

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO ESCOLA POLITÉCNICA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

ANÁLISE DE RUÍDO “KNOCK NOISE” EM CAIXA DE DIREÇÃO  
AUTOMOTIVA: MODELOS DE CREMALHEIRA RÍGIDA E FLEXÍVEL

Lucas Takahiro Conde Oyamada  
Orientador: Walter Ponge-Ferreira

Área de Concentração:  
Engenharia Mecânica

São Paulo  
2010

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO ESCOLA POLITÉCNICA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

ANÁLISE DE RUÍDO “KNOCK NOISE” EM CAIXA DE DIREÇÃO  
AUTOMOTIVA: MODELOS DE CREMALHEIRA RÍGIDA E FLEXÍVEL

Trabalho de formatura apresentado à Escola  
Politécnica da Universidade de São Paulo para  
Obtenção do título de Graduação em Engenharia

Lucas Takahiro Conde Oyamada  
Orientador: Walter Ponge-Ferreira

Área de Concentração:  
Engenharia Mecânica

São Paulo  
2010

## FICHA CATALOGRÁFICA

**Oyamada, Lucas Takahiro Conde**

**Análise de ruído “knock Noise” em caixa de direção automotiva: modelos de cremalheira rígida e flexível / L.T.C. Oyamada. - São Paulo, 2010.**

**58 p.**

**Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.**

**1. Conforto veicular 2. Conforto vibracional veicular 3. Acústica 4 Cremalheiras I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II. t.**

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. WalterJorgeAugusto PongeFerreira pelo tempo despendido e apoio durante a realização desse trabalho.

Ao Prof. Dr. Roberto Spinola Barbosa e ao aluno João Ribeiro de Oliveira Gomes pelo compartilhamento de ideias e auxílio com os softwares MSC ADAMS e MATLAB.

## RESUMO

A indústria automotiva brasileira vem crescendo cada vez mais, registrando a cada ano recordes de venda no mercado nacional. Junto com tal crescimento, além de uma alta competitividade entre as montadoras, surge um consumidor final preocupado e exigente com aspectos como desempenho, consumo, preço e conforto oferecidos pelos veículos.

Dentre os diversos fatores que influenciam no conforto do usuário, a indústria vem investindo em pesquisas para soluções de ruídos e vibrações induzidas no automóvel, conhecidos como NVH (noise, vibration and harshness)<sup>1</sup>

Tendo tal fato em vista, este projeto tem como objetivo estudar a influência da flexibilidade da cremalheira, a fim de se avaliar o ruído de batida (knock-noise) gerado em caixas de direção automotiva do tipo pinhão-cremalheira.

Para estudar esse problema foram levantadas as características de uma caixa de direção, onde foi constatado o problema de ruído por batida, e foi criado um modelo simplificado do contato entre a cremalheira e a bucha de apoio, levando em conta a folga existente entre esses componentes, onde se pode então avaliar numericamente seu resultado. Após tal análise foi estudada pelas equações de Duffing e de Mathieu a estabilidade do modelo, aproximando a curva descontínua de elasticidade desse por uma curva do terceiro grau.

Foi constatado que dentro de uma determinada faixa de frequências o sistema apresenta instabilidade, o que explica a existência do ruído no equipamento. Como a faixa de frequências não é extensa explica-se o fato de somente em algumas caixas de direção serem rejeitadas no teste de qualidade.

---

<sup>1</sup> Ruído, vibração e dureza

## ABSTRACT

The Brazilian automotive industry is growing, beating sales record each year in the national market. With this comes a consumer more demanding with aspects like performance, fuel consumption, price and comfort offered by the vehicles.

Among the many aspects that influence in the comfort of the driver, the industry is investing in researches for solutions to the noises and vibrations induced in the vehicles, known as NHV (noise, vibration and harshness).

With that in sight, this article has the objective of studying the influence of the rack's flexibility in the knock-noise induced in pinion-rack steering box.

To study this problem the characteristics of a steering box that presented the knock-noise problem were calculated and a simplified model of the contact between the sleeve and the rack was build, allowing its numerical analysis. After that the problem was approached by the Duffing's and Mathieu's equations, with the intention of study the stability of the model, approximating the elasticity's discontinue curve of this model by a third degree curve.

It was found that in a certain range of frequencies the system presented instability, which explains the existence of the knock-noise. As the frequency range isn't extensive, explained the fact that only a few steering-boxes were rejected in the quality test.

## Sumário

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>10</b>
1.1 O SISTEMA DE DIREÇÃO .....	10
1.1.1 Coluna de direção .....	11
1.1.2 Bomba hidráulica .....	11
1.1.3 Caixa de direção pinhão-cremalheira .....	12
1.2 O RUÍDO “KNOCK-NOISE” .....	15
<b>2. METODOLOGIA .....</b>	<b>16</b>
2.1 DADOS DA CREMALHEIRA .....	16
2.2 MÉTODO PARA MEDIÇÃO DA FOLGA .....	17
2.3 MODELO SIMPLIFICADO .....	22
2.4 MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS .....	25
2.5 EQUAÇÃO DE DUFFING .....	26
2.6 EQUAÇÃO DE MATHIEU .....	27
<b>3. RESULTADOS .....</b>	<b>33</b>
3.1 CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA .....	33
3.2 MODELO DE ELASTICIDADE CÚBICA .....	34
3.3 UTILIZANDO A EQUAÇÃO DE DUFFING.....	35
3.4 UTILIZANDO A EQUAÇÃO DE MATHIEU.....	37
3.5 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA .....	40
4.5.1. Integração do modelo descontínuo .....	40
4.5.2 Integração do modelo cúbico (Duffing-Mathieu) .....	43
4.5.3 Integração pelo software de dinâmica de multicorpos (MSC ADAMS) .....	46
<b>4. CONCLUSÕES .....</b>	<b>49</b>
<b>BIBLIOGRAFIA.....</b>	<b>51</b>
<b>APÊNDICE A – PROGRAMA PARA PLOTAR O DIAGRAMA DE MATHIEU .....</b>	<b>52</b>
<b>APÊNDICE B – PROGRAMA PARA SIMULAÇÃO DO MODELO NO MATLAB .....</b>	<b>54</b>
<b>APÊNDICE C – PROGRAMA PARA SIMULAÇÃO DA EQUAÇÃO DE MATHIEU EM MATLAB .....</b>	<b>55</b>
<b>APÊNDICE D – PROGRAMA PARA A DETERMINAÇÃO DA FAIXA DE FREQUÊNCIAS INSTÁVEIS .....</b>	<b>56</b>
<b>APÊNDICE E – PROGRAMA PARA RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES.....</b>	<b>57</b>
<b>APÊNDICE F – PROGRAMA PARA A SIMULAÇÃO DA EQUAÇÃO CÚBICA. ....</b>	<b>58</b>

## ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA 1 - SISTEMA DE DIREÇÃO PINHÃO-CREMALHEIRA.....	11
FIGURA 2 - CARCAÇA DA DIREÇÃO HIDRÁULICA.....	12
FIGURA 3 - SUJEITADOR DA CAIXA DE DIREÇÃO.....	13
FIGURA 4 - BUCHA DA CARCAÇA .....	14
FIGURA 5 - CREMALHEIRA E PINHÃO.....	14
FIGURA 6 - ESQUEMA DE MONTAGEM NA BANCADA .....	18
FIGURA 7 - MONTAGEM DOS RELÓGIOS COMPARADORES.....	18
FIGURA 8 - DISTÂNCIA ENTRE RELÓGIOS .....	19
FIGURA 9 - DESLOCAMENTOS VERTICAIS.....	19
FIGURA 10 - TRIÂNGULO DE DESLOCAMENTOS .....	21
FIGURA 11 - MODELO SIMPLIFICADO .....	22
FIGURA 12 - FORÇA DE RESTAURAÇÃO .....	24
FIGURA 13 - DIAGRAMA DE ESTABILIDADE DE MATHIEU.....	32
FIGURA 14 - GRÁFICO DA FUNÇÃO APROXIMADA PELO MMQ.....	35
FIGURA 15 - DIAGRAMA DE MATHIEU .....	38
FIGURA 16 - DESLOCAMENTO POR TEMPO (1Hz).....	41
FIGURA 17 - DESLOCAMENTO POR TEMPO (50Hz).....	41
FIGURA 18 - DESLOCAMENTO POR TEMPO (100Hz).....	42
FIGURA 19 - DESLOCAMENTO POR TEMPO (150Hz).....	42
FIGURA 20 - DESLOCAMENTO POR TEMPO (85Hz).....	43
FIGURA 21 - DESLOCAMENTO POR TEMPO (95Hz).....	44
FIGURA 22 - DESLOCAMENTO POR TEMPO (100Hz).....	44
FIGURA 23 - DESLOCAMENTO POR TEMPO (110Hz).....	45
FIGURA 24 - DESLOCAMENTO POR TEMPO (130Hz).....	45
FIGURA 25 - MODELO MASSA-MOLA NO MSC ADAMS .....	46
FIGURA 26 - FORÇA DA MOLA NO MSC ADAMS.....	47
FIGURA 27 - DESLOCAMENTO POR TEMPO (85Hz).....	47
FIGURA 28 - DESLOCAMENTO POR TEMPO (95Hz).....	48
FIGURA 29 - DESLOCAMENTO POR TEMPO (100Hz).....	48
FIGURA 30 - DESLOCAMENTO POR TEMPO (110Hz).....	48
FIGURA 31 - DESLOCAMENTO POR TEMPO (130Hz).....	49

## ÍNDICE DE TABELAS

TABELA 1 – VALORES DE COMPRIMENTO E DIÂMETROS.....	17
TABELA 2 - DESLOCAMENTOS DOS RELÓGIOS COMPARADORES .....	20
TABELA 3 - CÁLCULO DA FOLGA.....	21
TABELA 4 - VALORES DE DELTA .....	39
TABELA 5 - FREQUÊNCIA DE INSTABILIDADE .....	39

## 1. INTRODUÇÃO

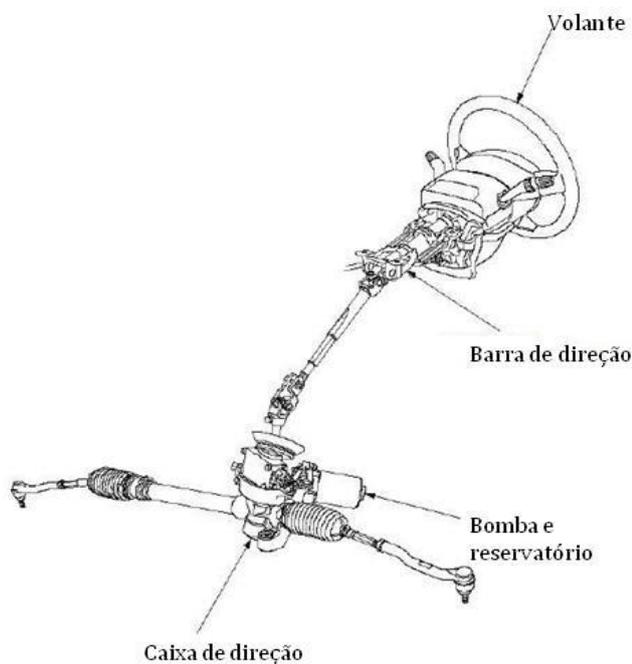
### 1.1 O sistema de direção

O sistema de direção automotiva tem como principal função transmitir os movimentos do volante, comandado pelo motorista, às rodas do veículo com intuito de conduzi-lo em seu trajeto.

Existem diversos tipos de configurações para esse sistema, sendo que normalmente espera-se que todos efetuem uma desmultiplicação da força necessária, reduzindo os esforços e facilitando a esterçagem das rodas. As configurações podem ser, dentre outras:

- Direções com setor e rosca sem-fim;
- Direções com lingüeta;
- Direções com esferas;
- Direções com cremalheiras;
- Direções servo-assistidas.

Nesse trabalho será estudada a direção do tipo pinhão-cremalheira assistida hidraulicamente, que vem se tornando o tipo mais utilizado em veículos leves, caminhonetes e utilitários esportivos, acima de tudo por possuir uma configuração bastante simples. Essa configuração de sistema de direção automotiva é formada pelos subsistemas da coluna de direção, sistema de bomba hidráulica e a caixa de direção pinhão-cremalheira propriamente dita, que serão discutidos brevemente adiante. Podemos ver na Figura 1 um esquema básico de sistema de direção com cada um desses subsistemas.



**Figura 1 - Sistema de direção pinhão-cremalheira**

### **1.1.1 Coluna de direção**

A coluna de direção é o subsistema responsável por conectar o volante ao mecanismo de direção, ou seja, à caixa de direção propriamente dita transferindo o torque realizado pelo motorista até esse mecanismo.

Fora isso, esse subsistema é projetado para alocar as alavancas de setas, alavancas de limpadores de pára-brisas, acionamento da buzina, sistemas de troca de marchas, dentre outros, além de prover ao motorista a percepção de vibrações provenientes de pistas irregulares ou induzidas da caixa de direção e dissipar a energia caso haja uma colisão frontal.

### **1.1.2 Bomba hidráulica**

O subsistema da bomba hidráulica é o responsável pela assistência hidráulica capaz de reduzir os esforços necessários ao esterçamento das rodas. Faz parte desse

subsistema a bomba hidráulica em si, um conjunto de mangueiras hidráulicas e o reservatório de óleo.

A energia hidráulica é fornecida ao sistema de direção por uma bomba rotativa de palhetas acionada pelo próprio motor por meio de uma transmissão polia-correia.

As mangueiras são de extrema importância ao subsistema, pois além de direcionar todo o fluxo de óleo da bomba até a caixa de direção, qualquer falha que ocorra nesse sistema causa a perda total da assistência hidráulica ao sistema de direção.

### 1.1.3 Caixa de direção pinhão-cremalheira

Nessa seção serão discutidos os componentes desse subsistema que são importantes para o estudo do ruído “knocknoise”.

#### 1.1.3.1 Carcaça

A carcaça da caixa de direção, Figura 2, tem como objetivo alojar o engrenamento do pinhão-cremalheira além de conter o óleo sobre pressão que gera o auxílio hidráulico à direção. *Segundo Cruz, J. M. Xavier (2006)* explica que devido a necessidade de uma alta precisão das cavidades dos furos dos demais componentes, a carcaça é um componente crítico para geração de ruído.

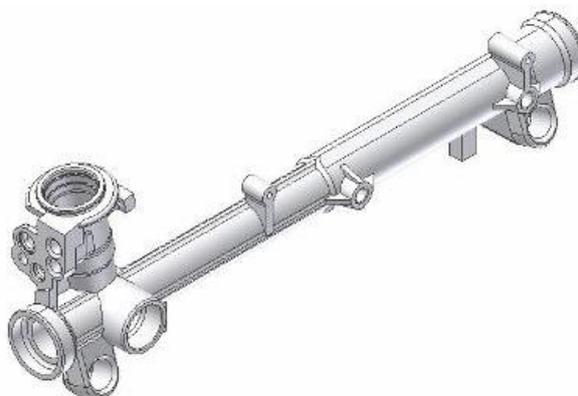


Figura 2 - Carcaça da direção hidráulica

### 1.1.3.2 Sujeitador

O sujeitador, Figura 3, é o componente da caixa de direção que tem como objetivo gerar a pressão necessária para manter o engrenamento do pinhão-cremalheira, por meio de uma mola helicoidal ligada a uma porca, onde é realizado o ajuste dessa pressão.

Em sua dissertação *Cruz, J. M. Xavier (2006)* cita que as características da mola são muito importantes para a geração de ruído. Quanto maior a constante elástica dessa, menor o ruído gerado, porém conseqüentemente maior será a força necessária para o esterçamento das rodas do veículo.

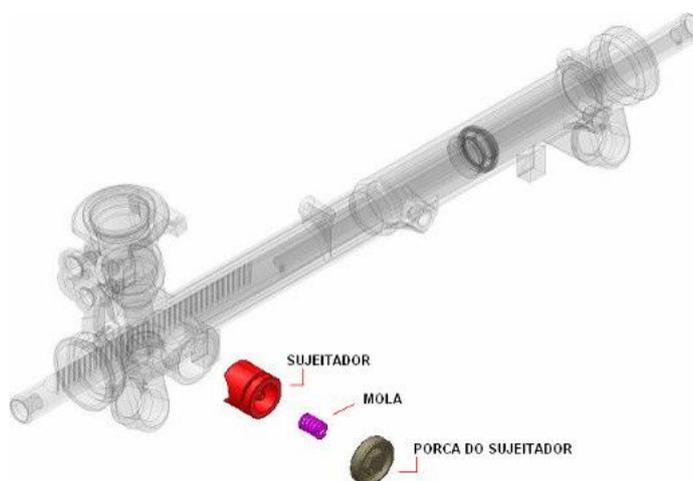
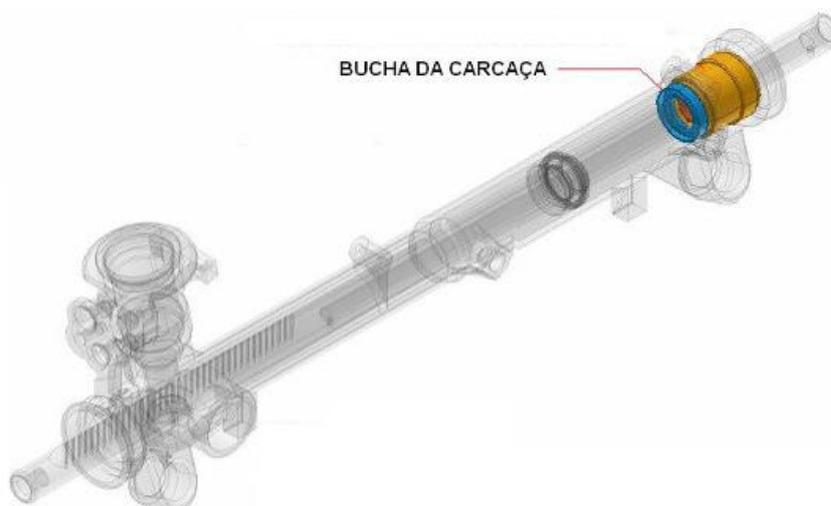


Figura 3 - Sujeitador da caixa de direção

### 1.1.3.3 Bucha

Esse componente, Figura 4, serve como ponto de apoio para o conjunto pinhão-cremalheira além de delimitar o volume da câmara de óleo, evitando o vazão desse para outras partes da carcaça.



**Figura 4 - Bucha da carcaça**

#### **1.1.3.4 Pinhão e cremalheira**

O pinhão juntamente com a cremalheira são os responsáveis pela transformação do movimento de rotação imposto ao volante em movimento linear de translação que irá direcionar as rodas do veículo. O material e projeto desses componentes são de extrema importância, não somente para o aumento do desempenho do veículo (melhor engrenamento dos dentes e melhor peso do sistema), mas também para a segurança dos passageiros, uma vez que qualquer falha que ocorra nos dentes destes causa a perda total do controle do automóvel.



**Figura 5 - Cremalheira e pinhão**

## 1.2 O ruído “knock-noise”

Esse tipo de vibração induzida na caixa de direção que será estudada nesse trabalho trata-se de uma batida perceptível ao condutor do veículo tanto auditivamente quanto tátil, por meio do volante. Segundo *Cruz, J. M. Xavier (2006)* esse ruído pode ser causado:

- Pela batida dos dentes da cremalheira contra os dentes do pinhão;
- Pela batida do sujeitador na porca do mesmo;
- Pela batida da cremalheira em outras superfícies (carcaça e bucha).

## 2. METODOLOGIA

Esse capítulo tem como intuito estudar a influência da flexibilidade no ruído de knock-noise. Pretende-se criar um modelo massa-mola discreto a partir do modelo simplificado de viga contínua da cremalheira estudada, utilizando então a equação de Mathieu para determinar se a folga existente entre os componentes é suficiente para que a flexibilidade seja relevante no estudo.

### 2.1 Dados da cremalheira

No dia 24 de março de 2010 no laboratório do IPT foram realizadas medições com o intuito de obter o diâmetro e o comprimento da cremalheira, tal como o diâmetro do furo da bucha e a folga existente entre eles.

O diâmetro do eixo da cremalheira foi obtido por meio de uma série de medidas com um micrômetro (marca Mitutoyo, nº 193-101 com escala de 0-25 mm e 0,01 mm de precisão). O comprimento da cremalheira por sua vez foi obtido por meio de uma trena.

O diâmetro do furo da bucha foi obtido também por meio de uma série de medidas, porém realizadas com um paquímetro (marca Mitutoyo com escala de 0-150 mm e 0,05 mm de precisão). Os diâmetros obtidos tal como a média dos mesmos são apresentados na Tabela 1.

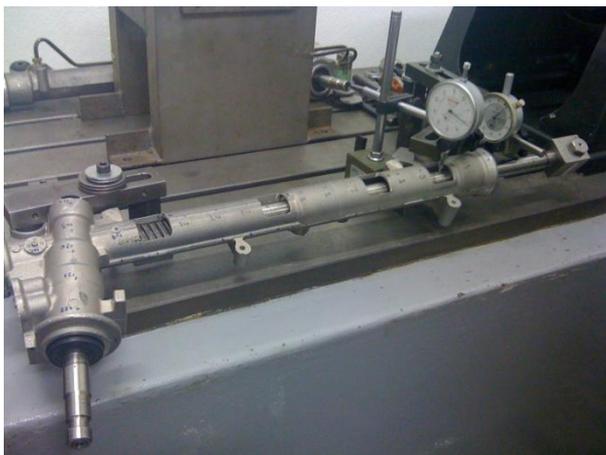
Pode-se perceber que devido a erros de medição, principalmente devido à maior dificuldade na obtenção do diâmetro do furo e diferença de precisão dos equipamentos, o diâmetro interno da bucha encontrado é menor do que o diâmetro do eixo. Na prática esse resultado é impossível, mas torna-se importante para notar quão pequena é a folga existente entre esses dois componentes.

Tabela 1 – Valores de comprimento e diâmetros

Comprimento da Cremalheira		673 mm		
	Diâmetro da Cremalheira (mm)		Diâmetro do furo da bucha (mm)	
	Eixo 1	Eixo 2	Bucha	
	21,97±0,01	21,95±0,01	21,9±0,05	22±0,05
	21,97±0,01	21,955±0,01	21,95±0,05	21,95±0,05
	21,97±0,01	21,945±0,01	22±0,05	22±0,05
	21,965±0,01	21,95±0,01	21,9±0,05	21,95±0,05
	21,97±0,01	21,94±0,01	22±0,05	21,95±0,05
	21,97±0,01	21,95±0,01	21,9±0,05	21,9±0,05
	21,965±0,01	21,95±0,01	21,95±0,05	21,95±0,05
	21,965±0,01	21,95±0,01	21,9±0,05	21,95±0,05
	21,97±0,01	21,95±0,01	21,95±0,05	21,95±0,05
	21,962±0,01	21,95±0,01	21,9±0,05	21,9±0,05
	<b>Média</b>	<b>21,95835±0,002</b>		<b>21,9425±0,01</b>
<b>Desvio padrão</b>	<b>0,0102</b>		<b>0,0373</b>	

## 2.2 Método para medição da folga

Como não foi possível determinar a folga entre os componentes utilizando somente a diferença entre as médias encontradas, foi proposto outro tipo de medição, em que dois relógios comparadores foram posicionados entre as duas extremidades da bucha, e foram medidos os deslocamentos quando aplicada uma força na extremidade da cremalheira. O esquema de montagem pode ser visto nas Figura 6 e Figura 7.



**Figura 6 - Esquema de montagem na bancada**



**Figura 7 - Montagem dos relógios comparadores**

Os relógios utilizados no experimento são da marca Mitutoyo, nº 2046-08 com precisão de 0,01mm (relógio 1) e da marca Peacock, nº 207 com precisão de 0,01 mm (relógio 2). A configuração da montagem com suas respectivas distâncias podem ser vistas na Figura 8.

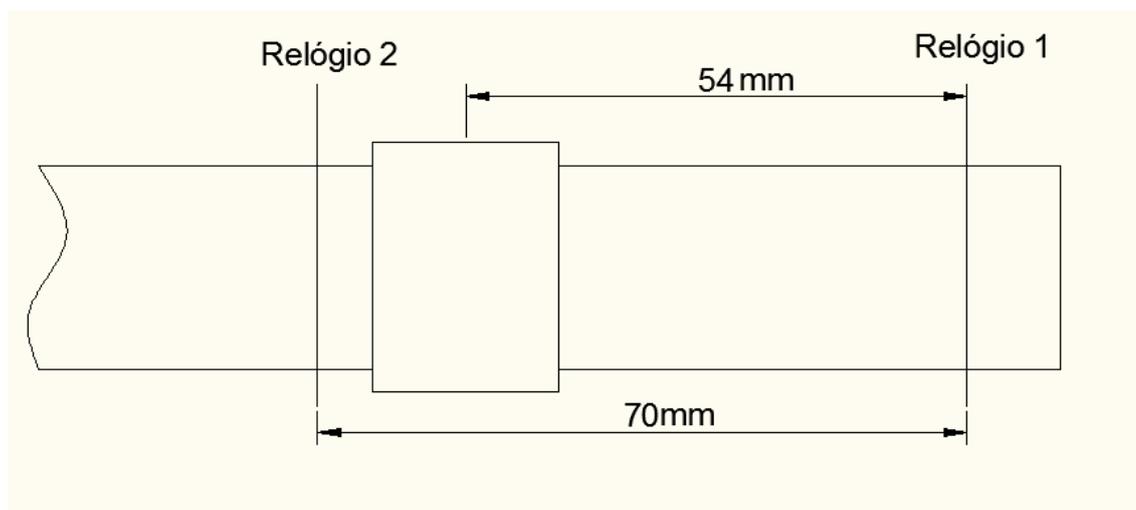


Figura 8 - Distância entre relógios

Aplicando uma força vertical na extremidade direita da cremalheira podem-se obter os deslocamentos demonstrados na Figura 9. Os valores desses deslocamentos são apresentados na Tabela 2, onde  $f_1$  e  $f_2$  são as somas dos deslocamentos nas diferentes direções.

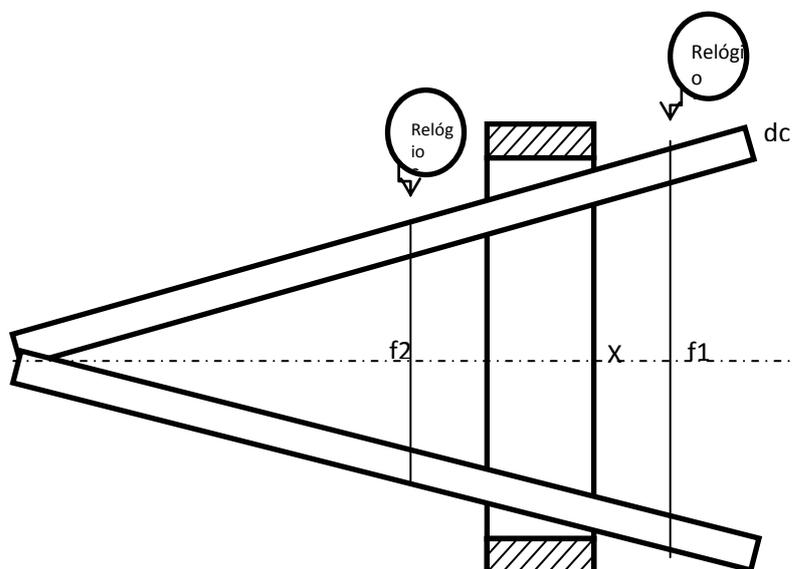


Figura 9 - Deslocamentos verticais

Tabela 2 - Deslocamentos dos relógios comparadores

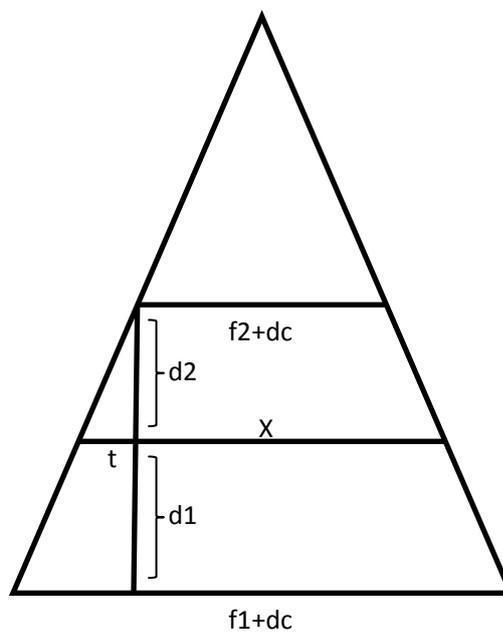
Direção Teste	Relógio 1 (x0,01mm)		f1	Relógio 2 (x0,01mm)		f2
	↑	↓		↑	↓	
1	10±1	25±1	35±1,4	3±1	10±1	13±1,4
2	5±1	14±1	19±1,4	1±1	7±1	8±1,4
3	2±1	11±1	13±1,4	0±1	5±1	5±1,4
4	2±1	9±1	11±1,4	0±1	4±1	4±1,4
5	2±1	11±1	13±1,4	0±1	5±1	5±1,4
6	3±1	10±1	13±1,4	1±1	5±1	6±1,4
7	2±1	7±1	9±1,4	0±1	4±1	4±1,4
8	4±1	7±1	11±1,4	1±1	4±1	5±1,4

Pode-se então construir o triângulo de deslocamentos mostrados na Figura 10, onde  $d_c$  é o diâmetro da cremalheira e a folga  $e$  entre a bucha e a cremalheira é obtida pelas eq.01 à eq.03:

$$e = x - d_c \quad (01)$$

$$x = f_2 + d_c + 2t \quad (02)$$

$$t = \frac{(f_1 - f_2) * d_2}{2 * (d_1 + d_2)} \quad (03)$$



**Figura 10 - Triângulo de deslocamentos**

Calculando os valores de  $t$  e  $x$ , obtêm-se o valor da folga  $e$ , apresentados na Tabela 3.

**Tabela 3 - Cálculo da folga**

<b>t (mm)</b>	<b>x (mm)</b>	<b>e (mm)</b>
0,0251±0,0165	22,1386±0,0146	0,180286±0,0147
0,0126±0,000826	22,0635±0,0143	0,105143±0,0145
0,0091±0,00061	22,0266±0,0142	0,068286±0,0144
0,0080±0,000526	22,0144±0,0142	0,056±0,0144
0,0091±0,000601	22,0266±0,0142	0,068286±0,0144
0,0080±0,000526	22,0344±0,0142	0,076±0,0144
0,0057±0,000376	22,0098±0,0142	0,051429±0,0144
0,0069±0,000451	22,0221±0,0142	0,063714±0,0144
	Média	<b>0,0836±0,0051</b>
<b>Folga Radial (mm)</b>		<b>0,0418±0,0026</b>

### 2.3 Modelo simplificado

Nessa seção será estudado o modelo simplificado do contato entre a cremalheira e a bucha mostrado na Figura 11, onde  $M$  é massa equivalente da cremalheira,  $k$  a constante elástica dessa e  $e$  a folga existente entre esses componentes.

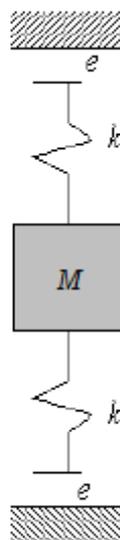


Figura 11 - Modelo simplificado

A massa da cremalheira é dada pela eq. 1, onde  $\rho$  é a densidade do material e  $V$  o seu volume.

$$m = \rho \cdot V \quad (04)$$

Considerando que a cremalheira pode se deslocar como mostrado na Figura 9, podem-se aproximar as características desse por uma viga em balanço, engastada em uma de suas extremidades. Dessa maneira, segundo *Rao 2003* tem-se que a deflexão estática, considerando uma carga em sua extremidade livre, é dada pela eq. 5

$$y(x) = \frac{Px^2}{6EI} (3l - x) = \frac{y_{\text{máx}}x^2}{2l^3} (3l - x) \quad (05)$$

Derivando a eq. X e substituindo na equação da máxima energia cinética da viga (eq.2) é possível obter a eq. 6

$$T_{m\acute{a}x} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{m}{l} \{\dot{y}(x)\}^2 dx \quad (06)$$

$$T_{m\acute{a}x} = \frac{m}{2l} \left( \frac{\dot{y}_{m\acute{a}x}}{2l^3} \right)^2 \int_0^1 (3x^2l - x^3) dx = \frac{m}{2l} \left( \frac{\dot{y}_{m\acute{a}x}}{2l^3} \right)^2 \left( \frac{33}{35} l^7 \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{33}{140} m \right) \dot{y}_{m\acute{a}x}^2 \quad (07)$$

Sendo  $m_{eq}$  a massa equivalente da viga em balanço, a máxima energia cinética também pode ser expressa pela eq.8

$$T_{m\acute{a}x} = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{y}_{m\acute{a}x}^2 \quad (08)$$

Igualando a eq.7 e a eq.8 tem-se que a massa equivalente da viga é dada pela eq.9.

$$m_{eq} = \frac{33}{140} m \quad (09)$$

A constante elástica da cremalheira é obtida aproximando as características dessa à de uma viga engastada sob flexão. De *Gere, James (2001)* sabe-se que a constante elástica nessa situação é dada pela eq. 10.

$$k = \frac{3EI}{L^3} \quad (10)$$

Para se determinar a rigidez EI da cremalheira, utiliza-se a eq. 11, que relaciona a frequência natural de vibração de uma viga, seu modo de vibrar e sua rigidez, retirada de *Blevins, 1993*.

$$f_i = \frac{\lambda_i^2}{2\pi L^2} \left( \frac{EI}{m_l} \right)^{\frac{1}{2}} ; i = 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

onde  $f$  é a frequência natural em Hz,  $m_l$  é a massa por unidade de comprimento e  $L$  o comprimento da viga.

Uma vez determinadas as características do sistema pode-se então estudar a equação diferencial que governa o movimento desse. Essa equação diferencial pode ser escrita como mostra a eq.12.

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = f\left(t, x, \frac{\partial x}{\partial t}\right) \quad (12)$$

onde  $f(t, x)$  é a força de restauração causada pela mola e  $f\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)$  é a força de amortecimento que não será levada em consideração nesse estudo.

Devido à folga existente entre a cremalheira e a bucha, a equação diferencial do movimento é expressa pela eq.13.

$$\ddot{X} + G(x) = F \cos(\Omega t) \quad (13)$$

onde  $G(x)$  é a força de restauração mostrada na Figura 12 e pode ser expressa por

$$G(x) = \begin{cases} \frac{k}{m}(x - e), & x > e \\ 0, & -e < x < e \\ \frac{k}{m}(x + e), & x < -e \end{cases}$$

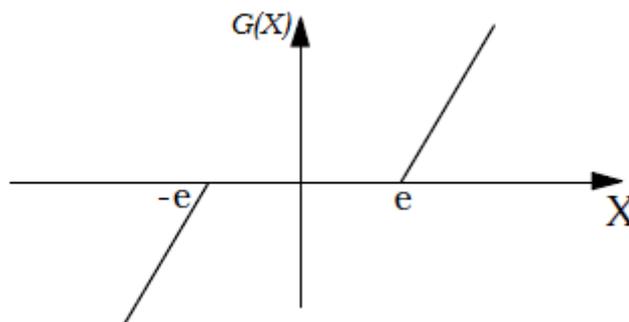


Figura 12 - Força de restauração

Chamando  $\frac{k}{m}$  de  $\omega^2$  e reescrevendo a equação, chega-se a equação final que rege o movimento do sistema, mostrada na eq.14

$$\ddot{x} + \omega^2 x = H(x) + F \cos(\Omega t) \quad (14)$$

sendo  $H(x)$

$$H(x) = \begin{cases} \omega^2 e, & x > e \\ \omega^2 x, & -e < x < e \\ -\omega^2 e, & x < -e \end{cases}$$

Para utilizar softwares que integram numericamente a equação diferencial de segunda ordem apresentada pela eq.6, é necessário demonstrá-la em um espaço de estado. Dessa maneira chega-se no sistema de equações apresentadas na eq.15.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\dot{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ H(x) + F \cos(\Omega t) \end{bmatrix} \quad (15)$$

#### 2.4 Método dos mínimos quadrados

Para evitar as complicações de integração devido às descontinuidades existentes na função  $G(x)$  apresentada na eq. (13), irá se aproximar essa função pela função  $F(x)$ .

A escolha da família de  $F(x)$  deve ser tal que essa se aproxime ao máximo do comportamento de  $G(x)$  e apresente características que facilitem os cálculos de integração e auxilie no tratamento da equação que governa o movimento do modelo.

Dessa maneira irá se aproximar  $G(x)$  por uma  $F(x)$  apresentada na eq. (16)

$$F(x) = a_0 x + a_1 x^3 \quad (16)$$

Pelo método dos mínimos quadrados, como demonstrado em *Humes, Ana Flora (1984)*, determina-se os coeficientes da eq.(16) resolvendo o sistema apresentado na eq.(17).

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{x_i}^{x_f} (G(x) - a_0x - a_1x^3)xdx = 0 \\ \int_{x_i}^{x_f} (G(x) - a_0x - a_1x^3)x^3dx = 0 \end{array} \right. \quad (17)$$

## 2.5 Equação de Duffing

Considere a equação periódica como apresentada na eq.(18), retirada de *Newland, D.E (1989)*. Essa é chamada equação de Duffing em nome do autor que fez a primeira publicação relevante sobre sua solução. Nesse trabalho não será considerado o amortecimento, obtendo-se então a eq. (19).

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x + \gamma x^3 = P\cos(\Omega t) \quad (18)$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2x + \gamma x^3 = P\cos(\Omega t) \quad (19)$$

Como mostrado em *Panokvo (1971)*, assume-se que a eq. (19) possui uma solução periódica tal que  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$  e sendo A sua amplitude na deflexão máxima da mola, pode-se dizer que a primeira aproximação para a solução é dada por (20), que é a solução exata para um sistema sem o termo não linear em  $x^3$ .

$$x = A\cos(\Omega t) \quad (20)$$

Reescrevendo a eq. (19) como mostrado em (21), sabendo que  $\cos(\theta) = \frac{3}{4}\cos(\theta) + \frac{1}{4}\cos(3\theta)$ , e substituindo-se a solução (19) no lado direito da equação, encontra-se então a eq.(22).

$$\ddot{x} + \Omega^2x = (\Omega^2 - \omega_0^2)x - \gamma x^3 + P\cos(\Omega t) \quad (21)$$

$$\ddot{x} + \Omega^2x = \left[ (\Omega^2 - \omega_0^2)A - \frac{3}{4}\gamma A^3 + P \right] \cos(\Omega t) - \frac{1}{4}\gamma A^3 \cos(3\Omega t) \quad (22)$$

Segundo *Panokvo (1971)*, se a equação entre colchetes for diferente de zero a solução de (19) não será periódica e criará uma condição ressonante. Dessa maneira, elimina-se esse termo.

$$\left[ (\Omega^2 - \omega_0^2)A - \frac{3}{4}\gamma A^3 + P \right] = 0 \quad (23)$$

Se a condição na eq.23 for atendida a eq. 22 assume a forma apresentada na eq.25.

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = \frac{1}{4}\gamma A^3 \cos(3\Omega t) \quad (24)$$

$$\frac{\gamma A^3 \cos(3\Omega t)}{4\Omega^2 \left[ 1 - \left( \frac{3\Omega}{\Omega} \right)^2 \right]} = -\frac{\gamma A^3}{32\Omega^2} \cos(3\Omega t) \quad (25)$$

A solução particular da eq.25 dada na eq.26, leva a solução geral (28) dessa equação na qual os coeficientes  $C_1$  e  $C_2$  são dados pelas condições iniciais do problema, que nesse caso são  $x = a$  e  $\dot{x} = 0$  em  $t = \frac{T}{4}$ .

$$x = C_1 \cos(\Omega t) + C_2 \sin(\Omega t) - \frac{\gamma A^3}{32\Omega^2} \cos(3\Omega t) \quad (26)$$

$$C_1 = A + \frac{\gamma A^3}{32\Omega^2}; C_2 = 0 \quad (27)$$

$$x = A \cos(\Omega t) - \frac{\gamma A^3}{32\Omega^2} (\cos(\Omega t) - \cos(3\Omega t)) \quad (28)$$

## 2.6 Equação de Mathieu

A equação do tipo apresentada em (29) é a chamada equação de Mathieu. Segundo tal equação a solução de  $x(t)$  depende da magnitude do adimensional  $\alpha$  e da

magnitude da razão de frequências  $\frac{\Omega}{\omega}$ , onde  $\Omega$  é a frequência de excitação e  $\omega$  a frequência natural de oscilação do sistema.

$$\ddot{x} + \omega^2(1 + \alpha \cos(\Omega t))x = 0 \quad (29)$$

Dessa maneira são definidos dois parâmetros utilizados na busca da solução da equação de Mathieu, mostrados em (30) e (31).

$$\delta = \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2 \quad (30)$$

$$\varepsilon = \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2 \alpha \quad (31)$$

A solução da equação de Mathieu foi extensivamente estudada por diversos autores que puderam gerar o diagrama de estabilidade como mostrado na figura 9. Nele podem-se ver as regiões onde a combinação de  $\delta$  e  $\varepsilon$  geram instabilidades no sistema.

Para se obter essas soluções da equação de Mathieu, sabe-se que a eq.29 possui um período  $T = 2 * \frac{\pi}{\omega}$ , o que implica que as soluções  $x(t)$  dessa equação seguem a propriedade mostrada na eq.30 onde  $\sigma$  é uma constante.

$$x(t + T) = \sigma x(t) \quad (30)$$

Como a eq.29 é uma equação de segunda ordem, linear em  $x$  e  $\dot{x}$  e homogênea, ela sempre terá duas soluções particulares e sua solução geral será uma combinação dessas duas.

Se existir uma solução na qual  $\sigma > 1$ , a amplitude da resposta aumentará indefinidamente e a solução será instável. Caso  $\sigma < 1$  a amplitude da resposta diminuirá com o tempo e a solução será estável. Se  $|\sigma| = 1$  a solução também será estável, uma vez que a amplitude se manterá constante.

Os dois valores possíveis de  $\sigma$  ( $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ ) dependem dos parâmetros  $\alpha$  e  $\frac{\omega}{\Omega}$ , como definidos nas equações 30 e 31. Segundo *Newland, D.E (1989)* é mostrando na teoria das equações de Mathieu que, se for traçado um diagrama de  $\delta$  por  $\varepsilon$  existirão regiões contínuas nas quais  $|\sigma_1|>1$  e  $|\sigma_2|<1$ , mostrando então as regiões de estabilidade e instabilidade do sistema. Os limites entre essas regiões são dados nas combinações entre  $\delta$  e  $\varepsilon$  nos quais  $\sigma_1=\sigma_2=\pm 1$ .

Se  $\sigma_1=+1$ , a eq.30 nos dá a eq.31 cuja resposta possui um período T e pode ser escrita como uma expansão de Fourier mostrada na eq.32.

$$y(t + T) = y(t) \quad (31)$$

$$y(t) = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos j\Omega t + b_j \sen j\Omega t) \quad (32)$$

Utilizando as identidades trigonométricas da eq.33 e substituindo as soluções periódicas na eq.29 pode-se chegar na eq.34.

$$\begin{cases} 2\cos\Omega t \cos j\Omega t = \cos(1+j)\Omega t + \cos(1-j)\Omega t \\ 2\cos\Omega t \sen j\Omega t = \sen(1+j)\Omega t + \sen(1-j)\Omega t \end{cases} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos j\Omega t + b_j \sen j\Omega t) + \delta \left[ a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos j\Omega t + b_j \sen j\Omega t) \right] \\ & + \varepsilon \left[ \frac{a_1}{2} + a_0 \cos\Omega t + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} (a_{j+1} \cos j\Omega t + b_{j+1} \sen j\Omega t) \right] \\ & + \frac{\varepsilon}{2} \left[ \sum_{j=1}^{\infty} (a_{j-1} \cos j\Omega t + b_{j-1} \sen j\Omega t) \right] = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

Para que a eq.34 seja verdadeira, todos os termos em seno e cosseno devem ser zero. Colocando esses valores em matriz, tem as eq.35 e eq.36.





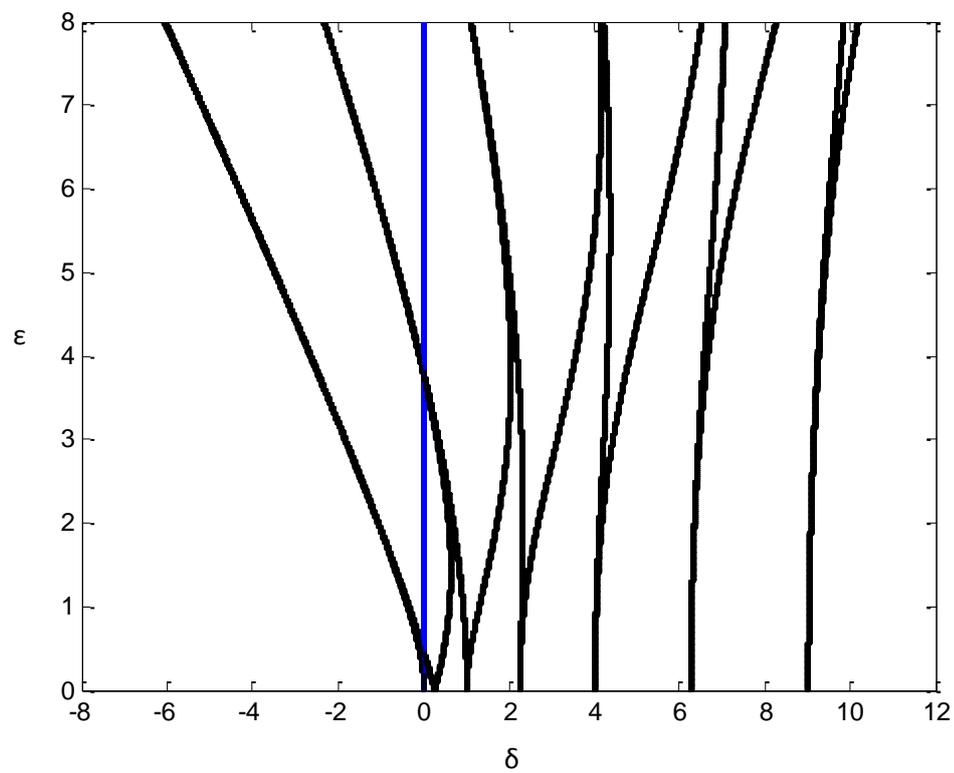


Figura 13 - Diagrama de estabilidade de Mathieu

### 3. RESULTADOS

#### 3.1 Características do sistema

Para estudar-se o movimento da cremalheira regido pela eq. 6 é necessário em primeiro lugar calcular suas características.

Utilizando a eq.1 calcula-se a massa da cremalheira estudada. Admitiu-se uma densidade  $\rho$  igual a  $7,85\text{g/cm}^3$ , aproximadamente a densidade dos aços utilizados para engrenagens.

Outra simplificação a se realizar é a aproximação da cremalheira a um eixo cilíndrico. Como grande parte da cremalheira é cilíndrica e a parte dentada é obtida pelo forjamento desse eixo, não se perde muito com essa aproximação.

$$M = \frac{33 * m}{140} = \frac{33 * \rho}{140} \cdot \pi \cdot L \cdot \frac{D^2}{4} = \frac{33 * 7850}{140} \cdot 0,673 \cdot \pi \frac{(21,958 \times 10^{-3})^2}{4} = 0,472 \text{kg}$$

Por meio de testes de bancada realizados em laboratório, sabe-se que a cremalheira estudada vibrando livre-livre em seu primeiro modo ( $i=1$ ) possui uma frequência natural  $f_1 = 100\text{Hz}$ . Dessa maneira, como na configuração livre-livre tem-se  $\lambda_1 = 4,73$ , a rigidez  $EI$  é cremalheira é dada pela eq.3

$$EI = \left( f_1 \frac{2\pi L^2}{\lambda_1^2} \right)^2 m_l = \left( \frac{100 \cdot 2\pi \cdot (673 \times 10^{-3})^2}{4,73^2} \right)^2 1,4859 = 240,41 \text{N/m}^2$$

Tendo o valor da rigidez pode-se então utilizar a eq. 2 para determinar a constante de elasticidade  $k$  da cremalheira.

$$k = \frac{3EI}{L^3} = \frac{3 * 240,41}{0,673^3} = 2366,1 \text{N/m}$$

### 3.2 Modelo de elasticidade cúbica

Para eliminar os possíveis problemas existentes devido às descontinuidades da eq.(13) aproxima-se essa função por outra função como mostrado em (8). Resolvendo o sistema (9) de equações obtêm-se os coeficientes mostrados abaixo.

$$\begin{cases} \int_{X_i}^{-e} (k(x+e)x)dx + \int_{-e}^e 0 * x dx + \int_{-e}^e (k(x-e)x)dx - \int_{X_i}^{X_f} (a_0x + a_1x^3)x dx = 0 \\ \int_{X_i}^{-e} (k(x+e)x^3)dx + \int_{-e}^e 0 * x^3 dx + \int_{-e}^e (k(x-e)x^3)dx - \int_{X_i}^{X_f} (a_0x + a_1x^3)x^3 dx = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k \left( \frac{X_f^3}{3} - \frac{X_i^3}{3} - \frac{2}{3}e^3 + e^3 - \frac{eX_f^2}{2} - \frac{eX_i^2}{2} \right) - a_0 \left( \frac{X_f^3}{3} - \frac{X_i^3}{3} \right) - a_1 \left( \frac{X_f^5}{5} - \frac{X_i^5}{5} \right) = 0 \\ k \left( \frac{X_f^5}{5} - \frac{X_i^5}{5} - \frac{2}{5}e^5 + \frac{1}{2}e^5 - \frac{eX_f^4}{4} - \frac{eX_i^4}{4} \right) - a_0 \left( \frac{X_f^5}{5} - \frac{X_i^5}{5} \right) - a_1 \left( \frac{X_f^7}{7} - \frac{X_i^7}{7} \right) = 0 \end{cases}$$

Uma aproximação em torno de 2 vezes o valor da folga, ou seja,  $X_f = 0,08643mm$  e  $X_i = -0,08643mm$ , resulta nos coeficientes  $a_0$  e  $a_1$  mostrados e que aproximam a eq.(6) pela  $f(x)$ , como mostrado no gráfico da figura 10.

$$a_0 = -134,016 \frac{N}{kg * m}; \quad a_1 = 2,08 * 10^{11} \frac{N}{kg * (m)^3}$$

$$f(x) = -134,016x + 2,08 * 10^{11}x^3$$

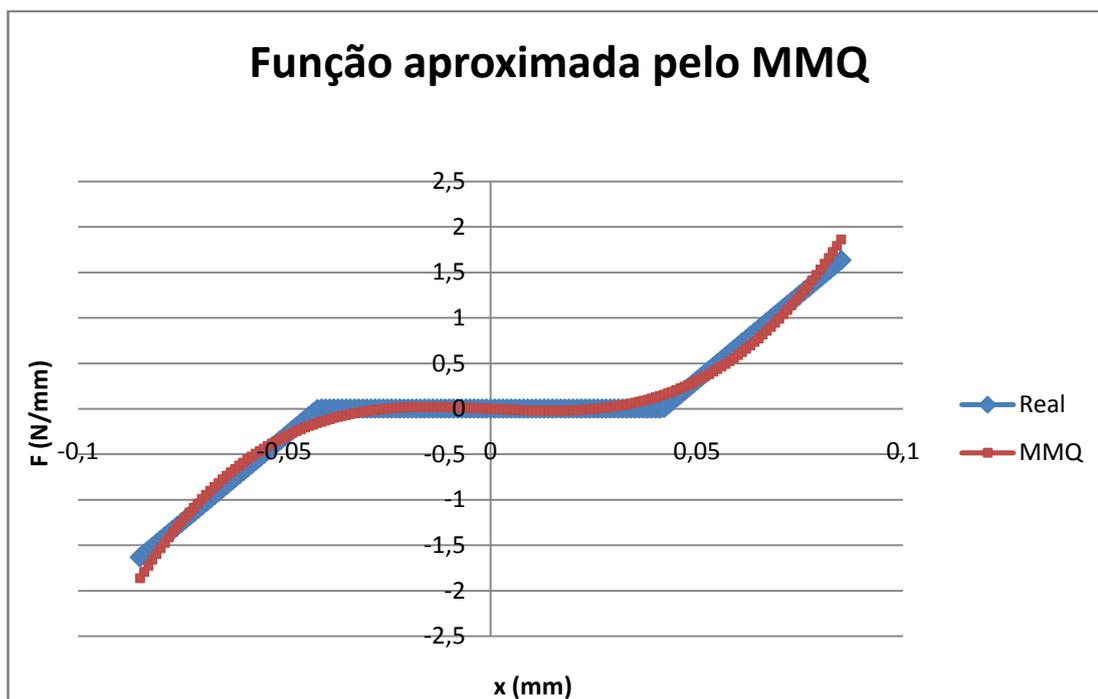


Figura 14 - Gráfico da função aproximada pelo MMQ

Pode-se notar que a função se aproxima satisfatoriamente à curva de elasticidade descontínua dentro do intervalo escolhido, permitindo que seja realizada uma análise mais profunda do sistema estudado.

### 3.3 Utilizando a equação de Duffing

Nessa parte do trabalho será utilizada uma equação do tipo mostrado na eq. (29) que descreve o movimento do sistema segundo a equação de Duffing e será considerado um pequeno desvio  $\Delta x$ , como demonstrado em *Newland, D.E (1989)*. Substituindo  $x$  por  $x + \Delta x$  chega-se na equação mostrada abaixo.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \gamma x^3 = P \cos(\Omega t)$$

$$(x + \ddot{\Delta x}) + \omega_0^2(x + \Delta x) + \gamma(x + \Delta x)^3 = P \cos(\Omega t)$$

$$\ddot{\Delta x} + \omega_0^2 \Delta x + 3\gamma x^2 \Delta x = 0$$

Substituindo  $x=A\cos(\Omega t)$  como a primeira aproximação para a equação de Duffing tem-se

$$\dot{\Delta x} + \omega_0^2 \Delta x + 3\gamma A^2 \cos^2(\Omega t) \Delta x = 0$$

$$\ddot{\Delta x} + \omega_0^2 \Delta x + \left[ \frac{A^2}{2} (1 + \cos(2\Omega t)) \right] 3\gamma \Delta x = 0$$

$$\ddot{\Delta x} + \left[ \omega_0^2 + \frac{3\gamma A^2}{2} + \frac{3\gamma A^2}{2} \cos(2\Omega t) \right] \Delta x = 0$$

$$\ddot{\Delta x} + \left( \omega_0^2 + \frac{3\gamma A^2}{2} \right) \left[ 1 + \left( \frac{3\gamma A^2}{2\omega_0^2 + 3\gamma A^2} \right) \cos(2\Omega t) \right] \Delta x = 0$$

A equação encontrada em  $\Delta x$  é da forma da equação de Mathieu. A frequência do termo forçante  $\Omega$  foi substituída por  $2\Omega$  e  $\omega^2 = \left( \omega_0^2 + \frac{3\gamma A^2}{2} \right)$  e  $\alpha = \left( \frac{3\gamma A^2}{2\omega_0^2 + 3\gamma A^2} \right)$ .

Resolvendo a eq.(15) pode-se encontrar o valor de A para qual a equação de Duffing é satisfeita.

$$\left[ (\Omega^2 - \omega_0^2)A - \frac{3}{4} \gamma A^3 + P \right] = 0$$

Encontrados os valores de A, é possível encontrar os valores de  $\omega^2$  e  $\alpha$ . Variando os valores de  $\Omega$  é possível encontrar todos os valores de A que tornam a equação de Duffing periódica.

Utilizando como exemplo, uma frequência de 100Hz e um força de , tem-se o seguintes valores de A

$$\left[ \left( 100^2 - \frac{2366,1}{0,427} \right) A - \frac{3}{4} * \frac{2,08 * 10^{11}}{0,427} A^3 + \frac{10}{0,427} \right] = 0$$

$$A=4,1*10^{-4}\text{m}; A=2,051*10^{-4} \pm -3,37*10^{-4}i$$

Desprezando as raízes imaginárias, encontram-se os valores de  $\omega^2$  e  $\alpha$ .

$$\omega^2 = 128368e\alpha = 0,9976.$$

### 3.4 Utilizando a equação de Mathieu

Estamos interessados em saber se a solução encontrada em  $\Delta x$  é estável ou instável. Tal estabilidade vai depender de onde a combinação de  $\alpha$  e  $\left(\frac{\omega}{2\Omega}\right)^2$  está nos diagramas de estabilidade de Mathieu.

Segundo *Newland, D.E (1989)* os limites de instabilidade para o caso não amortecido podem ser calculados como mostrados a seguir. As equações para os dois limites de estabilidade passando por  $\left(\frac{\omega}{2\Omega}\right)^2 = \frac{1}{4}$  são dados por

$$\delta = \frac{1}{4} \pm \frac{\varepsilon}{2}$$

Eliminando  $\varepsilon$  utilizando a eq.(23) encontra-se a equação abaixo

$$\delta = \frac{1}{4 \pm 2\alpha}$$

Dessa maneira a instabilidade será dada quando a frequência de excitação  $2\Omega$  é tal que

$$\frac{1}{4 - 2\alpha} \leq \left(\frac{\omega}{2\Omega}\right)^2 \leq \frac{1}{4 + 2\alpha}$$

Pode-se encontrar a faixa de frequências de excitação que geram a instabilidade do sistema, dada por

$$\Omega_2 \leq \Omega \leq \Omega_1$$

onde,

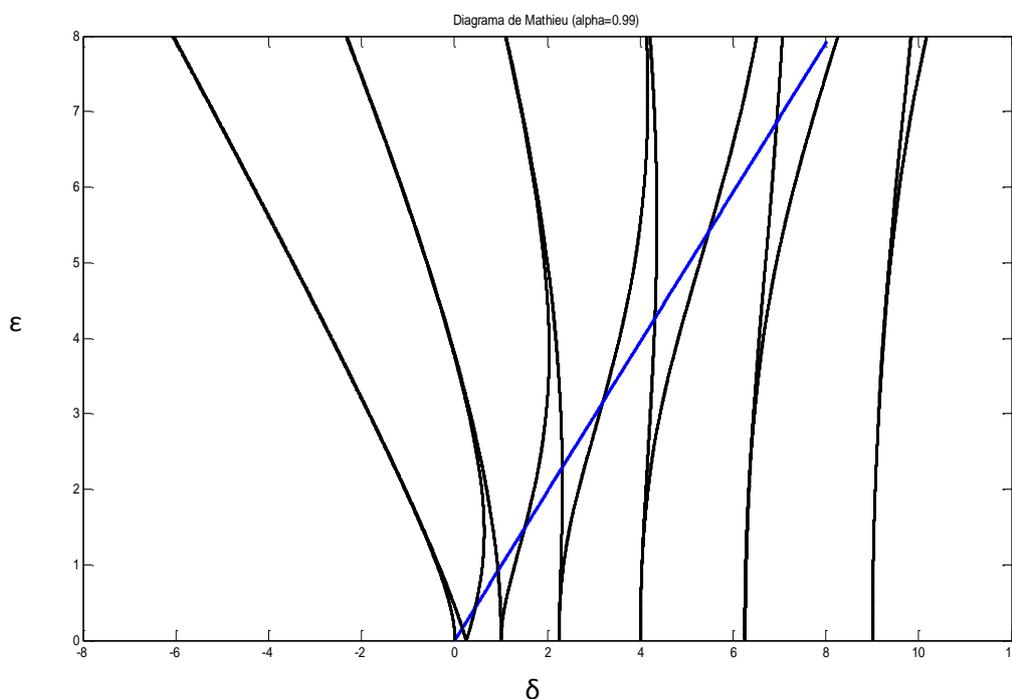
$$\Omega_1 = \omega \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)^{1/2}$$

$$\Omega_2 = \omega \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{1/2}$$

Utilizando a linha de comando mostrada no anexo C, pode-se calcular a faixa de frequência que geram a instabilidade no sistema, e que atendam a equação de Duffing.

Porém ao rodar o programa com os parâmetros determinados anteriormente, não se encontram frequências que geram uma resposta periódica da equação de Duffing e que geram instabilidade ao sistema.

Outra maneira de resolver o problema é traçar a curva de  $\alpha$  no diagrama de Mathieu e determinar onde estão as frequências que geram a instabilidade. Calculando a faixa de valores de  $\alpha$ , nota-se que esse fica em torno de 0.99 para frequências de 1 a 10000Hz. Traçando essa curva, se obtêm o diagrama da Figura 15.



**Figura 15 - Diagrama de Mathieu**

Os valores de  $\delta$  encontrados que estão na faixa instável são apresentadas na Tabela 4.

**Tabela 4 - Valores de delta**

	$\delta 1$	$\delta 2$
<b>1ª faixa</b>	0,406	0,666
<b>2ª faixa</b>	0,964	1,233
<b>3ª faixa</b>	1,460	1,792

Deve-se então encontrar valores de  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  que atendam a equação de Duffing e as condições da tabela 4. Dessa maneira tem-se

$$\delta = \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2 \rightarrow \omega^2 = \delta\Omega^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega^2 = \left(\omega_0^2 + \frac{3\gamma A^2}{2}\right) \rightarrow \delta\Omega^2 = \left(\omega_0^2 + \frac{3\gamma A^2}{2}\right) \\ (\Omega^2 - \omega_0^2)A - \frac{3}{4}\gamma A^3 + P = 0 \end{array} \right.$$

Podem-se calcular os valores de  $\Omega^2$  e  $A$  que atendem as equações acima com o programa no apêndice E. Dessa maneira, pode-se chegar na 1ª faixa de instabilidade mostrada na tabela 5.

**Tabela 5 - Frequência de instabilidade**

	$\Omega 1$	$\Omega 2$
<b>1ª faixa</b>	91,215	116,826

### 3.5 Integração Numérica

#### 4.5.1. Integração do modelo descontínuo

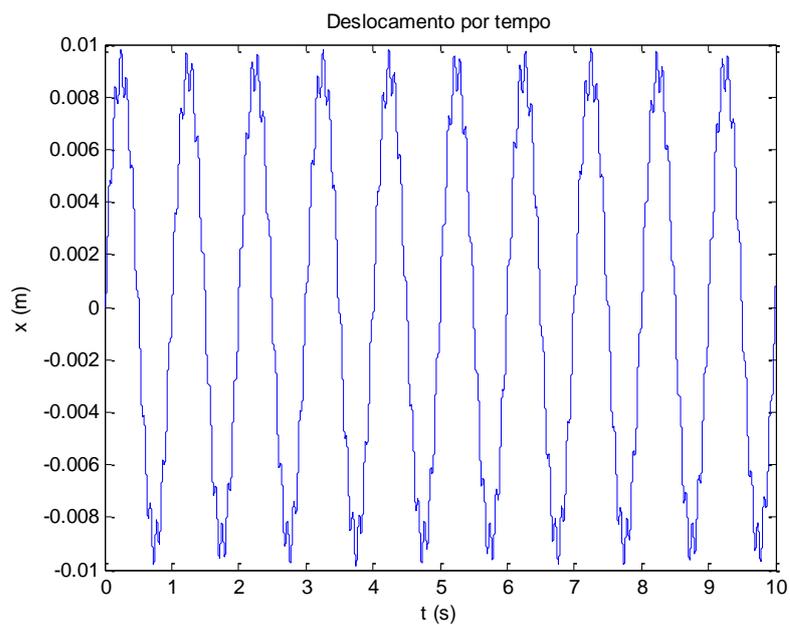
Uma vez obtidos os valores das características da cremalheira, pode-se estudar a equação do movimento. Substituindo os valores encontrados obtêm-se a seguinte equação

$$\ddot{X} + 2366,1X = H(X) + \frac{F}{m} \cos(\Omega t)$$

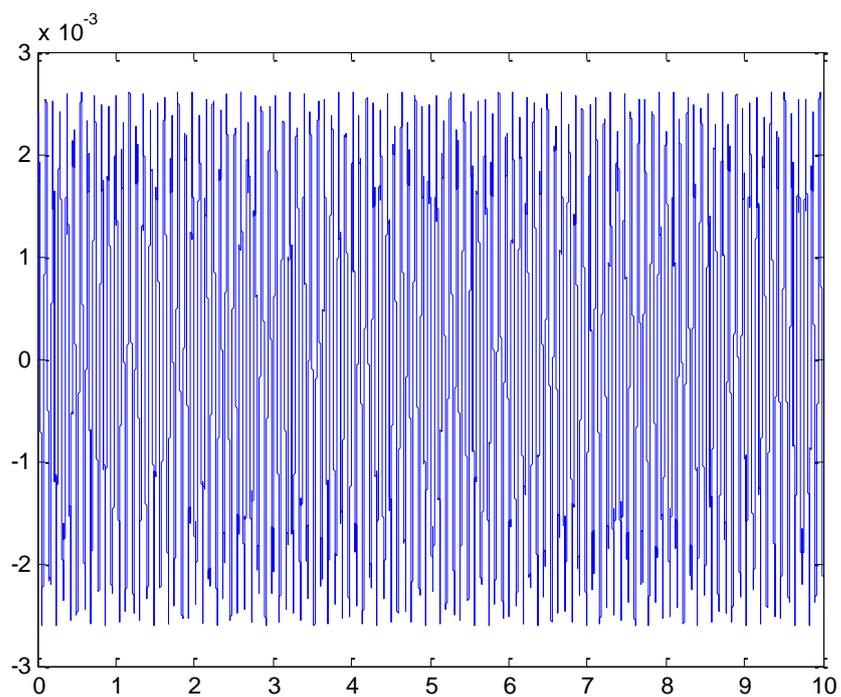
sendo  $H(X)$

$$H(X) = \begin{cases} 0,21 & X > e \\ 2366,1X, & -e < X < e \\ -0,21, & X < -e \end{cases}$$

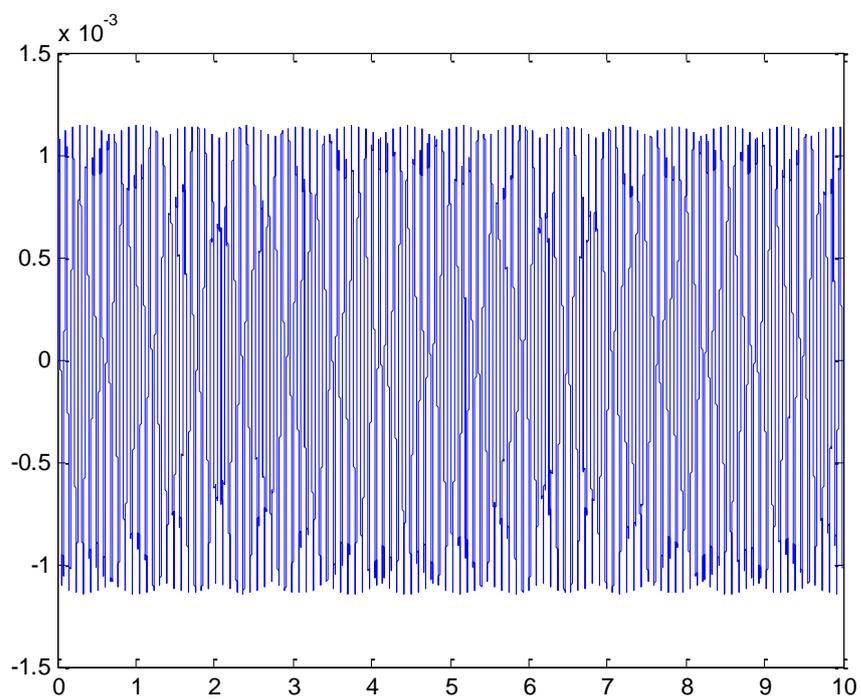
Simulando no ambiente Simulink do Matlab, com o diagrama e parâmetros apresentados no apêndice B, resolve-se a equação pelo método de integração numérica. Obteve-se a resposta para a posição em função do tempo mostrada na figura. Para a simulação foi admitido  $F=10\text{N}$  com uma frequência de excitação  $\Omega=1\text{Hz}$ ,  $\Omega=50\text{Hz}$ ,  $\Omega=100\text{Hz}$  e  $\Omega=150\text{Hz}$ . O período da simulação foi de 10 segundo.



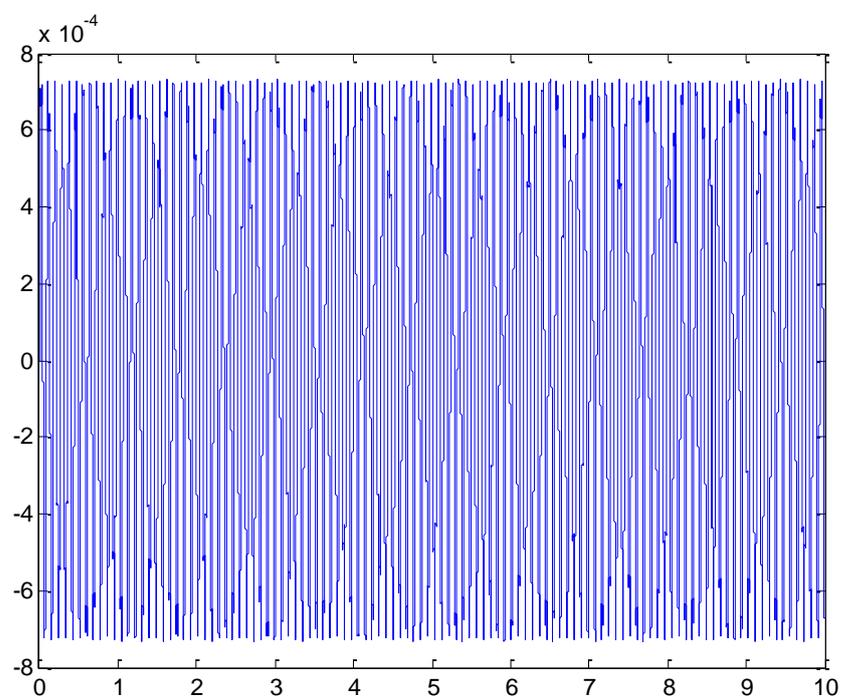
**Figura 16–Deslocamento por tempo (1Hz)**



**Figura 17 - Deslocamento por tempo (50Hz)**



**Figura 18 - Deslocamento por tempo (100Hz)**



**Figura 19 - Deslocamento por tempo (150Hz)**

Como pode ser observado nas simulações acima, todas as simulações apresentaram uma resposta senoidal, harmônica e como frequência de oscilação igual à frequência de excitação, características esperadas se não existisse a folga no sistema. Pode-se observar que todos os deslocamentos apresentam amplitudes superiores a folga na bucha, o que caracterizaria o impacto, porém não apresentam a instabilidade que se esperava.

#### 4.5.2 Integração do modelo cúbico (Duffing-Mathieu)

Para mostrar a instabilidade gerada pela não linearidade cúbica da constante elástica encontrada pelo método dos mínimos quadrados, foram plotadas as respostas da equação de Duffing para 85Hz, 95Hz, 100Hz, 110Hz e 130Hz. Para realizar a simulação foi utilizado o programa em Simulink do Matlab apresentado no Apêndice F.

As posições das frequências no diagrama de Mathieu são apresentadas na figura.

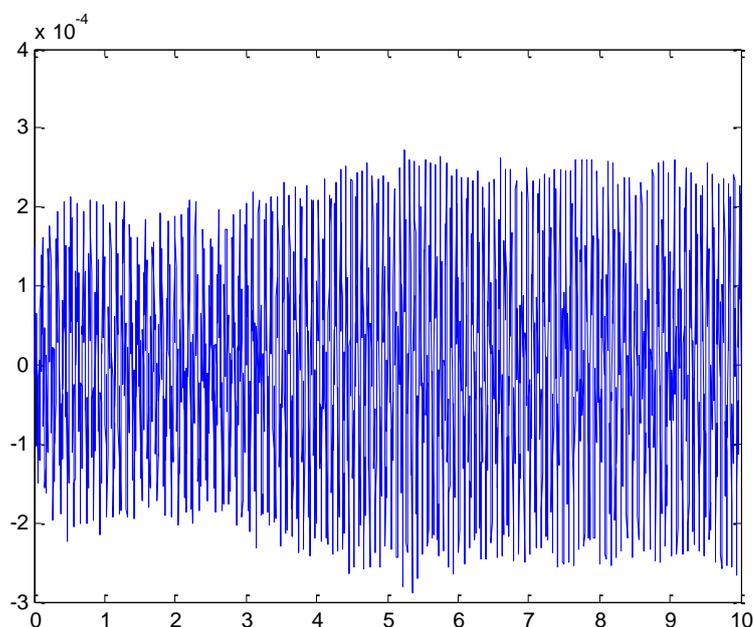
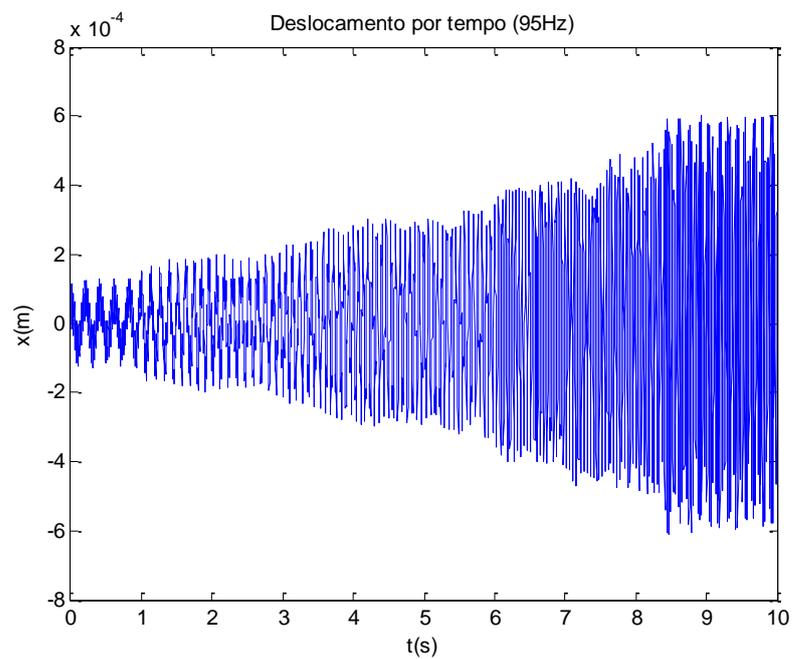
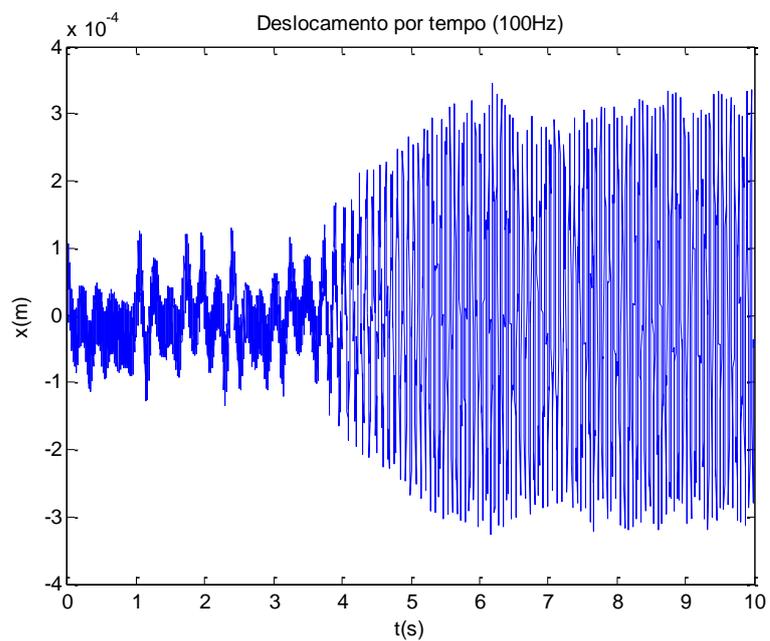


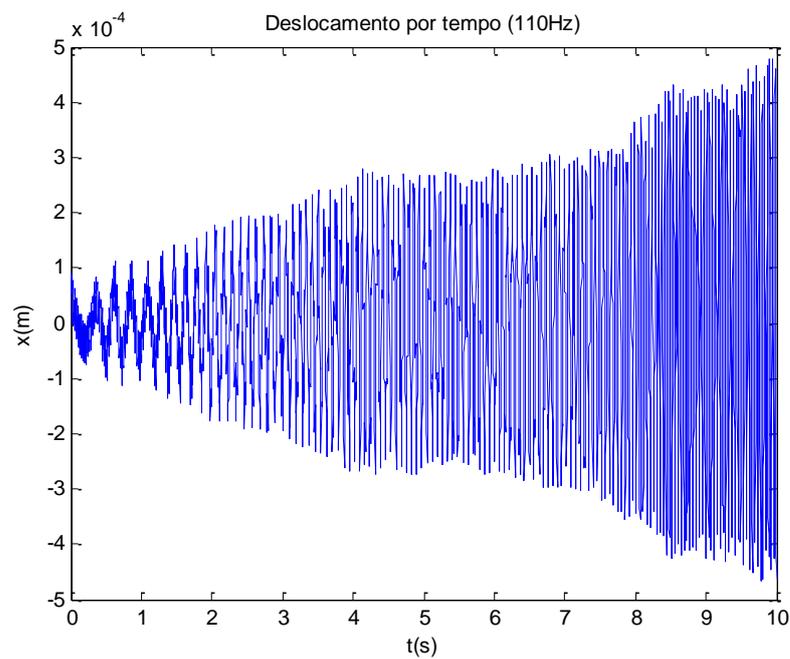
Figura 20 - Deslocamento por tempo (85Hz)



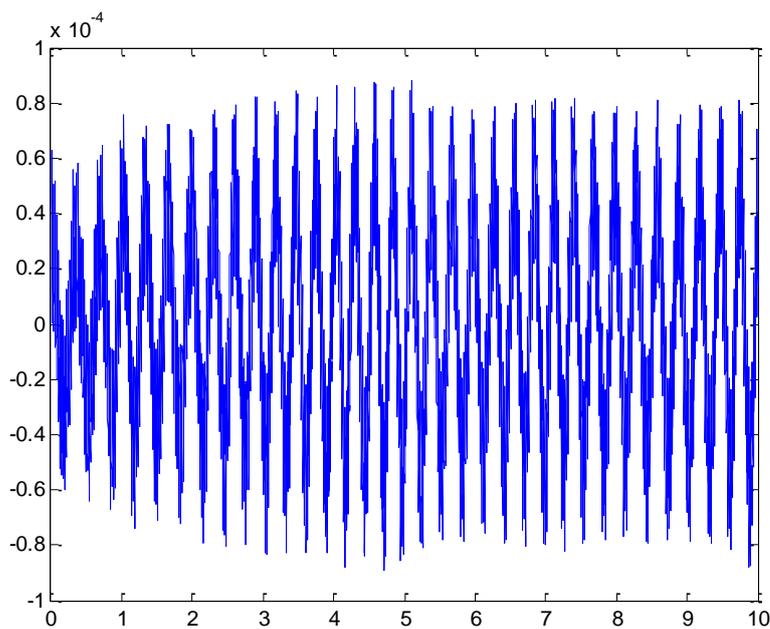
**Figura 21 - Deslocamento por tempo (95Hz)**



**Figura 22 - Deslocamento por tempo (100Hz)**



**Figura 23 - Deslocamento por tempo (110Hz)**



**Figura 24 - Deslocamento por tempo (130Hz)**

Pode-se notar nas simulações apresentadas anteriormente que para as frequências dentro da faixa de instabilidade apresentam um aumento na amplitude ao passar do tempo, enquanto as frequências fora da faixa, apesar de apresentarem amplitude superior à folgada bucha, apresentam a resposta senoidal harmônica estável.

#### 4.5.3 Integração pelo software de dinâmica de multicorpos (MSC ADAMS)

Para se realizar uma análise mais real da situação estudada e um primeiro contato com um software no qual seria possível realizar uma análise mais complexa, como modelo de viga e depois expandir para um modelo com todos os componentes da caixa de direção, optou-se por utilizar o MSC ADAMS.

Nesse software foi simulada a mesma situação anterior, um sistema massa mola com características não lineares. A Figura 25 mostra o modelo simplificado utilizado na simulação enquanto a mostra Figura 26 a curva não linear da força da mola.

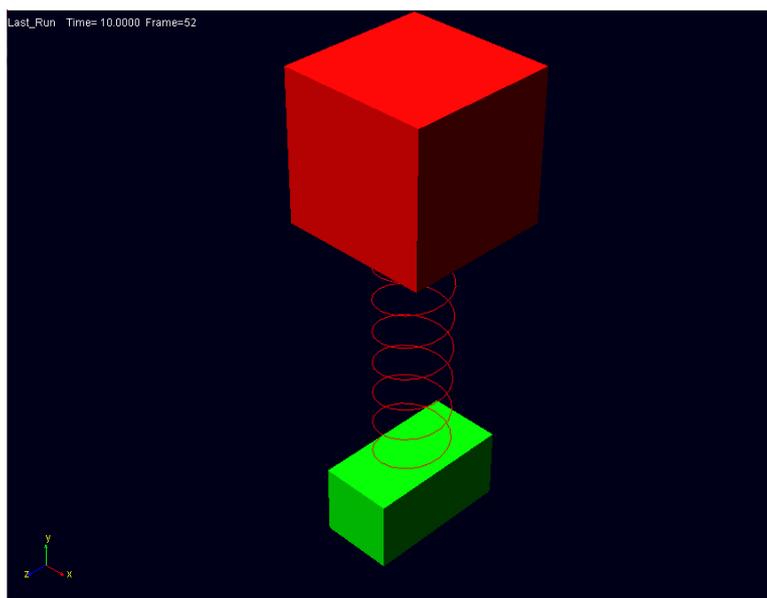
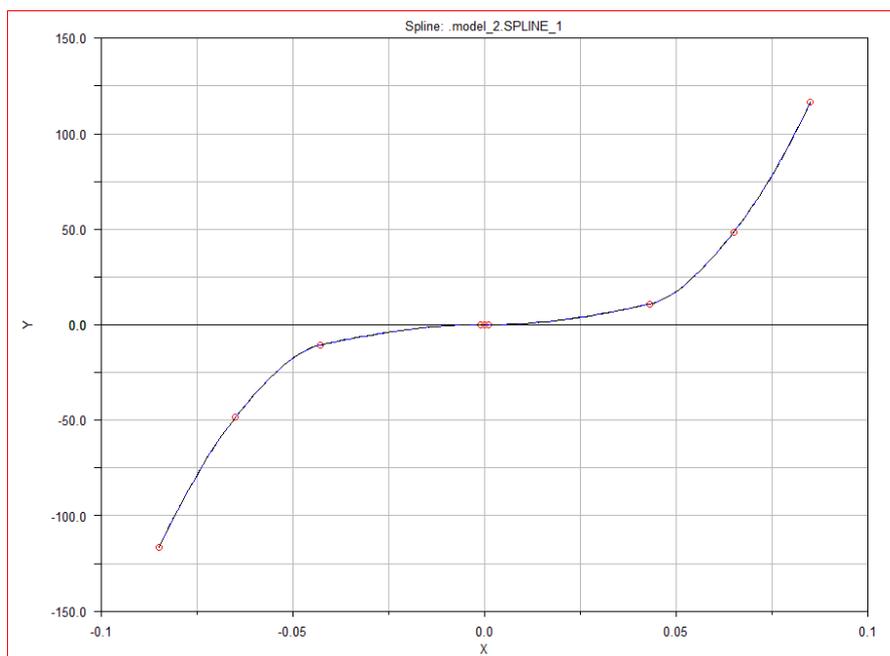
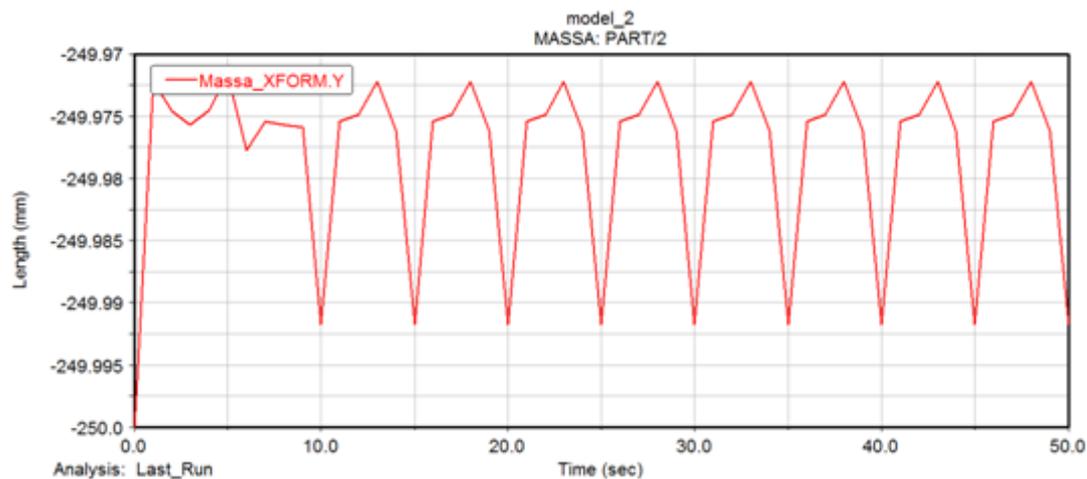


Figura 25 - Modelo massa-mola no MSC ADAMS

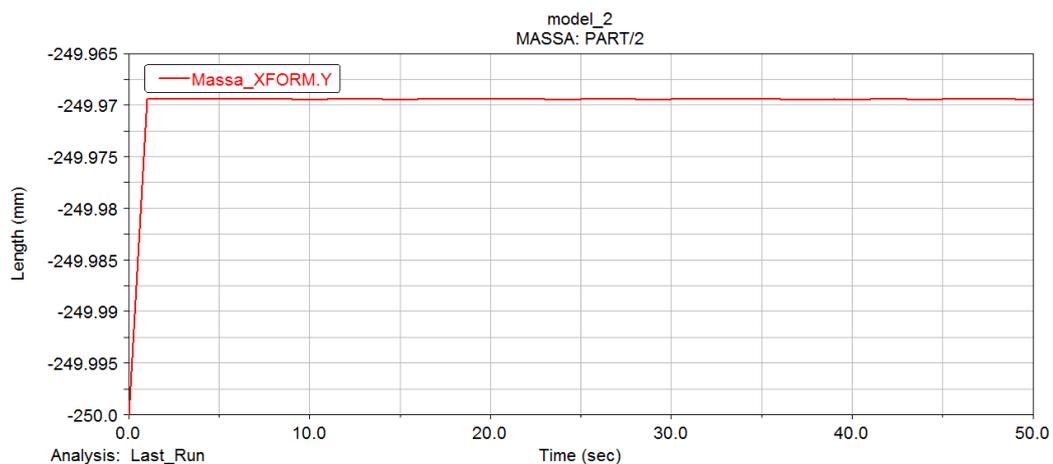
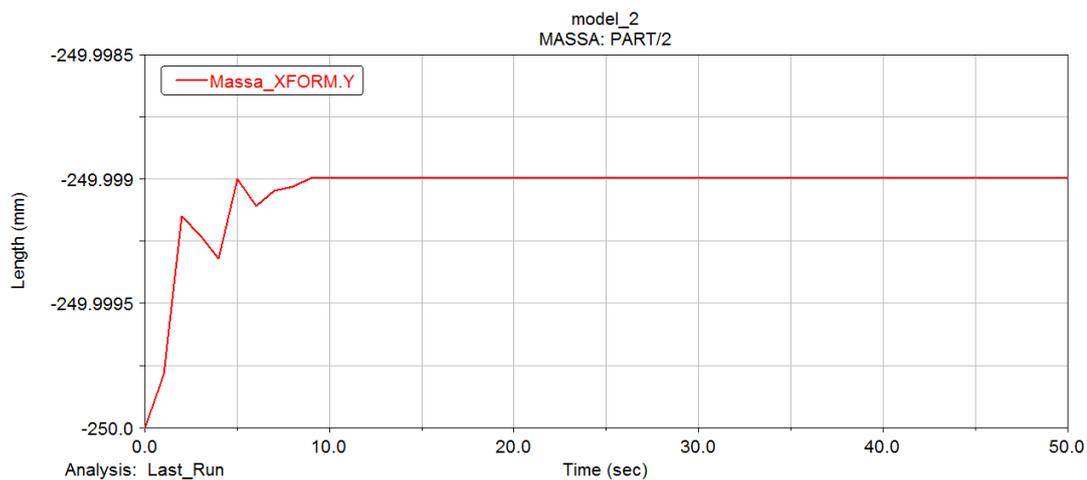
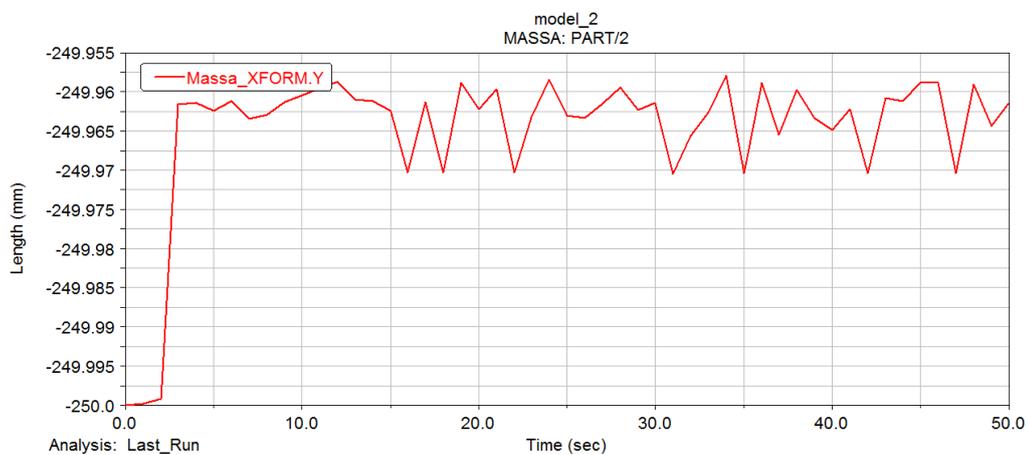


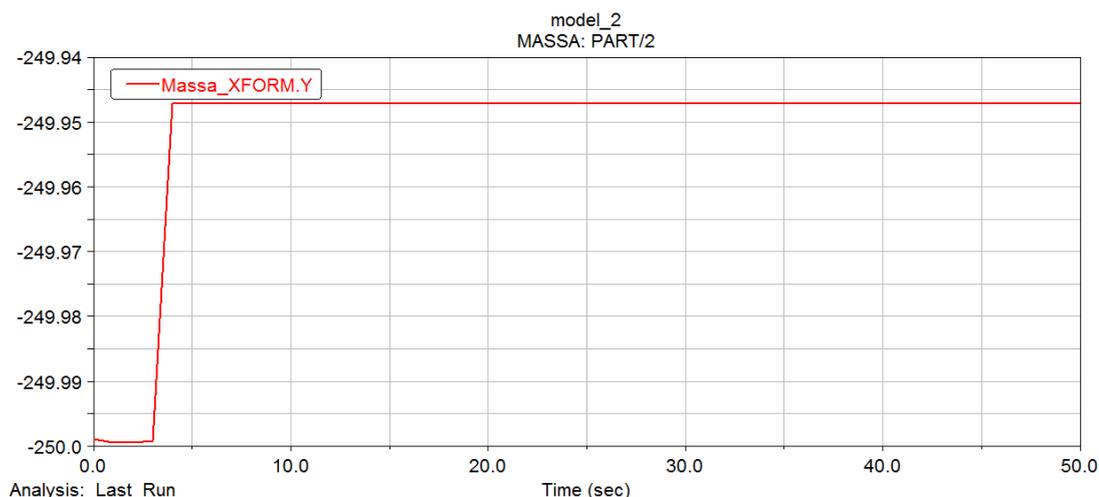
**Figura 26 - Força da Mola no MSC ADAMS**

Utilizando as mesmas frequências utilizadas nas simulações do item 4.5.2 (85Hz, 95Hz, 100Hz, 110Hz e 130Hz) se obtêm as respostas apresentadas da Figura 27 a Figura 28.



**Figura 27 - Deslocamento por tempo (85Hz)**

**Figura 28 - Deslocamento por tempo (95Hz)****Figura 29 - Deslocamento por tempo (100Hz)****Figura 30 - Deslocamento por tempo (110Hz)**



**Figura 31 - Deslocamento por tempo (130Hz)**

Se pode perceber pelas simulações anteriores que não obtêm as mesmas respostas esperadas quando se utiliza o MSC ADAMS. Quando se excitou o sistema dentro da faixa de frequências instáveis se obteve respostas que tendem para o repouso, o que não é esperado uma vez que não foi considerado o amortecimento.

Isso não desqualifica as instabilidades encontradas anteriormente uma vez que houve uma nova aproximação na curva cúbica da força da mola, o que afastou ainda mais a resposta da resposta real. O importante dessas simulações foi ter um primeiro contato com o programa e entender como funcionam as integrações desse software.

#### 4. CONCLUSÕES

Nesse projeto foi obtido o modelo matemático de um sistema de direção pinhão-cremalheira, levando em conta a folga existente entre os componentes para a determinação do ruído de batida constatado em alguns conjuntos desse equipamento em testes de qualidade, além das simulações computacionais que retratam o movimento do sistema estudado.

O primeiro ponto importante a ser levado em consideração foi o resultado obtido com as medições realizadas em laboratório, que permitiram avaliar a ordem de grandeza da folga entre a cremalheira e a bucha. Acredita-se que o ruído pode provir dessa folga, ou seja, do impacto entre esses componentes. Pode-se perceber, no

entanto que essa folga é da ordem de dezenas micrometros, o que dificultou até mesmo a medição da mesma.

Quanto às simulações realizadas no Matlab para o modelo com elasticidade não linear descontínua (item 4.5.1) pode-se perceber que foram obtidas respostas muito próximas a do movimento harmônico forçado sem amortecimento. O gráfico da posição pelo tempo apresentou uma resposta senoidal e de um sistema harmônico, ou seja, que não converge para o repouso.

Nesse tipo de análise por a folga ser muito pequena a integração numérica não se apresenta como sendo uma boa solução, pois praticamente desconsidera a existência de folga como pode ser visto nas simulações.

Foi possível também aproximar a equação descontínua por um polinômio do terceiro grau e estudar duas novas equações que se aproximam do comportamento do modelo, a equação de Duffing e a equação de Mathieu. Com essas equações foi possível determinar a faixa de frequências de excitação nas quais o sistema é instável.

Para a aproximação feita foi possível chegar a uma faixa de frequências de excitação (de 91,215Hz até 116,826Hz) nas quais o sistema possui uma resposta instável.

Dessa maneira, pelo modelo obtido e simulações realizadas, pode-se chegar a conclusão que a caixa de direção estudada pode estar sendo excitada em uma frequência que está dentro da faixa determinada, o que está induzido uma ressonância e tornando a sua resposta instável, gerando assim o ruído de batida.

Como se pode ver no diagrama de Mathieu a mudança da região instável para a região estável é muito sutil e uma mudança na frequência de excitação pode gerar o ruído encontrado em algumas caixas de direção.

Quanto às simulações em MSC ADAMS ainda é necessário melhorar muito o modelo, realizando um estudo para o caso da viga para poder estendê-lo futuramente para o modelo considerando todos os componentes do sistema de direção.

## **Bibliografia**

Blevins, Robert D. **Formulas for natural frequency and mode shape**, Krieger Publishing Company, 1993

Cruz, J. M. Xavier da. **Estudo de caso de ruído “knocknoise” em mecanismo de caixa de direção hidráulica tipo pinhão-cremalheira**, São Paulo, 2006 (dissertação para título de mestre).

Den Hartog, J. P. **Mechanical Vibrations**, McGraw-Hill Book Company, 1972

Gere, James; Thomson **Mecânica dos Sólidos**, LTC, São Paulo 2001

Giacomin, J.; Fustes, F. **Subjective equivalence of steering wheel vibration and sound**, University of Sheffield, 2004

Hanzaki, A. R.; Rao, P.V.M; Saha, S.K. **Kinematic and sensitivity analysis and optimization of planar rack-and-pinion steering linkages**, Elsevier, 2007

Li, Hongguang; Wen, B.; Zhang, J. **Asymptotic method and numerical analysis for self-excited vibration in rolling mill with clearance**, 1999

Newland, D. E. **Mechanical vibration analysis and computation**, Longman Scientific & Technical, 1989

Panovko, G. **Elements of the applied theory of elastic vibration**, MIR Publishers, 1971.

Rao, S. S. **Mechanical Vibrations**, 4<sup>th</sup> Ed., Pearson Education, 2004

Vuolo, J. H. **Introdução à teoria de erros**, Universidade de São Paulo, 3<sup>a</sup> Edição, 1999

## Apêndice A – Programa para plotar o diagrama de Mathieu

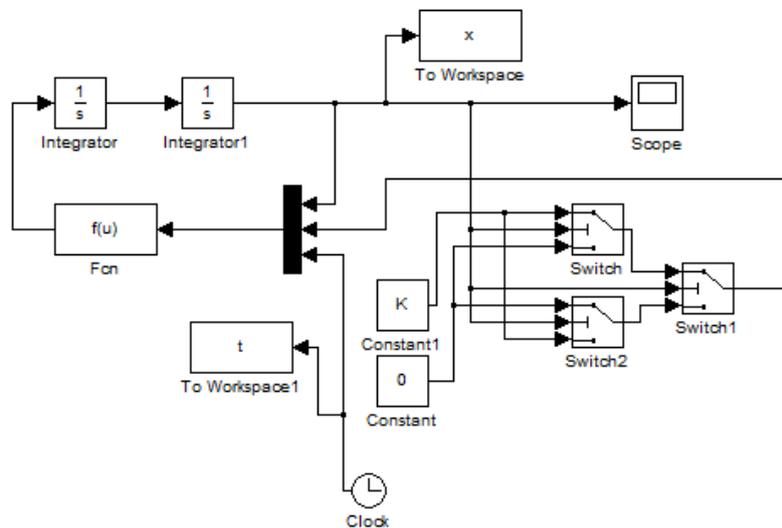
```

clearall
N=10;
A=zeros(N,N);
B=zeros(N-1,N-1);
E=zeros(N/2,N/2);
F=zeros(N/2,N/2);
for e=0.01:0.01:8
for i=1:1:N %Escrever a matriz A
for j=1:1:N
if i==j
A(i,j)=(i-1)^2;
end
if i==j-1
A(i,j)=-e/2;
end
if i==j+1
A(i,j)=-e/2;
end
end
end
for i=1:1:N-1 %Escreve a matriz B
for j=1:1:N-1
if i==j
B(i,j)=(i)^2;
end
if i==j-1
B(i,j)=-e/2;
end
if i==j+1
B(i,j)=-e/2;
end
end
end
for i=1:1:N/2 %Escreve a matriz C
for j=1:1:N/2
if i==j
E(i,j)=(2*i-1)^2/4;
end
if i==j-1
E(i,j)=-e/2;
end
if i==j+1
E(i,j)=-e/2;
end
end
end
for i=1:1:N/2 %Escreve a matriz D
for j=1:1:N/2
if i==j
F(i,j)=(2*i-1)^2/4;
end
if i==j-1
F(i,j)=-e/2;
end
if i==j+1
F(i,j)=-e/2;
end
end
end

```

```
end
end
end
A(2,1)=-e;
E(1,1)=1/4-e/2;
    F(1,1)=1/4+e/2;
c=eig(A);
cc=[c(1);c(2);c(3);c(4)];
s=eig(B);
ss=[s(1);s(2);s(3)];
c12=eig(E);
cc12=[c12(1);c12(2);c12(3)];
s12=eig(F);
    ss12=[s12(1);s12(2);s12(3)];
    plot(cc,e,'black',ss,e,'black',cc12,e,'black',ss12,e,'black'); hold on;
end
```

## Apêndice B – Programa para simulação do modelo no Matlab



```
clearall
```

```
m=0.47157;
```

```
omega=1;
```

```
F=10/m;
```

```
K=2366.1;
```

```
e=0.000041821;
```

## Apêndice C– Programa para simulação da equação de Mathieu em Matlab

```
function main
options=odeset('RelTol',1e-10);
Xo = [0;0];
tspan = [0,1];
[t,X] = ode45(@mathieu,tspan,Xo,options);
figure
hold on
plot(t,X(:,1))
ylabel('x (m)');xlabel('t (s)');title('DeslocamentoxTempo')
return

function [dx_dt]= mathieu(t,x)
w2=583982.5;
alpha=0.996328;
omega=600;%aqui se altera os valores da frequencia de excitação
P=100;
M = [0,1;-w2*(1+alpha*cos(omega*2*pi*t)),0];
dx_dt = M*x+[0;P*cos(t*pi*omega/2)];
return
```

## Apêndice D – Programa para a determinação da faixa de frequências instáveis

```

m=0.427;
omzero2=134.0159926/m;
gama=2.08071e+011/m;
F=50;
P=F/m;
f=0;
foromexc=1:0.1:10000
p3=-3/4*gama;
p1=omexc^2-omzero2;
poli=[p3 0 p1 P];
raiz=roots(poli);
teste=imag(raiz);
ifteste(3)==0;
A=raiz(1);
alpha=(3*gama*A^2)/(2*omzero2+3*gama*A^2);
omega2=omzero2+(3*gama*A^2)/2;
omexc1=sqrt(omega2)*((1+alpha/2)^.5);
omexc2=sqrt(omega2)*((1-alpha/2)^.5);
if omexc1<=omexc
if omexc2>=omexc
    f=f+1;
end
end
    A=raiz(2);
alpha=(3*gama*A^2)/(2*omzero2+3*gama*A^2);
omega2=omzero2+(3*gama*A^2)/2;
omexc1=sqrt(omega2)*((1+alpha/2)^.5);
omexc2=sqrt(omega2)*((1-alpha/2)^.5);
if omexc1<=omexc
if omexc2>=omexc
    f=f+1;
end
end
    A=raiz(3);
alpha=(3*gama*A^2)/(2*omzero2+3*gama*A^2);
omega2=omzero2+(3*gama*A^2)/2;
omexc1=sqrt(omega2)*((1+alpha/2)^.5);
omexc2=sqrt(omega2)*((1-alpha/2)^.5);
if omexc1<=omexc
if omexc2>=omexc
    f=f+1;
end
end
else
    A=raiz(1);
alpha=(3*gama*A^2)/(2*omzero2+3*gama*A^2);
omega2=omzero2+(3*gama*A^2)/2;
omexc1=sqrt(omega2)*((1+alpha/2)^.5);
omexc2=sqrt(omega2)*((1-alpha/2)^.5);
if omexc1<=omexc
if omexc2>=omexc
    f=f+1;
end
end
end
end
end

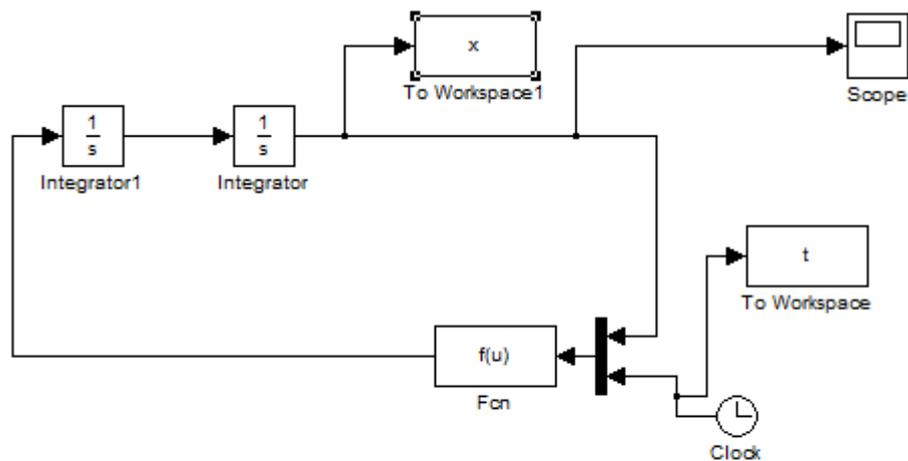
```

## Apêndice E – Programa para resolução do sistema de equações.

```
function F = myfun(x)
delta=1.460;
F= [(x(1)^2)*delta-(134.016/0.472)-6.61249e+011*(x(2)^2); ((x(1)^2)-134.016/0.472)*x(2)-
3.30625e+11*(x(2)^3)+21.186441];
```

```
Function main
clear all
x0 = [10000000;0.0000001];
options=optimset('Display','iter');
[x,fval] = fsolve(@myfun,x0,options)
```

## Apêndice F – Programa para a simulação da equação cúbica.



```
clear all
omega2=-134.016;
m=0.47157;
F=10;
P=F/m;
gama=2.08e+011;
omexc=95;
```