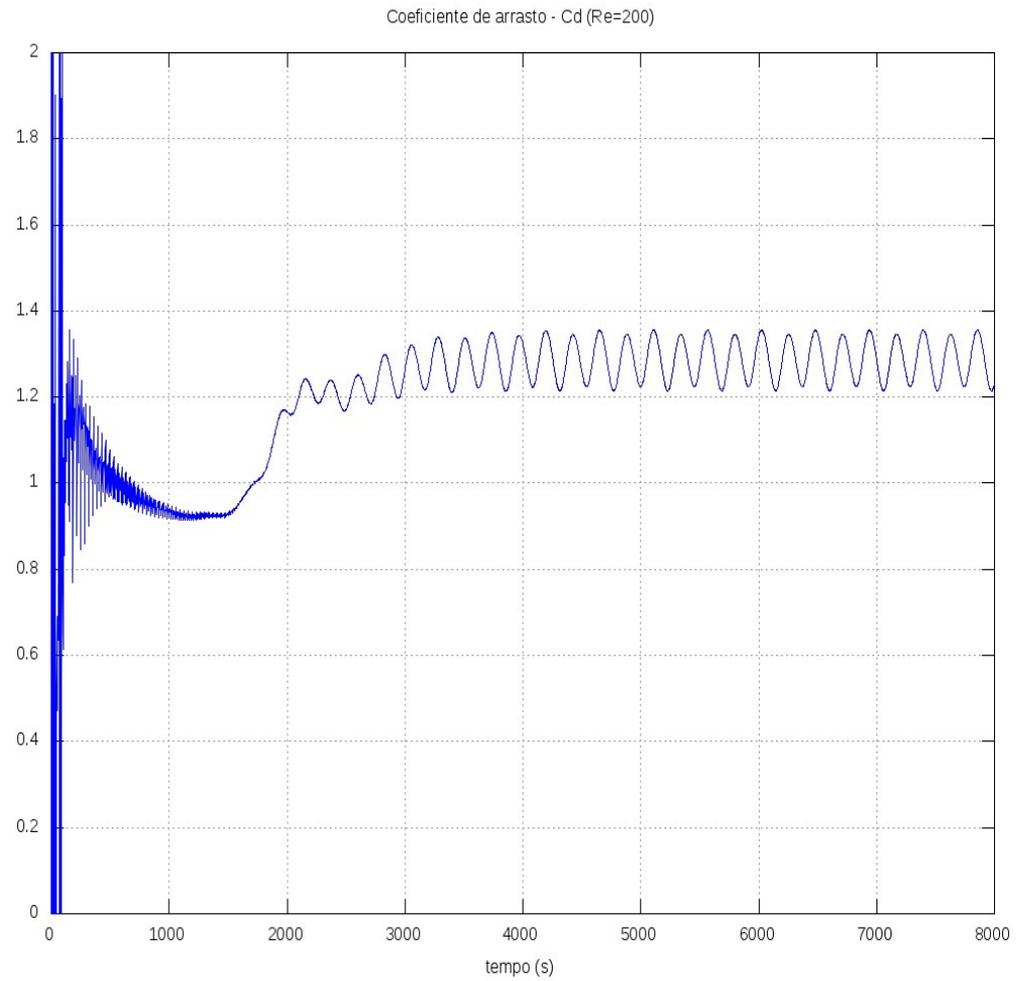


Figura 3.15: Escoamento ao redor de um cilindro:  $Re = 200$ . Coeficiente de arrasto.

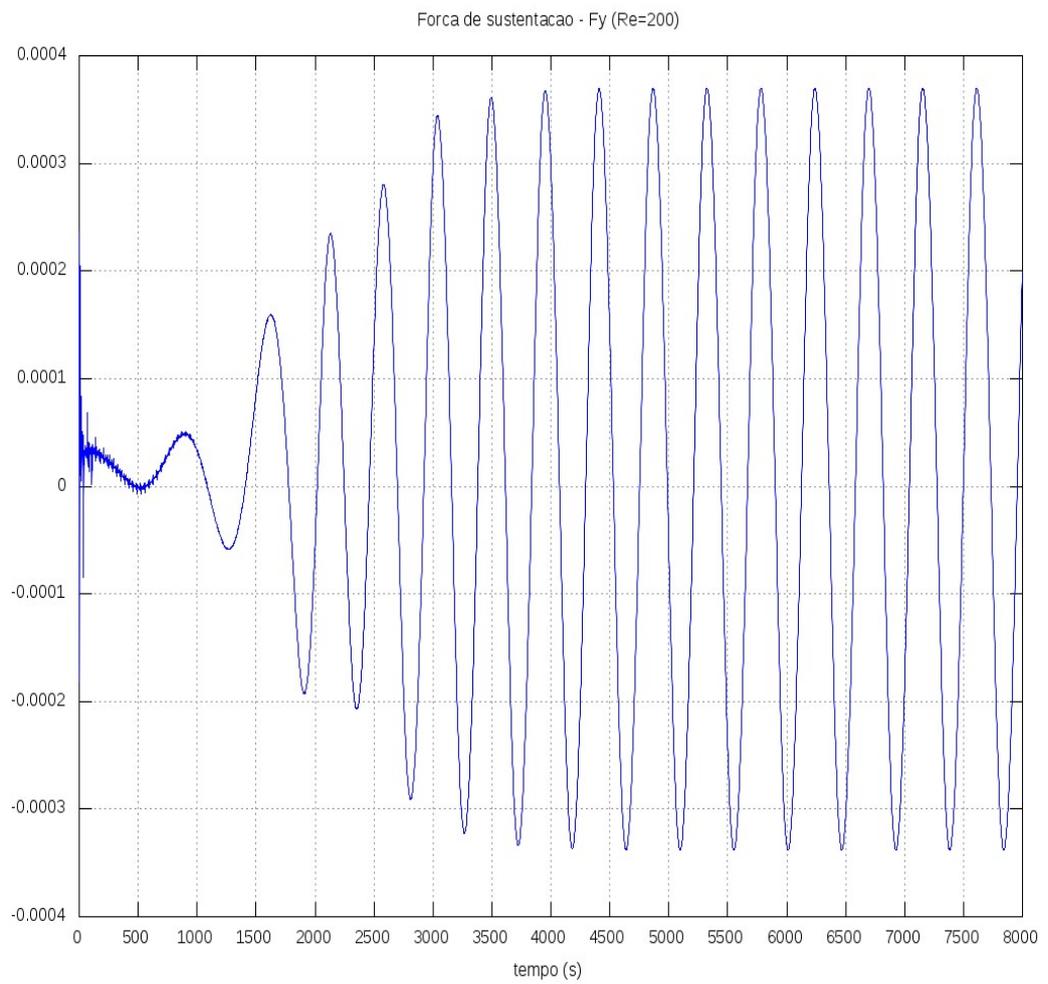


Figura 3.16: escoamento ao redor de um cilindro:  $Re = 200$ . Força de sustentação .

Pelos gráficos, obtemos o valor do coeficiente de arrasto  $C_d = 1,3$ . Além disso, obtemos a frequência da força de sustentação  $f = \frac{1}{470}$ , e com isso podemos calcular o número de Strouhal

$$S_t = \frac{fD}{U} = \frac{1}{470} \frac{2}{0,02} = 0,21. \quad (3.13)$$

Estes valores de coeficiente de arrasto e número de Strouhal, para  $Re = 100$  e  $Re = 200$ , estão de acordo com valores experimentais encontrados na literatura.

---

## BIBLIOGRAFIA

- [1] CHEN, S., DOOLEN, G. D. Lattice Boltzmann method for fluid flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 30, 329–364 (1998).
- [2] SUCCI, S. The Lattice Boltzmann Equation for fluid dynamics and beyond. *Oxford University Press*, (2001).
- [3] SUKOP, M. C., THORNE JR., D. T. Lattice Boltzmann Modeling. An introduction for Geoscientists and Engineers. *Springer*, (2006).
- [4] VIGGEN, E. M. The Lattice Boltzmann Method with applications in acoustics. *PhD thesis, Department of Physics, NTNU*, (2009).