UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

ANÁLISE DE ESTABILIDADE HIDRODINÂMICA DE ESCOAMENTOS MULTIFÁSICOS VIA MÉTODO DE ARNOLDI COM REINÍCIO IMPLÍCITO

Wellington Lombardo Nunes de Mello

São Paulo

2010

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO ESCOLA POLITÉCNICA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

ANÁLISE DE ESTABILIDADE HIDRODINÂMICA DE ESCOAMENTOS MULTIFÁSICOS VIA MÉTODO DE ARNOLDI COM REINÍCIO IMPLÍCITO

Trabalho de formatura apresentado à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Graduação em Engenharia

Wellington Lombardo Nunes de Mello

Orientador: Prof. Dr. Jorge Luis Baliño

Colaborador: Prof. Dr. Karl Peter Burr
(Centro de Engenharia, Modelagem e Ciências Sociais Aplicadas, Universidade Federal do ABC, São Paulo, SP)

Área de Concentração:

Engenharia Mecânica

São Paulo

2010

FICHA CATALOGRÁFICA

Mello, Wellington Lombardo Nunes de
Análise de estabilidade hidrodinâmica de escoamentos multifásicos via Método de Arnoldi com Reinício implícito / W.L.N. de Mello. – São Paulo, 2010.
148p.

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1. Hidrodinâmica (Estabilização) 2. Escoamento multifásico 3. Petróleo (Produção) I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II. t.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Doutor Jorge Luis Baliño, pela dedicação e presença contínua no desenvolvimento deste trabalho; ao Prof. Karl Peter Burr, pela coordenação nos estudos da teoria da estabilidade linear e no desenvolvimento das rotinas computacionais; à equipe do Núcleo de Dinâmica e Fluidos (NDF) da Escola Politécnica, cujas instalações sempre estiveram à minha disposição; e à minha família, pelo apoio e confiança durante estes cinco anos de graduação.

Agradeço também à Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), que financiou este trabalho através de uma bolsa de iniciação científica.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo a análise de estabilidade hidrodinâmica de modelos de escoamentos multifásicos utilizados em sistemas de produção de petróleo. São desenvolvidas ferramentas computacionais e analíticas capazes de determinar, para diferentes configurações de parâmetros (vazão volumétrica de líquido, vazão mássica de gás no *pipeline* e comprimento de *buffer* do sistema), as regiões onde o escoamento ocorre em regime permanente e as regiões onde existem os diferentes tipos de intermitência como, por exemplo, a intermitência severa (*severe slugging*). Para a discretização espacial do *riser*, utiliza-se o método das diferenças finitas. São gerados mapas de estabilidade para um conjunto de dados de entrada de interesse, de modo a se delimitar uma fronteira entre as regiões de escoamento instável e estável (condições em que o fenômeno de intermitência severa ocorre ou não). Os mapas de estabilidade obtidos são comparados com trabalhos experimentais presentes na literatura, a fim de se investigar a validade da abordagem utilizada (Teoria da Estabilidade Linear) no modelo de escoamento multifásico. Devido à existência de singularidade no problema estudado, o espectro de autovalores do problema é determinado através do Método de Arnoldi com Reinício Implícito (IRAM).

Uma interessante continuação deste trabalho é o desenvolvimento de metodologias para classificar os diferentes tipos de instabilidades hidrodinâmicas observadas, como intermitência severa dos tipos SS1, SS2 e SS3. Tais metodologias são úteis para determinar quais regimes intermitentes são aceitáveis ou não do ponto de vista operacional.

ABSTRACT

The objective of this work is to analyze the hydrodynamic stability of multiphase flow models in oil production systems. Special computational and analytical tools are developed in order to evaluate, for different parameter configurations (liquid volumetric flow rate, gas mass flow rate and the buffer length), the regions where the steady-state flow occurs and the regions where exist different types of intermittency, like severe slugging. The finite difference method is used for the flow spatial discretization. In order to draw a boundary between the unstable and stable flow regions, stability maps are generated for a certain input data. The obtained stability maps are compared with experimental works found in literature, this way is possible to validate the approach used (Theory of Linear Stability). The eigenvalue spectrum is obtained via Implicitly Restarted Arnoldi Method (IRAM) due to the existence of a singularity in the problem.

An interesting continuation of this work would be the development of methodologies for classifying the different types of observed hydrodynamic instabilities, such as severe slugging SS1, SS2 and SS3. These methodologies are useful to determine the intermittent regimes that are acceptable from the operational point of view.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

1 INTRODUÇÃO

A grande maioria dos escoamentos que ocorrem na natureza e na tecnologia são multifásicos. Por exemplo, as nuvens são gotas de líquido mexendo-se em um gás. Petróleo, gás e água coexistem na crosta terrestre. A transferência de calor por ebulição é de fundamental importância na geração de energia elétrica. Os processos químicos envolvem misturas, emulsões e catálises. Na área de alimentação, há bebidas carbonatadas (como refrigerantes, cerveja, etc.) e emulsões e suspensões (como maionese, manteiga, etc.).

Em um escoamento multifásico, as diferentes fases são distinguíveis fisicamente uma da outra. Como dentro de cada fase pode haver diferentes componentes e fenômenos turbulentos, a complexidade dos escoamentos multifásicos é ainda maior.

O principal fator desta complexidade dos escoamentos multifásicos é a existência de interfaces, cuja forma e posição ao longo do tempo são impossíveis de se determinar. Como em escoamentos turbulentos, recorre-se a um tratamento estatístico. Parâmetros de interesse que surgem do processo de média estatística neste tipo de problema são a fração de vazio (*void fraction*) e a densidade de área interfacial (*interfacial area*).

Existem na literatura diferentes modelos para tratar problemas de escoamentos multifásicos, dos mais simples (modelo homogêneo) até os mais complexos (como o de escoamentos separados), nos quais se modelam os termos de interação entre as diferentes fases.

O estado da arte na modelagem de escoamentos multifásicos ainda não evoluiu suficientemente para garantir o bom comportamento matemático das equações resultantes. Como exemplo, as equações para escoamento unidimensional polidisperso em bolhas (*bubbly flow*) possuem autovalores complexos para determinada faixa de parâmetros de trabalho, o que é inaceitável fisicamente. [1]

Diante do panorama apresentado, objetiva-se, através de simulações computacionais, auxiliar o contínuo aperfeiçoamento de modelos existentes e aplicar uma nova forma de abordagem do fenômeno: a utilização da teoria da estabilidade linear, através do cálculo de autovalores via Método Implícito Iterativo de Arnoldi.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Na literatura, existem diversos modelos para analisar os escoamentos multifásicos, e estes são classificados segundo o grau de sofisticação. O modelo mais simples (modelo homogêneo) considera um pseudo-fluido com propriedades médias da mistura e despreza os efeitos de escorregamento entre as fases, considerando as equações de conservação para as fases escoando em conjunto. O modelo mais sofisticado considera as fases separadas, e envolve equações de conservação aplicadas a cada uma das fases. O mais conhecido é o modelo de fluxo de deriva (*drift flux model*). Desta forma, faz-se necessária a introdução das principais variáveis utilizadas no estudo de escoamentos multifásicos.

2.1 Principais variáveis em escoamentos multifásicos [2]

Nesta seção, são discutidas as principais variáveis de interesse nos equacionamentos dos modelos de escoamentos multifásicos.

- Fração de vazio (*void fraction*): fração da área de passagem ocupada pelo gás.

$$\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{A_g}{A} \\ A = A_f + A_g \end{array} \quad \Rightarrow \quad 1-\alpha = \dfrac{A_f}{A} \tag{1}$$

- Título mássico (*mass quality*): fração da vazão mássica de gás.

$$\begin{array}{l} x = \dfrac{W_g}{W} \\ W = W_f + W_g \end{array} \quad \Rightarrow \quad 1-x = \dfrac{W_f}{W} \tag{2}$$

- Fluxo mássico: vazão mássica por unidade de área de passagem.

$$G = \frac{W}{A} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} W_g = G \cdot A \cdot x \\ W_f = G \cdot A \cdot (1-x) \end{array} \tag{3}$$

- Velocidades médias das fases:

$$u_g = \frac{W_g}{\rho_g A_g} \quad \text{e} \quad u_f = \frac{W_f}{\rho_f A_f} \tag{4}$$

- Título volumétrico (*volumetric quality*): fração da vazão volumétrica de gás.

$$\begin{aligned} &\beta = \frac{Q_g}{Q} \qquad \Rightarrow \qquad 1-\beta = \frac{Q_f}{Q} \\ &Q = Q_f + Q_g \end{aligned} \tag{5}$$

- Fluxo volumétrico ou velocidade superficial: vazão volumétrica por unidade de área de passagem:

$$j = \frac{Q}{A} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} Q_g &= j \cdot A \cdot \beta \\ Q_f &= j \cdot A \cdot (1-\beta) \end{aligned} \tag{6}$$

- Fluxos volumétricos ou velocidades superficiais das fases: velocidades médias das fases se estas escoassem em toda área de passagem:

$$j_g = \frac{Q_g}{A} \quad \text{e} \quad j_f = \frac{Q_f}{A} \tag{7}$$

A partir das definições anteriores, pode-se demonstrar que:

$$j_g = u_g \cdot \alpha = j \cdot \beta = \frac{G \cdot x}{\rho_g} \; ; \; j_f = u_f \cdot (1-\alpha) = j \cdot (1-\beta) = \frac{G \cdot (1-x)}{\rho_f} \tag{8}$$

$$G = G_g + G_f \; ; \quad G_g = j_g \cdot \rho_g = G \cdot x \; ; \quad G_f = j_f \cdot \rho_f = G \cdot (1-x) \tag{9}$$

- Relação de escorregamento (*slip*): relação entre as velocidades médias das fases.

$$S = \frac{u_g}{u_f} = \frac{W_g}{W_f} \cdot \frac{\rho_f}{\rho_g} \cdot \frac{A_f}{A_g} = \frac{x}{1-x} \cdot \frac{\rho_f}{\rho_g} \cdot \frac{1-\alpha}{\alpha} \tag{10}$$

- Velocidades relativas entre as fases:

$$u_{gf} = u_g - u_f = -u_{fg} \tag{11}$$

- Velocidades de deriva (*drift velocity*): diferença entre as velocidades das fases e velocidade superficial.

$$u_{fj} = u_f - j \ ; \ u_{gj} = u_g - j \tag{12}$$

- Fluxos de deriva (*drift flux*): fluxo volumétrico de uma fase relativo a uma superfície se deslocando com uma velocidade j:

$$j_{gf} = \alpha \cdot (u_g - j) = \alpha \cdot u_{gj}\,; \quad j_{fg} = (1-\alpha)\cdot(u_f - j) = (1-\alpha)\cdot u_{fj} \tag{13}$$

Estas considerações resultam na propriedade de simetria e na proporcionalidade com a velocidade relativa:

$$j_{gf} = -j_{fg} = \alpha \cdot (1-\alpha)\cdot u_{gf} \tag{14}$$

2.2 Equações de conservação para escoamentos multifásicos

Para escoamentos multifásicos, podem ser escritas as equações de conservação de massa e de momento linear, para o líquido e para o gás:

- Conservação de massa:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \cdot \rho_k) + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k V_k) = \Gamma_k \tag{15}$$

- Conservação do momento linear:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \cdot \rho_k \cdot V_k) + \nabla(\alpha_k \cdot \rho_k \cdot V_k \cdot V_k) = \Gamma_k \cdot V_{ki} + \nabla(\alpha_k \cdot T_k) + \alpha_k \cdot \rho_k \cdot G_k + M_k \tag{16}$$

2.3 Os escoamentos multifásicos [1]

Nos sistemas de produção de petróleo, o fluido que sai do meio poroso possui gás em solução e vem acompanhado de gás livre e água, dificultando a determinação do gradiente de pressão na coluna de elevação. Uma grande dificuldade adicional para o estudo de escoamentos multifásicos é que a forma e a posição das interfaces são desconhecidas.

As diferenças de velocidades entre as fases e a sua geometria influenciam diretamente no comportamento, sendo, portanto, a base para a classificação dos regimes de escoamento. Por sua vez, a distribuição das fases depende da direção do escoamento em relação à gravidade. Propriedades físicas como densidade, viscosidade e tensão superficial também influenciam no comportamento.

O conhecimento dos mecanismos de transporte multifásico de gás, petróleo e água tem se tornado importante na tecnologia de exploração *offshore*. A tendência de poços satélite conectados por dutos em árvore está sendo substituído por condutos de transporte mais compridos até as plataformas. Além disto, a maior profundidade dos poços apresenta desafios particulares para a garantia do escoamento.

Com as vazões existentes em dutos, linhas de surgência e *risers*, o padrão de escoamento mais freqüente é o padrão "intermitente", em "golfada" ou *slug*, caracterizado por uma distribuição axial intermitente de líquido e gás. O gás é transportado como bolhas entre golfadas de líquido. O padrão em golfadas pode mudar em determinadas condições geométricas e de escoamento e originar um fenômeno indesejável conhecido como "intermitência severa" ou "golfada severa" (*severe slugging*).

As conseqüências indesejáveis da intermitência severa são:

- Aumento da pressão na cabeça do poço, causando tremendas perdas de produção;
- Grandes vazões instantâneas, causando instabilidades no sistema de controle de líquido nos separadores e eventualmente um desligamento da plataforma;
- Oscilações de vazão no reservatório.

2.4 Os padrões de escoamento

De acordo com a direção do escoamento em relação à gravidade, verificam-se diferentes padrões de escoamentos (*flow patterns*).

A Figura 1 apresenta os padrões de escoamentos mais comuns em dutos verticais. O escoamento em bolhas de gás (*bubble flow*) escoando com o líquido é representado na Figura 1(a). O padrão representado na Figura 1(b) é o escoamento dito em golfada (*slug flow*). O padrão representado na Figura 1(c) é o escoamento em transição de fases (*churn flow*), caracterizado pela indefinição de qual fase é predominante no escoamento. O padrão representado na Figura 1(d) é do tipo anular (*annular flow*), caracterizado pelo escoamento de líquido na porção mais externa do duto, semelhante a um anel, com o gás escoando através desta região de líquido. São verificadas gotículas de líquido dispersas no gás.

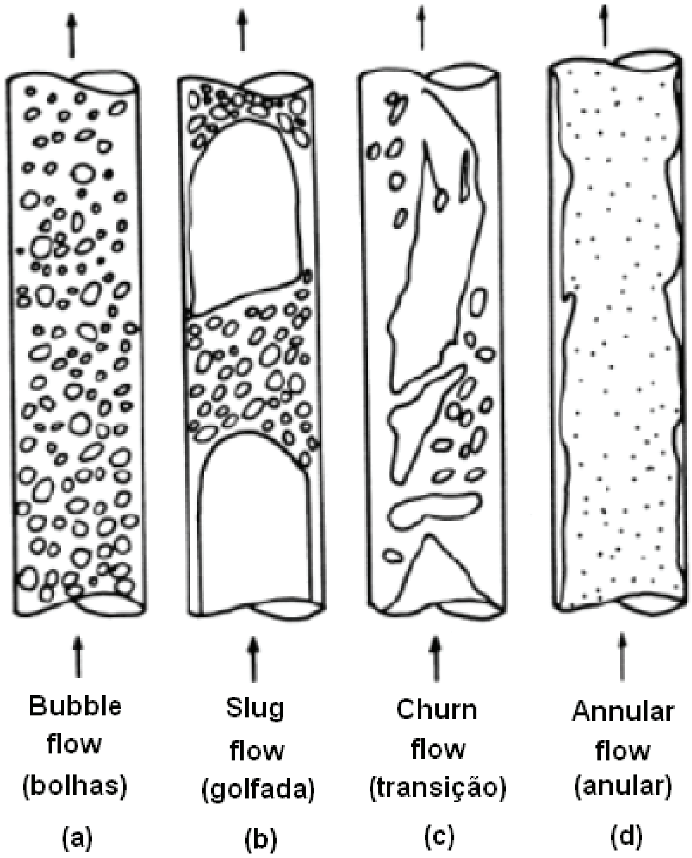

Figura 1 - Padrões de escoamento vertical:
(a) Bolhas; (b) Golfada; (c) Transição; (d) Anular. [2]

A Figura 2 apresenta os padrões de escoamentos mais comuns em dutos horizontais.

O padrão estratificado suave (*stratified smooth flow*) está representado na Figura 2(a), e é governado pela ação da gravidade. Como a massa específica da fase líquida é maior que a da fase gasosa, as fases se encontram bem definidas no escoamento.

O padrão estratificado ondulado (*stratified wave flow)* apresentado na Figura 2(b) se diferencia do estratificado suave por seu comportamento mais agitado.

A Figura 2(c) exibe o padrão em bolhas alongadas (*elongated bubble flow*), também governado pela gravidade, com bolhas grandes de gás escoando na porção superior do duto e líquido preenchendo a região inferior.

O padrão em golfadas (*slug flow*) verificado na Figura 2(d) caracteriza-se por bolhas ainda maiores de gás escoando na porção superior do duto.

O padrão anular (*annular flow*) é apresentado na Figura 2(e), caracterizado pelo escoamento da fase gasosa na região central do duto, e pelo escoamento de líquido anular, verificando-se finas gotículas de líquido dispersas na fase gasosa.

No padrão em bolhas dispersas (*dispersed bubble flow*) apresentado na Figura 2(f), as fases líquida e gasosa encontram-se bem misturadas, com pequenas bolhas de gás dispersas no líquido.

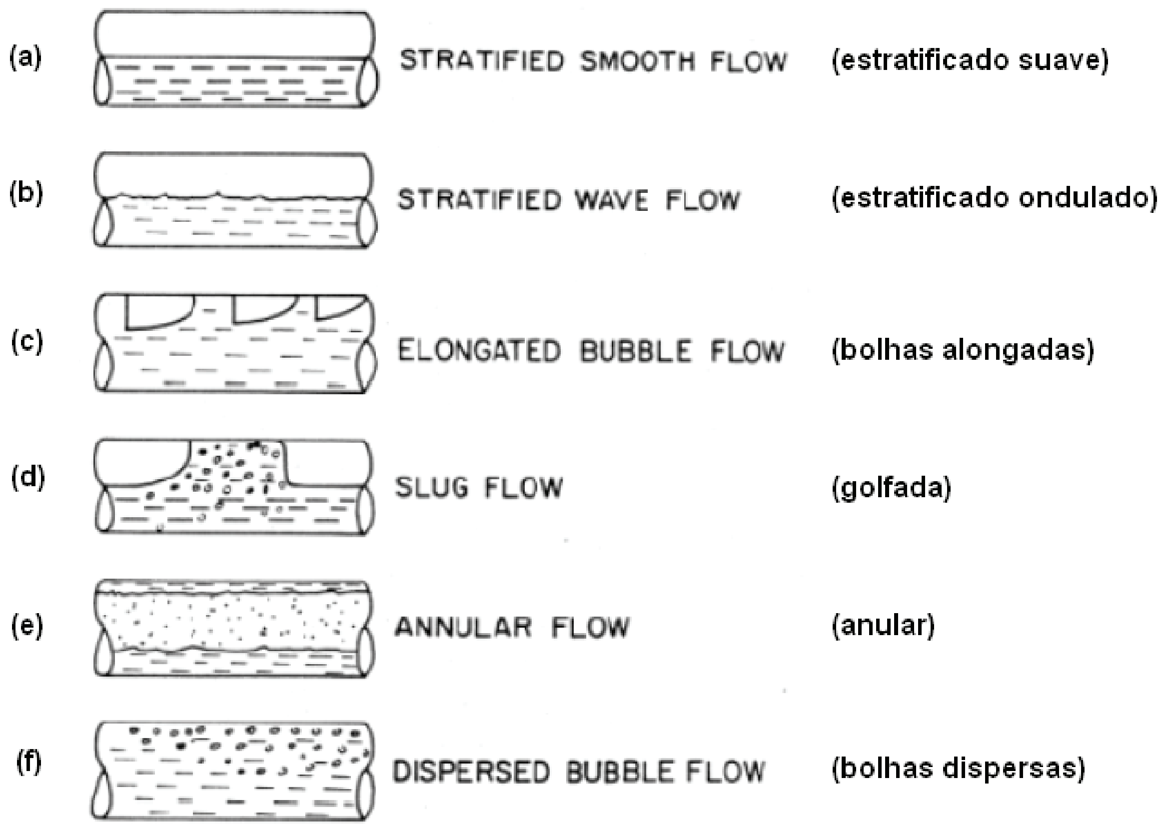

Figura 2 - Padrões de escoamento horizontal: (a) Estratificado suave; (b) Estratificado ondulado; (c) Bolhas alongadas; (d) Em golfada; (e) Anular; (f) Bolhas dispersas. [2]

2.5 Classificação dos padrões de escoamento

Os escoamentos multifásicos podem classificados em três tipos principais:

- Escoamentos separados: caracterizado por fases contínuas, com algumas gotas ou bolhas dispersas. São exemplos os padrões estratificado suave, estratificado ondulado e anular;
- Escoamentos intermitentes: pelo menos uma das fases é descontínua. São exemplos os padrões em bolhas alongadas, golfada e transição;
- Escoamentos dispersos: nesta classe, a fase líquida é contínua, enquanto a fase gasosa é descontinua. São exemplos os padrões em bolhas e em bolhas dispersas.

2.6 O fenômeno de intermitência severa

A intermitência severa ocorre geralmente num ponto com uma cota baixa na topografia do conduto, por exemplo, num trecho de tubulação descendente (*pipeline*), seguido de um trecho ascendente (*riser*).

Uma situação típica é que o líquido se acumula no fundo do *riser*, bloqueando a passagem de gás e iniciando um ciclo de golfada de períodos da ordem de horas, muito maior que o período de passagem de *slugs* em operação normal. Na operação em estado permanente, o padrão de escoamento no *pipeline* pode ser estratificado, enquanto no *riser* resulta intermitente, como mostrado na Figura 3.

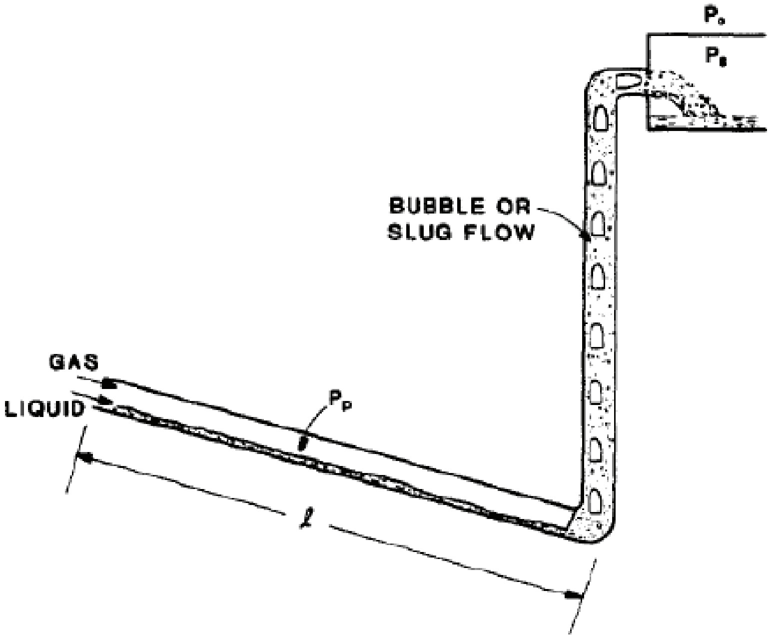

Figura 3 - Estado permanente. [3]

A intermitência severa está associada com grandes oscilações de pressão e problemas de dimensionamento nas unidades de separação na plataforma, provocando sua saída de serviço e graves perdas econômicas.

Um ciclo de intermitência severa pode ser descrito em termos das seguintes etapas. Uma vez que o sistema se desestabiliza e a passagem de gás fica bloqueada na base do *riser*, o líquido continua entrando e o gás existente no *riser* continua saindo, sendo possível que o nível de líquido fique abaixo do nível máximo no separador. Como consequência, a coluna do *riser* se torna mais pesada e a pressão na base aumenta, comprimindo o gás no *pipeline* e criando uma região de acumulação de líquido. Esta etapa é conhecida como formação do *slug* (Figura 4).

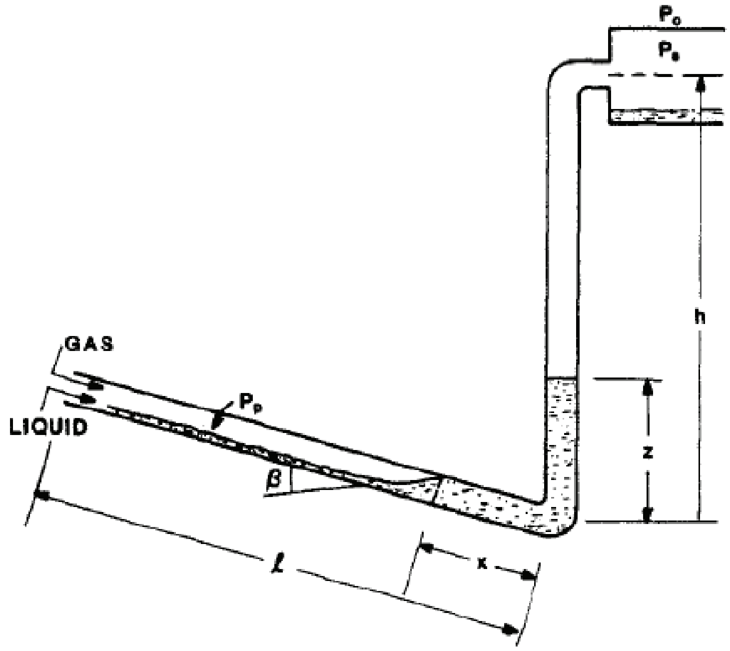

Figura 4 - Formação do *slug*. [3]

Quando o nível de líquido atinge o topo enquanto a passagem de gás permanece bloqueada, a pressão na base atinge seu máximo valor e há somente líquido escoando no *riser*, resultando na etapa de produção do *slug* (Figura 5).

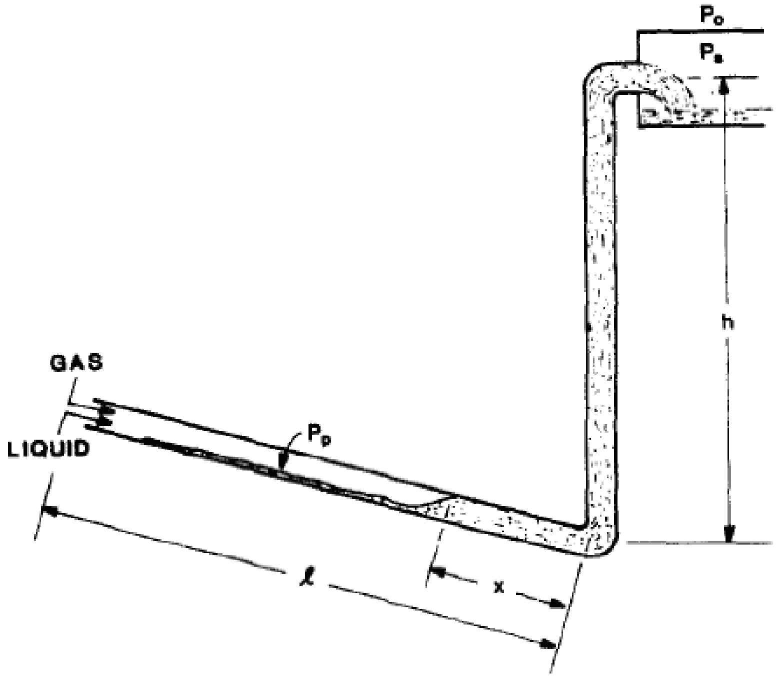

Figura 5 - Produção do *slug*. [3]

Como o gás ainda entra no *pipeline*, a frente de acúmulo de líquido é puxada de volta até atingir a base do *riser*, começando a penetração de gás (Figura 6).

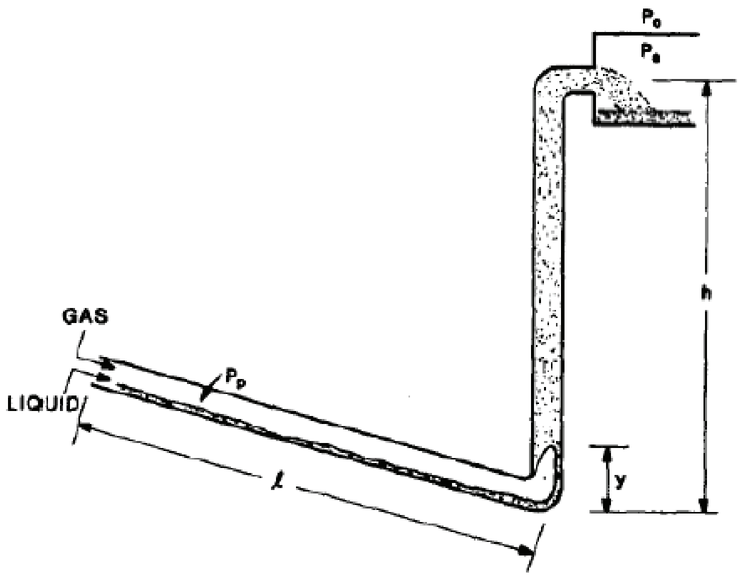

Figura 6 - Penetração de gás. [3]

À medida que o gás penetra no *riser*, a coluna se torna mais leve, diminuindo a pressão e aumentando a vazão de gás. Quando o gás atinge o topo, a passagem de gás fica liberada através do escoamento estratificado no *pipeline* e do escoamento intermitente anular no *riser*, causando uma violenta expulsão e uma rápida descompressão que leva novamente o processo à etapa de formação. Esta etapa é conhecida como expulsão de gás (Figura 7).

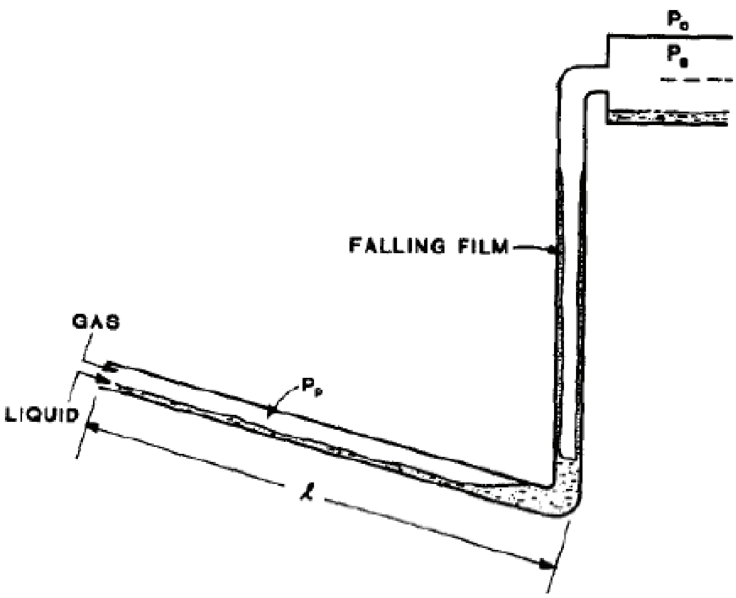

Figura 7 - Expulsão de gás. [3]

3 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Com base no material revisado sobre modelos de escoamentos multifásicos, será analisado a seguir um exemplo de aplicação. Trata-se de uma bomba de *gas lift*.

3.1 Bomba de *Gas Lift* - Modelo Homogêneo

A Figura 8 ilustra uma demonstração de bomba de *gas lift* para uso em laboratório (ver problema 2.30 em [4]). Bolhas de ar são injetadas no *riser* repleto de água através de um pequeno duto posicionado na direção vertical, de modo que ocorra uma redução na massa específica da mistura água-ar, fazendo com que a água em estagnação no *riser* se movimente para cima, ocorrendo transbordamento.

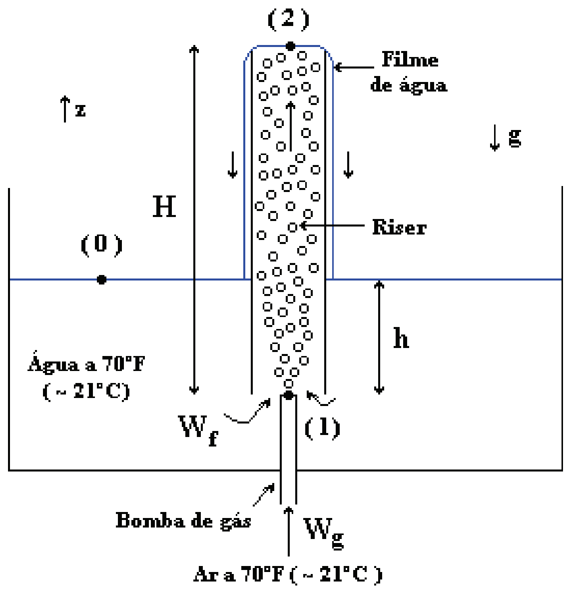

Figura 8 - Bomba de *gas lift*.

Entre os objetivos desta análise estão:

- Predizer a perda/ganho de pressão no *riser* como uma função das vazões mássicas de ar e de água;
- Explorar a relação entre as vazões mássicas de gás e de água;
- Relacionar as vazões mássicas com o rendimento da bomba.

Os parâmetros utilizados nesta análise são:

ρ – massa específica da fase

μ – viscosidade dinâmica da fase

α – fração de vazio (volume de gás em relação ao volume total da mistura)

x – título mássico (massa de gás em relação à massa total da mistura)

u – velocidade da fase

W – vazão mássica

D – diâmetro do *riser*

A – área de passagem

P_m – perímetro molhado do *riser*

τ_P – tensão de cisalhamento na parede do *riser*

f_m – fator de atrito

g – aceleração da gravidade

Os índices $_f$, $_g$ e $_m$ referem-se ao fluido (água), ao gás (ar) e à mistura, respectivamente.

Utilizando a análise pelo modelo homogêneo, em que se considera um pseudo-fluido monofásico com propriedades médias dependentes das propriedades das fases e das concentrações de água e ar, e escoamento unidimensional, pode-se escrever:

- Equação de conservação de massa:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\alpha.\rho_g + (1-\alpha).\rho_f\right] + \frac{1}{A}.\frac{\partial}{\partial s}\left\{\left[\alpha.\rho_g.u_g + (1-\alpha).\rho_f.u_f\right]A\right\} = 0 \qquad (17)$$

- Equação da conservação de momento linear desprezando as tensões normais:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left[\alpha.\rho_g.u_g + (1-\alpha).\rho_f.u_f\right] + \frac{1}{A}.\frac{\partial}{\partial s}\left\{\left[\alpha.\rho_g.u_g{}^2 + (1-\alpha).\rho_f.u_f{}^2\right]\cdot A\right\} \\ &= -\frac{\partial p}{\partial s} - \tau_p.\frac{P_m}{A} + \left[\alpha.\rho_g + (1-\alpha).\rho_f\right]\cdot g_s\end{aligned} \qquad (18)$$

Admitindo-se as hipóteses de que as fases se encontram bem misturadas e com a mesma velocidade $(u_f = u_g = u)$, as equações de conservação de massa e de momento linear resultam em:

- Equação de conservação de massa:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{1}{A}.\frac{\partial}{\partial s}(\rho_m.u.A) = 0 \tag{19}$$

- Equação de conservação de momento linear:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_m.u) + \frac{1}{A}.\frac{\partial}{\partial s}(\rho_m.u^2.A) = \rho_m.\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u.\frac{\partial u}{\partial s}\right) = -\frac{\partial p}{\partial s} - \tau_p.\frac{P_m}{A} + \rho_m.g_s \tag{20}$$

onde $\rho_m = \alpha.\rho_g + (1-\alpha).\rho_f$ é a massa específica do pseudo-fluido (mistura), ponderada pela fração de vazio característica.

No modelo adotado, desconsidera-se o escorregamento (*slip*) entre as fases, dado pela seguinte relação:

$$S = \frac{u_g}{u_f} = \frac{x}{1-x}.\frac{\rho_f}{\rho_g}.\frac{1-\alpha}{\alpha} = 1 \tag{21}$$

Desta relação resulta:

$$\alpha = \frac{1}{1 + \frac{1-x}{x}.\frac{\rho_g}{\rho_f}} \tag{22}$$

Substituindo a relação anterior em $\rho_m = \alpha.\rho_g + (1-\alpha).\rho_f$, obtém-se:

$$\frac{1}{\rho_m} = \frac{x}{\rho_g} + \frac{1-x}{\rho_f} \tag{23}$$

Considerando ainda que o escoamento ocorre em regime permanente e desprezando tensões normais, as equações de conservação resultam:

- Equação de conservação de massa:

$$\rho_m.u.A = W = cte \Rightarrow u = \frac{W}{\rho_m.A} \tag{24}$$

- Equação de conservação do momento linear:

$$-\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{W^2}{A}.\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{\rho_m.A}\right) + \tau_p.\frac{P_m}{A} - \rho_m.g_s = \left(-\frac{\partial p}{\partial s}\right)_{EC} + \left(-\frac{\partial p}{\partial s}\right)_A + \left(-\frac{\partial p}{\partial s}\right)_{EP} \tag{25}$$

onde W é a vazão mássica da mistura ($W = W_f + W_g$), e P_m é o perímetro molhado. Na equação anterior, podem ser identificadas as contribuições de energia cinética ou Bernoulli (*EC*), atrito (*A*) e energia potencial gravitacional (*EP*) ao gradiente de pressão.

Sendo $s \equiv z$ a direção do escoamento, $g_s \equiv -g_z = -g$, tem-se:

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{W^2}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho_m . A}\right) + \tau_p . \frac{P_m}{A} + \rho_m . g \tag{26}$$

Além disso, a área de passagem e o perímetro molhado podem ser representados pelas seguintes relações:

$$A = \frac{\pi . D^2}{4} \tag{27}$$

$$P_m = \pi . D \tag{28}$$

É necessário ainda fornecer uma lei de fechamento para a tensão de cisalhamento τ_p, de modo que se podem utilizar expressões do fator de atrito de Darcy para o pseudo-fluido:

$$f_m = \frac{8.\tau_p}{\rho_m . u^2} = \frac{8.\tau_p}{\rho_m} . \frac{\rho_m{}^2 . A^2}{W^2} = \frac{8.\tau_p . \rho_m . A^2}{W^2} \quad \Leftrightarrow \quad \tau_p = \frac{1}{8} . \frac{f_m . W^2}{\rho_m . A^2} \tag{29}$$

Portanto, o termo $\tau_p . \frac{P_m}{A}$ se torna:

$$\tau_p . \frac{P_m}{A} = \frac{8}{\pi^2} . \frac{f_m}{\rho_m} . \frac{W^2}{D^5} \tag{30}$$

Substituindo a relação anterior na equação de conservação do momento linear, resulta:

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{16.W^2}{\pi^2 . D^4} . \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho_m}\right) + \frac{8.W^2}{\pi^2 . D^5} . \frac{f_m}{\rho_m} + \rho_m . g \tag{31}$$

Integrando a equação anterior entre os pontos (1) e (2) indicados na Figura 8:

$$p_1 - p_2 = \frac{16.W^2}{\pi^2.D^4}.\left(\frac{1}{\rho_{m2}} - \frac{1}{\rho_{m1}}\right) + \frac{8.W^2}{\pi^2.D^5}.\int_0^H \frac{f_m}{\rho_m} dz + g.\int_0^H \rho_m dz \qquad (32)$$

Admitindo-se ainda que o líquido não sofre perdas, resulta válida a equação de Bernoulli para uma linha de corrente entre o espelho de água e o ponto de injeção no *riser*:

$$p_0 + \frac{\rho_f.{u_0}^2}{2} + \rho_f.g.z_0 = p_1 + \frac{\rho_f.{u_1}^2}{2} + \rho_f.g.z_1 \qquad (33)$$

Mas $u_0 = 0$, $z_1 = 0$ e $z_0 = h$. Logo:

$$p_1 - p_0 = \rho_f.g.h - \frac{\rho_f.{u_1}^2}{2} \qquad (34)$$

Além disso:

$${u_1}^2 = {u_{m1}}^2 = \left(\frac{W}{\rho_{m1}.A}\right)^2 = \frac{16.W^2}{{\rho_{m1}}^2.\pi^2.D^4} \qquad (35)$$

Então:

$$p_1 - p_0 = \rho_f.g.h - \frac{8.\rho_f.W^2}{\pi^2.{\rho_{m1}}^2.D^4} \qquad (36)$$

Mas a diferença de pressão entre os pontos (0) e (1) é igual à diferença de pressão entre os pontos (1) e (2): $p_1 - p_0 = p_1 - p_2$.

Dessa forma, igualando-se a eq.(32) e a eq.(36), obtém-se:

$$\frac{16.W^2}{\pi^2.D^4.\rho_{m1}}.\left(\frac{\rho_{m1}}{\rho_{m2}} - 1 + \frac{1}{2}.\frac{\rho_f}{\rho_{m1}}\right) + \frac{8.W^2}{\pi^2.D^5}.\int_0^H \frac{f_m}{\rho_m} dz + g.\int_0^H \rho_m dz - \rho_f.g.h = 0 \qquad (37)$$

Considerando o ar incompressível e o fator de atrito como uma função do número de Reynolds, da rugosidade superficial e do diâmetro do *riser*, tem-se:

$$\rho_g = cte \Rightarrow \frac{1}{\rho_m} = \frac{x}{\rho_g} + \frac{1-x}{\rho_f}, \quad \rho_{m1} = \rho_{m2} = \rho_m \quad \text{e} \quad f_m = f\left(\mathrm{Re}_m, \frac{e}{D}\right) \qquad (38)$$

Como $Re_m = \dfrac{\rho_m.u.D}{\mu_m}$, para obter uma expressão analítica da eq.(37) pode-se desprezar a variação do fator de atrito com o Reynolds e considerar $f_m = cte$.

Portanto, a eq.(37) resulta:

$$\frac{8.W^2}{\pi^2.D^4.\rho_m}.\left(\frac{\rho_f}{\rho_m}+\frac{f_m.H}{D}\right)+\rho_m.g.H-\rho_f.g.h=0 \tag{39}$$

Colocando a equação em um formato adimensional, tem-se:

$$\frac{8.W^2}{\pi^2.D^4.\rho_m{}^2.g.H}.\left(\frac{\rho_f}{\rho_m}+f_m.\frac{H}{D}\right)+\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_m}.\frac{h}{H}\right)=0 \tag{40}$$

Pode-se perceber que o termo $\left(1-\dfrac{\rho_f}{\rho_m}.\dfrac{h}{H}\right)$ deve ser negativo para que a eq.(40) seja satisfeita, já que o primeiro termo $\dfrac{8.W^2}{\pi^2.D^4.\rho_m{}^2.g.H}.\left(\dfrac{\rho_f}{\rho_m}+f_m.\dfrac{H}{D}\right)$ é sempre positivo. Dessa forma, tem-se:

$$1-\frac{\rho_f}{\rho_m}.\frac{h}{H}<0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\rho_f}{\rho_m}.\frac{h}{H}>1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\rho_f}{\rho_m}>\frac{H}{h} \tag{41}$$

Utilizando a eq.(23), resulta:

$$\left[\frac{x}{\rho_g}+\frac{1-x}{\rho_f}\right]\cdot\rho_f>\frac{H}{h} \quad\Leftrightarrow\quad x>x_{\min}=\frac{\dfrac{H}{h}-1}{\dfrac{\rho_f}{\rho_g}-1} \tag{42}$$

Para o valor $x_{\min}$, resulta da eq.(22):

$$\alpha>\alpha_{\min}=\frac{\dfrac{H}{h}-1}{\dfrac{H}{h}\left(1-\dfrac{\rho_g}{\rho_f}\right)} \tag{43}$$

Pode-se obter também a potência de compressão da bomba de *gas lift* através da seguinte expressão:

$$P_{comp} = (p_1 - p_0).\frac{W_g}{\rho_g} \tag{44}$$

onde a diferença de pressão $(p_1 - p_0)$ é obtida da eq.(36).

Por outro lado, a potência útil de operação da bomba (utilizada na elevação do líquido) é dada por:

$$P_{útil} = (H - h).g.W_f \tag{45}$$

Dessa forma, pode-se obter o rendimento da bomba de *gas lift*:

$$\eta = \frac{P_{útil}}{P_{comp}} = \frac{(H-h)}{(p_1 - p_0)}.\frac{W_f}{W_g}.\rho_g.g \tag{46}$$

Os resultados a seguir são apresentados para os seguintes valores de parâmetros:

- diâmetro do *riser*: $D = 0.10\, m$;
- aceleração da gravidade: $g = 9.8\, m/s^2$;
- altura da coluna de mistura: $H = 0.60\, m$;
- comprimento do *riser* submerso: $h = 0.30\, m$;
- fator de atrito: $f_m = 0.02$;
- massas específicas avaliadas à temperatura ambiente de 21 ºC:

$$\rho_g = \rho_{ar} = 1.18818\ kg/m^3 \quad \text{e} \quad \rho_f = \rho_{água} = 998.1279\ kg/m^3$$

Substituindo os dados utilizados, obtêm-se pelas eq.(42) e eq.(43) os seguintes valores: $x_{\min} = 0.001190$ (título mássico mínimo) e $\alpha_{\min} = 0.5006$ (fração de vazio mínima).

Pode-se calcular a massa específica da mistura fixando-se diversos valores para o título. Para cada par título/massa específica da mistura (x, ρ_{m}), pode-se calcular a vazão mássica total da mistura pela eq.(40). Utilizando as relações $W_g = x \cdot W$ e $W_f = (1-x) \cdot W$, podem-se obter as vazões mássicas de ar e de água, respectivamente.

A relação entre as vazões de líquido e de gás para os parâmetros anteriores pode ser visualizada na Figura 9.

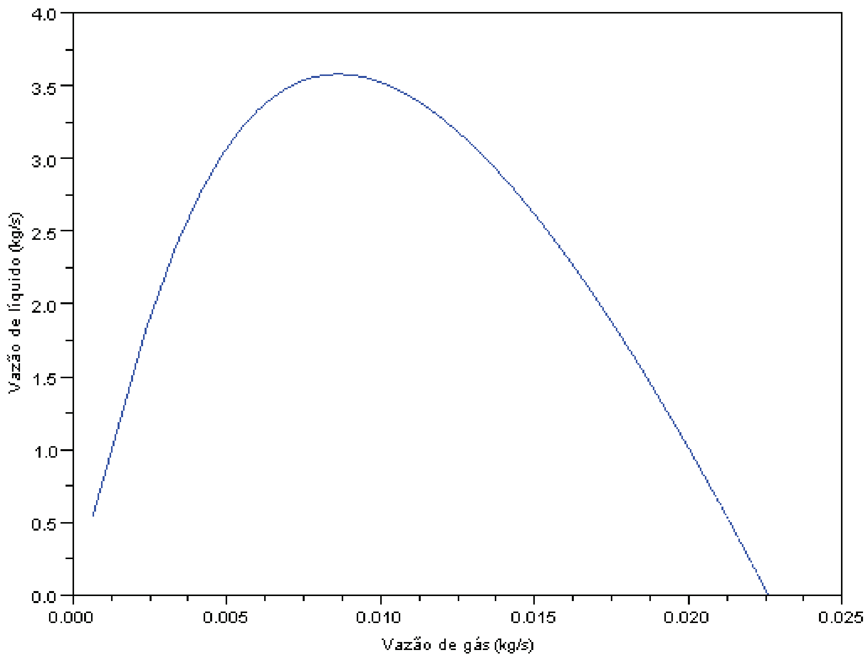

Figura 9 - Relação entre as vazões de gás e de líquido.

Como é possível perceber, devem ser consideradas pequenas vazões de ar para se obter uma representação completa do fenômeno que está ocorrendo (a utilização de vazões maiores que 0.010 kg/s forneceriam como resposta gráfica apenas a porção descendente do gráfico anterior). Para valores abaixo de $x_{\min} = 0.001190$, a eq.(40) não apresenta solução real, ou seja, não há escoamento de líquido.

Observa-se claramente a existência de um ponto máximo no gráfico. Este ponto representa a vazão mássica de ar que leva à maior vazão mássica de água. Além disso, a vazão de água é nula para vazões de ar acima de 0.0226 kg/s.

Na Figura 10 é apresentada a relação entre rendimento da bomba de *gas lift* e a vazão mássica de ar injetado, obtido através do programa de simulação numérica *Scilab*.

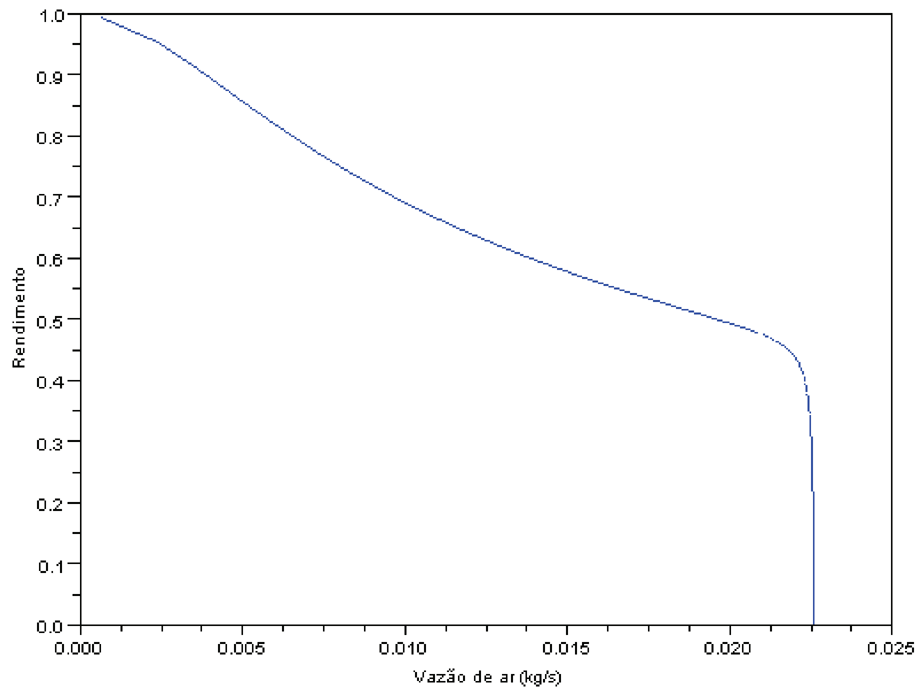

Figura 10 - Relação entre o rendimento da bomba e a vazão de gás.

Neste gráfico, é possível observar que o rendimento decai à medida que a vazão mássica de ar aumenta. Além disso, a partir de $W_g = 0.0226\, kg/s$, o rendimento vai para zero, pois já não ocorre mais vazão da fase líquida.

3.2 Bomba de *Gas Lift* – Modelo de *Drift*

Um tubo aberto nos dois extremos é posicionado num reservatório com água em estagnação. Bolhas de ar são injetadas com velocidade superficial j_g no *riser* através de um pequeno duto posicionado na direção vertical, iniciando em valores baixos e incrementando a vazão de ar aos poucos. Para pequenas vazões de ar, observa-se que existe uma faixa de operação da bomba em que a água permanece em estagnação (velocidade zero), como mostrado na Figura 11, o que resulta num crescimento da altura da coluna de mistura conforme se aumenta a vazão de ar injetado. Observa-se também que, para um valor limite de vazão de ar, a água é elevada no tubo, e o sistema funciona como uma bomba de *gas lift*.

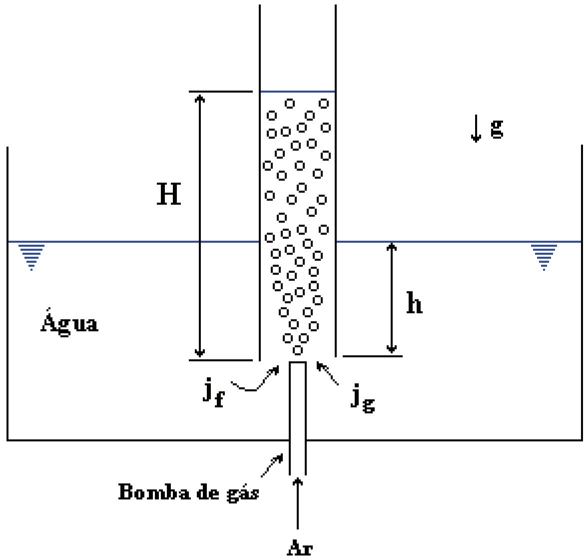

Figura 11 - Bomba de *gas lift*, faixa de estagnação no modelo de *drift flux*.

Entre os objetivos desta análise estão:

- mostrar qualitativamente em um gráfico $j_{gf} = j_{gf}(\alpha)$ as linhas para a região de operação com água em estagnação;
- determinar analiticamente, para a região de operação com água em estagnação, a relação entre a fração de vazio α e a velocidade superficial de gás j_g;
- determinar a relação entre a altura da coluna de mistura H e a velocidade superficial de gás j_g para a região de operação com água em estagnação;
- interpretar a operação como bomba de *gas lift* em termos do fenômeno de *flooding*.

Os parâmetros utilizados nesta análise são:

ρ – massa específica da fase

α – fração de vazio (volume de gás em relação ao volume total da mistura)

u_t – velocidade terminal

H – altura da coluna de mistura

h – comprimento do *riser* submerso

g – aceleração da gravidade

j_g – velocidade superficial da fase gasosa

j_f – velocidade superficial da fase líquida

j_{gf} – fluxo de deriva

Os índices f , g e m referem-se ao fluido (água), ao gás (ar) e à mistura, respectivamente.

O modelo de *drift* é um modelo de fases separadas focado no movimento relativo entre as fases. O fluxo de *drift* foi definido na eq.(14) como a velocidade superficial da fase relativa a uma superfície se deslocando com velocidade j :

$$j_{gf} = -j_{fg} = \alpha \cdot (1-\alpha) \cdot u_{gf} \tag{14}$$

$$j_{gf} = (1-\alpha) \cdot j_g - \alpha \cdot j_f \tag{47}$$

Todas as propriedades podem ser expressas como o valor do modelo homogêneo, corrigido com um termo função do fluxo de *drift*:

$$j_f = (1-\alpha) \cdot j - j_{gf} \tag{48}$$

$$j_g = \alpha \cdot j + j_{gf} \tag{49}$$

$$\alpha = \frac{j_g}{j} \cdot \left(1 - \frac{j_{gf}}{j}\right) \tag{50}$$

$$\rho_m = \frac{j_f \cdot \rho_f + j_g \cdot \rho_g}{j} + (\rho_f - \rho_g) \cdot \frac{j_{gf}}{j} \tag{51}$$

Supondo escoamento com variáveis independentes da posição, existe um equilíbrio entre as forças de pressão, gravitacional e de interação entre as fases. De um balanço de momento na direção do escoamento para cada fase:

$$-(1-\alpha) \cdot \frac{\partial p}{\partial s} + g_s \cdot \rho_f \cdot (1-\alpha) + F_{fg} = 0 \tag{52}$$

$$-\alpha \cdot \frac{\partial p}{\partial s} + g_s \cdot \rho_g \cdot \alpha - F_{fg} = 0 \tag{53}$$

Eliminando-se $\frac{\partial p}{\partial s}$ na eq.(52) e na eq.(53), resulta:

$$F_{fg} = -\alpha \cdot (1-\alpha) \cdot g_s \cdot (\rho_f - \rho_g) = -\frac{j_{gf}}{u_{gf}} \cdot g_s \cdot (\rho_f - \rho_g) \qquad (54)$$

Como F_{fg} depende das propriedades dos fluidos, geometria, α e u_{gf} :

$$j_{gf} = j_{gf}(propriedades, \alpha, u_{gf}) \qquad (55)$$

Para o escoamento em bolhas, resulta de uma série de experimentos a seguinte relação:

$$u_{gf} = u_t \cdot (1-\alpha)^{n-1} \qquad (56)$$

sendo u_t a velocidade terminal de uma bolha isolada e $n \sim 1-2$, de modo que:

$$j_{gf} = u_t \cdot \alpha \cdot (1-\alpha)^n \qquad (57)$$

Supõe-se que a água e o ar são incompressíveis e adotando $n = 2$ na eq.(57), tem-se:

$$j_{gf} = u_t.\alpha.(1-\alpha)^2 \qquad (58)$$

As linhas de operação na curva de deriva são retas em função da fração de vazio α :

$$j_{gf} = (1-\alpha).j_g - \alpha.j_f \qquad (59)$$

onde se percebe que $j_{gf}(\alpha = 0) = j_g$ e $j_{gf}(\alpha = 1) = -j_f$.

Como $j_f = 0$ (água em estagnação), as linhas de operação são retas que passam pelos pontos $(0, j_g)$ e $(1, 0)$, resultando em:

$$j_{gf} = (1-\alpha).j_g \qquad (60)$$

Esse resultado é mostrado na Figura 12.

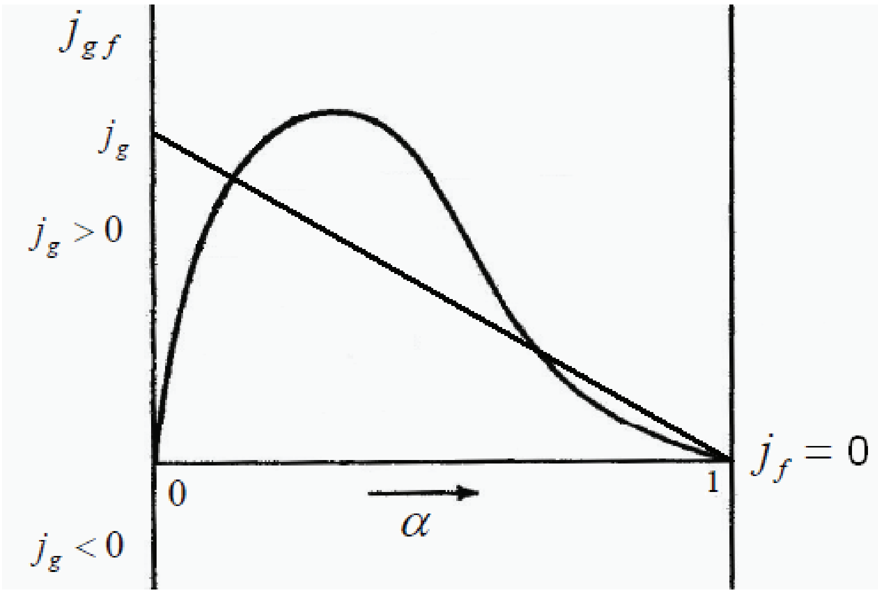

Figura 12 - Linhas de operação no escoamento de deriva. (adaptado de [2])

Para obter a fração de vazio de operação, iguala-se a eq.(60) à curva de deriva (eq.(58)), resolvendo para α :

$$j_{gf} = (1-\alpha).j_g = u_t.\alpha.(1-\alpha)^2 \Rightarrow \frac{j_g}{u_t} = \alpha.(1-\alpha) \qquad (61)$$

ou seja:

$$\alpha^2 - \alpha + \frac{j_g}{u_t} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4.j_g}{u_t}}}{2} \qquad (62)$$

Vê-se que, para $1 - \frac{4.j_g}{u_t} < 0$, isto é, $\frac{j_g}{u_t} > \frac{1}{4}$, não existe solução.

Para $0 < \frac{j_g}{u_t} < \frac{1}{4}$, há duas soluções possíveis, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$, correspondentes à baixa fração de vazio e à alta fração de vazio:

$$\alpha_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4.j_g}{u_t}}}{2} \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4.j_g}{u_t}}}{2} \qquad (63)$$

Como a vazão de gás está sendo incrementada a partir de zero, o ponto de operação é α_1.

Finalmente, para $\frac{j_g}{u_t} = \frac{1}{4}$ existe uma solução única $\alpha = \frac{1}{2}$.

Por simplicidade, considerando a pressão de injeção de ar constante e apenas queda de pressão gravitacional, a altura da mistura *H* resulta de:

$$\rho_f.g.h = \rho_m.g.H \qquad (64)$$

onde $\rho_m = \rho_f.(1-\alpha) + \rho_g.\alpha$ é a massa específica da mistura.

Substituindo na eq.(64) resulta:

$$\frac{H}{h} = \frac{1}{1-\alpha.\left(1-\frac{\rho_g}{\rho_f}\right)} \qquad (65)$$

O valor máximo da altura é obtido para o máximo valor de α (mínimo denominador na eq.(65)), $\alpha = \frac{1}{2}$, já que o ponto de operação corresponde a $\alpha_1 \leq \frac{1}{2}$, resultando:

$$\left(\frac{H}{h}\right)_{\max} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}.\left(1-\frac{\rho_g}{\rho_f}\right)} = \frac{2}{1+\frac{\rho_g}{\rho_f}} \qquad (66)$$

Para $\frac{\rho_g}{\rho_f} \to 0$, tem-se que $\left(\frac{H}{h}\right)_{\max} \to 2$.

A condição de *flooding* ocorre quando a reta que representa os estados $j_{gf} = (1-\alpha).j_g - \alpha.j_f$ é tangente à curva de deriva $j_{gf} = u_t.\alpha.(1-\alpha)^2$. Nesta condição, as derivadas em relação à α devem ser iguais:

$$j_{gf} = (1-\alpha).j_g - \alpha.j_f \;\Rightarrow\; \frac{\partial j_{gf}}{\partial \alpha} = -j_g - j_f \qquad (67)$$

$$j_{gf} = u_t.\alpha.(1-\alpha)^2 \;\Rightarrow\; \frac{\partial j_{gf}}{\partial \alpha} = u_t.(1-\alpha)^2 - 2.u_t.\alpha.(1-\alpha) = u_t.(1-\alpha).(1-3.\alpha) \qquad (68)$$

Igualando-se a eq.(67) à eq.(68), tem-se:

$$-j_g - j_f = u_t.(1-\alpha).(1-3.\alpha) \quad \Rightarrow \quad j_g + j_f = -u_t.(1-\alpha).(1-3.\alpha) \qquad (69)$$

De eq.(58) e eq.(59), tem-se:

$$j_{gf} = u_t.\alpha.(1-\alpha)^2 = (1-\alpha).j_g - \alpha.j_f \qquad (70)$$

Por outro lado, o ponto de *flooding* deve pertencer às duas curvas, eq.(69) e eq.(70). Logo:

$$\begin{cases} j_g + j_f = -u_t.(1-\alpha).(1-3.\alpha) \\ (1-\alpha).j_g - \alpha.j_f = u_t.\alpha.(1-\alpha)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} j_g = -j_f - u_t.(1-\alpha).(1-3.\alpha) & (69) \\ (1-\alpha).j_g - \alpha.j_f = u_t.\alpha.(1-\alpha)^2 & (70) \end{cases}$$

Substituindo a eq.(69) na eq.(70), resulta:

$$(1-\alpha).\{-j_f - u_t.(1-\alpha).(1-3.\alpha)\} - \alpha.j_f = u_t.\alpha.(1-\alpha)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$-(1-\alpha).j_f - u_t.(1-\alpha)^2.(1-3.\alpha) - \alpha.j_f = u_t.\alpha.(1-\alpha)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$-j_f + \alpha.j_f - \alpha.j_f = u_t.\alpha.(1-\alpha)^2 + u_t.(1-\alpha)^2.(1-3.\alpha) \quad \Leftrightarrow$$

$$-j_f = u_t.(1-\alpha)^2.[\alpha + (1-3.\alpha)] \quad \Rightarrow \quad (j_f)_{flooding} = -u_t.(1-2.\alpha).(1-\alpha)^2 \qquad (71)$$

Substituindo a eq.(71) na eq.(70), resulta:

$$(1-\alpha).(j_g)_{flooding} - \alpha.\{-u_t.(1-2.\alpha).(1-\alpha)^2\} = u_t.\alpha.(1-\alpha)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$(j_g)_{flooding} + u_t.\alpha.(1-2.\alpha).(1-\alpha) = u_t.\alpha.(1-\alpha) \quad \Leftrightarrow$$

$$(j_g)_{flooding} = u_t.\alpha.(1-\alpha).[1-(1-2.\alpha)] \;\Rightarrow\; (j_g)_{flooding} = 2.u_t.\alpha^2.(1-\alpha) \quad (72)$$

Mas como a água está em estado de estagnação, $(j_f)_{flooding} = 0$ e, substituindo a eq.(72) na eq.(71), resulta:

$$-u_t.(1-2.\alpha).(1-\alpha)^2 = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \alpha_{flooding} = \dfrac{1}{2} \\ \alpha_{flooding} = 1 \quad \text{(não convém)} \end{cases} \Rightarrow \alpha_{flooding} = \frac{1}{2} \quad (73)$$

Substituindo a eq.(73) na eq.(72):

$$(j_g)_{flooding} = 2.u_t.\left(\frac{1}{2}\right)^2.\left(1-\frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{j_g}{u_t}\right)_{flooding} = \frac{1}{4} \qquad (74)$$

Como se percebe, esse é o mesmo resultado obtido anteriormente para a condição de operação com apenas uma solução.

Conforme se incrementa a vazão de gás, a altura da coluna de mistura aumenta até que se atinja a condição de *flooding*, o que ocorre quando $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\frac{j_g}{u_t} = \frac{1}{4}$, sendo $\frac{H}{h} = 2$.

A partir deste momento, atinge-se um ponto de operação em que α é constante e a reta que representa a linha de operação inclina-se em torno deste ponto, conforme representado na Figura 13. Serão utilizados os adimensionais $j_g{}^* = \frac{j_g}{u_t}$ e $j_f{}^* = \frac{j_f}{u_t}$.

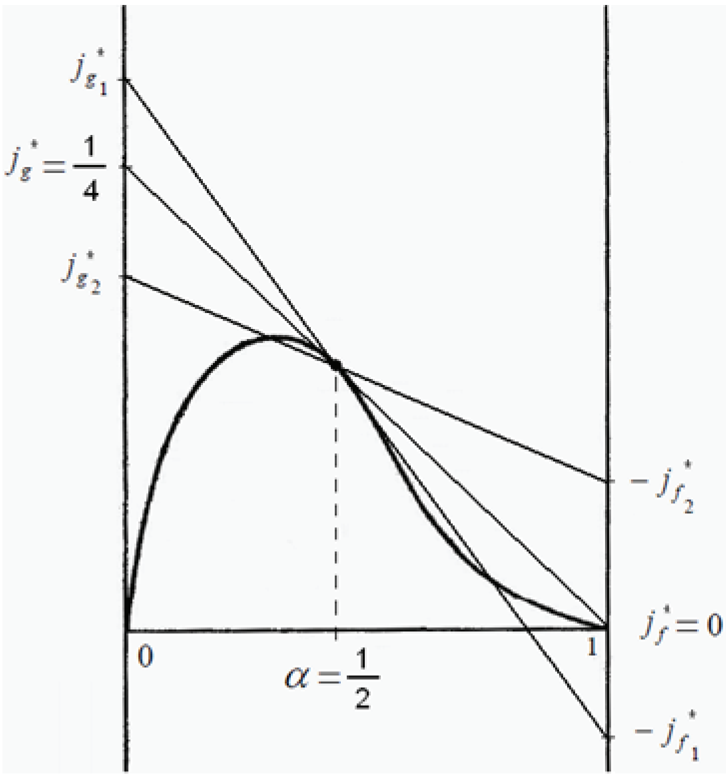

Figura 13 - Linha de operação em função da vazão de gás. (adaptado de [2])

Portanto, após atingir a condição de *flooding*, tem-se a partir da eq.(65):

$$H^* = \frac{H_T}{h} = \frac{1}{1-\alpha.\left(1-\dfrac{\rho_g}{\rho_f}\right)} \Leftrightarrow 1-\alpha.\left(1-\frac{\rho_g}{\rho_f}\right) = \frac{1}{H^*} \Leftrightarrow \alpha.\left(1-\frac{\rho_g}{\rho_f}\right) = 1-\frac{1}{H^*} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \alpha = \frac{1-\dfrac{1}{H^*}}{1-\dfrac{\rho_g}{\rho_f}} \quad \text{e} \quad 1-\alpha = \frac{\dfrac{1}{H^*}-\dfrac{\rho_g}{\rho_f}}{1-\dfrac{\rho_g}{\rho_f}} \tag{75}$$

A Figura 14 mostra as relações $H^* \times j_g{}^*$, $j_f{}^* \times j_g{}^*$ e $\alpha \times j_g{}^*$ para os casos em que $H^* < 2$ e $H^* > 2$.

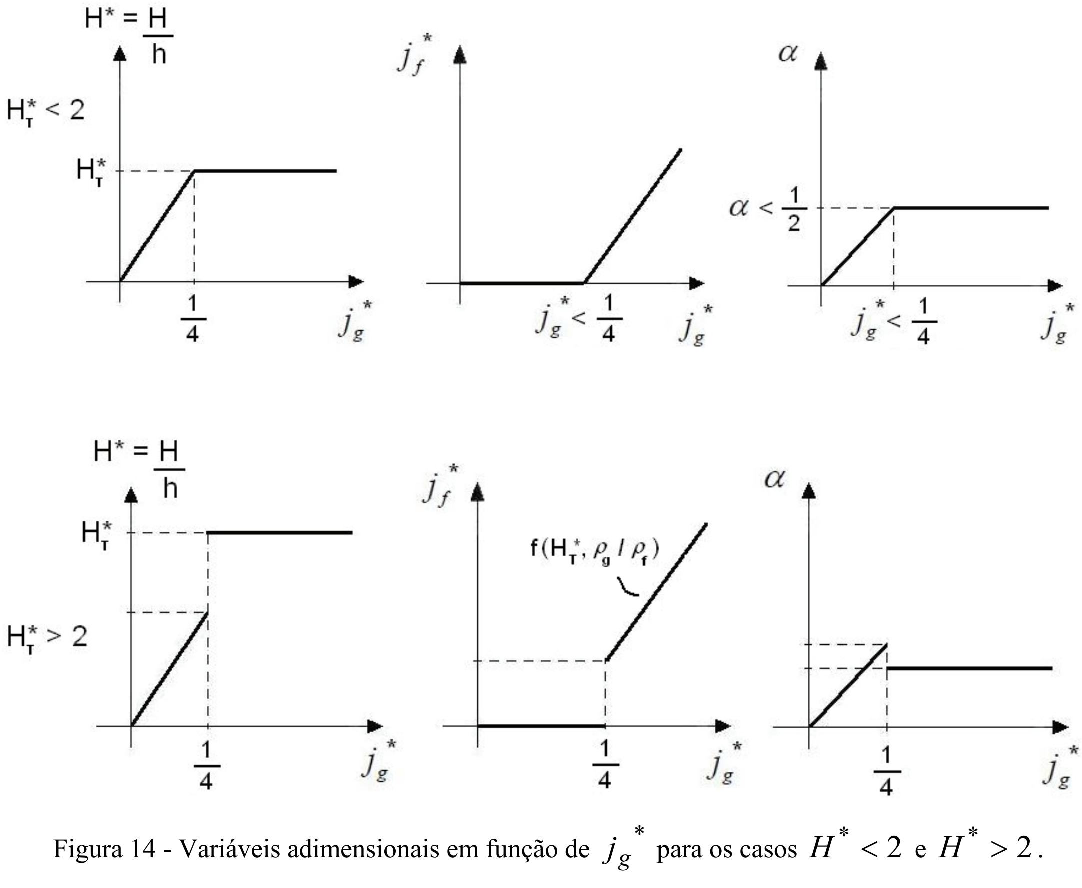

Figura 14 - Variáveis adimensionais em função de $j_g{}^*$ para os casos $H^* < 2$ e $H^* > 2$.

4 SIMULAÇÃO E ANÁLISE DE ARTIGO SOBRE INTERMITÊNCIA SEVERA

Durante o período de trabalho, foi realizada uma análise baseada num trabalho desenvolvido por S. Mokhatab, da Universidade de Terã, no artigo *Severe slugging in a catenary-shaped riser: experimental and simulation results* [5], publicado na revista *Petroleum Science and Technology* em junho de 2007. Neste artigo, são apresentadas algumas condições de experimento sobre escoamento bifásico água-ar em um sistema *pipeline-riser*, com uma comparação entre dados experimentais e os valores preditos por um código computacional (OLGA).

Entre os objetivos desta análise está verificar as áreas em que o código computacional desenvolvido por Baliño em [1] é capaz de predizer com boa aproximação o comportamento do sistema durante o fenômeno da intermitência severa, e da faixa em que o código pode apresentar falhas.

A geometria do sistema *pipeline-riser* utilizada no experimento de Mokhatab é apresentada na Figura 15. A partir dela, determinam-se as dimensões dos condutos necessárias para a entrada de dados no código numérico.

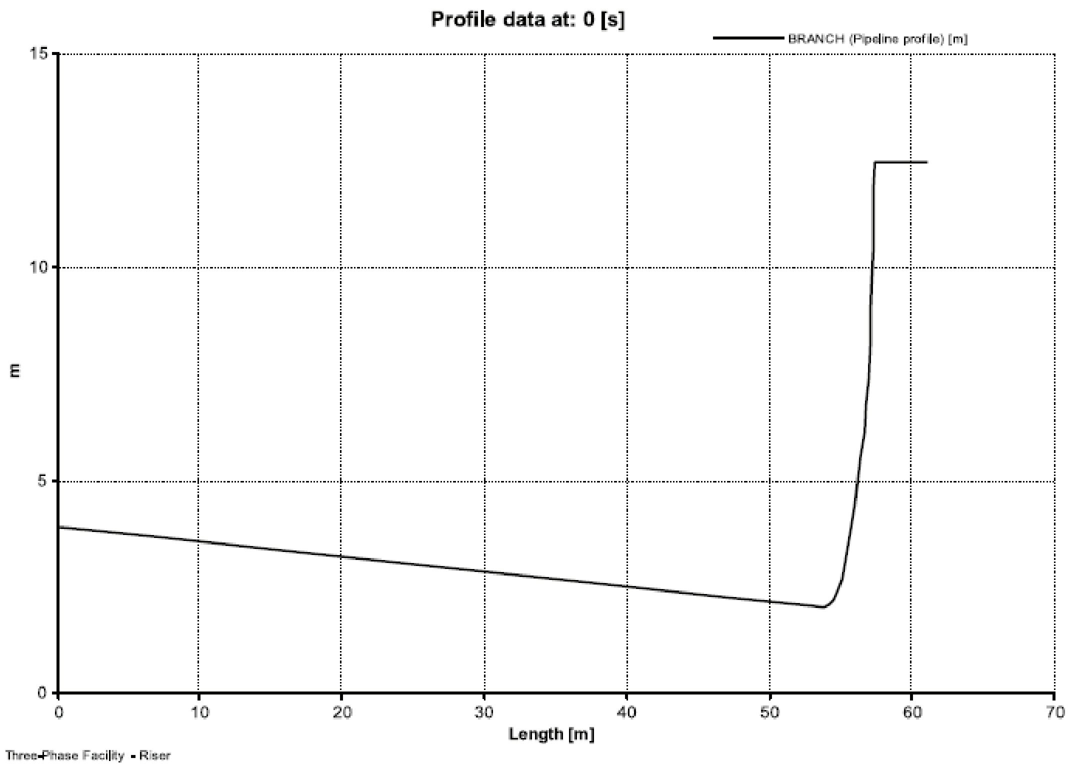

Figura 15 - Geometria do sistema *pipeline-riser*. [5]

O experimento realizado por Mokhatab foi executado em dois testes. A análise deste artigo foi realizada junto com outro aluno de graduação em Engenharia Mecânica da Escola Politécnica, Gabriel Romualdo de Azevedo, responsável pela análise do Teste 1. Portanto, aqui será apresentada apenas a análise do Teste 2.

No Teste 2, a vazão de água foi mantida aproximadamente constante no valor de 0,5 L/s, variando-se a vazão de ar entre 20 m^3/h, 7,5 m^3/h e 40 m^3/h.

O comportamento das vazões de líquido (água) e gás (ar) durante o período de realização do experimento pode ser visualizado na Figura 16 (Teste 2).

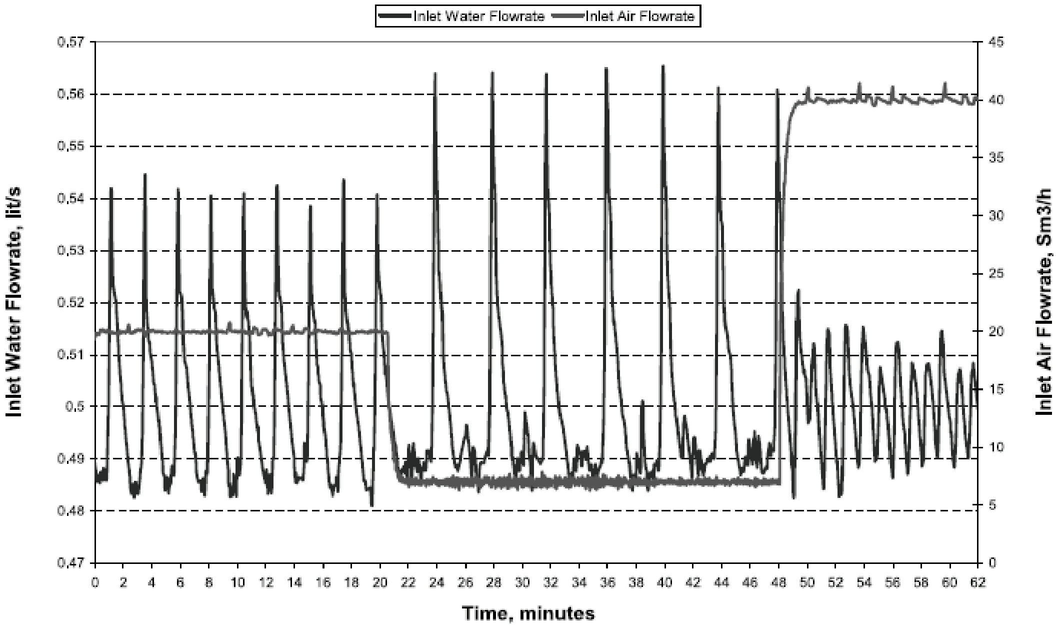

Figura 16 - Vazões de água e de ar utilizadas no experimento. [5]

A Figura 17 apresenta uma comparação entre os valores experimentais e os preditos pelo código computacional utilizado por Mokhatab para a pressão na base do *riser* em função do tempo transcorrido para o Teste 2, durante o fenômeno de intermitência severa.

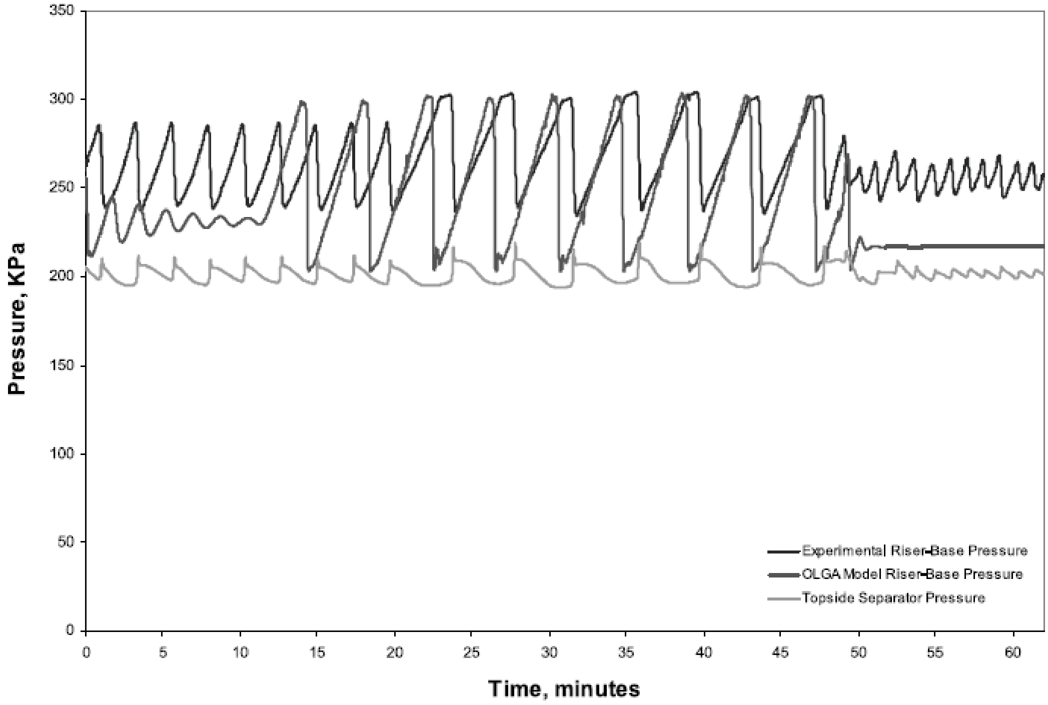

Figura 17 - Comparação dos valores de pressão na base do *riser* experimental e numérico. [5]

4.1 Análise das simulações com o código em FORTRAN

De acordo com o trabalho feito por Mokhatab, os parâmetros e propriedades relacionados na Tabela 1 serão utilizados como entradas no modelo desenvolvido por Baliño utilizando o programa numérico FORTRAN. É imprescindível que as mesmas condições descritas no artigo sejam utilizadas nestas simulações para que a análise tenha alguma importância. Porém, o artigo pouco relata as condições do experimento, dando maior ênfase aos resultados obtidos. Dessa forma, algumas propriedades não explicitadas no artigo foram impostas para a realização das simulações.

Tabela 1 - Propriedades e parâmetros envolvidos no experimento.

Propriedades e parâmetros	**Valor**	**Unidade**
Viscosidade dinâmica do líquido	$1,8 \times 10^{-5}$	kg/(m.s)
Viscosidade dinâmica do gás	$1,0 \times 10^{-3}$	kg/(m.s)
Massa específica do líquido	1000	kg/m^3
Aceleração da gravidade	9,8	m/s^2
Constante do gás	287	$m^2/(s^2.K)$
Temperatura do gás	293	K
Comprimento do *pipeline*	53,84	m
Diâmetro da tubulação	0,1016	m
Espessura da tubulação	$4,5 \times 10^{-5}$	m
Inclinação do *pipeline*	2	graus
Altura do *riser*	10,5	m
Comprimento do *riser*	3,58696	m
Pressão de separação	$2,0 \times 10^{5}$	Pa

Os valores de vazões utilizadas no Teste 2 são apresentados novamente na Tabela 2.

Tabela 2 - Vazões de água e ar utilizadas no Teste 2.

Vazão de água	**Vazões de ar**
0,5 L/s	20 m^3/h
0,5 L/s	7,5 m^3/h
0,5 L/s	40 m^3/h

A seguir, apresentam-se os resultados das simulações numéricas obtidas utilizando-se o modelo desenvolvido por Baliño para o Teste 2.

4.1.1 Resultados e análise do Teste 2

a) Vazão de líquido 0,5 L/s e vazão de gás 20 m^3/h

A Figura 18 mostra a variação da pressão na base do *riser* predita pelo código FORTRAN para $Q_{L0} = 0{,}5\ L/s$ e $Q_{g0} = 20\ m^3/h$.

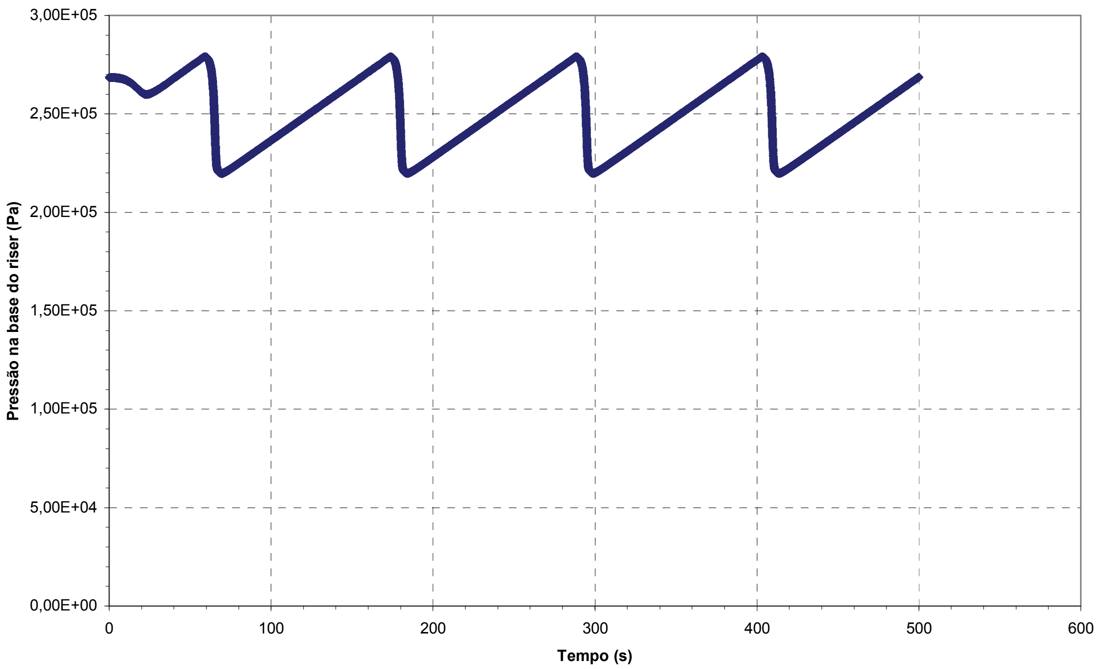

Figura 18 - Variação da pressão na base do *riser* para vazão de ar de 20 m^3/h.

A partir do gráfico da Figura 18, obtêm-se as seguintes informações:

- Período do ciclo de intermitência severa: 114,7 s = 1,91 min;
- Não há produção constante de líquido ou há produção transiente;
- Período de expulsão de gás: 106,8 s = 1,78 min;
- Pressão máxima: 279 kPa;
- Pressão mínima: 220 kPa.

b) <u>Vazão de líquido 0,5 L/s e vazão de gás 7,5 m³/h</u>

A Figura 19 mostra a variação da pressão na base do *riser* predita pelo código FORTRAN para $Q_{L0} = 0,5\ L/s$ e $Q_{g0} = 7,5\ m^3/h$.

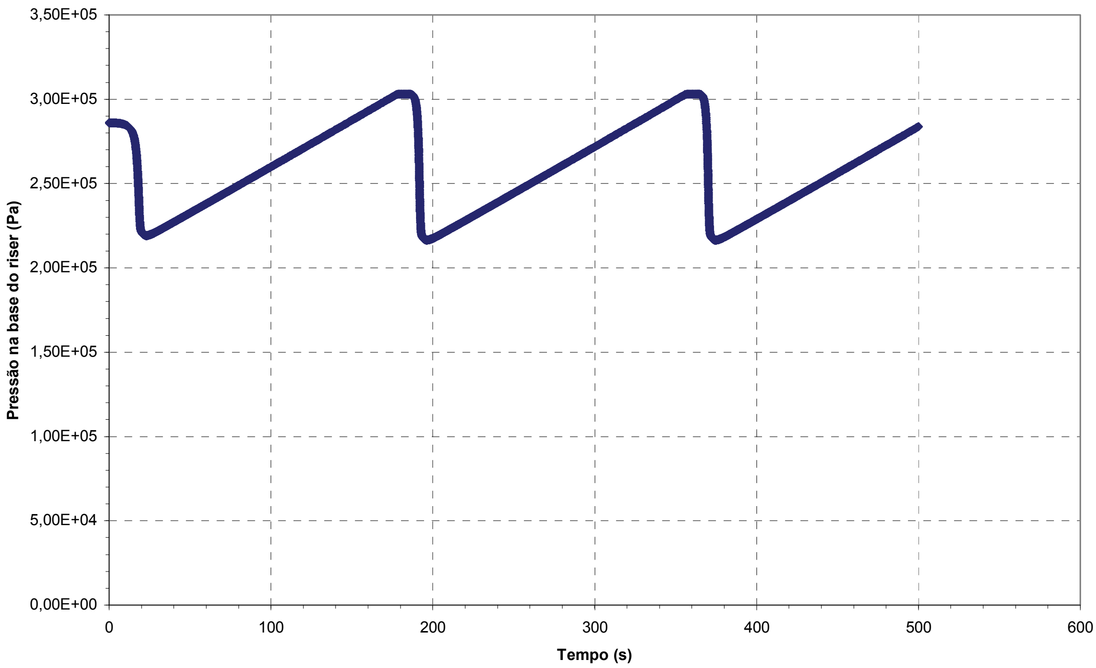

Figura 19 - Variação da pressão na base do *riser* para vazão de ar de 7,5 m³/h.

A partir do gráfico da Figura 19, obtêm-se as seguintes informações:

- Período do ciclo de intermitência severa: 176,3 s = 2,94 min;
- Período de produção de líquido: 13,33 s = 0,22 min;
- Período de expulsão de gás: 160,8 s = 2,68 min;
- Pressão máxima: 303 kPa;
- Pressão mínima: 216 kPa.

c) <u>Vazão de líquido 0,5 L/s e vazão de gás 40 m^3/h</u>

A Figura 20 mostra a variação da pressão na base do *riser* predita pelo código FORTRAN para $Q_{L0} = 0{,}5\ L/s$ e $Q_{g0} = 40\ m^3/h$.

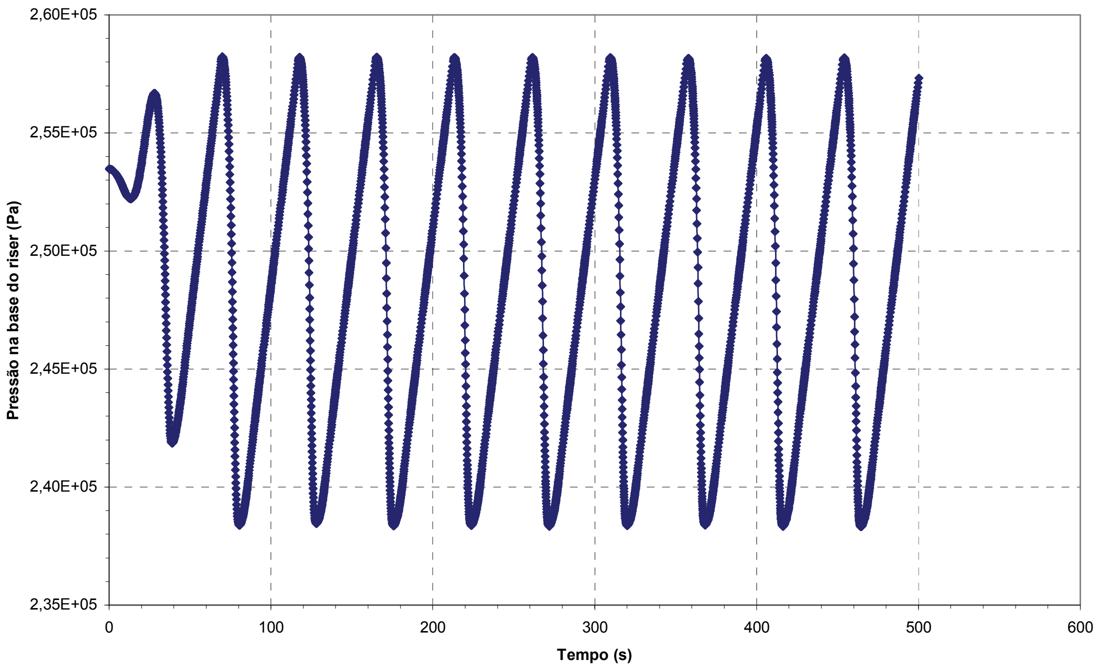

Figura 20 - Variação da pressão na base do *riser* para vazão de ar de 40 m^3/h.

A partir do gráfico da Figura 20, obtêm-se as seguintes informações:

- Período do ciclo de intermitência severa: 48,0 s = 0,80 min;
- Não há produção constante de líquido ou há produção transiente;
- Período de expulsão de gás: 37,5 s = 0,62 min;
- Pressão máxima: 258 kPa;
- Pressão mínima: 238 kPa.

Após o desenvolvimento das simulações pelo modelo numérico, podem-se comparar os resultados adquiridos com aqueles mostrados por Mokhatab. Os resultados encontrados apresentam diferenças que devem ser comentadas.

- Os valores de pressão máxima e mínima preditos pelo código numérico apresentam desvios em relação aos valores experimentais:
  - Pressão máxima: 2,7% (para 20 m^3/h), 0,24% (para 7,5 m^3/h), e 4,5% (para 40 m^3/h);
  - Pressão mínima: 6,9% (para 20 m^3/h), 7,08% (para 7,5 m^3/h), e 1,0% (para 40 m^3/h);
- Os períodos dos ciclos de intermitência severa para cada vazão de ar, preditos pelo código numérico, apresentam certa discordância com os valores experimentais: 18% (para 20 m^3/h), 26% (para 7,5 m^3/h), e 28% (para 40 m^3/h);
- Para os valores mais elevados de vazão de gás (20 m^3/h e 40 m^3/h) não ocorre penetração de líquido no *pipeline*. Já para uma vazão razoavelmente menor (7,5 m^3/h), o líquido retorna ao *pipeline* bloqueando a passagem de gás durante um determinado intervalo de tempo;
- Para os valores mais elevados de vazão de gás (20 m^3/h e 40 m^3/h) não se verifica produção constante de líquido. Já para uma vazão razoavelmente menor (7,5 m^3/h), ocorre produção constante de líquido;
- O período médio de um ciclo de intermitência severa diminui conforme se eleva a vazão de gás: 177 s (para 7,5 m^3/h), 115 s (para 20 m^3/h), e 48,0 s (para 40 m^3/h);
- O período médio de produção de gás diminui conforme se eleva a vazão de gás: 161 s (para 7,5 m^3/h), 107 s (para 20 m^3/h), e 37,5 s (para 40 m^3/h);

Verifica-se através do gráfico das vazões (Figura 16) que há certa flutuação dos valores ao redor do valor médio utilizado no código numérico, principalmente no caso da vazão de líquido (0,48 L/s a 0,56 L/s). O mesmo pode ser notado no gráfico da Figura 17, onde se percebe a flutuação da pressão no separador. Estas flutuações devem contribuir, em parte, para os desvios observados.

5 CRITÉRIOS DE ESTABILIDADE

Neste capítulo, serão abordados os critérios de Boe e de Taitel para análise de estabilidade de escoamentos multifásicos, e estes serão comparados com as curvas de estabilidade obtidas em [1] e [6]. Serão utilizados dados de escoamentos cujo comportamento (estável ou instável) foi determinado experimentalmente.

5.1 Critério de Boe para estabilidade

Segundo o critério de Boe, o fluxo em estado estacionário resulta quando a vazão de gás for suficientemente alta e a vazão de líquido for suficientemente baixa tal que o líquido não se movimente para o *pipeline*.

As variáveis importantes tratadas nesta seção são fornecidas na Tabela 3.

Tabela 3 - Parâmetros envolvidos na formulação do critério de Boe.

Variável	Definição	Unidade
P_p	Pressão na base do *riser*	Pa
ρ_L	Massa específica da fase líquida	kg/m³
ρ_{Go}	Massa específica da fase gasosa	kg/m³
g	Aceleração gravitacional	m/s²
u_{Ls}	Velocidade superficial do líquido	m/s
u_{Gso}	Velocidade superficial do gás	m/s
R	Constante do gás	m²/(s².K)
T	Temperatura	K
l	Comprimento do *riser*	m
L_e	Comprimento equivalente do *buffer*	m
α	Fração de vazio	---
$\dot{m}_G$	Vazão mássica de gás	kg/s
V_G	Vazão volumétrica de líquido	m³/s

O critério de Boe é dado pela seguinte relação ([7]):

$$u_{Ls} = \frac{\rho_{Go} RT}{\rho_L g(l\alpha + L_e)} u_{Gso} \tag{76}$$

onde o subscrito "o" refere-se à condição atmosférica padrão.

Uma curva de estabilidade de Boe, obtida a partir da formulação anterior é exemplificada na Figura 21. Esta formulação revela que, para baixas vazões de líquido, onde $\alpha \approx 1$, a velocidade superficial de líquido u_{Ls} é uma função monotônica linear da velocidade superficial de gás u_{Gso}. Para altas vazões de líquido, α se aproxima de zero, e a curva é inclinada para a esquerda. Abaixo da curva do critério de Boe, o líquido não penetra no *pipeline* e um estado de equilíbrio é alcançado.

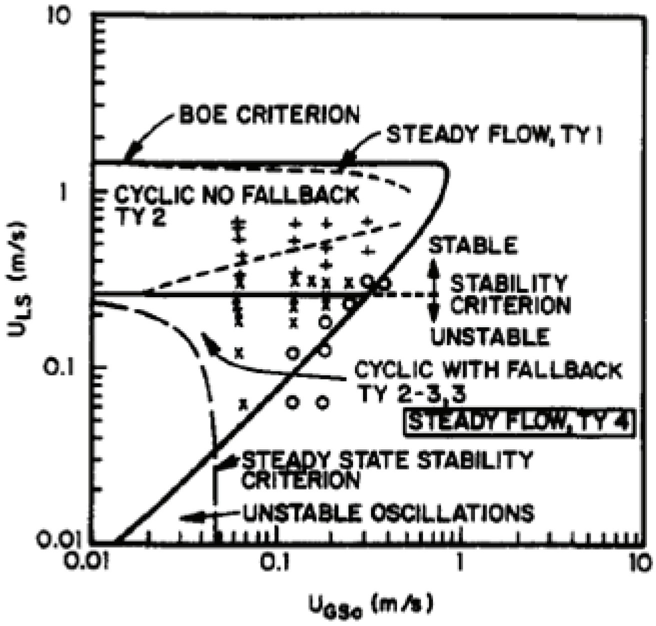

Figura 21 - Exemplo de curva de estabilidade obtida com o critério de Boe. [7]

A proposição original deste critério era que, fora da região delimitada pela curva, o escoamento seria em estado estacionário, enquanto no interior da região prevaleceria a intermitência severa. No entanto, esta proposição não se mostra totalmente válida, já que escoamentos em regime estacionário podem ser encontrados na região de intermitência severa e vice-versa.

Para a obtenção da curva de estabilidade dada pelo critério de Boe, ainda será utilizada uma segunda condição ([8]), dada por:

$$(u_{Lo})_{crit} = 149\left(\frac{D}{4}\right)^{2/3} \left|\sin\theta_P\right|^{1/2} \tag{77}$$

Acima deste valor crítico de velocidade superficial de líquido $(u_{Lo})_{crit}$, o padrão de escoamento no *pipeline* deixa de ser estratificado e não mais se verifica o fenômeno da intermitência severa.

Em escoamentos que apresentam intermitência severa, as oscilações (de pressão, fração de vazio, etc.) são muito grandes e o comprimento do *slug* sempre excede o comprimento do *riser*. Nota-se que a região delimitada pelo critério de Boe e pela linha de estabilidade (*slug flow*) fornece uma melhor previsão dos escoamentos instáveis. Pode-se perceber também que o critério de estabilidade para escoamentos em bolhas no *riser* superestimam a região de instabilidade.

5.2 Parâmetros utilizados nos experimentos de Taitel

Conforme descrito em [7], Taitel utilizou água e ar como fluidos, e um sistema com as seguintes características em seus experimentos:

- *Pipeline* com 9,1m de comprimento, conectado a um *riser* vertical de 3m de altura, ambos com um diâmetro de 2,54cm;
- O *pipeline* pode ser inclinado de uma angulação entre -5° e 5°;
- Comprimentos de *buffer* adicionais ao *pipeline*, L_e, são obtidos através de dois tanques de volume variável, podendo ser usados sozinhos ou juntos, em paralelo.

Um esboço do aparato experimental utilizado por Taitel é apresentado na Figura 22.

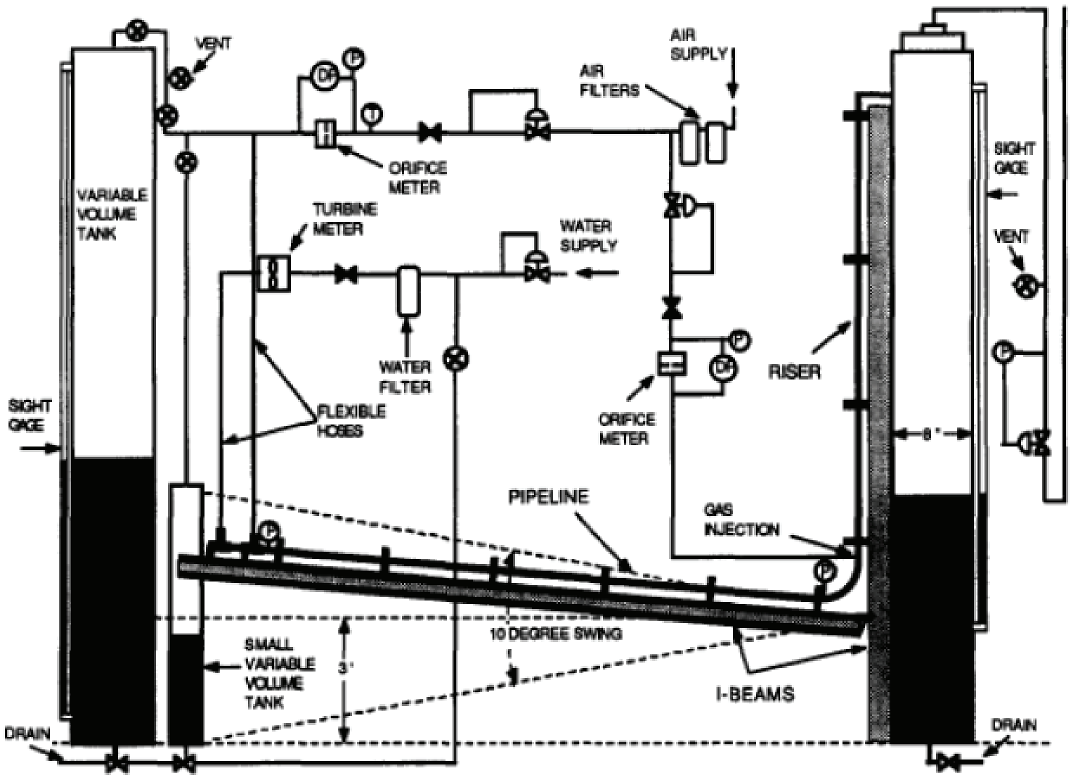

Figura 22 - Aparato experimental utilizado por Taitel. [7]

Tabela 4 - Parâmetros experimentais utilizados por Taitel.

Propriedades e parâmetros	**Valor**	**Unidade**
Viscosidade dinâmica do líquido	$1,8 \times 10^{-5}$	kg/(m.s)
Viscosidade dinâmica do gás	$1,0 \times 10^{-3}$	kg/(m.s)
Massa específica do líquido	1000	kg/m^3
Aceleração da gravidade	9,8	m/s^2
Constante do gás	287	$m^2/(s^2.K)$
Temperatura do gás	298	K
Comprimento do *pipeline*	9,1	m
Diâmetro da tubulação	0,0254	m
Rugosidade da tubulação	$1,5 \times 10^{-6}$	m
Inclinação do *pipeline*	5	graus
Altura do *riser*	3,0	m
Pressão no separador	$1,01325 \times 10^5$	Pa

Taitel realizou experimentos variando-se os valores das velocidades superficiais das fases e mantendo-se constantes os demais parâmetros presentes na Tabela 4, coletando dados para três diferentes comprimentos equivalentes de *buffer* (L_e): 1,69m, 5,1m e 10m. Estes dados são apresentados na seção seguinte.

5.3 Dados experimentais coletados por Taitel [7]

Experimentalmente, Taitel determinou a natureza estável ou instável de escoamentos em estado estacionário para diversos pares (u_{Ls}, u_{Gso}) conforme descrito em [7]. Os dados coletados por Taitel são reproduzidos nas Tabelas 5, 6 e 7. Posteriormente, estes dados serão apresentados sobre os mapas de estabilidade para verificar graficamente a validade do critério de Boe e compará-lo ao modelo desenvolvido por Baliño em [1].

Tabela 5 - Dados experimentais para L_e = 1,69m. [7]

u_{Gso} (m/s)	u_{Ls} (m/s)	Q_{L0} (m^3/s)	$\dot{m}_{G0}$ (kg/s)	Resultado
0,063	0,124	6,28E-05	3,85E-05	Instável
0,064	0,209	1,06E-04	3,91E-05	Instável
0,123	0,183	9,27E-05	7,51E-05	Instável
0,124	0,212	1,07E-04	7,57E-05	Instável
0,062	0,679	3,44E-04	3,79E-05	Instável
0,063	0,367	1,86E-04	3,85E-05	Instável
0,063	0,679	3,44E-04	3,85E-05	Instável
0,064	0,535	2,71E-04	3,91E-05	Instável
0,065	0,226	1,15E-04	3,97E-05	Instável
0,122	0,374	1,90E-04	7,45E-05	Instável
0,123	0,621	3,15E-04	7,51E-05	Instável
0,126	0,228	1,16E-04	7,69E-05	Instável
0,187	0,226	1,15E-04	1,14E-04	Instável
0,188	0,466	2,36E-04	1,15E-04	Instável
0,188	0,502	2,54E-04	1,15E-04	Instável
0,190	0,312	1,58E-04	1,16E-04	Instável
0,058	0,705	3,57E-04	3,54E-05	Estável
0,063	0,698	3,54E-04	3,85E-05	Estável
0,122	0,730	3,70E-04	7,45E-05	Estável
0,126	0,673	3,41E-04	7,69E-05	Estável
0,126	0,085	4,31E-05	7,69E-05	Estável
0,184	0,127	6,44E-05	1,12E-04	Estável
0,185	0,161	8,16E-05	1,13E-04	Estável
0,187	0,551	2,79E-04	1,14E-04	Estável
0,188	0,755	3,83E-04	1,15E-04	Estável
0,190	0,685	3,47E-04	1,16E-04	Estável
0,313	0,433	2,19E-04	1,91E-04	Estável
0,314	0,347	1,76E-04	1,92E-04	Estável
0,319	0,614	3,11E-04	1,95E-04	Estável
0,321	0,744	3,77E-04	1,96E-04	Estável
0,430	0,604	3,06E-04	2,63E-04	Estável
0,433	0,701	3,55E-04	2,64E-04	Estável

Tabela 6 - Dados experimentais para L_e = 5,1m. (continua) [7]

u_{Gso} (m/s)	u_{Ls} (m/s)	Q_{L0} (m^3/s)	$\dot{m}_{G0}$ (kg/s)	Resultado
0,060	0,252	1,28E-04	3,66E-05	Instável
0,061	0,230	1,17E-04	3,72E-05	Instável
0,063	0,206	1,04E-04	3,85E-05	Instável
0,064	0,121	6,13E-05	3,91E-05	Instável
0,064	0,187	9,48E-05	3,91E-05	Instável
0,125	0,231	1,17E-04	7,63E-05	Instável
0,126	0,184	9,32E-05	7,69E-05	Instável
0,126	0,253	1,28E-04	7,69E-05	Instável
0,187	0,254	1,29E-04	1,14E-04	Instável
0,187	0,250	1,27E-04	1,14E-04	Instável
0,066	0,063	3,19E-05	4,03E-05	Instável
0,063	0,320	1,62E-04	3,85E-05	Instável
0,064	0,301	1,53E-04	3,91E-05	Instável
0,065	0,307	1,56E-04	3,97E-05	Instável
0,127	0,314	1,59E-04	7,75E-05	Instável
0,155	0,309	1,57E-04	9,46E-05	Instável
0,186	0,229	1,16E-04	1,14E-04	Instável
0,188	0,303	1,54E-04	1,15E-04	Instável
0,250	0,311	1,58E-04	1,53E-04	Instável
0,062	0,688	3,49E-04	3,79E-05	Instável
0,063	0,624	3,16E-04	3,85E-05	Instável
0,064	0,378	1,92E-04	3,91E-05	Instável
0,064	0,333	1,69E-04	3,91E-05	Instável
0,065	0,546	2,77E-04	3,97E-05	Instável
0,065	0,369	1,87E-04	3,97E-05	Instável
0,066	0,433	2,19E-04	4,03E-05	Instável
0,126	0,342	1,73E-04	7,69E-05	Instável
0,126	0,525	2,66E-04	7,69E-05	Instável
0,126	0,662	3,35E-04	7,69E-05	Instável
0,188	0,321	1,63E-04	1,15E-04	Instável
0,189	0,482	2,44E-04	1,15E-04	Instável
0,189	0,391	1,98E-04	1,15E-04	Instável
0,189	0,324	1,64E-04	1,15E-04	Instável
0,190	0,660	3,34E-04	1,16E-04	Instável
0,309	0,469	2,38E-04	1,89E-04	Instável
0,309	0,673	3,41E-04	1,89E-04	Instável
0,090	0,064	3,24E-05	5,49E-05	Estável
0,124	0,064	3,24E-05	7,57E-05	Estável
0,124	0,123	6,23E-05	7,57E-05	Estável
0,182	0,065	3,29E-05	1,11E-04	Estável
0,185	0,184	9,32E-05	1,13E-04	Estável

Tabela 6 - Dados experimentais para L_e = 5,1m. (conclusão) [7]

0,186	0,125	6,33E-05	1,14E-04	Estável
0,247	0,255	1,29E-04	1,51E-04	Estável
0,248	0,230	1,17E-04	1,51E-04	Estável
0,250	0,186	9,42E-05	1,53E-04	Estável
0,280	0,230	1,17E-04	1,71E-04	Estável
0,307	0,257	1,30E-04	1,87E-04	Estável
0,310	0,316	1,60E-04	1,89E-04	Estável
0,338	0,309	1,57E-04	2,06E-04	Estável
0,377	0,308	1,56E-04	2,30E-04	Estável

Tabela 7 - Dados experimentais para L_e = 10m. (continua) [7]

u_{Gso} (m/s)	u_{Ls} (m/s)	Q_{L0} (m^3/s)	$\dot{m}_{G0}$ (kg/s)	Resultado
0,061	0,064	3,24E-05	3,72E-05	Instável
0,062	0,191	9,68E-05	3,79E-05	Instável
0,063	0,247	1,25E-04	3,85E-05	Instável
0,063	0,405	2,05E-04	3,85E-05	Instável
0,064	0,157	7,96E-05	3,91E-05	Instável
0,094	0,064	3,24E-05	5,74E-05	Instável
0,123	0,357	1,81E-04	7,51E-05	Instável
0,124	0,157	7,96E-05	7,57E-05	Instável
0,157	0,249	1,26E-04	9,59E-05	Instável
0,185	0,118	5,98E-05	1,13E-04	Instável
0,185	0,155	7,85E-05	1,13E-04	Instável
0,186	0,351	1,78E-04	1,14E-04	Instável
0,232	0,351	1,78E-04	1,42E-04	Instável
0,233	0,147	7,45E-05	1,42E-04	Instável
0,247	0,349	1,77E-04	1,51E-04	Instável
0,249	0,246	1,25E-04	1,52E-04	Instável
0,304	0,339	1,72E-04	1,86E-04	Instável
0,311	0,247	1,25E-04	1,90E-04	Instável
0,124	0,065	3,29E-05	7,57E-05	Instável
0,185	0,078	3,95E-05	1,13E-04	Instável
0,185	0,066	3,34E-05	1,13E-04	Instável
0,229	0,067	3,39E-05	1,40E-04	Instável
0,230	0,091	4,61E-05	1,40E-04	Instável
0,246	0,087	4,41E-05	1,50E-04	Instável
0,062	0,433	2,19E-04	3,79E-05	Instável
0,640	0,538	2,73E-04	3,91E-04	Instável
0,124	0,414	2,10E-04	7,57E-05	Instável
0,124	0,523	2,65E-04	7,57E-05	Instável
0,184	0,513	2,60E-04	1,12E-04	Instável

Tabela 7 - Dados experimentais para L_e = 10m. (conclusão) [7]

0,187	0,375	1,90E-04	1,14E-04	Instável
0,228	0,405	2,05E-04	1,39E-04	Instável
0,230	0,543	2,75E-04	1,40E-04	Instável
0,245	0,527	2,67E-04	1,50E-04	Instável
0,247	0,416	2,11E-04	1,51E-04	Instável
0,307	0,532	2,70E-04	1,87E-04	Instável
0,313	0,385	1,95E-04	1,91E-04	Instável
0,247	0,158	8,01E-05	1,51E-04	Estável
0,280	0,071	3,60E-05	1,71E-04	Estável
0,308	0,149	7,55E-05	1,88E-04	Estável
0,327	0,108	5,47E-05	2,00E-04	Estável

5.4 Procedimento para reproduzir graficamente o critério de Boe

A obtenção da curva descrita pelo critério de Boe para cada caso segue o seguinte procedimento:

- para cada par ($Q_{L0}, \dot{m}_{G0}$) e, portanto, para cada par (u_{Ls}, u_{Gso}), realiza-se o cálculo do estado estacionário, incluindo α;
- a partir dos valores obtidos para o estado estacionário, determinam-se os valores das variáveis na base do *riser*. Nesse caso, sabe-se que:

$$u_{Ls} = u_{L,pipeline} = u_{L,riser}(1) \tag{78}$$

$$u_{Gso} = \frac{P_G}{P_0} \cdot \frac{T_0}{T} u_{G,pipeline} = \frac{P_G}{P_0} \cdot \frac{T_0}{T} u_{G,riser}(1) \tag{79}$$

onde P_G é a pressão na base do *riser*, e P_0 e T_0 são valores referentes à condição de atmosfera padrão, $P_0 = 1{,}01325 \times 10^5\ Pa$ e $T_0 = 293\,K$;

- verifica-se se os parâmetros calculados pelas eq.(78) e eq.(79) (u_{Ls}, u_{Gso} e α) satisfazem o critério de Boe (eq.76). Em caso afirmativo, o ponto encontrado pertence à curva; em caso negativo, calcula-se novo valor de u_{Gso} adicionando ou subtraindo um Δu_{Gso}, faz-se novo cálculo do estado estacionário, prosseguindo de modo iterativo até que atingir convergência de valores que satisfaçam a seguinte condição:

$$u_{Ls} - \frac{\rho_{Go} RT}{\rho_L g(l\alpha + L_e)} u_{Gso} = 0 \tag{80}$$

- O procedimento é realizado até que se atinja o valor crítico da velocidade superficial de líquido dado pela eq.(77).

Dessa forma, pode-se percorrer toda a grade $u_{Ls} \times u_{Gso}$ de interesse e determinar a curva de estabilidade descrita pelo critério de Boe. Uma rotina desenvolvida no *Matlab* (**Criterio_Boe**) realiza o procedimento descrito acima, e se encontra no ANEXO A.

As Figuras 23, 24 e 25 apresentam os mapas de estabilidade para cada um dos diferentes comprimentos equivalentes, contendo os pontos experimentais de Taitel e a curva descrita pelo critério de Boe.

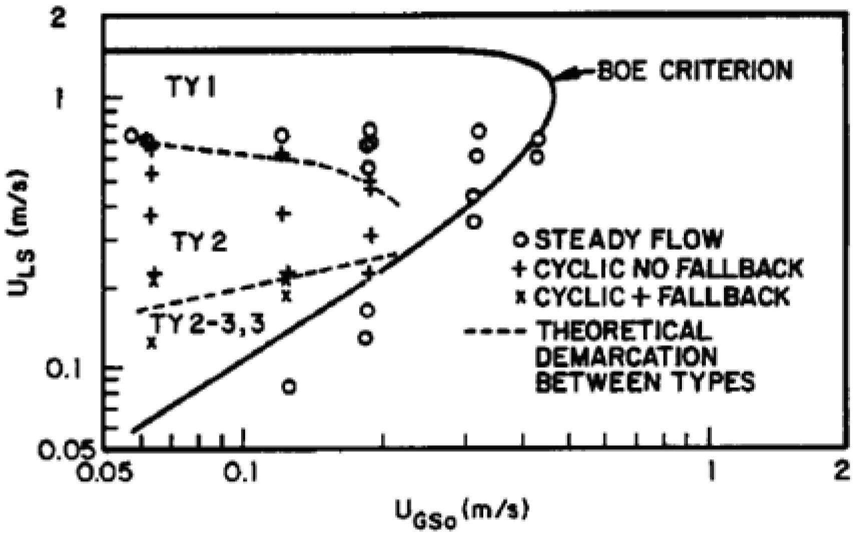

Figura 23 - Critério de Boe para L_e = 1,69m. [7]

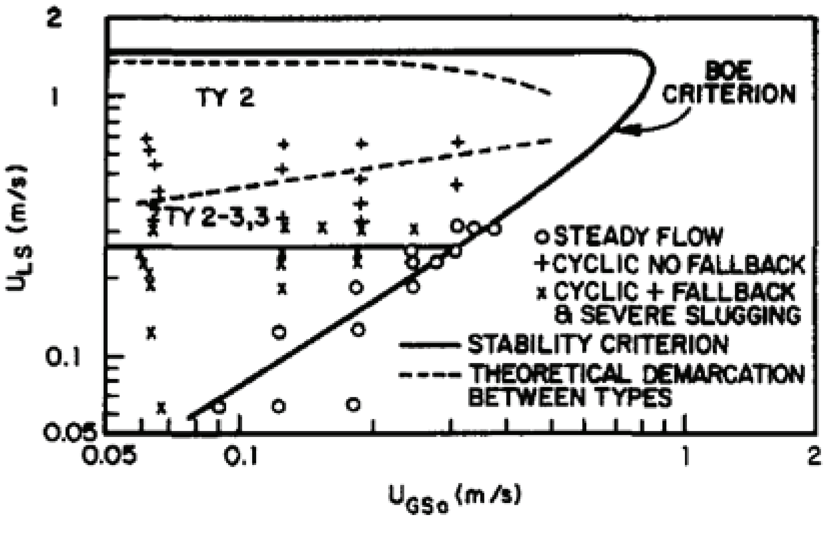

Figura 24 - Critério de Boe para L_e = 5,1m. [7]

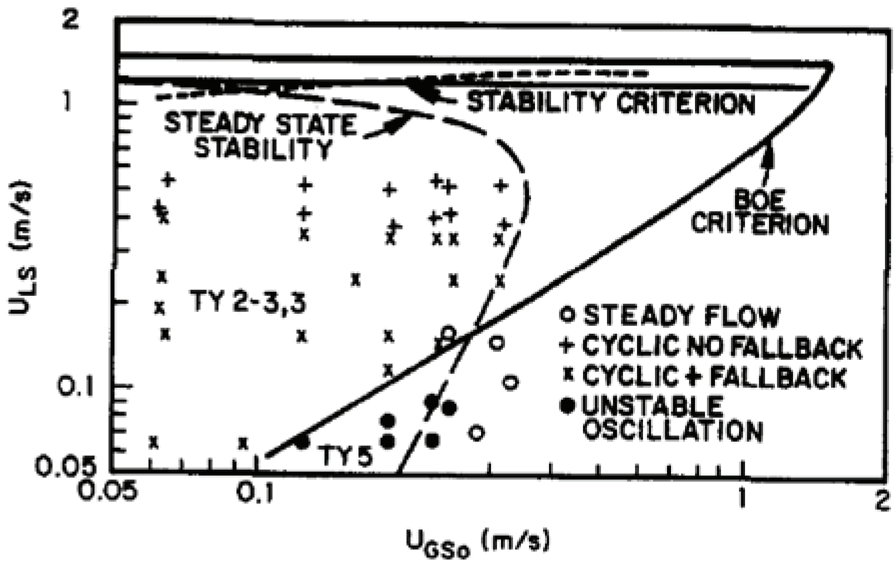

Figura 25 - Critério de Boe para L_e = 10m. [7]

5.5 Curvas de estabilidade obtidas numericamente em FORTRAN

Através de simulações utilizando o código desenvolvido em FORTRAN por Baliño em [1], Thomaz determinou numericamente em [6] diversos pontos pertencentes à curva de estabilidade para cada comprimento de *buffer*.

A metodologia empregada para obter tais curvas de estabilidade é computacionalmente intensiva, pois para cada configuração do sistema faz-se uma simulação temporal das equações de governo e verifica-se se a solução numérica converge para um regime permanente ou para algum regime intermitente. O método para determinar pontos pertencentes à curva de estabilidade pode ser verificado em [6].

Através de novas simulações em FORTRAN, um conjunto maior de pontos foi determinado neste trabalho para maior precisão na obtenção das curvas de estabilidade. Os novos conjuntos de pontos sobre as curvas estão contidos nas Tabelas 8, 9 e 10.

Tabela 8 - Pontos sobre a curva de estabilidade para L_e = 1,69m.

	$\dot{m}_{G0}$ (kg/s)	Q_{L0} (m³/s)	u_{Gso} (m/s)	u_{Ls} (m/s)
1	6,104E-07	3,859E-04	0,0100	0,7615
2	3,052E-05	3,696E-04	0,0500	0,7295
3	6,104E-05	3,423E-04	0,1000	0,6755
4	9,156E-05	3,068E-04	0,1500	0,6055
5	1,221E-04	2,536E-04	0,2000	0,5005
6	1,419E-04	2,027E-04	0,2325	0,4000
7	1,505E-04	1,520E-04	0,2465	0,3000
8	1,438E-04	1,013E-04	0,2355	0,2000
9	1,245E-04	5,067E-05	0,2040	0,1000
10	1,102E-04	2,534E-05	0,1805	0,0500
11	1,047E-04	1,520E-05	0,1715	0,0300
12	1,022E-04	1,013E-05	0,1675	0,0200
13	9,919E-05	5,067E-06	0,1625	0,0100

Tabela 9 - Pontos sobre a curva de estabilidade para L_e = 5,1m.

	$\dot{m}_{G0}$ (kg/s)	Q_{L0} (m³/s)	u_{Gso} (m/s)	u_{Ls} (m/s)
1	6,104E-06	7,221E-04	0,0100	1,4250
2	3,052E-05	7,119E-04	0,0500	1,4050
3	6,104E-05	7,018E-04	0,1000	1,3850
4	9,156E-05	6,765E-04	0,1500	1,3350
5	1,221E-04	6,562E-04	0,2000	1,2950
6	1,831E-04	6,106E-04	0,3000	1,2050
7	2,442E-04	5,599E-04	0,4000	1,1050
8	3,052E-04	4,991E-04	0,5000	0,9850
9	3,647E-04	4,054E-04	0,5975	0,8000
10	3,891E-04	3,040E-04	0,6375	0,6000
11	3,665E-04	2,027E-04	0,6005	0,4000
12	3,360E-04	1,520E-04	0,5505	0,3000
13	2,909E-04	1,013E-04	0,4765	0,2000
14	2,353E-04	5,067E-05	0,3855	0,1000
15	1,962E-04	2,534E-05	0,3215	0,0500
16	1,816E-04	1,520E-05	0,2975	0,0300
17	1,737E-04	1,013E-05	0,2845	0,0200
18	1,663E-04	5,067E-06	0,2725	0,0100

Tabela 10 - Pontos sobre a curva de estabilidade para L_e = 10m.

	$\dot{m}_{G0}$ (kg/s)	Q_{L0} (m^3/s)	u_{Gso} (m/s)	u_{Ls} (m/s)
1	6,104E-06	1,680E-03	0,0100	3,3150
2	3,052E-05	1,644E-03	0,0500	3,2450
3	6,104E-05	1,604E-03	0,1000	3,1650
4	9,156E-04	1,568E-03	0,1500	3,0950
5	1,221E-04	1,528E-03	0,2000	3,0150
6	1,831E-04	1,452E-03	0,3000	2,8650
7	2,442E-04	1,371E-03	0,4000	2,7050
8	3,052E-04	1,290E-03	0,5000	2,5450
9	3,662E-04	1,198E-03	0,6000	2,3650
10	4,273E-04	1,102E-03	0,7000	2,1750
11	4,883E-04	1,001E-03	0,8000	1,9750
12	5,494E-04	8,791E-04	0,9000	1,7350
13	6,104E-04	7,575E-04	1,0000	1,4950
14	6,867E-04	6,080E-04	1,1250	1,2000
15	7,233E-04	5,067E-04	1,1850	1,0000
16	7,355E-04	4,560E-04	1,2050	0,9000
17	7,355E-04	4,054E-04	1,2050	0,8000
18	7,111E-04	3,040E-04	1,1650	0,6000
19	6,318E-04	2,027E-04	1,0350	0,4000
20	5,692E-04	1,520E-04	0,9325	0,3000
21	4,844E-04	1,013E-04	0,7935	0,2000
22	3,763E-04	5,067E-05	0,6165	0,1000
23	3,195E-04	2,534E-05	0,5235	0,0500
24	2,780E-04	1,013E-05	0,4555	0,0200
25	2,695E-04	5,067E-06	0,4415	0,0100

Nas Figuras 26, 27 e 28, são apresentados mapas de estabilidade contendo os dados coletados por Taitel, a curva descrita pelo critério de Boe e as curvas obtidas a partir da simulação numérica em FORTRAN, para cada comprimento equivalente do *buffer*. A Figura 29 apresenta as 3 curvas de estabilidade obtidas num mesmo gráfico.

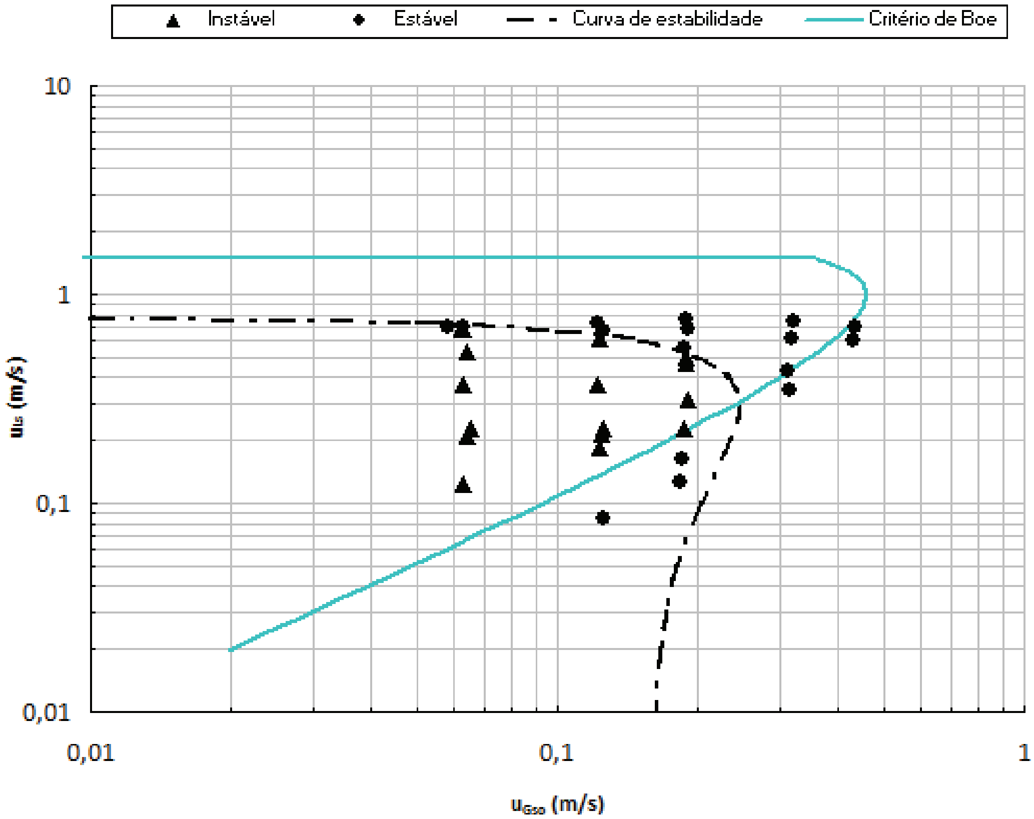

Figura 26 - Mapa de estabilidade para comprimento equivalente de *buffer* L_e = 1,69m.

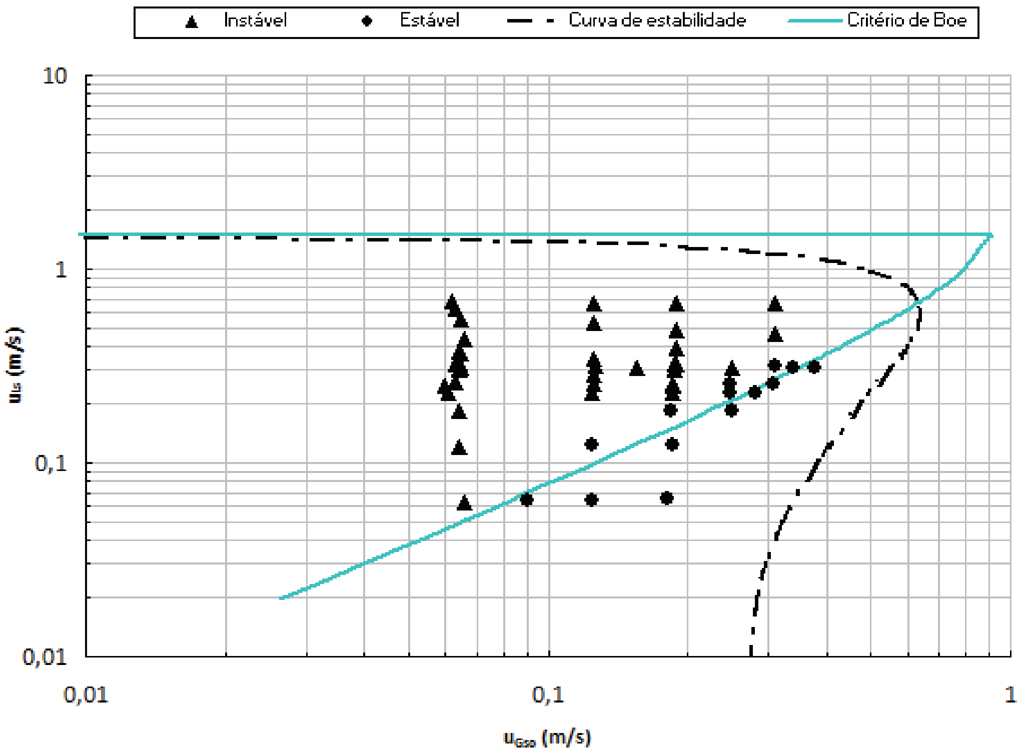

Figura 27 - Mapa de estabilidade para comprimento equivalente de *buffer* L_e = 5,1m.

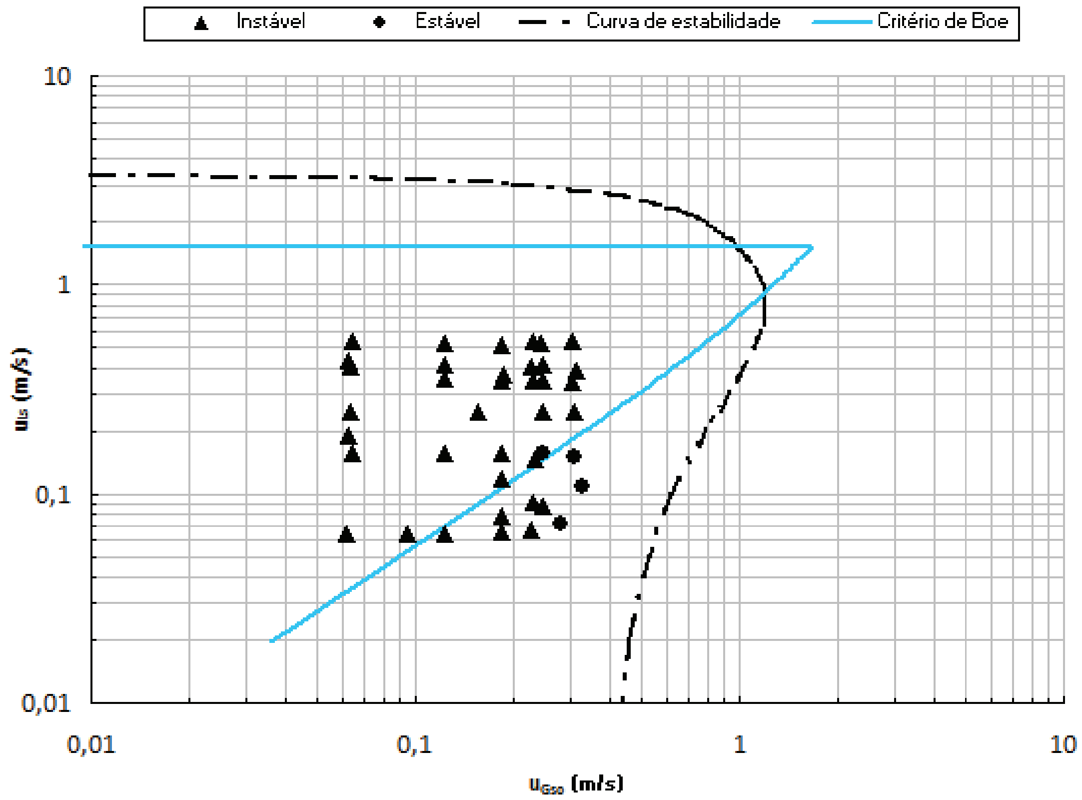

Figura 28 - Mapa de estabilidade para comprimento equivalente de *buffer* L_e = 10m.

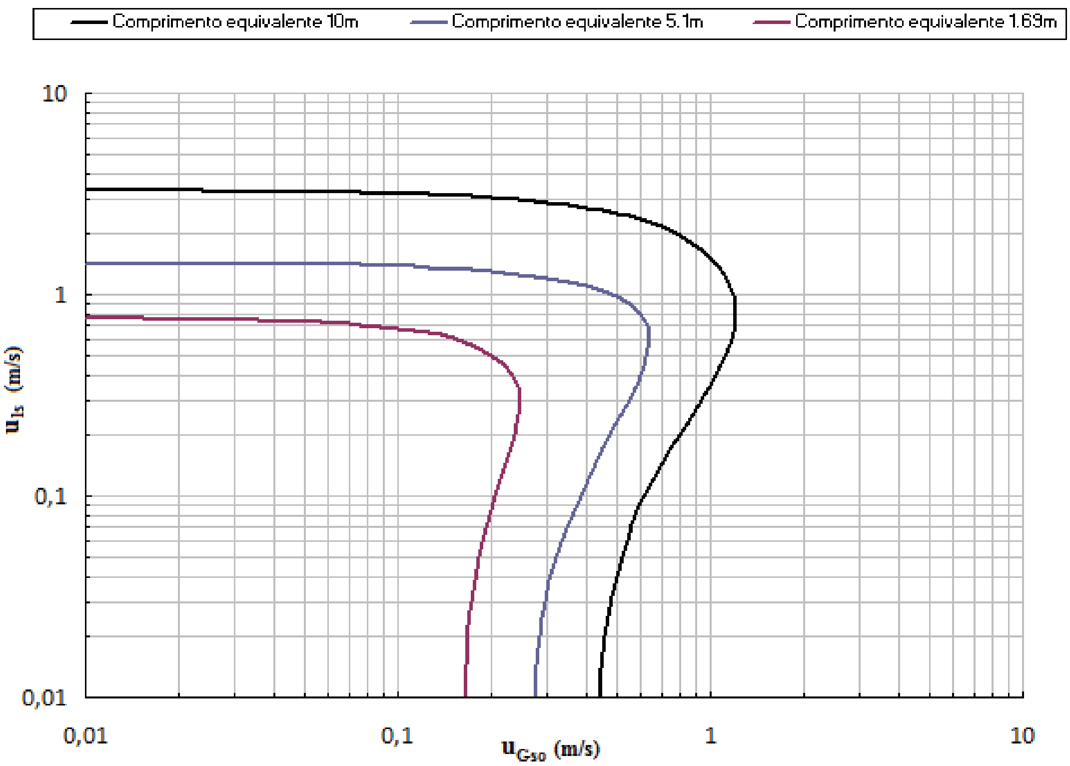

Figura 29 - Curvas de estabilidade para comprimentos equivalentes L_e = 1,69m, 5,1m e 10m.

5.6 Análise dos resultados

As seguintes análises podem ser feitas comparando-se os mapas de estabilidade apresentados:

- Comparando-se as curvas do critério de Boe apresentadas por Taitel em [7] (Figuras 23, 24 e 25) com as curvas de Boe construídas segundo a seção 5.4, percebe-se uma semelhança entre os comportamentos das duas curvas. Pode-se notar que ambas alcançam valores limites de velocidades superficiais semelhantes e as curvas estão localizadas próximas umas das outras. Logo, o método utilizado na seção 5.4 para se determinar o comportamento da curva de Boe foi realizado de maneira análoga à que Taitel mostrou em seu artigo e, portanto, os resultados são aceitáveis para fins de comparação com as curvas obtidas por simulação numérica em FORTRAN;
- Para comprimento equivalente de *buffer* L_e = 1,69m (Figura 26), verifica-se que a curva de estabilidade separa quase perfeitamente os regimes instáveis e estáveis. Por outro lado, a curva do critério de Boe engloba todos os pontos dentro da mesma região de instabilidade. Neste caso, a curva de estabilidade prediz com maior precisão a região de estabilidade;
- Para comprimento equivalente de *buffer* L_e = 5,1m (Figura 27), nota-se que a curva de estabilidade engloba todos os pontos experimentais, estáveis ou instáveis, e a curva do critério de Boe separa quase perfeitamente os regimes instáveis e estáveis. Neste caso, o critério de Boe apresenta resultados mais significativos do que a curva de estabilidade;
- Para comprimento equivalente de *buffer* L_e = 10m (Figura 28), os pontos estáveis estão localizados fora da região limitada pelo critério de Boe. Neste caso, o critério de Boe prediz a região de estabilidade satisfatoriamente, mesmo existindo pontos instáveis fora da região de instabilidade. Por outro lado, a curva de estabilidade engloba novamente tanto os pontos estáveis quanto os instáveis. Assim, de modo análogo ao caso L_e = 5,1m, o critério de Boe apresenta resultados mais satisfatórios;
- Na Figura 28, nota-se que o trecho horizontal curva de estabilidade está acima do limite imposto pela eq.(77), ou seja, o modelo prediz nessa região a existência de

algum tipo de intermitência severa, enquanto a eq.(77) impõe que para velocidades superficiais de líquido maiores que este limite não ocorrerá intermitência (o escoamento não será estratificado no *pipeline*). Essa consideração deve ser adicionada ao modelo desenvolvido em [1] para melhores resultados.

- Pode-se perceber que, dentre os dados coletados por Taitel, existem pontos estáveis muito próximos de pontos instáveis. Esta situação torna questionável o modo como Taitel conduziu seu experimento e como foi avaliada a estabilidade dos escoamentos observados. Análises mais recentes ([1]) mostram que esses pontos podem se encontrar em uma região de intermitência severa denominada SS3 (*Severe Slugging* 3), à qual Taitel não faz qualquer menção em seu trabalho.
- A partir da Figura 29, pode-se notar um deslocamento do trecho à direita das curvas de estabilidade (trecho quase vertical) para a direita conforme se aumenta o comprimento equivalente de *buffer*.

6 APRESENTAÇÃO DO MODELO

Neste capítulo, é apresentado o modelo físico do sistema *pipeline-riser* desenvolvido por Baliño em [9]-[11].

O modelo desenvolvido considera os seguintes subsistemas:

- Tanque pulmão de gás e conduto descendente (*pipeline*), com um padrão de escoamento estratificado. Este padrão de escoamento pode acontecer no comprimento total do *pipeline* ou até a posição correspondente ao comprimento de penetração de líquido (x);
- Conduto ascendente ou *riser* vertical, considerado como um sistema bifásico de parâmetros distribuídos, onde se despreza a inércia e se utiliza um modelo de fluxo de deriva (*drift flux*) como lei de fechamento.

As características do modelo permitem simular uma grande variedade de dados experimentais encontrados na literatura para *risers* verticais ([7],[12],[13]), assim como utilizá-lo como base para os estudos de estabilidade. Este modelo é ainda capaz de lidar com descontinuidades no escoamento, como por exemplo, acúmulo de líquido no *pipeline* (neste trabalho, apenas a condição de não penetração de líquido é de interesse).

6.1 *Pipeline*

No *pipeline*, o gás é considerado como uma cavidade de pressão P_g constante evoluindo isotermicamente como um gás perfeito. O acúmulo de líquido no *pipeline* é levado em conta com a descontinuidade em $x(t)$.

Para a modelagem do escoamento no *pipeline*, as principais variáveis são expressas no modelo apresentado na Figura 30.

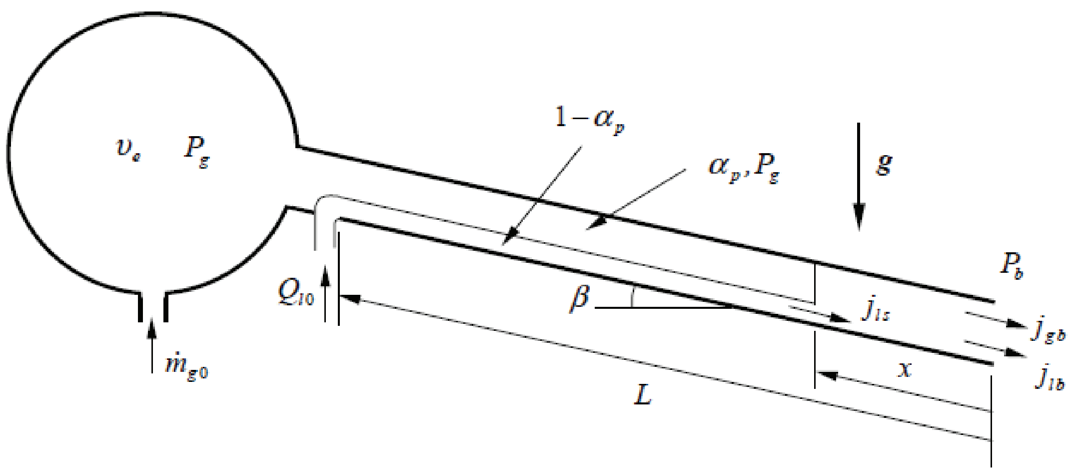

Figura 30 – Modelo utilizado para o escoamento no *pipeline*. [1]

As variáveis utilizadas nas equações de governo do *pipeline* são apresentadas na Tabela 11.

Tabela 11 - Variáveis das equações adimensionais de governo do *pipeline*. [14]

Variável	Definição	Unidade
L	Comprimento do *pipeline*	m
α_p	Fração de vazio na *pipeline*	---
Q_{l0}	Vazão volumétrica de líquido na entrada do *pipeline*	m³/s
x	Comprimento da região do *pipeline* com acúmulo de líquido a partir da base do *riser*	m
j_{l1}	Velocidade superficial do líquido em $x = 0$	m/s
L_e	Comprimento equivalente do conduto *buffer* $(L_e = \upsilon_e / A)$, onde υ_b é o volume do *buffer* e A é a área da seção transversal do *pipeline*	m
P_g	Pressão do gás no *pipeline* e na cavidade	Pa
j_{g1}	Velocidade superficial do gás no *pipeline*	m/s
β	Ângulo de inclinação do *pipeline*	radianos
A	Área da seção transversal do *pipeline*	m²
R_g	Constante do gás	m²/(s².K)
T_g	Temperatura absoluta do gás	K
$\dot{m}_{g0}$	Vazão mássica de gás na entrada do *pipeline*	kg/s

6.2 *Riser*

O *riser* pode se encontrar cheio ou com nível de líquido inferior ao máximo da coluna. Assume-se escoamento unidimensional e supõe-se que não existe transferência de massa por vaporização entre as fases líquida e gasosa.

No modelo de *riser* desenvolvido, será utilizada a equação de momento linear da mistura, desprezando-se a inércia das fases e considerando-se a força gravitacional e o atrito com as paredes.

Para a modelagem do escoamento no *riser*, as principais variáveis são expressas no modelo apresentado na Figura 31.

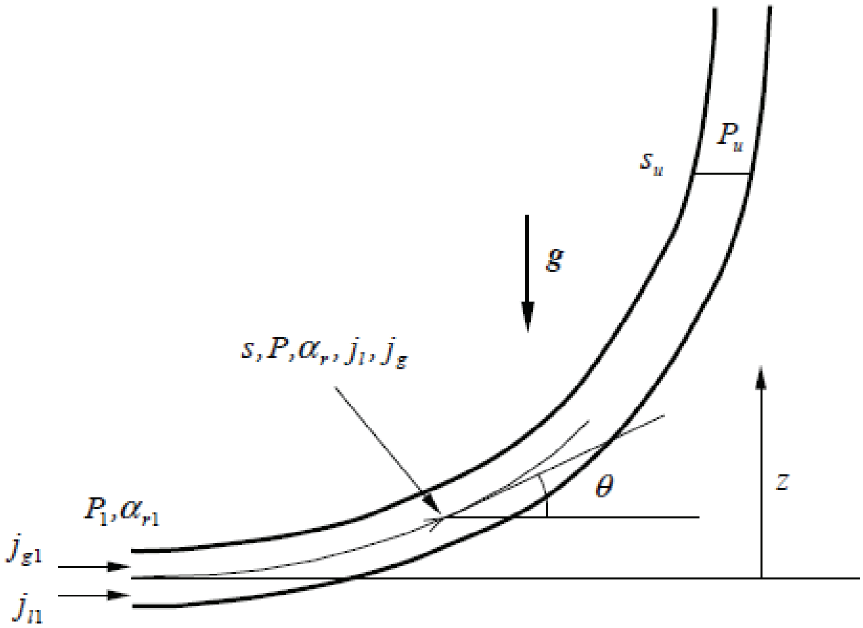

Figura 31 – Modelo utilizado para o escoamento no *riser*. [1]

As variáveis utilizadas nas equações de governo do *riser* são apresentadas na Tabela 12.

Tabela 12 - Variáveis das equações adimensionais de governo do *riser*. [14]

Variável	Definição	Unidade
s	Parametrização do *riser*	---
α_r	Fração de vazio no *riser*	---
j_l	Velocidade superficial do líquido no *riser*	m/s
P	Pressão no *riser*	Pa
j_g	Velocidade superficial do gás no *riser*	m/s
ρ_l	Massa específica da fase líquida	kg/m³
ρ_g	Massa específica da fase gasosa	kg/m³
g	Aceleração gravitacional	m/s²
C_d	Coeficiente adimensional utilizado na relação de deriva para o *riser*	---
U_d	Coeficiente dimensional utilizado na relação de deriva para o *riser*	m/s
f_m	Coeficiente de atrito de Fanning entre fluido e *riser*	---
Re_m	Número de Reynolds para a mistura	---
ν_l	Viscosidade cinemática do líquido	m²/s
δ_u	Razão entre viscosidades dinâmicas de gás e líquido	---
ε / D	Razão entre rugosidade e diâmetro do *riser*	---
ρ_m	Massa específica da mistura gás-líquido	kg/m³
μ_m	Viscosidade dinâmica da mistura gás-líquido	kg/(m.s)
R_g	Constante do gás	m²/(s².K)
T_g	Temperatura absoluta do gás	K

7 EQUACIONAMENTO PARA *RISER* VERTICAL

Nesta seção, será apresentado um resumo das equações adimensionais que governam as perturbações do estado estacionário de um escoamento bifásico num sistema *pipeline-riser* com uma configuração simplificada: será considerado um sistema correspondente a um *riser* vertical, sendo constantes os coeficientes de deriva C_d e U_d na lei de escorregamento entre as fases e a fração de vazio α_p no *pipeline*, desprezando os termos de inércia e considerando duas situações: ausência e presença do efeito do atrito na equação de conservação da quantidade de movimento. A dedução completa dos equacionamentos não será apresentada aqui devido à sua grande extensão, mas pode ser verificada em [14] e [15].

7.1 Equações de governo adimensionais

Inicialmente, será apresentada a adimensionalização das variáveis que aparecem nas seções anteriores. Posteriormente, serão apresentadas as equações adimensionais para o *pipeline* e para o *riser*.

7.1.1 Variáveis adimensionais

- Para o *pipeline* serão utilizadas as seguintes variáveis adimensionais:

$$x^* = \frac{x}{L_r} \tag{81}$$

$$P_g{}^* = \frac{P_g}{\rho_l \cdot R_g \cdot T_g} \tag{82}$$

$$j^* = j \cdot \frac{A}{Q_{l0}} \tag{83}$$

$$t^* = t \cdot \frac{Q_{l0}}{A \cdot L_r} \tag{84}$$

$$\dot{m}_{g0}{}^{*} = \frac{\dot{m}_{g0}}{\rho_l \cdot Q_{l0}} \tag{85}$$

onde j representa j_{l1} ou j_{g1} no caso do *pipeline*. Adotou-se o comprimento do *riser* L_r como escala de comprimento. Para adimensionalizar a pressão adotou-se $\rho_l \cdot R_g \cdot T_g$.

- Para o *riser*, além de algumas das variáveis adimensionais definidas acima, serão utilizadas ainda as seguintes variáveis adimensionais:

$$s^{*} = \frac{s}{L_r} \tag{86}$$

$$P^{*} = \frac{P}{\rho_l \cdot R_g \cdot T_g} \tag{87}$$

7.1.2 Equações de governo adimensionais para o estado estacionário – *Riser* vertical com atrito

Inicialmente, serão apresentadas as equações adimensionais necessárias para determinar o estado estacionário. Estas equações são determinadas a partir das equações de governo adimensionais encontradas em [14], eliminando-se os termos das equações que representam taxas de variação no tempo.

As equações que definem o estado estacionário são apresentadas abaixo. A denotação * indica que a variável tratada é adimensional.

- Equações adimensionais para o estado estacionário no *pipeline* (caso $x^{*} = 0$):

  - Para o líquido:

$$j_{l1}{}^{*} = 1 \tag{88}$$

  - Para o gás:

$$P_g{}^{*} \cdot j_{g1}{}^{*} = \dot{m}_{g0}{}^{*} \tag{89}$$

  - Relação de deriva para o *pipeline* que determina α_p em termos de $P_g{}^{*}$, $j_{l1}{}^{*}$ e $j_{g1}{}^{*}$ se encontra no apêndice A de [14] ou [15] (ver seção A.3).

- Equações adimensionais para o estado estacionário no *riser*:

  - Continuidade para o líquido:

$$\frac{\partial j_l^{\,*}}{\partial s^*} = 0 \tag{90}$$

  - Continuidade para o gás:

$$\frac{\partial (P^* \cdot j_g^{\,*})}{\partial s^*} = 0 \tag{91}$$

  - Momento linear da mistura:

$$\frac{\partial P^*}{\partial s^*} = -\Pi_L \cdot [(1-\alpha_r) + P^* \cdot \alpha_r] \cdot \left(\sin\theta + \frac{4}{\Pi_D} f_m \cdot j^* \cdot | j^* | \right) \tag{92}$$

onde $f_m = f_m(\mathrm{Re}_m, \varepsilon / D)$ é o fator de atrito para a mistura, sendo uma função do número de Reynolds para a mistura, Re_m, e da relação entre a rugosidade e o diâmetro do conduto, ε / D; Π_L e Π_D são definidos por:

$$\Pi_L = \frac{g\, L_r}{R_g T_g} \tag{93}$$

$$\Pi_D = \frac{2\, g\, D\, A^2}{Q_{l0}^{\;2}} \tag{94}$$

  - Relação de deriva:

$$\alpha_r = \frac{j_g^{\,*}}{C_d \cdot (j_g^{\,*} + j_l^{\,*}) + U_d^{\,*}} \tag{95}$$

onde coeficientes C_d e $U_d^{\,*}$, para um *riser* vertical ($\sin\theta = 1$ e $\cos\theta = 0$), são dados por:

$$C_d = 1{,}2 \tag{96}$$

$$U_d^{\,*} = 0{,}35 \cdot \frac{A.\sqrt{g.D}}{Q_{l0}} \tag{97}$$

7.1.3 Condições de continuidade e de contorno para as perturbações do estado estacionário

As condições de continuidade entre o *pipeline* e o *riser* na forma adimensional para o estado estacionário são dadas por:

$$j_{l1}^* = j_l^*(s^* = 0, t^*) \tag{98}$$

$$j_{g1}^* = j_g^*(s^* = 0, t^*) \tag{99}$$

$$\alpha_r(j_{l1}^*, j_{g1}^*) = \alpha_r(s^* = 0, t^*) \tag{100}$$

$$P_g^* = P^*(s^* = 0, t^*) \tag{101}$$

As condições de contorno no *pipeline* são a vazão volumétrica de líquido adimensionalizada, $Q_{l0}^* = Q_{l0}$, e a vazão em massa de gás adimensionalizada, $\dot{m}_{g0}^* = \dfrac{\dot{m}_{g0}}{\rho_l \cdot Q_{l0}}$. No topo do *riser*, a condição de contorno é dada por:

$$P(s^* = 1, t^*) = \frac{P_s}{\rho_l \cdot R_g \cdot T_g} \tag{102}$$

O cálculo do estado estacionário é realizado da seguinte forma:

- integrando-se a eq.(90) ao longo do *riser*, resulta constante a velocidade superficial de líquido j_l^* ao longo do *riser*: $j_l^* = 1$;
- integrando-se a eq.(91) ao longo do *riser*, resulta constante o produto $P^* \cdot j_g^*$ em cada posição do *riser*, $P^* \cdot j_g^* = \dot{m}_{g0}^*$, logo $j_g^* = \dfrac{\dot{m}_{g0}^*}{P^*}$
- das condições acima, resulta: $j^* = j_l^* + j_g^* = 1 + \dfrac{\dot{m}_{g0}^*}{P^*}$
- a partir da relação de deriva dada pela eq.(95), resulta: $\alpha_r = \dfrac{\dfrac{\dot{m}_{g0}^*}{P^*}}{C_d \cdot \left(1 + \dfrac{\dot{m}_{g0}^*}{P^*}\right) + U_d^*}$

- integrando o gradiente de pressão $\frac{\partial P^*}{\partial s^*}$ (eq.(92)) na posição entre o valor local s^* e o valor no topo do *riser* s_s^*, e a pressão P^* entre o valor local e o valor no topo do *riser*, pode-se obter o perfil de pressão. Para tanto, deve-se utilizar algum método numérico iterativo para garantir a convergência. Para calcular o perfil de fração de vazio α_r em estado permanente utiliza-se a eq.(95), onde o perfil de pressão será conhecido. A cada iteração, calculam-se as variáveis j_l^*, j_g^* e α_r que descrevem o regime permanente através das condições acima descritas, definindo completamente o estado estacionário no *riser*.

Uma vez determinado o regime permanente no *riser*, as velocidades superficiais j_{l1}^* e j_{g1}^*, e a pressão P_g^* no *pipeline* podem ser determinadas pelas condições de continuidade entre *pipeline* e *riser*, dadas pela eq.(98), eq.(99) e eq.(101), respectivamente. Para caracterizar totalmente o regime estado estacionário no *pipeline*, resta determinar a fração de vazio α_p. Como o equacionamento do cálculo de α_p é bastante extenso, não será aqui demonstrado, mas pode ser consultado na seção 2.7.1 da referência [1].

7.1.4 Equação de governo adimensional para o estado estacionário – *Riser* vertical sem atrito

Para o caso simplificado em que se despreza o efeito do atrito no *riser*, é possível reduzir o número de equações adimensionais que definem o estado estacionário ao longo do *riser* para uma única equação. Isso é possível porque eq.(90) e eq.(91) possuem solução analítica para esta situação simplificada.

A integração da eq.(90) fornece:

$$j_l^* = C_0 \text{ (constante)} \tag{103}$$

Para determinar a constante C_0, pode-se utilizar a eq.(88) e a eq.(98), que fornecem:

$$j_l^* = C_0 = 1 \tag{104}$$

A integração da eq.(91) fornece:

$$P^* j_g{}^* = C_1 \text{ (constante)} \tag{105}$$

Para determinar a constante C_1, pode-se utilizar a eq.(89) e a eq.(99), que fornecem:

$$P^* j_g{}^* = C_1 = \dot{m}_{g0}{}^* \Rightarrow j_g{}^* = \frac{\dot{m}_{g0}{}^*}{P^*} \tag{106}$$

Substituindo a eq.(104) e a eq.(106) na eq.(95) (relação de deriva), resulta:

$$\alpha_r = \frac{\dfrac{\dot{m}_{g0}{}^*}{P^*}}{C_d \cdot \left(\dfrac{\dot{m}_{g0}{}^*}{P^*} + 1 \right) + U_d{}^*} \tag{107}$$

onde C_d e $U_d{}^*$ são dados pelas eq.(96) e eq.(97), respectivamente.

Para o caso simplificado de *riser* vertical ($\sin\theta = 1$) sem efeito do atrito ($f_m = 0$), a eq.(92) resulta:

$$\frac{\partial P^*}{\partial s^*} = -\Pi_L \cdot [(1-\alpha_r) + P^* \cdot \alpha_r] \tag{108}$$

Como a eq.(108) é função somente das variáveis α_r e P^*, e α_r é apenas função da pressão P^* (eq.(107)), pode-se obter uma expressão com apenas P^* como variável:

$$\frac{\partial P^*}{\partial s^*} = -\Pi_L \cdot \left[\left(1 - \frac{\dfrac{\dot{m}_{g0}{}^*}{P^*}}{C_d \cdot \left(\dfrac{\dot{m}_{g0}{}^*}{P^*} + 1 \right) + U_d{}^*} \right) + \frac{\dot{m}_{g0}{}^*}{C_d \cdot \left(\dfrac{\dot{m}_{g0}{}^*}{P^*} + 1 \right) + U_d{}^*} \right] \tag{109}$$

Rearranjando os termos, resulta:

$$\frac{P^*[C_d + U_d{}^*] + \dot{m}_{g0}{}^* C_d}{P^*(C_d + U_d{}^* + \dot{m}_{g0}{}^*) + \dot{m}_{g0}{}^*(C_d - 1)} \cdot dP^* = -\Pi_L \cdot ds^* \tag{110}$$

Definindo os coeficientes

$$C_{11} = C_d + U_d^{\ *} \tag{111}$$

$$C_{12} = \dot{m}_{g0}^{\ *} C_d \tag{112}$$

$$C_{21} = C_d + U_d^{\ *} + \dot{m}_{g0}^{\ *} = C_{11} + \dot{m}_{g0}^{\ *} \tag{113}$$

$$C_{22} = \dot{m}_{g0}^{\ *}(C_d - 1) = C_{12} + \dot{m}_{g0}^{\ *} \tag{114}$$

e reescrevendo a eq.(110) em termos destes, resulta:

$$\frac{C_{11}P^* + C_{12}}{C_{21}P^* + C_{22}} \cdot dP^* = -\Pi_L \cdot ds^* \tag{115}$$

Rearranjando a eq.(115):

$$\left\{ \frac{C_{11}}{C_{21}} + \left(\frac{C_{12}C_{21} - C_{11}C_{22}}{C_{21}} \right) \cdot \frac{1}{C_{21}P^* + C_{22}} \right\} \cdot dP^* = -\Pi_L \cdot ds^* \tag{116}$$

Dada uma condição inicial ou de contorno, a eq.(116) pode ser integrada. Utilizando como condição a pressão P_s^* e a posição s_s^* no topo do *riser* (a pressão no topo do *riser* é constante), a integração da eq.(116) fornece:

$$\frac{C_{11}}{C_{21}}(P^* - P_s^*) + \left(\frac{C_{12}C_{21} - C_{11}C_{22}}{C_{21}} \right) \cdot \ln\left(\frac{C_{21}P^* + C_{22}}{C_{21}P_s^* + C_{22}} \right) = -\Pi_L \cdot (s^* - s_s^*) \tag{117}$$

Dessa forma, pode-se determinar a pressão P^* em cada posição s^* do *riser*. Determinada a pressão em cada posição do *riser*, podem-se determinar também as variáveis $j_l^{\ *}$, $j_g^{\ *}$ e α_r que descrevem o regime permanente através da eq.(104), eq.(106) e eq.(107), definindo completamente o estado estacionário no *riser*.

Uma vez determinado o regime permanente no *riser*, as velocidades superficiais $j_{l1}^{\ *}$ e $j_{g1}^{\ *}$, e a pressão $P_g^{\ *}$ no *pipeline* podem ser determinadas pelas condições de continuidade entre *pipeline* e *riser*, dadas pela eq.(98), eq.(99) e eq.(101), respectivamente. Para caracterizar totalmente o regime estado estacionário no *pipeline*, resta determinar a fração de vazio α_p. Como o equacionamento do cálculo de α_p é bastante extenso, não será aqui demonstrado, mas pode ser consultado no apêndice A das referências [14] ou [15].

7.2 Equações de governo das perturbações do estado estacionário

Nesta seção, inicialmente serão apresentadas as variáveis que caracterizam o estado estacionário mais uma perturbação. Posteriormente, serão apresentadas as equações de governo das perturbações para o *pipeline* e para o *riser*, considerando neste último as duas situações: presença e ausência de atrito.

7.2.1 Variáveis para o estado estacionário e para as perturbações

A seguir, são definidas as variáveis que caracterizam o estado estacionário mais uma perturbação. Em tudo o que se segue, somente variáveis adimensionais serão utilizadas. As variáveis com "~" descrevem o estado estacionário e as variáveis com "^" representam a perturbação do estado estacionário.

- No *pipeline*:

$$j_{l1}^{*} = \tilde{j}_{l1} + \hat{j}_{l1} \tag{118}$$

$$j_{g1}^{*} = \tilde{j}_{g1} + \hat{j}_{g1} \tag{119}$$

$$P_g^{*} = \tilde{P}_g + \hat{P}_g \tag{120}$$

Conforme as condições analisadas, a fração de vazio no *pipeline* será considerada constante, de modo que não há perturbação para α_p^{*}.

- No *riser*:

$$j_l^{*}(s) = \tilde{j}_l(s) + \hat{j}_l(s) \tag{121}$$

$$j_g^{*}(s) = \tilde{j}_g(s) + \hat{j}_g(s) \tag{122}$$

$$\alpha_r(s) = \tilde{\alpha}_r(s) + \hat{\alpha}_r(s) \tag{123}$$

$$P^{*}(s) = \tilde{P}(s) + \hat{P}(s) \tag{124}$$

7.2.2 Equações de governo das perturbações do estado estacionário

As equações de governo das perturbações do estado estacionário são dadas abaixo para cada uma das partes do sistema.

- Equações adimensionais de governo das perturbações do estado estacionário no *pipeline* (caso $x = 0$):

- Para o líquido: $$\hat{j}_{l1} = 0 \tag{125}$$

- Para o gás:

$$\left(\frac{L}{L_r} \cdot \tilde{\alpha}_p + \frac{L_e}{L_r} \right) \cdot \frac{\partial \hat{P}_g}{\partial t} + \tilde{j}_{g1} \cdot \hat{P}_g + \tilde{P}_g \cdot \hat{j}_{g1} = 0 \tag{126}$$

- Como a fração de vazio no *pipeline* é assumida constante, não há perturbação para $\tilde{\alpha}_p$.

- Equações de governo das perturbações do estado estacionário no *riser*:

- Continuidade para o líquido:

$$-\frac{\partial \hat{\alpha}_r}{\partial t} + \frac{\partial \hat{j}_l}{\partial s} = 0 \tag{127}$$

- Continuidade para o gás:

$$\tilde{\alpha}_r \cdot \frac{\partial \hat{P}}{\partial t} + \tilde{P} \cdot \frac{\partial \hat{\alpha}_r}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{P}}{\partial s} \cdot \hat{j}_g + \tilde{P} \cdot \frac{\partial \hat{j}_g}{\partial s} + \tilde{j}_g \cdot \frac{\partial \hat{P}}{\partial s} + \frac{\partial \tilde{j}_g}{\partial s} \cdot \hat{P} = 0 \tag{128}$$

- Momento linear da mistura:

- *Riser* com atrito: a partir da linearização da eq.(92), pode-se obter a seguinte expressão (ver [14]):

$$\frac{\partial \hat{P}}{\partial s} = -\frac{4\Pi_L}{\Pi_D} \cdot \left[1 - \tilde{\alpha}_r + \tilde{P} \cdot \tilde{\alpha}_r \right] \cdot \left[2 \cdot f_m(\tilde{\mathrm{Re}}_m, \varepsilon / D) \cdot |\, \tilde{j} \,|\, j + D_1 f_m(\tilde{\mathrm{Re}}_m, \varepsilon / D) \cdot \hat{\mathrm{Re}}_m \,|\, \tilde{j} \,|\, \tilde{j} \right]$$
$$- \Pi_L \cdot \left[-\hat{\alpha}_r + \tilde{P} \cdot \hat{\alpha}_r + \tilde{\alpha}_r \cdot \hat{P} \right] \cdot \left(\sin\theta + \frac{4}{\Pi_D} \cdot f_m(\tilde{\mathrm{Re}}_m, \varepsilon / D) \cdot |\, \tilde{j} \,|\, \tilde{j} \right) \tag{129}$$

onde o operador D_1 representa a derivada da função $f_m(\widetilde{\mathrm{Re}}_m, \varepsilon / D)$ em relação a $\widetilde{\mathrm{Re}}_m$; $\tilde{j} = \tilde{j}_l + \tilde{j}_g$, $\widetilde{\mathrm{Re}}_m$ e $\hat{\mathrm{Re}}_m$ são dados por:

$$\widetilde{\mathrm{Re}}_m = \frac{Q_{l0} D}{A \nu_l} \frac{(1 - \tilde{\alpha}_r + \tilde{P} \cdot \tilde{\alpha}_r)}{1 - \tilde{\alpha}_r + \delta_u \cdot \tilde{\alpha}_r} \,|\, \tilde{j} \,| \tag{130}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathrm{Re}}_m = \frac{Q_{l0} D}{A \nu_l} \frac{1}{1 - \tilde{\alpha}_r + \delta_u \cdot \tilde{\alpha}_r} \Bigg\{ & \frac{(1 - \tilde{\alpha}_r + \tilde{P} \cdot \tilde{\alpha}_r)}{\tilde{j}} \,|\, \tilde{j} \,|\, (\hat{j}_l + \hat{j}_g) + |\, \tilde{j} \,| \cdot \tilde{\alpha}_r \cdot \hat{P} \\ & + (\tilde{P} - 1) \,|\, \tilde{j} \,| \left[\frac{\tilde{\alpha}_r}{\tilde{j}_g} (1 - \tilde{\alpha}_r \cdot C_d) \cdot \hat{j}_g - \frac{\tilde{\alpha}_r^{\,2} \cdot C_d}{\tilde{j}_g} \hat{j}_l \right] \Bigg\} \end{aligned} \tag{131}$$

- *Riser* sem atrito: a partir da linearização da eq.(108), pode-se obter a seguinte expressão (ver [14]):

$$\frac{\partial \hat{P}}{\partial s} = -\Pi_L \cdot \left[-\hat{\alpha}_r + \tilde{P} \cdot \hat{\alpha}_r + \tilde{\alpha}_r \cdot \hat{P} \right] \cdot \sin\theta \tag{132}$$

onde $\sin\theta = 1$ para *riser* vertical.

- Relação de deriva:

$$\hat{\alpha}_r = \frac{\tilde{\alpha}_r (1 - C_d \cdot \tilde{\alpha}_r)}{\tilde{j}_g} \cdot \hat{j}_g - \frac{C_d \cdot \tilde{\alpha}_r^{\,2}}{\tilde{j}_g} \cdot \hat{j}_l \tag{133}$$

7.2.3 Condições de continuidade e de contorno para as perturbações do estado estacionário

As condições de continuidade entre o *pipeline* e o *riser* na forma adimensional para as perturbações do estado estacionário, tanto para o caso em que se considera o atrito quanto para o caso em que seu efeito é desprezado, são dadas por:

$$\hat{j}_{l1} = \hat{j}_l (s = 0, t) \tag{134}$$

$$\hat{j}_{g1} = \hat{j}_g (s = 0, t) \tag{135}$$

$$\hat{\alpha}_r (\hat{j}_{l1}, \hat{j}_{g1}) = \hat{\alpha}_r (s = 0, t) \tag{136}$$

$$\hat{P}_g = \hat{P}(s = 0, t) \tag{137}$$

As condições de contorno para as perturbações do estado estacionário no *pipeline* são dadas por $Q_{l0} = \dot{m}_{g0} = 0$, onde Q_{l0} e $\dot{m}_{g0}$ são, respectivamente, as perturbações de $\widetilde{Q}_{l0}$ e $\widetilde{m}_{g0}$ para o estado estacionário. No topo do *riser*, a condição de contorno para as perturbações do estado estacionário é:

$$\hat{P}(t, s = 1) = 0 \tag{138}$$

7.2.4 Sistema de equações adimensionais para as perturbações do estado estacionário no *riser*

Agora, será eliminada a perturbação da fração de vazio do *riser* utilizando a relação de deriva linearizada para reduzir o número de equações. A perturbação da fração de vazio $\hat{\alpha}_r$ em termos de $\hat{j}_l$, $\hat{j}_g$, $\hat{P}$, $\widetilde{\alpha}_r$, $\widetilde{j}_l$, $\widetilde{j}_g$ e $\widetilde{P}$ é dada por:

$$\hat{\alpha}_r = \frac{\widetilde{\alpha}_r(1 - C_d \cdot \widetilde{\alpha}_r)}{\widetilde{j}_g} \cdot \hat{j}_g - \frac{C_d \cdot \widetilde{\alpha}_r^{\,2}}{\widetilde{j}_g} \cdot \hat{j}_l \tag{139}$$

Substituindo-se a eq.(139) na eq.(127) e na eq.(128), obtêm-se as equações de conservação de massa, respectivamente, para o líquido e o gás:

- Para o líquido:

$$-\widetilde{\alpha}_r \cdot (1 - \widetilde{\alpha}_r \cdot C_d) \cdot \frac{\partial \hat{j}_g}{\partial t} + \widetilde{\alpha}_r^{\,2} \cdot C_d \cdot \frac{\partial \hat{j}_l}{\partial t} + \widetilde{j}_g \cdot \frac{\partial \hat{j}_l}{\partial s} = 0 \tag{140}$$

- Para o gás:

$$\widetilde{P} \cdot \frac{\widetilde{\alpha}_r}{\widetilde{j}_g} \cdot (1 - \widetilde{\alpha}_r \cdot C_d) \frac{\partial \hat{j}_g}{\partial t} - C_d \cdot \frac{\widetilde{P} \cdot \widetilde{\alpha}_r^{\,2}}{\widetilde{j}_g} \cdot \frac{\partial \hat{j}_l}{\partial t} + \widetilde{\alpha}_r \cdot \frac{\partial \hat{P}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}\left[\widetilde{j}_g(s) \cdot \hat{P}(s,t) + \widetilde{P}(s) \cdot \hat{j}_g(s,t)\right] = 0 \tag{141}$$

Substituindo-se a eq.(139) na eq.(129) e na eq.(132), obtêm-se as equações de conservação de momento linear da mistura:

- Momento linear da mistura:

- *Riser* com atrito: a equação de conservação do momento linear, dada pela eq.(129), assume a seguinte forma:

$$\tilde{j}_g \frac{\partial \hat{P}}{\partial s} = -\frac{4\Pi_L}{\Pi_D} \tilde{j}_g \left[1 - \tilde{\alpha}_r + \tilde{P} \cdot \tilde{\alpha}_r\right] \cdot \left[2 f_m (\tilde{\mathrm{Re}}_m, \varepsilon / D) \,|\, \tilde{j} \,|\, (\hat{j}_g + \hat{j}_l) \right.$$
$$\left. + D_1 f_m (\tilde{\mathrm{Re}}_m, \varepsilon / D) \,|\, \tilde{j} \,|\, \tilde{j}\, \hat{\mathrm{Re}}_m \right] - \Pi_L \left[(\tilde{P} - 1) \cdot \tilde{\alpha}_r (1 - C_d \tilde{\alpha}_r) \hat{j}_g \right. \tag{142}$$
$$\left. - (\tilde{P} - 1) \cdot C_d \tilde{\alpha}_r^{\,2} \hat{j}_l + \tilde{j}_g \tilde{\alpha}_r \hat{P} \right] \cdot \left(\sin\theta + \frac{4}{\Pi_D} f_m (\tilde{\mathrm{Re}}_m, \varepsilon / D) \,|\, \tilde{j} \,|\, \tilde{j} \right)$$

onde $\hat{\mathrm{Re}}_m$ é dado pela eq.(131);

- *Riser* sem atrito: a equação de conservação do momento linear, dada pela eq.(132), assume a seguinte forma:

$$\tilde{j}_g \frac{\partial \hat{P}}{\partial s} = -\Pi_L \cdot \left[(\tilde{P} - 1) \cdot \tilde{\alpha}_r \cdot (1 - C_d \cdot \tilde{\alpha}_r) \cdot \hat{j}_g - (\tilde{P} - 1) \cdot C_d \cdot \tilde{\alpha}_r^{\,2} \cdot \hat{j}_l + \tilde{j}_g \cdot \tilde{\alpha}_r \cdot \hat{P}\right] \tag{143}$$

A seguir, apresentam-se as equações (140), (141) e (142) (ou (143)) em formato matricial:

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \hat{j}_l}{\partial t} \\ \dfrac{\partial \hat{j}_g}{\partial t} \\ \dfrac{\partial \hat{P}}{\partial t} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & D_{22} & D_{23} \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \hat{j}_l}{\partial s} \\ \dfrac{\partial \hat{j}_g}{\partial s} \\ \dfrac{\partial \hat{P}}{\partial s} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \hat{j}_l \\ \hat{j}_g \\ \hat{P} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{144}$$

onde os elementos não nulos das matrizes [B] e [D] são dados por:

$$B_{11} = \tilde{\alpha}_r^{\,2} \cdot C_d \tag{145}$$

$$B_{12} = -\tilde{\alpha}_r \cdot (1 - \tilde{\alpha}_r \cdot C_d) \tag{146}$$

$$B_{21} = -\tilde{P} \cdot \tilde{\alpha}_r^{\,2} \cdot C_d \tag{147}$$

$$B_{22} = \tilde{P} \cdot \tilde{\alpha}_r \cdot (1 - C_d \cdot \tilde{\alpha}_r) \tag{148}$$

$$B_{23} = \tilde{j}_g \cdot \tilde{\alpha}_r \tag{149}$$

$$D_{11} = \tilde{j}_g \tag{150}$$

$$D_{22} = \tilde{j}_g \cdot \tilde{P} \tag{151}$$

$$D_{23} = \tilde{j}_g^{\ 2} \tag{152}$$

$$D_{33} = \tilde{j}_g \tag{153}$$

Os elementos não-nulos da matriz [A] para o caso de *riser* com atrito são dados por:

$$A_{22} = \tilde{j}_g \cdot \frac{\partial \tilde{P}}{\partial s} \tag{154}$$

$$A_{23} = \tilde{j}_g \cdot \frac{\partial \tilde{j}_g}{\partial s} \tag{155}$$

$$\begin{aligned} A_{31} = {} & \frac{4\Pi_L}{\Pi_D}\tilde{j}_g\left[1-\tilde{\alpha}_r+\tilde{P}\cdot\tilde{\alpha}_r\right]\cdot\Big\{2f_m(\tilde{\mathrm{Re}}_m,\varepsilon/D)\cdot|\tilde{j}| \\ & + D_1 f_m(\tilde{\mathrm{Re}}_m,\varepsilon/D)\cdot|\tilde{j}|\,\tilde{j}\,\frac{Q_{l0}D}{A\nu_l}\frac{1}{1-\tilde{\alpha}_r+\delta_u\tilde{\alpha}_r}\left[\frac{(1-\tilde{\alpha}_r+\tilde{P}\cdot\tilde{\alpha}_r)}{\tilde{j}}|\tilde{j}|\right. \\ & \left.\left. -(\tilde{P}-1)\cdot\frac{C_d\tilde{\alpha}_r^{\ 2}}{\tilde{j}_g}|\tilde{j}| + \frac{(1-\tilde{\alpha}_r+\tilde{P}\cdot\tilde{\alpha}_r)|\tilde{j}|}{1-\tilde{\alpha}_r+\delta_u\tilde{\alpha}_r}(\delta_u-1)\cdot\frac{C_d\tilde{\alpha}_r^{\ 2}}{\tilde{j}_g}\right]\right\} \\ & -\Pi_L\cdot(\tilde{P}-1)\cdot C_d\tilde{\alpha}_r^{\ 2}\cdot\left(\sin\theta+\frac{4}{\Pi_D}f_m(\tilde{\mathrm{Re}}_m,\varepsilon/D)\cdot|\tilde{j}|\,\tilde{j}\right) \end{aligned} \tag{156}$$

$$\begin{aligned} A_{32} = {} & \frac{4\Pi_L}{\Pi_D}\tilde{j}_g\left[1-\tilde{\alpha}_r+\tilde{P}\cdot\tilde{\alpha}_r\right]\cdot\Big\{2f_m(\tilde{\mathrm{Re}}_m,\,\varepsilon/D)\,|\tilde{j}| \\ & + D_1 f_m(\tilde{\mathrm{Re}}_m,\,\varepsilon/D)\,|\tilde{j}|\,\tilde{j}\cdot\frac{Q_{l0}D}{A\nu_l}\frac{1}{1-\tilde{\alpha}_r+\delta_u\cdot\tilde{\alpha}_r}\left[\frac{(1-\tilde{\alpha}_r+\tilde{P}\cdot\tilde{\alpha}_r)}{\tilde{j}}|\tilde{j}|\right. \\ & \left.\left. +(\tilde{P}-1)\frac{\tilde{\alpha}_r}{\tilde{j}_g}\cdot(1-C_d\cdot\tilde{\alpha}_r)\,|\tilde{j}| - \frac{(1-\tilde{\alpha}_r+\tilde{P}\cdot\tilde{\alpha}_r)|\tilde{j}|}{1-\tilde{\alpha}_r+\delta_u\cdot\tilde{\alpha}_r}(\delta_u-1)\frac{\tilde{\alpha}_r}{\tilde{j}_g}\cdot(1-C_d\cdot\tilde{\alpha}_r)\right]\right\} \\ & +\Pi_L(\tilde{P}-1)\cdot\tilde{\alpha}_r\cdot(1-C_d\cdot\tilde{\alpha}_r)\cdot\left(\sin\theta+\frac{4}{\Pi_D}f_m(\tilde{\mathrm{Re}}_m,\,\varepsilon/D)\,|\tilde{j}|\,\tilde{j}\right) \end{aligned} \tag{157}$$

$$\begin{aligned} A_{33} = {} & \frac{4\Pi_L}{\Pi_D}\tilde{j}_g\left[1-\tilde{\alpha}_r+\tilde{P}\cdot\tilde{\alpha}_r\right]\cdot D_1 f_m(\tilde{\mathrm{Re}}_m,\,\varepsilon/D)\,|\tilde{j}|\,\tilde{j}\,\frac{Q_{l0}D}{A\nu_l}\frac{|\tilde{j}|\,\tilde{\alpha}_r}{1-\tilde{\alpha}_r+\delta_u\cdot\tilde{\alpha}_r}\tilde{\alpha}_r \\ & +\Pi_L\cdot\tilde{j}_g\cdot\tilde{\alpha}_r\left(\sin\theta+\frac{4}{\Pi_D}f_m(\tilde{\mathrm{Re}}_m,\,\varepsilon/D)\,|\tilde{j}|\,\tilde{j}\right) \end{aligned} \tag{158}$$

Os elementos não-nulos da matriz [A] para o caso de *riser* sem efeito de atrito são dados por:

$$A_{22} = \tilde{j}_g \cdot \frac{\partial \tilde{P}}{\partial s} \tag{159}$$

$$A_{23} = \tilde{j}_g \cdot \frac{\partial \tilde{j}_g}{\partial s} \tag{160}$$

$$A_{31} = -\Pi_L \cdot (\tilde{P} - 1) \cdot C_d \tilde{\alpha}_r^{\ 2} \tag{161}$$

$$A_{32} = \Pi_L (\tilde{P} - 1) \cdot \tilde{\alpha}_r \cdot (1 - C_d \cdot \tilde{\alpha}_r) \tag{162}$$

$$A_{33} = \Pi_L \cdot \tilde{j}_g \cdot \tilde{\alpha}_r \tag{163}$$

8 ANÁLISE DE ESTABILIDADE PARA *RISER* VERTICAL

A partir do modelo desenvolvido anteriormente e aplicando a teoria da estabilidade, pode-se eliminar a dependência temporal das equações lineares para as perturbações do estado estacionário utilizando a transformada de Laplace, resultando em um sistema de equações diferenciais em termos da variável espacial s. Em seguida, pode-se realizar a discretização espacial do *riser* via métodos numéricos (neste trabalho será utilizado o método das diferenças finitas). Dessa forma, obtém-se um sistema de equações algébricas, cuja solução pode ser escrita em termos de seus autovalores e autovetores.

Utilizando-se a transformada inversa de Laplace, pode-se obter a evolução temporal da solução das equações lineares para as perturbações do estado estacionário, a qual depende dos autovalores do sistema de equações algébricas obtido. Caso todos os autovalores possuam parte real negativa, a solução decairá exponencialmente com o tempo e o estado estacionário será estável (regime permanente). Se pelo menos um autovalor possuir parte real positiva, a solução crescerá exponencialmente com o tempo e o estado estacionário será instável (instabilidade hidrodinâmica). Então, variando-se os parâmetros do sistema e observando se a evolução temporal da simulação numérica (com o estado estacionário aplicado como condição inicial) converge ou não para um regime permanente, é possível determinar as regiões em que o sistema é estável.

A seguir, será aplicada a transformada de Laplace às equações de governo das perturbações do estado estacionário. Inicialmente, considere o seguinte par de transformadas:

$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \hat{\phi}(\omega)\, \exp(\omega t)\, d\omega \tag{164}$$

$$\hat{\phi}(\omega) = \int_{0}^{\infty} \phi(t)\, \exp(-\omega t)\, dt \tag{165}$$

Como nas equações que governam as perturbações do estado estacionário aparece apenas a derivada primeira em relação ao tempo, então:

$$\hat{\phi}(\omega) = \int_0^\infty \phi(t)\, \exp(-\omega t)\, dt = \phi(t)\, \exp(-\omega t)\,|_0^\infty + \omega \int_0^\infty \phi(t)\, \exp(-\omega t)\, dt = -\phi(0) + \omega\, \hat{\phi}(\omega)$$

(166)

Aplicando a transformada de Laplace às equações (125), (126) e (144), resulta:

- Para o *pipeline*:

    - Para o líquido:

$$\hat{j}_{l1} = 0 \tag{167}$$

    - Para o gás:

$$\omega\left(\frac{L}{L_r}\cdot\tilde{\alpha}_p + \frac{L_e}{L_r}\right)\cdot\hat{P}_g + \tilde{j}_{g1}\cdot\hat{P}_g + \tilde{P}_g\cdot\hat{j}_{g1} = \left(\frac{L}{L_r}\cdot\tilde{\alpha}_p + \frac{L_e}{L_r}\right)\cdot P_g(0) \tag{168}$$

- Para o *riser*:

$$([A] + \omega\,[B])\cdot\begin{Bmatrix}\hat{j}_l\\ \hat{j}_g\\ \hat{P}\end{Bmatrix} + [D]\cdot\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial\hat{j}_l}{\partial s}\\ \dfrac{\partial\hat{j}_g}{\partial s}\\ \dfrac{\partial\hat{P}}{\partial s}\end{Bmatrix} = [B]\cdot\begin{Bmatrix}j_l\\ j_g\\ P\end{Bmatrix} \tag{169}$$

onde [A], [B] e [D] são as matrizes correspondentes a cada letra na eq.(144).

A eq.(167) e a eq.(168) servem como condição de contorno para o *riser* em $s = 0$. No topo do *riser*, a condição de contorno é dada pela eq.(138), e sua transformada de Laplace é dada por:

$$\hat{P}(s = 1,\, \omega) = 0 \tag{170}$$

As transformadas de Laplace das condições de continuidade dada pela eq.(134), eq.(135) e eq.(137) entre o *pipeline* e o *riser* são dadas por:

$$\hat{j}_{l1} = \hat{j}_{l1}(s = 0,\, \omega) \tag{171}$$

$$\hat{j}_{g1} = \hat{j}_{g1}(s = 0,\, \omega) \tag{172}$$

$$\hat{P}_g = \hat{P}_g(s = 0,\, \omega) \tag{173}$$

9 TEORIA DA ESTABILIDADE LINEAR APLICADA AO SISTEMA *PIPELINE-RISER*

A metodologia empregada em [16]-[18] para obter mapas de estabilidade é computacionalmente intensiva, pois para cada configuração do sistema é necessário fazer uma simulação temporal das equações de governo e verificar se a solução numérica converge para um regime permanente ou para algum regime intermitente. Quando se está próximo da fronteira de estabilidade, mas para uma configuração de parâmetros do sistema onde o estado estacionário é instável, a evolução do sistema para o regime intermitente é lenta, pois a taxa de crescimento da instabilidade com o tempo é muito pequena, o que leva a grandes períodos de simulação.

A teoria de estabilidade linear fornece uma metodologia que resulta em procedimento computacional mais econômico que o modelo utilizado em [10] para traçar mapas de estabilidade. Uma vez determinado o estado estacionário, escrevem-se as variáveis dependentes como soma de seus valores no estado estacionário e uma perturbação, substituindo então nas equações de governo do escoamento multifásico. Em seguida, linearizam-se as equações de governo das perturbações do estado estacionário. Para determinar a estabilidade do estado estacionário, deve-se resolver o sistema de equações lineares que resulta do procedimento acima.

10 DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL VIA FÓRMULA DE 5 PONTOS

As equações (167), (168) e (170) são condições de contorno para o sistema de equações diferenciais ordinárias em s de acordo com as condições de continuidade (171), (172) e (173). Para resolver este sistema de equações diferenciais ordinárias, pode-se discretizá-lo para assim obter um sistema de equações algébricas que possa ser resolvido com métodos apropriados de álgebra computacional. Neste trabalho, será utilizado o método das diferenças finitas para discretizar o sistema de equações (169) em termos da variável s.

O operador $\partial/\partial s$ que aparece no sistema de equações (169) será representado por um operador de diferenças finitas centrado, utilizando a fórmula de diferenças finitas de 5 pontos.

Discretizando o intervalo $0 \leq s \leq 1$ em N pontos, resulta um total de $3N$ variáveis, mas com as condições de contorno dadas pelas equações (167), (168) e (170), na realidade haverá $3N-3$ variáveis desconhecidas. Logo, são necessárias $3N-3$ equações para determiná-las. Utilizando a equação (168) para escrever $\hat{j}_{g1} = \hat{j}_g(s=0)$ em termos de $\hat{P}_g = \hat{P}(s=0)$, resulta:

$$\hat{j}_{g1} = -\frac{\tilde{j}_{g1}}{\tilde{P}_g}\hat{P}_g - \omega\left(\frac{L}{L_r}\tilde{\alpha}_p + \frac{L_e}{L_r}\right)\frac{\hat{P}_g}{\tilde{P}_g} + \left(\frac{L}{L_r}\tilde{\alpha}_p + \frac{L_e}{L_r}\right)\frac{P_g(0)}{\tilde{P}_g} \tag{174}$$

A discretização do sistema de equações (169) será realizada da seguinte forma: no nó $k=1$, será imposta a forma discreta da equação de conservação do momento linear da mistura, eliminando $\hat{j}_{g1}$ em termos de $\hat{P}_g$ via equação (174); nos nós $k = 2, \ldots, N-1$ será imposta a forma discreta do sistema de equações (169) e no nó $k = N$ será imposta somente a forma discreta das equações de continuidade para o líquido e o gás. A discretização das equações de governo do escoamento no *riser* segue abaixo.

- Para o nó $k = 1$:

$$\frac{D_{33}(s_1)}{12\Delta s}\left[-25\hat{P}(s_1)+48\hat{P}(s_2)-36\hat{P}(s_3)+16\hat{P}(s_4)-3\hat{P}(s_5)\right]+A_{32}(s_1)\left\{-\frac{\tilde{j}_{g1}}{\tilde{P}_g}\right\}\hat{P}(s_1)$$
$$+A_{33}(s_1)\hat{P}(s_1)-\omega A_{32}(s_1)\left[\left(\frac{L}{L_r}\tilde{\alpha}_p+\frac{L_e}{L_r}\right)\frac{1}{\tilde{P}_g}\right]\cdot\hat{P}(s_1)=-A_{32}(s_1)\left(\frac{L}{L_r}\tilde{\alpha}_p+\frac{L_e}{L_r}\right)\frac{P_g(0)}{\tilde{P}_g}$$

(175)

- Para o nó $k = 2$:

$$\frac{D_{11}(s_2)}{12\Delta s}\left[-10\hat{j}_l(s_2)+18\hat{j}_l(s_3)-6\hat{j}_l(s_4)+\hat{j}_l(s_5)\right]+\omega\left[B_{11}(s_2)\hat{j}_l(s_2)+B_{12}(s_2)\hat{j}_g(s_2)\right]$$
$$=B_{11}(s_2)j_l(s_2,0)+B_{12}(s_2)j_g(s_2,0)$$

(176)

$$\frac{\tilde{j}_g(s_2)}{12\Delta s}\left\{3\tilde{P}(s_1)\frac{\tilde{j}_{g1}}{\tilde{P}_g}\hat{P}(s_1)-10\tilde{P}(s_2)\hat{j}_g(s_2)+18\tilde{P}(s_3)\hat{j}_g(s_3)-6\tilde{P}(s_4)\hat{j}_g(s_4)+\tilde{P}(s_5)\hat{j}_g(s_5)\right\}$$
$$+\frac{\tilde{j}_g(s_2)}{12\Delta s}\left[-3\tilde{j}_g(s_1)\hat{P}(s_1)-10\tilde{j}_g(s_2)\hat{P}(s_2)+18\tilde{j}_g(s_3)\hat{P}(s_3)-6\tilde{j}_g(s_4)\hat{P}(s_4)+\tilde{j}_g(s_5)\hat{P}(s_5)\right]$$
$$+\omega\left[\frac{3\tilde{j}_g(s_2)\tilde{P}(s_1)}{12\Delta s}\left(\frac{L}{L_r}\tilde{\alpha}_p+\frac{L_e}{L_r}\right)\frac{1}{\tilde{P}_g}\right]\cdot\hat{P}(s_1)+\omega\left[B_{21}(s_2)\hat{j}_l(s_2)+B_{22}(s_2)\hat{j}_g(s_2)+B_{23}(s_2)\hat{P}(s_2)\right]$$
$$=\frac{3\tilde{j}_g(s_2)\tilde{P}(s_1)}{12\Delta s}\left(\frac{L}{L_r}\tilde{\alpha}_p+\frac{L_e}{L_r}\right)\frac{P(s_1,0)}{\tilde{P}_g}+B_{21}(s_2)j_l(s_2,0)+B_{22}(s_2)j_g(s_2,0)+B_{23}(s_2)P(s_2,0)$$

(177)

$$\frac{D_{33}(s_2)}{12\Delta s}\left[-3\hat{P}(s_1)-10\hat{P}(s_2)+18\hat{P}(s_3)-6\hat{P}(s_4)+\hat{P}(s_5)\right]$$
$$+A_{31}(s_2)\hat{j}_l(s_2)+A_{32}(s_2)\hat{j}_g(s_2)+A_{33}(s_2)\hat{P}(s_2)=0 \qquad (178)$$

- Para o nó $k = 3$:

$$\frac{D_{11}(s_3)}{12\Delta s}\left[-8\hat{j}_l(s_2)+8\hat{j}_l(s_4)-\hat{j}_l(s_5)\right]+\omega\left[B_{11}(s_3)\hat{j}_l(s_3)+B_{12}(s_3)\hat{j}_g(s_3)\right]$$
$$=B_{11}(s_3)j_l(s_3,0)+B_{12}(s_3)j_g(s_3,0) \qquad (179)$$

$$\frac{\tilde{j}_g(s_3)}{12\Delta s}\left\{-\tilde{P}(s_1)\frac{\tilde{j}_{g1}}{\tilde{P}_g}\hat{P}(s_1)-8\tilde{P}(s_2)\hat{j}_g(s_2)+8\tilde{P}(s_4)\hat{j}_g(s_4)-\tilde{P}(s_5)\hat{j}_g(s_5)\right\}$$
$$+\frac{\tilde{j}_g(s_3)}{12\Delta s}\left[\tilde{j}_g(s_1)\hat{P}(s_1)-8\tilde{j}_g(s_2)\hat{P}(s_2)+8\tilde{j}_g(s_4)\hat{P}(s_4)-\tilde{j}_g(s_5)\hat{P}(s_5)\right]$$
$$-\omega\left\{\frac{\tilde{j}_g(s_3)\tilde{P}(s_1)}{12\Delta s}\left(\frac{L}{L_r}\tilde{\alpha}_p+\frac{L_e}{L_r}\right)\frac{1}{\tilde{P}_g}\right\}\hat{P}(s_1)+\omega\left[B_{21}(s_3)\hat{j}_l(s_3)+B_{22}(s_3)\hat{j}_g(s_3)+B_{23}(s_3)\hat{P}(s_3)\right]$$
$$=-\frac{\tilde{j}_g(s_3)\tilde{P}(s_1)}{12\Delta s}\left(\frac{L}{L_r}\tilde{\alpha}_p+\frac{L_e}{L_r}\right)\frac{P(s_1,0)}{\tilde{P}_g}+B_{21}(s_3)j_l(s_3,0)+B_{22}(s_3)j_g(s_3,0)+B_{23}(s_3)P(s_3,0)$$
(180)

$$\frac{D_{33}(s_3)}{12\Delta s}\left[\hat{P}(s_1)-8\hat{P}(s_2)+8\hat{P}(s_4)-\hat{P}(s_5)\right]+A_{31}(s_3)\hat{j}_l(s_3)+A_{32}(s_3)\hat{j}_g(s_3)$$
$$+A_{33}(s_3)\hat{P}(s_3)=0 \qquad (181)$$

- Para os nós $k=4,\dots,N-3$:

$$\frac{D_{11}(s_k)}{12\Delta s}\left[\hat{j}_l(s_{k-2})-8\hat{j}_l(s_{k-1})+8\hat{j}_l(s_{k+1})-\hat{j}_l(s_{k+2})\right]+\omega\left[B_{11}(s_k)\hat{j}_l(s_k)+B_{12}(s_k)\hat{j}_g(s_k)\right]$$
$$=B_{11}(s_k)j_l(s_k,0)+B_{12}(s_k)j_g(s_k,0)$$
(182)

$$\frac{\tilde{j}_g(s_k)}{12\Delta s}\left[\tilde{P}(s_{k-2})\hat{j}_g(s_{k-2})-8\tilde{P}(s_{k-1})\hat{j}_g(s_{k-1})+8\tilde{P}(s_{k+1})\hat{j}_g(s_{k+1})-\tilde{P}(s_{k+2})\hat{j}_g(s_{k+2})\right]$$
$$+\frac{\tilde{j}_g(s_k)}{12\Delta s}\left[\tilde{j}_g(s_{k-2})\hat{P}(s_{k-2})-8\tilde{j}_g(s_{k-1})\hat{P}(s_{k-1})+8\tilde{j}_g(s_{k+1})\hat{P}(s_{k+1})-\tilde{j}_g(s_{k+2})\hat{P}(s_{k+2})\right]$$
$$+\omega\left[B_{21}(s_k)\hat{j}_l(s_k)+B_{22}(s_k)\hat{j}_g(s_k)+B_{23}(s_k)\hat{P}(s_k)\right]$$
$$=B_{21}(s_k)j_l(s_k,0)+B_{22}(s_k)j_g(s_k,0)+B_{23}(s_k)P(s_k,0)$$
(183)

$$\frac{D_{33}(s_k)}{12\Delta s}\left[\hat{P}(s_{k-2})-8\hat{P}(s_{k-1})+8\hat{P}(s_{k+1})-\hat{P}(s_{k+2})\right]+A_{31}(s_k)\hat{j}_l(s_k)+A_{32}(s_k)\hat{j}_g(s_k)$$
$$+A_{33}(s_k)\hat{P}(s_k)=0$$
(184)

- Para os nós $k = N-2$:

$$\frac{D_{11}(s_{N-2})}{12\Delta s}\left[\hat{j}_l(s_{N-4}) - 8\hat{j}_l(s_{N-3}) + 8\hat{j}_l(s_{N-1}) - \hat{j}_l(s_N)\right] + \omega\left[B_{11}(s_{N-2})\hat{j}_l(s_{N-2}) + B_{12}(s_{N-2})\hat{j}_g(s_{N-2})\right]$$
$$= B_{11}(s_{N-2})j_l(s_{N-2},0) + B_{12}(s_{N-2})j_g(s_{N-2},0) \qquad (185)$$

$$\frac{\widetilde{j}_g(s_{N-2})}{12\Delta s}\left[\widetilde{P}(s_{N-4})\hat{j}_g(s_{N-4}) - 8\widetilde{P}(s_{N-3})\hat{j}_g(s_{N-3}) + 8\widetilde{P}(s_{N-1})\hat{j}_g(s_{N-1}) - \widetilde{P}(s_N)\hat{j}_g(s_N)\right]$$
$$+\frac{\widetilde{j}_g(s_{N-2})}{12\Delta s}\left[\widetilde{j}_g(s_{N-4})\hat{P}(s_{N-4}) - 8\widetilde{j}_g(s_{N-3})\hat{P}(s_{N-3}) + 8\widetilde{j}_g(s_{N-1})\hat{P}(s_{N-1})\right]$$
$$+\omega\left[B_{21}(s_{N-2})\hat{j}_l(s_{N-2}) + B_{22}(s_{N-2})\hat{j}_g(s_{N-2}) + B_{23}(s_{N-2})\hat{P}(s_{N-2})\right]$$
$$= B_{21}(s_{N-2})j_l(s_{N-2},0) + B_{22}(s_{N-2})j_g(s_{N-2},0) + B_{23}(s_{N-2})P(s_{N-2},0) \qquad (186)$$

$$\frac{D_{33}(s_{N-2})}{12\Delta s}\left[\hat{P}(s_{N-4}) - 8\hat{P}(s_{N-3}) + 8\hat{P}(s_{N-1})\right] + A_{31}(s_{N-2})\hat{j}_l(s_{N-2}) + A_{32}(s_{N-2})\hat{j}_g(s_{N-2})$$
$$+ A_{33}(s_{N-2})\hat{P}(s_{N-2}) = 0 \qquad (187)$$

- Para o nó $k = N-1$:

$$\frac{D_{11}(s_{N-1})}{12\Delta s}\left[-\hat{j}_l(s_{N-4}) + 6\hat{j}_l(s_{N-3}) - 18\hat{j}_l(s_{N-2}) + 10\hat{j}_l(s_{N-1}) + 3\hat{j}_l(s_N)\right]$$
$$+\omega\left[B_{11}(s_{N-1})\hat{j}_l(s_{N-1}) + B_{12}(s_{N-1})\hat{j}_g(s_{N-1})\right] = B_{11}(s_{N-1})j_l(s_{N-1},0) + B_{12}(s_{N-1})j_g(s_{N-1},0) \qquad (188)$$

$$\frac{\widetilde{j}_g(s_{N-1})}{12\Delta s}\left[-\widetilde{P}(s_{N-4})\hat{j}_g(s_{N-4}) + 6\widetilde{P}(s_{N-3})\hat{j}_g(s_{N-3}) - 18\widetilde{P}(s_{N-2})\hat{j}_g(s_{N-2}) + 10\widetilde{P}(s_{N-1})\hat{j}_g(s_{N-1})\right.$$
$$\left.+3\widetilde{P}(s_N)\hat{j}_g(s_N)\right] + \frac{\widetilde{j}_g(s_{N-1})}{12\Delta s}\left[-\widetilde{j}_g(s_{N-4})\hat{P}(s_{N-4}) + 6\widetilde{j}_g(s_{N-3})\hat{P}(s_{N-3}) - 18\widetilde{j}_g(s_{N-2})\hat{P}(s_{N-2})\right.$$
$$\left.+10\widetilde{j}_g(s_{N-1})\hat{P}(s_{N-1})\right] + \omega\left[B_{21}(s_{N-1})\hat{j}_l(s_{N-1}) + B_{22}(s_{N-1})\hat{j}_g(s_{N-1}) + B_{23}(s_{N-1})\hat{P}(s_{N-1})\right]$$
$$= B_{21}(s_{N-1})j_l(s_{N-1},0) + B_{22}(s_{N-1})j_g(s_{N-1},0) + B_{23}(s_{N-1})P(s_{N-1},0) \qquad (189)$$

$$\frac{D_{33}(s_{N-1})}{12\Delta s}\left[-\hat{P}(s_{N-4})+6\hat{P}(s_{N-3})-18\hat{P}(s_{N-2})+10\hat{P}(s_{N-1})\right]+A_{31}(s_{N-1})\hat{j}_l(s_{N-1})$$
$$+A_{32}(s_{N-1})\hat{j}_g(s_{N-1})+A_{33}(s_{N-1})\hat{P}(s_{N-1})=0 \tag{190}$$

- Para o nó $k=N$:

$$\frac{D_{11}(s_N)}{12\Delta s}\left[3\hat{j}_l(s_{N-4})-16\hat{j}_l(s_{N-3})+36\hat{j}_l(s_{N-2})-48\hat{j}_l(s_{N-1})+25\hat{j}_l(s_N)\right]$$
$$+\omega\left[B_{11}(s_N)\hat{j}_l(s_N)+B_{12}(s_N)\hat{j}_g(s_N)\right]=B_{11}(s_N)j_l(s_N,0)+B_{12}(s_N)j_g(s_N,0) \tag{191}$$

$$\frac{\tilde{j}_g(s_N)}{12\Delta s}\left[3\tilde{P}(s_{N-4})\hat{j}_g(s_{N-4})-16\tilde{P}(s_{N-3})\hat{j}_g(s_{N-3})+36\tilde{P}(s_{N-2})\hat{j}_g(s_{N-2})-48\tilde{P}(s_{N-1})\hat{j}_g(s_{N-1})\right.$$
$$\left.+25\tilde{P}(s_N)\hat{j}_g(s_N)\right]+\frac{\tilde{j}_g(s_N)}{12\Delta s}\left[3\tilde{j}_g(s_{N-4})\hat{P}(s_{N-4})-16\tilde{j}_g(s_{N-3})\hat{P}(s_{N-3})+36\tilde{j}_g(s_{N-2})\hat{P}(s_{N-2})\right.$$
$$\left.-48\tilde{j}_g(s_{N-1})\hat{P}(s_{N-1})\right]+\omega\left[B_{21}(s_N)\hat{j}_l(s_N)+B_{22}(s_N)\hat{j}_g(s_N)\right]=B_{21}(s_N)j_l(s_N,0)+B_{22}(s_N)j_g(s_N,0) \tag{192}$$

O resultado da discretização acima via diferenças finitas é uma forma discreta para o operador dado pelo sistema de equações (169) mais as condições de contorno (167), (168) e (170):

$$\left(\begin{bmatrix} K_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ 0 & 0 & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix}+\omega\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & 0 & 0 \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ 0 & 0 & M_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} \{\hat{j}_l\} \\ \{\hat{j}_g\} \\ \hat{P}_1 \\ \{\hat{P}\} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \\ F_3 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{193}$$

Os blocos K_{ij} e M_{ij}, $i,j=1,2$ têm dimensão $(N-1)\times(N-1)$; os blocos K_{23} e M_{23} têm dimensão $(N-1)\times 1$; os blocos K_{24} e M_{24} têm dimensão $(N-1)\times(N-2)$; os blocos K_{33} e M_{33} têm dimensão 1×1; o bloco K_{34} tem dimensão $1\times(N-2)$; os blocos K_{4j}, $j=1,2$ têm dimensão $(N-2)\times(N-1)$; o bloco K_{43} tem dimensão $(N-2)\times 1$; e o bloco K_{44} tem dimensão $(N-2)\times(N-2)$.

Os vetores $\{\hat{j}_l\}$ e $\{\hat{j}_g\}$ têm dimensão $(N-1)\times 1$; o vetor $\hat{P}_1$ tem dimensão 1×1 e o vetor $\{\hat{P}\}$ tem dimensão $(N-2)\times 1$. Note que:

$$\{\hat{j}_l\} = \begin{Bmatrix} \hat{j}_l(2) \\ \hat{j}_l(3) \\ \ldots \\ \hat{j}_l(N-1) \\ \hat{j}_l(N) \end{Bmatrix}, \quad \{\hat{j}_g\} = \begin{Bmatrix} \hat{j}_g(2) \\ \hat{j}_g(3) \\ \ldots \\ \hat{j}_g(N-1) \\ \hat{j}_g(N) \end{Bmatrix}, \quad \hat{P}_1 = \hat{P}(1) \quad \text{e} \quad \{\hat{P}\} = \begin{Bmatrix} \hat{P}(2) \\ \hat{P}(3) \\ \ldots \\ \hat{P}(N-2) \\ \hat{P}(N-1) \end{Bmatrix} \tag{194}$$

A equação acima deixa bem claro que os vetores $\{\hat{j}_l\}$ e $\{\hat{j}_g\}$ têm dimensão $(N-1)$ e que o vetor $\{\hat{P}\}$ tem dimensão $(N-2)$, mas os valores a serem determinados para a pressão $\hat{P}$ vão do nó 1 até o nó $N-1$, enquanto os valores a serem determinados para $\{\hat{j}_l\}$ e $\{\hat{j}_g\}$ vão do nó 2 até o nó N.

A primeira linha de blocos na equação matricial (193) representa a discretização da equação de continuidade para o líquido no *riser* (matrizes K_{1j} e M_{1j}). A segunda linha de blocos na equação matricial (193) representa a discretização da equação de continuidade para o gás no *riser* (matrizes K_{2j} e M_{2j}). A terceira linha na equação matricial (193) representa a equação do momento da mistura no primeiro nó da discretização do *riser*, e a quarta linha dessa equação matricial representa a discretização da equação do momento para a mistura ao longo do *riser*. A última linha da equação matricial (193) será utilizada para eliminar o vetor de pressão e reduzir a dimensão do problema de autovalores/vetores associado a essa equação algébrica. A seguir, são listados os elementos não nulos dos blocos K_{ij} e M_{ij}, $i,j=1,\ldots,4$.

$$(K_{11})_{1,1} = -10\frac{D_{11}(s_2)}{12\Delta s} \tag{195}$$

$$(K_{11})_{1,2} = 18\frac{D_{11}(s_2)}{12\Delta s} \tag{196}$$

$$(K_{11})_{1,3} = -6\frac{D_{11}(s_2)}{12\Delta s} \tag{197}$$

$$(K_{11})_{1,4} = \frac{D_{11}(s_2)}{12\Delta s} \tag{198}$$

$$(K_{11})_{2,1} = -8\frac{D_{11}(s_3)}{12\Delta s} \tag{199}$$

$$(K_{11})_{2,3} = 8\frac{D_{11}(s_3)}{12\Delta s} \tag{200}$$

$$(K_{11})_{2,4} = -\frac{D_{11}(s_3)}{12\Delta s} \tag{201}$$

$$(K_{11})_{j,j-2} = \frac{D_{11}(s_{j+1})}{12\Delta s}; \quad j = 3, ..., N-3 \tag{202}$$

$$(K_{11})_{j,j-1} = -8\frac{D_{11}(s_{j+1})}{12\Delta s}; \quad j = 3, ..., N-3 \tag{203}$$

$$(K_{11})_{j,j+1} = 8\frac{D_{11}(s_{j+1})}{12\Delta s}; \quad j = 3, ..., N-3 \tag{204}$$

$$(K_{11})_{j,j+2} = -\frac{D_{11}(s_{j+1})}{12\Delta s}; \quad j = 3, ..., N-3 \tag{205}$$

$$(K_{11})_{N-2,N-5} = -\frac{D_{11}(s_{N-1})}{12\Delta s} \tag{206}$$

$$(K_{11})_{N-2,N-4} = 6\frac{D_{11}(s_{N-1})}{12\Delta s} \tag{207}$$

$$(K_{11})_{N-2,N-3} = -18\frac{D_{11}(s_{N-1})}{12\Delta s} \tag{208}$$

$$(K_{11})_{N-2,N-2} = 10\frac{D_{11}(s_{N-1})}{12\Delta s} \tag{209}$$

$$(K_{11})_{N-2,N-1} = 3\frac{D_{11}(s_{N-1})}{12\Delta s} \tag{210}$$

$$(K_{11})_{N-1,N-5} = 3\frac{D_{11}(s_N)}{12\Delta s} \tag{211}$$

$$(K_{11})_{N-1,N-4} = -16\frac{D_{11}(s_N)}{12\Delta s} \tag{212}$$

$$(K_{11})_{N-1,N-3} = 36\frac{D_{11}(s_N)}{12\Delta s} \tag{213}$$

$$(K_{11})_{N-1,N-2} = -48\frac{D_{11}(s_N)}{12\Delta s} \tag{214}$$

$$(K_{11})_{N-1,N-1} = 25\frac{D_{11}(s_N)}{12\Delta s} \tag{215}$$

$$(K_{22})_{1,1} = -10\frac{\tilde{j}_g(s_2)\tilde{P}(s_2)}{12\Delta s} \tag{216}$$

$$(K_{22})_{1,2} = 18\frac{\tilde{j}_g(s_2)\tilde{P}(s_3)}{12\Delta s} \tag{217}$$

$$(K_{22})_{1,3} = -6\frac{\tilde{j}_g(s_2)\tilde{P}(s_4)}{12\Delta s} \tag{218}$$

$$(K_{22})_{1,4} = \frac{\tilde{j}_g(s_2)\tilde{P}(s_5)}{12\Delta s} \tag{219}$$

$$(K_{22})_{2,1} = -8\frac{\tilde{j}_g(s_3)\tilde{P}(s_2)}{12\Delta s} \tag{220}$$

$$(K_{22})_{2,3} = 8\frac{\tilde{j}_g(s_3)\tilde{P}(s_4)}{12\Delta s} \tag{221}$$

$$(K_{22})_{2,4} = -\frac{\tilde{j}_g(s_3)\tilde{P}(s_5)}{12\Delta s} \tag{222}$$

$$(K_{22})_{j,j-2} = \frac{\tilde{j}_g(s_{j+1})\tilde{P}(s_{j-1})}{12\Delta s}; \quad j = 3, ..., N-3 \tag{223}$$

$$(K_{22})_{j,j-1} = -8\frac{\tilde{j}_g(s_{j+1})\tilde{P}(s_j)}{12\Delta s}; \quad j = 3, ..., N-3 \tag{224}$$

$$(K_{22})_{j,j+1} = 8\frac{\tilde{j}_g(s_{j+1})\tilde{P}(s_{j+2})}{12\Delta s}; \quad j = 3, ..., N-3 \tag{225}$$

$$(K_{22})_{j,j+2} = -\frac{\tilde{j}_g(s_{j+1})\tilde{P}(s_{j+3})}{12\Delta s}; \quad j = 3, ..., N-3 \tag{226}$$

$$(K_{22})_{N-2,N-5} = -\frac{\tilde{j}_g(s_{N-1})\tilde{P}(s_{N-4})}{12\Delta s} \tag{227}$$

$$(K_{22})_{N-2,N-4} = 6\frac{\tilde{j}_g(s_{N-1})\tilde{P}(s_{N-3})}{12\Delta s} \tag{228}$$

$$(K_{22})_{N-2,N-3} = -18\frac{\tilde{j}_g(s_{N-1})\tilde{P}(s_{N-2})}{12\Delta s} \tag{229}$$

$$(K_{22})_{N-2,N-2} = 10\frac{\tilde{j}_g(s_{N-1})\tilde{P}(s_{N-1})}{12\Delta s} \tag{230}$$

$$(K_{22})_{N-2,N-1} = 3\frac{\tilde{j}_g(s_{N-1})\tilde{P}(s_N)}{12\Delta s} \tag{231}$$

$$(K_{22})_{N-1,N-5} = 3\frac{\widetilde{j}_g(s_N)\widetilde{P}(s_{N-4})}{12\Delta s} \tag{232}$$

$$(K_{22})_{N-1,N-4} = -16\frac{\widetilde{j}_g(s_N)\widetilde{P}(s_{N-3})}{12\Delta s} \tag{233}$$

$$(K_{22})_{N-1,N-3} = 36\frac{\widetilde{j}_g(s_N)\widetilde{P}(s_{N-2})}{12\Delta s} \tag{234}$$

$$(K_{22})_{N-1,N-2} = -48\frac{\widetilde{j}_g(s_N)\widetilde{P}(s_{N-1})}{12\Delta s} \tag{235}$$

$$(K_{22})_{N-1,N-1} = 25\frac{\widetilde{j}_g(s_N)\widetilde{P}(s_N)}{12\Delta s} \tag{236}$$

$$(K_{23})_{1,1} = -3\frac{\widetilde{j}_g(s_2)\widetilde{j}_g(s_1)}{12\Delta s} + 3\frac{\widetilde{j}_g(s_2)\widetilde{j}_{g1}}{12\Delta s}\frac{\widetilde{P}(s_1)}{\widetilde{P}_g} \tag{237}$$

$$(K_{23})_{2,1} = \frac{\widetilde{j}_g(s_3)\widetilde{j}_g(s_1)}{12\Delta s} - \frac{\widetilde{j}_g(s_3)\widetilde{j}_{g1}}{12\Delta s}\frac{\widetilde{P}(s_1)}{\widetilde{P}_g} \tag{238}$$

$$(K_{24})_{1,1} = -10\frac{\widetilde{j}_g(s_2)\widetilde{j}_g(s_2)}{12\Delta s} \tag{239}$$

$$(K_{24})_{1,2} = 18\frac{\widetilde{j}_g(s_2)\widetilde{j}_g(s_3)}{12\Delta s} \tag{240}$$

$$(K_{24})_{1,3} = -6\frac{\widetilde{j}_g(s_2)\widetilde{j}_g(s_4)}{12\Delta s} \tag{241}$$

$$(K_{24})_{1,4} = \frac{\widetilde{j}_g(s_2)\widetilde{j}_g(s_5)}{12\Delta s} \tag{242}$$

$$(K_{24})_{2,1} = -8\frac{\widetilde{j}_g(s_3)\widetilde{j}_g(s_2)}{12\Delta s} \tag{243}$$

$$(K_{24})_{2,3} = 8\frac{\widetilde{j}_g(s_3)\widetilde{j}_g(s_4)}{12\Delta s} \tag{244}$$

$$(K_{24})_{2,4} = -\frac{\widetilde{j}_g(s_3)\widetilde{j}_g(s_5)}{12\Delta s} \tag{245}$$

$$(K_{24})_{j,j-2} = \frac{\widetilde{j}_g(s_{j+1})\widetilde{j}_g(s_{j-1})}{12\Delta s}; \quad j = 3, \ldots, N-4 \tag{246}$$

$$(K_{24})_{j,j-1} = -8\frac{\widetilde{j}_g(s_{j+1})\widetilde{j}_g(s_j)}{12\Delta s}; \quad j = 3, \ldots, N-4 \tag{247}$$

$$(K_{24})_{j,j+1} = 8\frac{\tilde{j}_g(s_{j+1})\tilde{j}_g(s_{j+2})}{12\Delta s}\ ; \quad j = 3, ..., N-4 \tag{248}$$

$$(K_{24})_{j,j+2} = -\frac{\tilde{j}_g(s_{j+1})\tilde{j}_g(s_{j+3})}{12\Delta s}\ ; \quad j = 3, ..., N-4 \tag{249}$$

$$(K_{24})_{N-3,N-5} = \frac{\tilde{j}_g(s_{N-2})\tilde{j}_g(s_{N-4})}{12\Delta s} \tag{250}$$

$$(K_{24})_{N-3,N-4} = -8\frac{\tilde{j}_g(s_{N-2})\tilde{j}_g(s_{N-3})}{12\Delta s} \tag{251}$$

$$(K_{24})_{N-3,N-2} = 8\frac{\tilde{j}_g(s_{N-2})\tilde{j}_g(s_{N-1})}{12\Delta s} \tag{252}$$

$$(K_{24})_{N-2,N-5} = -\frac{\tilde{j}_g(s_{N-1})\tilde{j}_g(s_{N-4})}{12\Delta s} \tag{253}$$

$$(K_{24})_{N-2,N-4} = 6\frac{\tilde{j}_g(s_{N-1})\tilde{j}_g(s_{N-3})}{12\Delta s} \tag{254}$$

$$(K_{24})_{N-2,N-3} = -18\frac{\tilde{j}_g(s_{N-1})\tilde{j}_g(s_{N-2})}{12\Delta s} \tag{255}$$

$$(K_{24})_{N-2,N-2} = 10\frac{\tilde{j}_g(s_{N-1})\tilde{j}_g(s_{N-1})}{12\Delta s} \tag{256}$$

$$(K_{24})_{N-1,N-5} = 3\frac{\tilde{j}_g(s_N)\tilde{j}_g(s_{N-4})}{12\Delta s} \tag{257}$$

$$(K_{24})_{N-1,N-4} = -16\frac{\tilde{j}_g(s_N)\tilde{j}_g(s_{N-3})}{12\Delta s} \tag{258}$$

$$(K_{24})_{N-1,N-3} = 36\frac{\tilde{j}_g(s_N)\tilde{j}_g(s_{N-2})}{12\Delta s} \tag{259}$$

$$(K_{24})_{N-1,N-2} = -48\frac{\tilde{j}_g(s_N)\tilde{j}_g(s_{N-1})}{12\Delta s} \tag{260}$$

$$(K_{33})_{1,1} = -25\frac{D_{33}(s_1)}{12\Delta s} - A_{32}(s_1)\frac{\tilde{j}_{g1}}{\tilde{P}_g} + A_{33}(s_1) \tag{261}$$

$$(K_{34})_{1,1} = 48\frac{D_{33}(s_1)}{12\Delta s} \tag{262}$$

$$(K_{34})_{1,2} = -36\frac{D_{33}(s_1)}{12\Delta s} \tag{263}$$

$$(K_{34})_{1,3} = 16\frac{D_{33}(s_1)}{12\Delta s} \tag{264}$$

$$(K_{34})_{1,4} = -3\frac{D_{33}(s_1)}{12\Delta s} \tag{265}$$

$$(K_{41})_{j,j} = A_{31}(s_{j+1})\,; \quad j = 1, ..., N-2 \tag{266}$$

$$(K_{42})_{j,j} = A_{32}(s_{j+1})\,; \quad j = 1, ..., N-2 \tag{267}$$

$$(K_{43})_{1,1} = -3\frac{D_{33}(s_2)}{12\Delta s} \tag{268}$$

$$(K_{43})_{2,1} = \frac{D_{33}(s_3)}{12\Delta s} \tag{269}$$

$$(K_{44})_{1,1} = -10\frac{D_{33}(s_2)}{12\Delta s} + A_{33}(s_2) \tag{270}$$

$$(K_{44})_{1,2} = 18\frac{D_{33}(s_2)}{12\Delta s} \tag{271}$$

$$(K_{44})_{1,3} = -6\frac{D_{33}(s_2)}{12\Delta s} \tag{272}$$

$$(K_{44})_{1,4} = \frac{D_{33}(s_2)}{12\Delta s} \tag{273}$$

$$(K_{44})_{2,1} = -8\frac{D_{33}(s_3)}{12\Delta s} \tag{274}$$

$$(K_{44})_{2,2} = A_{33}(s_3) \tag{275}$$

$$(K_{44})_{2,3} = 8\frac{D_{33}(s_3)}{12\Delta s} \tag{276}$$

$$(K_{44})_{2,4} = -\frac{D_{33}(s_3)}{12\Delta s} \tag{277}$$

$$(K_{44})_{j,j-2} = \frac{D_{33}(s_{j+1})}{12\Delta s}\,; \quad j = 3, ..., N-4 \tag{278}$$

$$(K_{44})_{j,j-1} = -8\frac{D_{33}(s_{j+1})}{12\Delta s}\,; \quad j = 3, ..., N-4 \tag{279}$$

$$(K_{44})_{j,j} = A_{33}(s_{j+1})\,; \quad j = 3, ..., N-4 \tag{280}$$

$$(K_{44})_{j,j+1} = 8\frac{D_{33}(s_{j+1})}{12\Delta s}\,; \quad j = 3, ..., N-4 \tag{281}$$

$$(K_{44})_{j,j+2} = -\frac{D_{33}(s_{j+1})}{12\Delta s}\,; \quad j = 3, ..., N-4 \tag{282}$$

$$(K_{44})_{N-3,N-5} = \frac{D_{33}(s_{N-2})}{12\Delta s} \tag{283}$$

$$(K_{44})_{N-3,N-4} = -8\frac{D_{33}(s_{N-2})}{12\Delta s} \tag{284}$$

$$(K_{44})_{N-3,N-3} = A_{33}(s_{N-2}) \tag{285}$$

$$(K_{44})_{N-3,N-2} = 8\frac{D_{33}(s_{N-2})}{12\Delta s} \tag{286}$$

$$(K_{44})_{N-2,N-5} = -\frac{D_{33}(s_{N-1})}{12\Delta s} \tag{287}$$

$$(K_{44})_{N-2,N-4} = 6\frac{D_{33}(s_{N-1})}{12\Delta s} \tag{288}$$

$$(K_{44})_{N-2,N-3} = -18\frac{D_{33}(s_{N-1})}{12\Delta s} \tag{289}$$

$$(K_{44})_{N-2,N-2} = 10\frac{D_{33}(s_{N-1})}{12\Delta s} + A_{33}(s_{N-1}) \tag{290}$$

$$(M_{11})_{j,j} = B_{11}(s_{j+1})\,; \quad j = 1, ..., N-1 \tag{291}$$

$$(M_{12})_{j,j} = B_{12}(s_{j+1})\,; \quad j = 1, ..., N-1 \tag{292}$$

$$(M_{21})_{j,j} = B_{21}(s_{j+1})\,; \quad j = 1, ..., N-1 \tag{293}$$

$$(M_{22})_{j,j} = B_{22}(s_{j+1})\,; \quad j = 1, ..., N-1 \tag{294}$$

$$(M_{23})_{1,1} = 3\frac{\tilde{j}_g(s_2)}{12\Delta s}\frac{\tilde{P}(s_1)}{\tilde{P}_g}\left(\frac{L}{L_r}\tilde{\alpha}_p + \frac{L_e}{L_r}\right) \tag{295}$$

$$(M_{23})_{2,1} = -\frac{\tilde{j}_g(s_3)}{12\Delta s}\frac{\tilde{P}(s_1)}{\tilde{P}_g}\left(\frac{L}{L_r}\tilde{\alpha}_p + \frac{L_e}{L_r}\right) \tag{296}$$

$$(M_{24})_{j,j} = B_{23}(s_{j+1})\,; \quad j = 1, ..., N-2 \tag{297}$$

$$(M_{33})_{1,1} = -A_{32}(s_1)\left(\frac{L}{L_r}\tilde{\alpha}_p + \frac{L_e}{L_r}\right)\frac{1}{\tilde{P}_g} \tag{298}$$

A seguir, são especificados os elementos não nulos dos vetores $\{F_j\}$.

$$(F_1)_1 = B_{11}(s_2)j_l(s_2,0) + B_{12}(s_2)j_g(s_2,0) \tag{299}$$

$$(F_1)_j = B_{11}(s_{j+1})j_l(s_{j+1},0) + B_{12}(s_{j+1})j_g(s_{j+1},0)\,; \quad j = 2, ..., N-1 \tag{300}$$

$$(F_2)_1 = 3\frac{\widetilde{j}_g(s_2)\widetilde{P}(s_1)}{12\Delta s}\left(\frac{L}{L_r}\widetilde{\alpha}_p + \frac{L_e}{L_r}\right)\frac{P(s_1,0)}{\widetilde{P}_g} + B_{21}(s_2)j_l(s_2,0)$$
$$+ B_{22}(s_2)j_g(s_2,0) + B_{23}(s_2)P(s_2,0) \tag{301}$$

$$(F_2)_2 = -\frac{\widetilde{j}_g(s_3)\widetilde{P}(s_1)}{12\Delta s}\left(\frac{L}{L_r}\widetilde{\alpha}_p + \frac{L_e}{L_r}\right)\frac{P(s_1,0)}{\widetilde{P}_g} + B_{21}(s_3)j_l(s_3,0)$$
$$+ B_{22}(s_3)j_g(s_3,0) + B_{23}(s_3)P(s_3,0) \tag{302}$$

$$(F_2)_j = B_{21}(s_{j+1})j_l(s_{j+1},0) + B_{22}(s_{j+1})j_g(s_{j+1},0) + B_{23}(s_{j+1})P(s_{j+1},0)\;;\; j = 3, ..., N-1 \tag{303}$$

$$F_3 = (F_3)_1 = -A_{32}(s_1)\left(\frac{L}{L_r}\widetilde{\alpha}_p + \frac{L_e}{L_r}\right)\frac{P(s_1,0)}{\widetilde{P}_g} \tag{304}$$

A matriz de massa [*M*] é singular na equação (193). Como tentativa de evitar tal singularidade, pode-se reescrever a “quarta” linha do sistema de equações (193) na seguinte forma:

$$\{\hat{P}\} = -K_{44}^{-1}(K_{41}\{\hat{j}_l\} + K_{42}\{\hat{j}_g\} + K_{43}\hat{P}_1), \tag{305}$$

onde K_{44}^{-1} é a matriz inversa da matriz K_{44}. Substituindo-se a equação matricial (305) na equação (193), pode-se eliminar o vetor $\{\hat{P}\}$ (eliminando $N-2$ equações), resultando em um problema de autovalores de dimensão $2N-1$ dado por:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & 0 & 0 \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \{\hat{j}_l\} \\ \{\hat{j}_g\} \\ \hat{P}_1 \end{Bmatrix} + \omega\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ 0 & 0 & H_{33} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \{\hat{j}_l\} \\ \{\hat{j}_g\} \\ \hat{P}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \\ F_3 \end{Bmatrix} \tag{306}$$

onde:

$$G_{11} = K_{11} \tag{307}$$

$$G_{21} = -K_{24}K_{44}^{-1}K_{41} \tag{308}$$

$$G_{22} = K_{22} - K_{24}K_{44}^{-1}K_{42} \tag{309}$$

$$G_{23} = K_{23} - K_{24}K_{44}^{-1}K_{43} \tag{310}$$

$$G_{31} = -K_{34}K_{44}^{-1}K_{41} \tag{311}$$

$$G_{32} = -K_{34}K_{44}^{-1}K_{42} \tag{312}$$

$$G_{33} = K_{33} - K_{34}K_{44}^{-1}K_{43} \tag{313}$$

$$H_{11} = M_{11} \tag{314}$$

$$H_{12} = M_{12} \tag{315}$$

$$H_{21} = M_{21} - M_{24} K_{44}^{-1} K_{41} \tag{316}$$

$$H_{22} = M_{22} - M_{24} K_{44}^{-1} K_{42} \tag{317}$$

$$H_{23} = M_{23} - M_{24} K_{44}^{-1} K_{43} \tag{318}$$

$$H_{33} = M_{33} \tag{319}$$

Para determinar a estabilidade do estado estacionário, basta determinar os autovalores do problema de autovalores/vetores

$$\left(\begin{bmatrix} G_{11} & 0 & 0 \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ 0 & 0 & H_{33} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{\hat{j}_l\} \\ \{\hat{j}_g\} \\ \hat{P}_1 \end{Bmatrix} = 0 \tag{320}$$

onde ω_k , $k = 1,...,2N-1$ são os autovalores.

Como as matrizes $[G]$ e $[H]$ não são simétricas, os autovalores ω_k são, em geral, números complexos do tipo $\omega_k = \sigma_k + i\theta_k$. Se $\sigma_k < 0$, a solução tende para zero quando $t \to \infty$ e, portanto, perturbações do estado estacionário desaparecem com o tempo. Neste caso, o estado estacionário será estável. Se ao menos um $\sigma_k > 0$, a solução cresce quando $t \to \infty$, de modo que perturbações do estado estacionário crescem com o tempo. Neste caso, o estado estacionário será instável.

De acordo com o que foi exposto, basta calcular o autovalor de maior parte real do problema de autovalores/vetores, dado pela eq.(320), para determinar se o estado estacionário é instável ou não. Para cada configuração de parâmetros do sistema, obtém-se um estado estacionário (ver seções 7.1.2 a 7.1.4) e é possível determinar se este estado estacionário é instável ou não conforme o que foi descrito acima. A análise de estabilidade linear do sistema *pipeline-riser* consiste em determinar, no espaço de parâmetros do sistema, a região na qual o estado estacionário é instável e a região onde o estado estacionário é estável, bem como determinar a fronteira entre estas duas regiões. Esta fronteira pode ser obtida buscando-se a superfície onde a parte real do autovalor de maior parte real do problema de autovalores/vetores, dado pela eq.(320), é nula ($\sigma_{k,MAX} = 0$).

10.1 Exercício numérico – Regiões de Estabilidade e Instabilidade no Espaço de Parâmetros

O exercício numérico a ser realizado para se determinar as regiões no espaço de parâmetros do sistema onde o estado estacionário é estável ou instável consiste em:

1. Definir quais os parâmetros a serem considerados e/ou relevantes.
2. Para cada configuração de parâmetros considerada, realizar a análise de estabilidade do estado estacionário conforme descrito no capítulo 10. Isto consiste em obter:

- O estado estacionário (ver seção 1.3.2 de [14]);
- As matrizes $[G]$ e $[H]$ definidas na seção anterior;
- Avaliar o autovalor de maior parte real do problema de autovalores/vetores, dado pela eq.(320). Caso este autovalor tenha parte real positiva, o estado estacionário é instável; caso a parte real seja negativa, o estado estacionário será estável; e se a parte real for nula, a configuração de parâmetros considerada está na fronteira entre as regiões de estabilidade e instabilidade.

11 ESTUDOS NUMÉRICOS DE ESTABILIDADE

As curvas de estabilidade numérica podem ser obtidas fixando-se um valor de vazão de líquido Q_{l0} e variando a vazão de gás $\dot{m}_{g0}$ em incrementos até passar da condição instável a estável.

A Figura 32 mostra um mapa de estabilidade retirado da referência [1], correspondente a uma pressão no separador (topo do *riser*) de $P_s = 2\ bar$. A curva de estabilidade foi obtida segundo o método descrito no parágrafo anterior. Nesta situação, repete-se o procedimento descrito com um incremento igual à metade do anterior até atingir convergência no valor de vazão mássica de gás na fronteira de estabilidade.

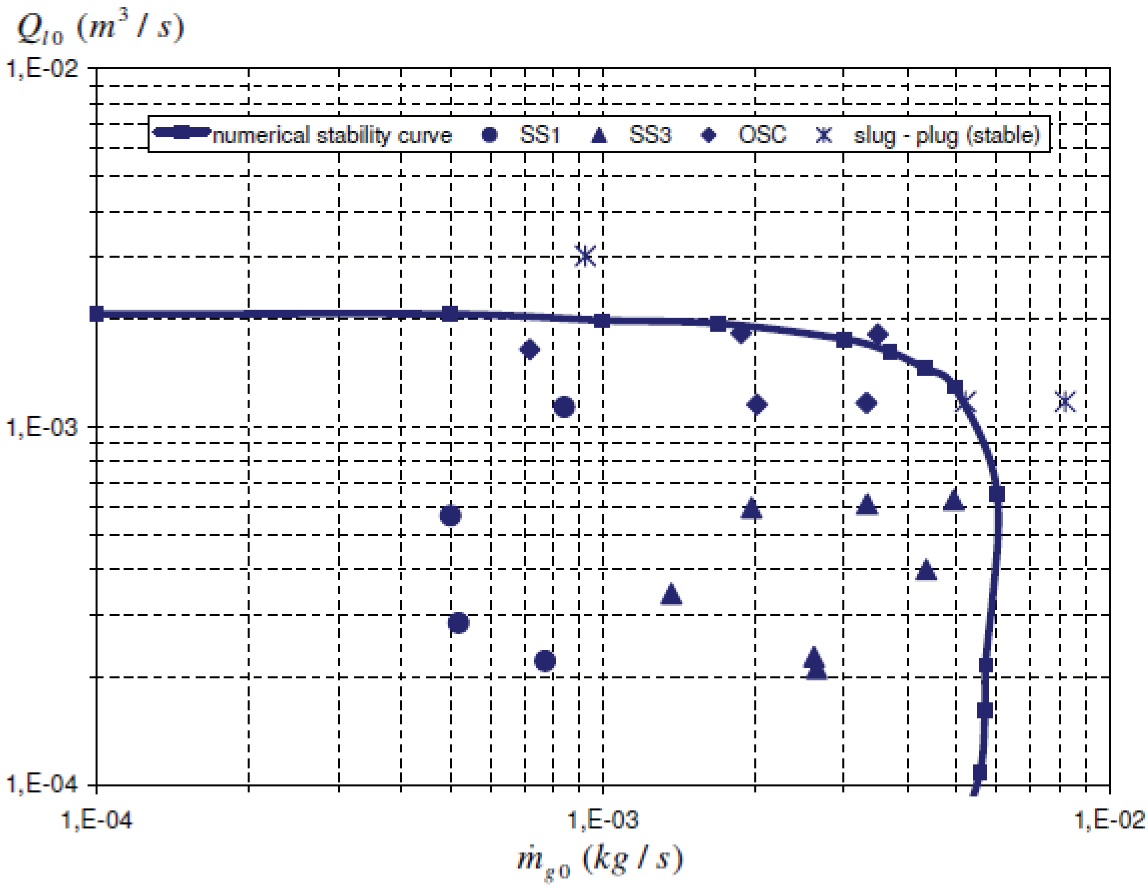

Figura 32 - Mapa de estabilidade para P_s = 2 bar. [1]

A construção da curva de estabilidade expressa na Figura 32 utilizando o programa computacional desenvolvido por Baliño em [1] resulta em uma tarefa muito trabalhosa. Para a construção da curva foram encontrados 13 pontos nela contidos e, então, fez-se uma interpolação entre eles. Para se chegar aos 13 pontos que definem a curva, foi necessária mais de uma centena de simulações de longa duração, a fim de se alcançar a precisão desejada.

A construção da curva de estabilidade pode ser realizada de maneira mais econômica, do ponto de vista computacional, utilizando a teoria de estabilidade linear e a análise baseada no espectro de autovalores. Os resultados obtidos utilizando o programa computacional aqui desenvolvido podem ser utilizados para validar os resultados da teoria de estabilidade linear e/ou de formas simplificadas dela que dêem origem a expressões analíticas de critérios de estabilidade.

12 MÉTODO DE ARNOLDI COM REINÍCIO IMPLÍCITO

Conforme observado no capítulo 10, a matriz de massa [M] é singular na eq.(193) (seu determinante é nulo). Como tentativa de eliminar esta singularidade, eliminou-se o vetor $\{\hat{P}\}$ via eq.(305) resultando em um problema de autovalores dado pela equação (320):

$$\left(\begin{bmatrix} G_{11} & 0 & 0 \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ 0 & 0 & H_{33} \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} \{\hat{j}_l\} \\ \{\hat{j}_g\} \\ \hat{P}_1 \end{Bmatrix} = 0 \qquad (320)$$

No entanto, observou-se que a matriz [H] do problema acima também apresenta tal singularidade e a matriz [H] não pode ser invertida. Além disso, como [G] e [H] são matrizes não simétricas, o cálculo dos autovalores ω que caracterizam o problema não pode ser realizado de forma direta através de $[-H^{-1}G]\cdot\begin{Bmatrix} \{\hat{j}_l\} \\ \{\hat{j}_g\} \\ \{\hat{P}\} \end{Bmatrix} = \omega \begin{Bmatrix} \{\hat{j}_l\} \\ \{\hat{j}_g\} \\ \{\hat{P}\} \end{Bmatrix}$.

Neste trabalho, a análise da estabilidade hidrodinâmica do estado estacionário será realizada utilizando o Método de Arnoldi com Reinício Implícito (IRAM) ([19]), já implementado no *Matlab* através do pacote ARPACK.

Através deste método iterativo, o espectro de autovalores do problema é capturado por partes, podendo ser realizadas buscas por autovalores próximos a valores σ de interesse com as seguintes características:

- ‘lm’ - autovalores de maior módulo (*largest magnitude*);
- ‘sm’ - autovalores de menor módulo (*smallest magnitude*);
- ‘lr’ - autovalores de maior parte real (*largest real part*);
- ‘sr’ - autovalores de menor parte real (*smallest real part*);
- ‘li’ - autovalores de maior parte imaginária (*largest imaginary part*);
- ‘si’ - autovalores de menor parte imaginária (*smallest imaginary part*).

Seja o seguinte problema de autovalores generalizado:

$$G \cdot x = \lambda \cdot H \cdot x \qquad (321)$$

A seguinte transformação espectral pode ser realizada:

$$(G-\sigma \cdot H)\cdot x=(\lambda-\sigma)\cdot H\cdot x \quad \Rightarrow \quad H^{-1}(G-\sigma \cdot H)\cdot x=(\lambda-\sigma)\cdot x$$

$$\Rightarrow \quad (G-\sigma \cdot H)^{-1}\cdot H\cdot x=nu\cdot x \tag{322}$$

onde $nu=\dfrac{1}{(\lambda-\sigma)}$.

Assim, o método consiste em se determinar parte dos autovalores através do problema descrito pela eq.(322), onde o valor de σ deve ser escolhido convenientemente. Os autovalores então são dados por:

$$\lambda=\sigma+\frac{1}{nu} \tag{323}$$

Para implementar a estratégia acima, é necessário realizar a decomposição LU da matriz $(G-\sigma \cdot H)$. A decomposição LU expressa uma matriz A qualquer como produto de uma permutação de uma matriz triangular inferior L por uma matriz triangular superior U:

$$A=LU \tag{324}$$

Fazendo $C=(G-\sigma \cdot H)^{-1}H$ e $y=C\cdot x$, o seguinte procedimento iterativo deve ser realizado para o cálculo dos autovalores:

1 – Partir de um autovetor $x = v_0$;

2 - Realizar a decomposição LU de $(G-\sigma \cdot H)$. A função **lu** do *Matlab* fornece as matrizes L e U para uma matriz qualquer fornecida;

3 – Determinar u tal que $u = H\cdot x$;

4 – Resolver o sistema $L\cdot d = u$ para d ;

5 – Resolver o sistema $U\cdot y = d$ para y ;

6 – Resolver o sistema $nu\cdot x = y$ para nu;

7 – Verificar o critério de convergência adotado (ver [19]). Se o critério não for satisfeito, refina-se o v_0 através de uma combinação linear conveniente dos autovetores aproximados (ver [20]) e reinicia-se o método de Arnoldi com este novo vetor v_0. Caso o critério de convergência seja satisfeito, calculam-se os autovalores através da eq.(323).

13 PROGRAMAÇÃO COMPUTACIONAL PARA TRAÇAR MAPAS DE ESTABILIDADE

O objetivo principal deste trabalho é desenvolver rotinas computacionais baseadas no modelo desenvolvido no capítulo 7 e na discretização realizada no capítulo 10 para sistemas *pipeline-riser* e traçar mapas de estabilidade a partir destas. Para o desenvolvimento das rotinas, optou-se pela utilização do programa de simulação numérica *Matlab*, que já contém a teoria de álgebra linear implementada.

O programa computacional desenvolvido será utilizado para realizar os estudos numéricos de estabilidade para uma dada configuração de parâmetros do sistema. Se o estado estacionário for estável, este existe e é o ponto de operação ou regime permanente do sistema para a configuração de parâmetros considerada. Se o estado estacionário for instável, não existe regime permanente para a configuração de parâmetros. Se o sistema for inicializado no estado estacionário quando este é instável, qualquer perturbação de natureza numérica fará o sistema sair dessa configuração e o desestabilizará, podendo apresentar um comportamento do tipo intermitência severa.

Neste capítulo, é apresentada uma descrição das rotinas que formam parte do programa computacional desenvolvido, os dados de entrada e os dados e arquivos de saída.

13.1 Rotinas computacionais

A participação no desenvolvimento do programa computacional foi realizada sob coordenação do Professor Karl Peter Burr do Centro de Engenharia, Modelagem e Ciências Sociais Aplicadas da Universidade Federal do ABC.

O programa computacional completo desenvolvido inclui as seguintes rotinas, que podem ser encontradas no ANEXO B:

- **main_stab_criteria_fdd_5p:** rotina principal que contém os parâmetros de entrada do sistema e uma grade de velocidades superficiais de líquido e de gás; para cada par (j_g, j_l) (ou $(\dot{m}_{g0}, Q_{l0})$), a rotina faz a chamada da rotina **stab_criteria_fdd_5p**; finalmente, salva as variáveis calculadas e imprime na tela o mapa de estabilidade, as curvas de nível indicando o número de autovalores com parte real positiva e as curvas de nível indicando o maior valor da parte real dos autovalores.

- stab_criteria_fdd_5p: recebe os parâmetros do sistema, faz a chamada das rotinas **geometry**, **steadystate**, **VECTOR_A31**, **VECTOR_A32**, **VECTOR_A33**, **VECTOR_B11**, **VECTOR_B12**, **VECTOR_B21**, **VECTOR_B22**, **VECTOR_B23**, **Monta_Matriz_G_5p**, **Monta_Matriz_H_5p** e **espectro**, e retorna à rotina principal se o estado estacionário é estável ou instável (variável *key*), os autovalores calculados (variáveis *lambda_r* e *lambda_i*), o número de autovalores com parte real positiva (variável *n_pos_eigen*) e o maior valor da parte real dos autovalores (variável *maxlambda_r*).

- geometry: calcula o vetor de ângulos θ e de alturas z da geometria do *riser*.

- steadystate: recebe os parâmetros característicos do escoamento estudado (propriedades de substâncias e do escoamento, dimensões do *riser*, etc) e realiza o cálculo das variáveis no estado estacionário para o *riser* ($\widetilde{P}$, $\widetilde{j}_l$, $\widetilde{j}_g$ e $\widetilde{\alpha}_r$) e para o *pipeline* ($\widetilde{j}_{l1}$, $\widetilde{j}_{g1}$, $\widetilde{P}_g$ e $\widetilde{\alpha}_p$), retornando-as à rotina **stab_criteria_fdd_5p**; faz a chamada das rotinas auxiliares **cdud**, **dpds** e **loc_eq**, necessárias à determinação das variáveis no estado estacionário.

- **cdud:** calcula os parâmetros C_d e U_d da correlação de deriva (*drift flux*).

- **dpds:** calcula a pressão à direita $P_{2R}{}^*$ integrando o gradiente de pressão dado pela equação de conservação do momento linear; faz a chamada da rotina **ffan**.

- ffan: calcula o fator de atrito de Fanning.

- loc_eq: calcula a fração de vazio no *pipeline*, utilizando o modelo de equilíbrio local; faz a chamada das rotinas auxiliares **gamma2ap**, **interfacial_speed** e **ffan**.

- gamma2ap: calcula a fração de vazio no *pipeline*.

- interfacial_speed: calcula a velocidade da interface entre o gás e o líquido.

- VECTOR_A31: utiliza variáveis do estado estacionário para realizar o cálculo dos elementos A_{31} descritos nas equações (156) e (161) em cada nó do *riser*; faz a chamada das rotinas auxiliares **coeficienteCDUDRRSA**, **ffan**, **dfmdRe**.

- VECTOR_A32: recebe as variáveis do estado estacionário e realiza o cálculo dos elementos A_{32} descritos nas equações (157) a (162) em cada nó do *riser*; faz a chamada das rotinas auxiliares **coeficienteCDUDRRSA**, **ffan**, **dfmdRe**.

- VECTOR_A33: recebe as variáveis do estado estacionário e realiza o cálculo dos elementos A_{33} descritos nas equações (158) a (163) em cada nó do *riser*; faz a chamada das rotinas auxiliares **ffan**, **dfmdRe**.

- coeficienteCDUDRRSA: calcula os parâmetros C_d e U_d da correlação de deriva.

- dfmdRe: calcula a derivada da função que descreve o fator de atrito em relação ao Número de Reynolds.

- VECTOR_B11: recebe as variáveis do estado estacionário e realiza o cálculo dos elementos B_{11} descritos na equação (145) em cada nó do *riser*; faz a chamada da rotina auxiliar **coeficienteCDUDRRSA**.

- VECTOR_B12: recebe as variáveis do estado estacionário e realiza o cálculo dos elementos B_{12} descritos na equação (146) em cada nó do *riser*; faz a chamada da rotina auxiliar **coeficienteCDUDRRSA**.

- VECTOR_B21: recebe as variáveis do estado estacionário e realiza o cálculo dos elementos B_{21} descritos na equação (147) em cada nó do *riser*; faz a chamada da rotina auxiliar **coeficienteCDUDRRSA**.

- VECTOR_B22: recebe as variáveis do estado estacionário e realiza o cálculo dos elementos B_{22} descritos nas equação (148) em cada nó do *riser*; faz a chamada da rotina auxiliar **coeficienteCDUDRRSA**.

- VECTOR_B23: recebe as variáveis do estado estacionário e realiza o cálculo dos elementos B_{23} descritos na equação (149) em cada nó do *riser*.

- Monta_Matriz_G_5p: realiza a montagem da matriz G conforme as equações (307) a (313), chamando as rotinas que montam as matrizes K_{ij} (**Matriz_K11_5p**, **Matriz_K22_5p**, **Matriz_K23_5p**, **Matriz_K24_5p**, **Matriz_K33_5p**, **Matriz_K34_5p**, **Matriz_K41_5p**, **Matriz_K42_5p**, **Matriz_K43_5p**, **Matriz_K44_5p** e **Matriz_K44_5p_inversa**).

- Matriz_K11_5p: monta a matriz K_{11} conforme as equações (195) a (215).

- Matriz_K22_5p: monta a matriz K_{22} conforme as equações (216) a (236).

- Matriz_K23_5p: monta a matriz K_{23} conforme as equações (237) e (238).

- Matriz_K24_5p: monta a matriz K_{24} conforme as equações (239) a (260).

- Matriz_K33_5p: monta a matriz K_{33} conforme a equação (261).

- **Matriz_K34_5p:** monta a matriz K_{34} conforme as equações (262) a (265).

- **Matriz_K41_5p:** monta a matriz K_{41} conforme a equação (266).

- **Matriz_K42_5p:** monta a matriz K_{42} conforme a equação (267).

- **Matriz_K43_5p:** monta a matriz K_{43} conforme as equações (268) e (269).

- **Matriz_K44_5p:** monta a matriz K_{44} conforme as equações (270) a (290).

- **Matriz_K44_5p_inversa:** calcula a inversa da matriz K_{44}, conforme eq.(305).

- **Monta_Matriz_H_5p:** realiza a montagem da matriz H conforme as equações (314) a (319), chamando as rotinas que montam as matrizes M_{ij} (**Matriz_M11_5p**, **Matriz_M12_5p**, **Matriz_M21_5p**, **Matriz_M22_5p**, **Matriz_M23_5p**, **Matriz_M24_5p** e **Matriz_M33_5p**) e algumas matrizes K_{ij} (**Matriz_K41_5p**, **Matriz_K42_5p**, **Matriz_K43_5p**, **Matriz_K44_5p** e **Matriz_K44_5p_inversa**).

- **Matriz_M11_5p:** monta a matriz M_{11} conforme a equação (291).

- **Matriz_M12_5p:** monta a matriz M_{12} conforme a equação (292).

- **Matriz_M21_5p:** monta a matriz M_{21} conforme a equação (293).

- **Matriz_M22_5p:** monta a matriz M_{22} conforme a equação (294).

- **Matriz_M23_5p:** monta a matriz M_{23} conforme as equações (295) e (296).

- **Matriz_M24_5p:** monta a matriz M_{24} conforme a equação (297).

- **Matriz_M33_5p:** monta a matriz M_{33} conforme a equação (298).

- **espectro:** recebe as matrizes G e H para resolver o problema de autovalores descrito pela equação (320); utiliza a rotina **ksmifun** e funções implícitas do *Matlab* (**sparse**, **lu**, **eigs**).

- **ksmifun:** calcula parte dos autovalores λ de $(G-\sigma H)^{-1}H\hat{x}=\dfrac{1}{\lambda-\sigma}\hat{x}$

- **sparse:** converte a matriz $[G-\sigma H]$ para a forma esparsa.

- **lu:** fatora a matriz $[G-\sigma H]$ em matrizes convenientes.

- **eigs:** retorna um vetor com os autovalores de maior módulo ou com os autovalores de maior parte real.

As rotinas **geometry**, **steadystate**, **cdud**, **dpds**, **ffan**, **loc_eq**, **gamma2ap** e **interfacial_speed** foram desenvolvidas por Oliveira [21].

13.2 Dados de entrada

Os dados de entrada do programa são inseridos na rotina principal **main_stab_criteria_fdd_5p**. Os parâmetros de entrada são:

MUg: μ_g, viscosidade do gás (kg/m/s).

MUl: μ_l, viscosidade do líquido (kg/m/s).

ROl: ρ_l, massa específica do líquido (kg/m³).

g: g, aceleração gravitacional (m/s²).

Rg: R_g, constante do gás (m²/s²/K).

T: T, temperatura absoluta do gás (K).

L: L, comprimento do *pipeline* (m).

L_e: L_e comprimento equivalente de conduto *buffer* (m).

D: D, diâmetro interno do *pipeline* e do *riser* (m).

AREA: $AREA$, área da seção transversal do *pipeline* e do *riser* (m²).

eps: ε, rugosidade do *pipeline* e do *riser* (m).

beta: β, ângulo de inclinação do *pipeline* (rad).

X: abscissa do topo do *riser* (m).

Z: L_r, altura do topo do *riser* (m).

precision: fator de convergência.

subrel: fator de sub-relaxamento.

N: número de nós.

T0: T_0, temperatura atmosférica padrão (K).

P0: P_0, pressão atmosférica padrão (Pa).

ROg: ρ_{G0}, massa específica do gás nas condições de atmosfera padrão (kg/m³).

Ps: P_s, pressão absoluta de separação (Pa).

j_l: j_l, velocidade superficial de líquido (m/s).

j_g: j_g, velocidade superficial de gás (m/s).

QL0: Q_{l0}, vazão volumétrica de líquido (m³/s).

mg0: $\dot{m}_{g0}$, vazão mássica de gás (kg/s).

13.3 Dados e arquivos de saída

Como saída, são gerados e impressos na tela três gráficos:
- Mapa de estabilidade;
- Curvas de nível – Número de autovalores com parte real positiva;
- Curvas de nível – Maior valor da parte real.

O programa computacional também salva os parâmetros calculados durante a simulação em um arquivo (extensão **.mat**) para pós-tratamento dos dados no *Matlab*.

13.4 Teste das rotinas computacionais

Para cada rotina desenvolvida, foi desenvolvida uma rotina teste para verificar o correto funcionamento. Como exemplo, realiza-se o teste da rotina **VECTOR_A33** através da rotina **TESTE_VECTOR_A33**.

Conforme a eq.(144), o vetor A_{33} corresponde aos termos que multiplicam as perturbações da pressão ao longo do *riser* $\hat{P}$ na equação de conservação do momento linear (eq.(142)) transcrita abaixo:

$$\begin{aligned}\tilde{j}_g \frac{\partial \hat{P}}{\partial s} &= -\frac{4\Pi_L}{\Pi_D}\tilde{j}_g\left[1-\tilde{\alpha}_r+\tilde{P}\cdot\tilde{\alpha}_r\right]\cdot\Big[2 f_m(\tilde{\mathrm{Re}}_m,\varepsilon/D)\,|\,\tilde{j}\,|\,(\hat{j}_g+\hat{j}_l)\\ &+D_1 f_m(\tilde{\mathrm{Re}}_m,\varepsilon/D)\,|\,\tilde{j}\,|\,\tilde{j}\,\hat{\mathrm{Re}}_m\Big]-\Pi_L\Big[(\tilde{P}-1)\cdot\tilde{\alpha}_r(1-C_d\tilde{\alpha}_r)\hat{j}_g\\ &-(\tilde{P}-1)\cdot C_d\tilde{\alpha}_r^{\,2}\hat{j}_l+\tilde{j}_g\tilde{\alpha}_r\hat{P}\Big]\cdot\left(\sin\theta+\frac{4}{\Pi_D}f_m(\tilde{\mathrm{Re}}_m,\varepsilon/D)\,|\,\tilde{j}\,|\,\tilde{j}\right)\end{aligned} \tag{142}$$

onde $\hat{\mathrm{Re}}_m$ é dado pela eq.(131).

Uma forma de testar a rotina **VECTOR_A33** consiste em, primeiramente, eliminar os termos $\hat{j}_l$ e $\hat{j}_g$ (o vetor A_{33} multiplica $\hat{P}$) na eq.(142) e na eq.(131), de modo que estas resultam em:

$$\begin{aligned}\tilde{j}_g \frac{\partial \hat{P}}{\partial s} &= -\frac{4\Pi_L}{\Pi_D}\tilde{j}_g\left[1-\tilde{\alpha}_r+\tilde{P}\cdot\tilde{\alpha}_r\right]\cdot\left[D_1 f_m(\tilde{\mathrm{Re}}_m,\varepsilon/D)\,|\,\tilde{j}\,|\,\tilde{j}\,\hat{\mathrm{Re}}_m\right]\\ &-\Pi_L\cdot\left[\tilde{j}_g\tilde{\alpha}_r\hat{P}\right]\cdot\left(\sin\theta+\frac{4}{\Pi_D}f_m\,|\,\tilde{j}\,|\,\tilde{j}\right)\end{aligned} \tag{325}$$

$$\hat{\mathrm{Re}}_m = \frac{Q_{l0} D}{A \nu_l} \frac{1}{1 - \tilde{\alpha}_r + \delta_u \cdot \tilde{\alpha}_r} | \tilde{j} | \cdot \tilde{\alpha}_r \cdot \hat{P} \tag{326}$$

Em seguida, aplica-se uma pequena perturbação $\hat{P} = \Delta P$ e aproxima-se A_{33} pela diferença entre eq.(325) calculada para $\hat{P} = -\Delta P$ e a eq.(325) calculada para $\hat{P} = +\Delta P$ e dividir por $2\Delta P$, como segue:

$$A_{33} \approx \frac{\left(\tilde{j}_g \dfrac{\partial \hat{P}}{\partial s} \right)_{-\Delta P} - \left(\tilde{j}_g \dfrac{\partial \hat{P}}{\partial s} \right)_{+\Delta P}}{2\Delta P} \tag{327}$$

O resultado da eq.(327) deve coincidir com o resultado dado pela equação (158). A rotina **TESTE_VECTOR_A33** pode ser encontrada no ANEXO B.

14 RESULTADOS

Neste capítulo, são apresentadas algumas simulações obtidas com o programa computacional desenvolvido, aplicadas a *risers* verticais em duas situações: ausência e presença de atrito.

Para o caso em que se despreza o efeito do atrito no *riser*, serão apresentadas simulações para ângulo de inclinação do *pipeline* $\beta = -5^{\circ}$ e comprimentos equivalentes de conduto *buffer* L_e = 1,69 m, 5,1 m e 10 m.

Para o caso em que se considera o efeito do atrito no *riser*, serão apresentadas simulações para ângulo de inclinação do *pipeline* $\beta = -5^{\circ}$ e comprimentos equivalentes de conduto *buffer* L_e = 1,69 m, 5,1 m e 10 m.

14.1 Simulações

O programa considera uma grade $j_g \times j_l$ e, portanto, uma grade $\dot{m}_{g0} \times Q_{l0}$. Para cada par (j_g, j_l) $((\dot{m}_{g0}, Q_{l0}))$ da grade, o programa realiza o cálculo do estado estacionário e determina os autovalores. Em seguida, faz a verificação da estabilidade do estado estacionário: se todos os autovalores calculados possuírem parte real negativa, o programa retorna *key* = 0 (estado estacionário estável); se houver algum autovalor com parte real positiva, o programa retorna *key* = 1 (estado estacionário instável).

Os mapas de estabilidade são gerados a partir da variável *key* retornada: se *key* = 0, utiliza-se a cor vermelha; se *key* = 1, utiliza-se a cor azul.

O programa também gera curvas de nível indicando o número de autovalores com parte real positiva e o maior valor da parte real dos autovalores, a fim de auxiliar a análise dos resultados obtidos.

Os parâmetros geométricos do *riser* e do *pipeline* correspondem aos apresentados por Taitel em [7], enquanto as propriedades físicas correspondem aos fluidos água e ar à temperatura de 20 ºC. Foram rodadas simulações mantendo uma pressão absoluta de separação P_s = 1 *bar*.

Os parâmetros de entrada das simulações foram:

- Viscosidade dinâmica do líquido: $\mu_l = 1\times 10^{-3}$ kg/m/s
- Viscosidade dinâmica do gás: $\mu_g = 1{,}8\times 10^{-5}$ kg/m/s
- Massa específica do líquido: $\rho_l = 1000$ kg/m^3
- Aceleração gravitacional: $g = 9.8$ m/s^2
- Constante do gás: $R_g = 287$ m^2/s^2/K
- Temperatura do gás: $T = 293$ K
- Comprimento do *pipeline*: $L = 9{,}1$ m
- Comprimento equivalente *buffer* do *pipeline*: $L_e = 1{,}69$ m, $5{,}1$ m e 10 m
- Diâmetro interno do *pipeline* e do *riser*: $D = 0{,}0254$ m
- Área da seção transversal do escoamento: $A = \dfrac{\pi D^2}{4} = 5{,}0671\times 10^{-4}$ m²
- *R*ugosidade do *pipeline* e do *riser*: $\varepsilon = 1{,}5\times 10^{-6}$ m
- Ângulo de inclinação do *pipeline*: $\beta = \dfrac{-5\pi}{180}$ rad
- Altura e abscissa do topo do *riser*: $Z = 3{,}0$ m e $X = 0$ m
- Comprimento do *riser*: $L_r = 3{,}0$ m
- Fator de convergência: $precision = 1\times 10^{-12}$
- Fator de sub-relaxamento: $subrel = 0{,}5$
- Número de nós: $N = 50$
- Temperatura atmosférica padrão: $T_0 = 293$ K
- Pressão atmosférica padrão: $P_0 = 101325$ Pa
- Massa específica do gás (atmosfera padrão): $\rho_{G0} = \dfrac{P_0}{R_g T_0} = 1{,}2049$ kg/m^3
- Pressão absoluta de separação: $P_s = 101325$ Pa

A grade de velocidades superficiais $j_g \times j_l$ considerada nas simulações foi composta por 4 trechos:

1 - $j_k = 0.001$ m/s a $j_k = 0.01$ m/s, com $\Delta j_k = 0.0005$ m/s;

2 - $j_k = 0.01$ m/s a $j_k = 0.1$ m/s, com $\Delta j_k = 0.005$ m/s;

3 - $j_k = 0.1$ m/s a $j_k = 1.0$ m/s, com $\Delta j_k = 0.05$ m/s;

4 - $j_k = 1.0$ m/s a $j_k = 10.0$ m/s, com $\Delta j_k = 0.5$ m/s;

onde o subscrito k indica tanto g (gás) como l (líquido), resultando em 73 valores de j_g e 73 valores de j_l. Logo, foram utilizados 73 x 73 = 5329 pares (j_g, j_l) para traçar os mapas de estabilidade.

A grade $\dot{m}_{g0} \times Q_{l0}$ foi composta utilizando a grade de velocidades superficiais $j_g \times j_l$ e as seguintes transformações:

$$\dot{m}_{g0} = A \cdot \rho_{g0} \cdot j_g \tag{328}$$

$$Q_{l0} = A \cdot j_l \tag{329}$$

14.2 Procedimento de cálculo

Nesta seção, é apresentada a sequência de cálculo realizada pelo programa computacional desenvolvido. Esta descrição poderá ser muito útil a futuros interessados em continuar o trabalho para sistemas *pipeline-riser* de geometria geral, adicionando termos de inércia e outras configurações de interesse.

1 - Definir os parâmetros de entrada do sistema *pipeline-riser* na rotina principal **main_stab_criteria_fdd_5p**, a qual também define as grades $j_g \times j_l$ e $\dot{m}_{g0} \times Q_{l0}$.

2 - Rodando o programa, a rotina principal irá chamar a rotina **stab_criteria_fdd_5p** para cada ponto da grade definida.

3 - Dentro da rotina **stab_criteria_fdd_5p**, calcula-se a geometria (ângulo de inclinação e posição) para cada nó do *riser* através da rotina **geometry**. Em seguida, calculam-se as variáveis em estado estacionário chamando-se a rotina **steadystate** desenvolvida por Oliveira em [21], a qual utiliza variáveis dimensionais.

4 – Neste trabalho, são utilizadas variáveis adimensionais, conforme o equacionamento realizado no capítulo 7. Assim, as variáveis em estado estacionário calculadas pela rotina **steadystate** são adimensionalizadas pelo programa.

5 - Em seguida, são construídos os vetores A_{ij} e B_{ij} através das rotinas **VECTOR_A31**, **VECTOR_A32**, **VECTOR_A33**, **VECTOR_B11**, **VECTOR_B12**, **VECTOR_B21**, **VECTOR_B22** e **VECTOR_B23**.

6 - Nesse momento, a rotina **stab_criteria_fdd_5p** chama as rotinas que montam as matrizes *G* e *H*: **Monta_Matriz_G_5p** e **Monta_Matriz_H_5p**.

7 - As rotinas **Monta_Matriz_G_5p** e **Monta_Matriz_H_5p** chamam as rotinas que constroem as matrizes K_{ij} e M_{ij}.

8 - Na sequência, o programa faz a chamada da rotina **espectro** diversas vezes para capturar por partes o espectro de autovalores do problema, segundo o Método de Arnoldi com Reinício Implícito descrito no capítulo 12. No programa, são realizadas buscas por autovalores com as seguintes opções: maior parte real e maior módulo próximo a um valor real σ escolhido. Utiliza-se a função **eigs** do pacote ARPACK do *Matlab* ([20]) com a opção dada pelo comando *which*.

9 - Para implementar a estratégia acima, é necessário realizar fatoração LU da matriz $(G - \sigma \cdot H)$. Então, a função **eigs** recebe a rotina **ksmifun** e esta calcula *y* de acordo com a sequência $z = H \cdot \hat{x}$ e $(G - \sigma \cdot H) \cdot y \cdot \hat{x} = z$, onde $y = \dfrac{1}{\lambda - \sigma}$. Este método de cálculo de blocos de autovalores (autovalores próximos a um valor σ) faz com que determinados blocos se sobreponham, e alguns autovalores são obtidos mais de uma vez. O programa desenvolvido se encarrega de eliminar autovalores repetidos.

10 - Neste ponto, a rotina **stab_criteria_fdd_5p** analisa quantos autovalores possuem parte real negativa e quantos possuem parte real positiva. Se todos os autovalores possuírem parte real negativa, a rotina retorna a variável *key* = 0 (estado estacionário estável); se houver algum autovalor com parte real positiva, o programa retorna *key* = 1 (estado estacionário instável).

11 - Determinado o espectro de autovalores, o programa retorna à rotina principal os seguintes parâmetros: o valor da variável *key*, o número de autovalores com parte real positiva (variável *n_pos_eigen*), o maior valor da parte real dentre os

autovalores calculados (variável *maxlambda_r*) e o espectro de autovalores obtido (variáveis *lambda_r* e *lambda_i*).

12 - Após efetuar o procedimento acima para cada ponto da grade, o programa plota o ponto em um mapa de estabilidade. Se *key* = 0, o ponto da grade é plotado na cor vermelha; se *key* = 1, o ponto é plotado na cor azul.

13 - Após a realização de todo o procedimento anterior para a grade inteira, o programa gera os gráficos com as curvas de nível indicando o número de autovalores com parte real positiva e com as curvas de nível indicando o maior valor da parte real dos autovalores do espectro calculado.

14.3 Resultados para *Riser* Vertical sem atrito

14.3.1 Resultados para comprimento equivalente L_e = 1,69m

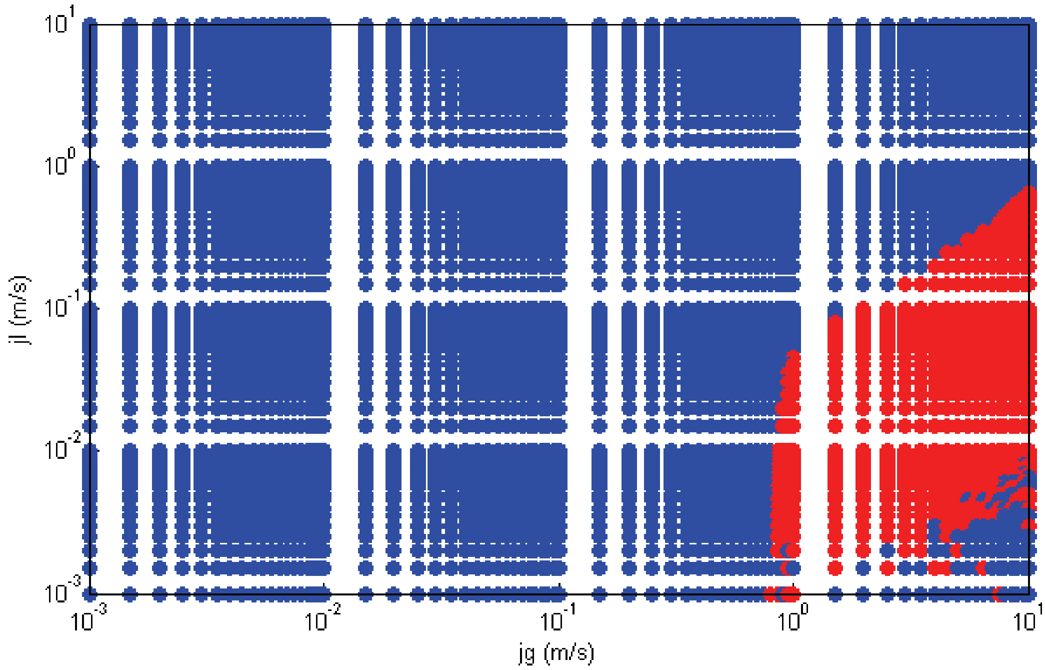

Figura 33 - Mapa de estabilidade para comprimento equivalente L_e = 1,69m.

14.3.2 Resultados para comprimento equivalente L_e = 5,1m

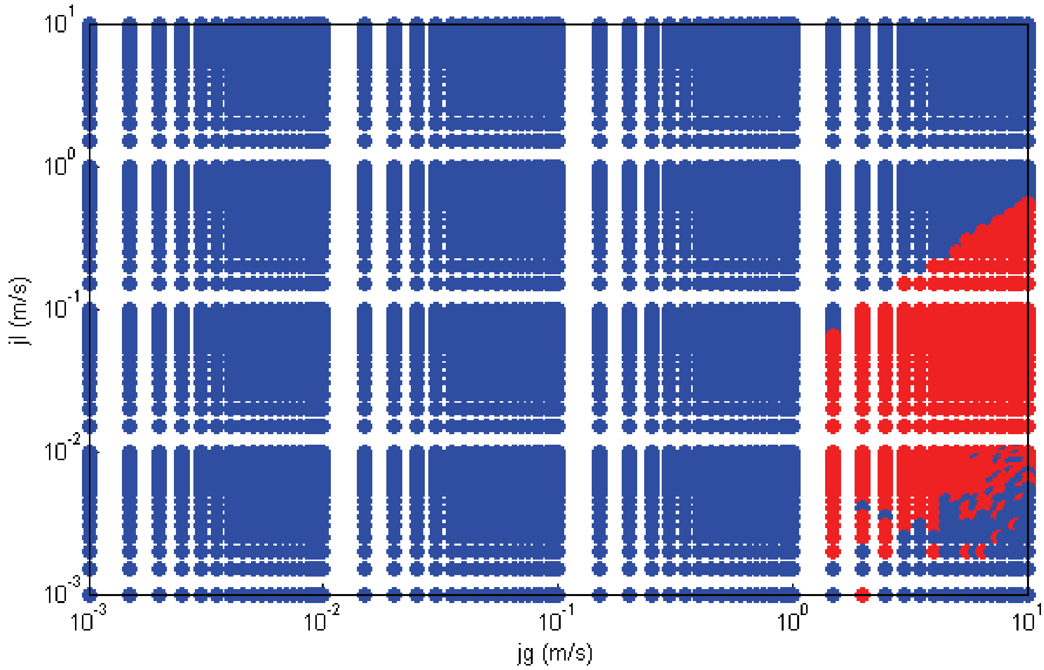

Figura 34 - Mapa de estabilidade para comprimento equivalente L_e = 5,1m.

14.3.3 Resultados para comprimento equivalente L_e = 10m

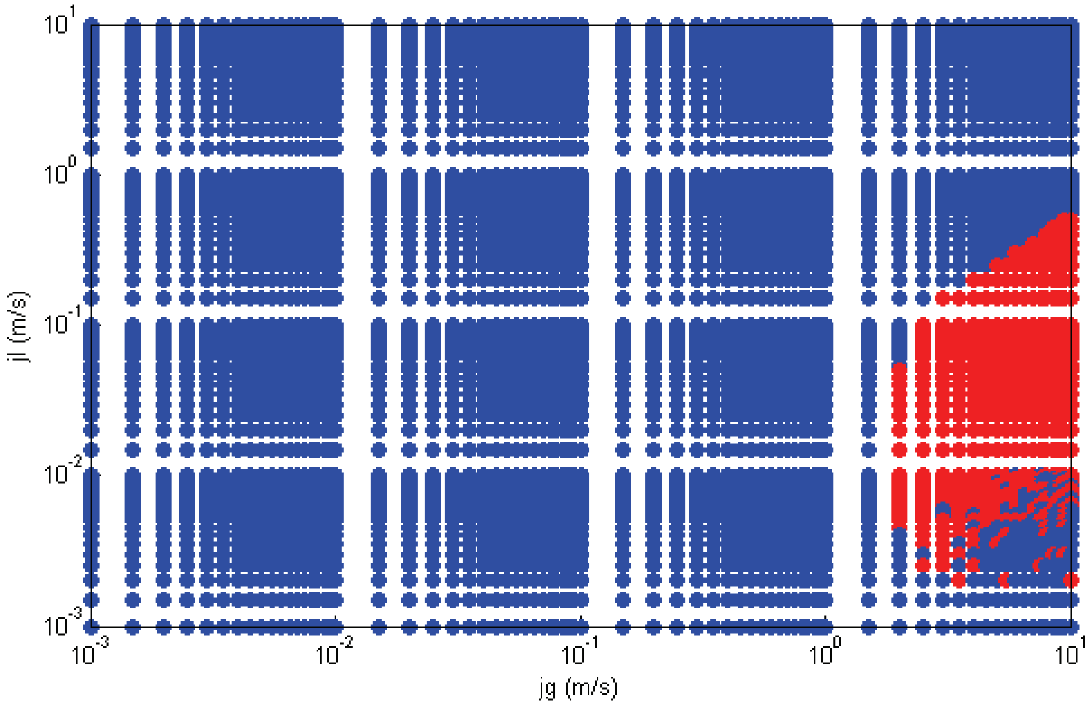

Figura 35 - Mapa de estabilidade para comprimento equivalente L_e = 10m.

14.4 Resultados para *Riser* Vertical com atrito

14.4.1 Resultados para comprimento equivalente L_e = 1,69m

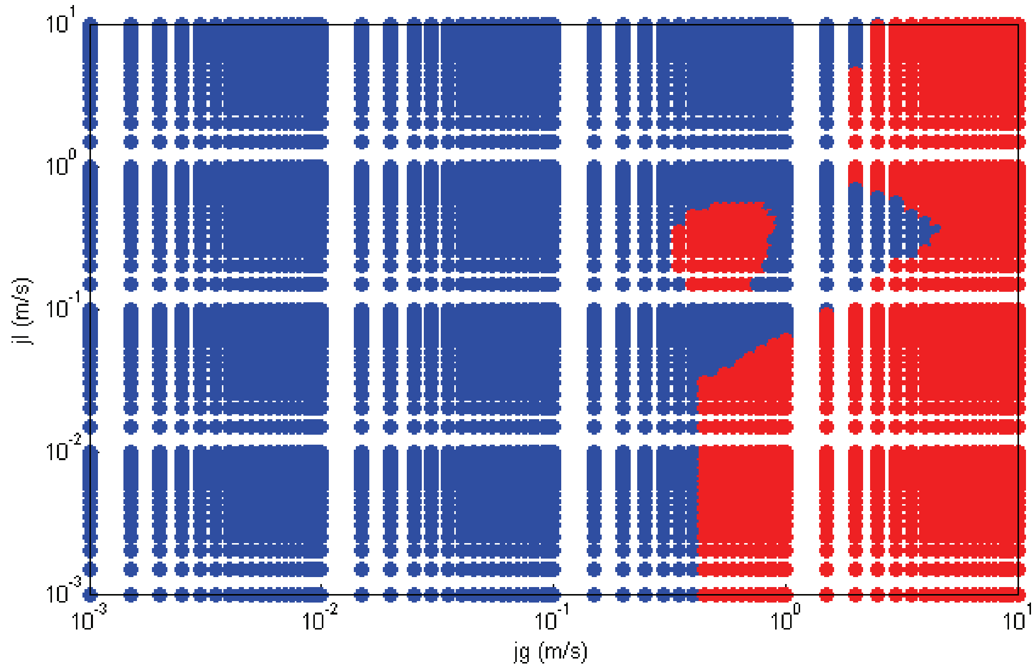

Figura 36 - Mapa de estabilidade para comprimento equivalente L_e = 1,69m.

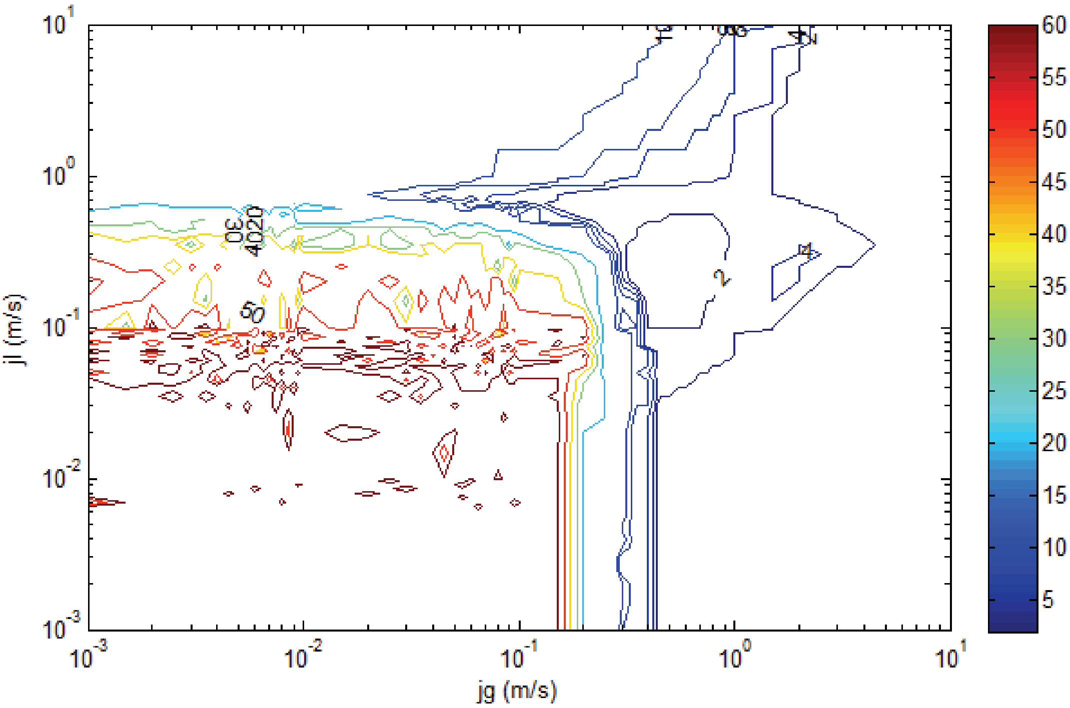

Figura 37 – Curvas de nível para o número de autovalores com parte real positiva - L_e = 1,69m.

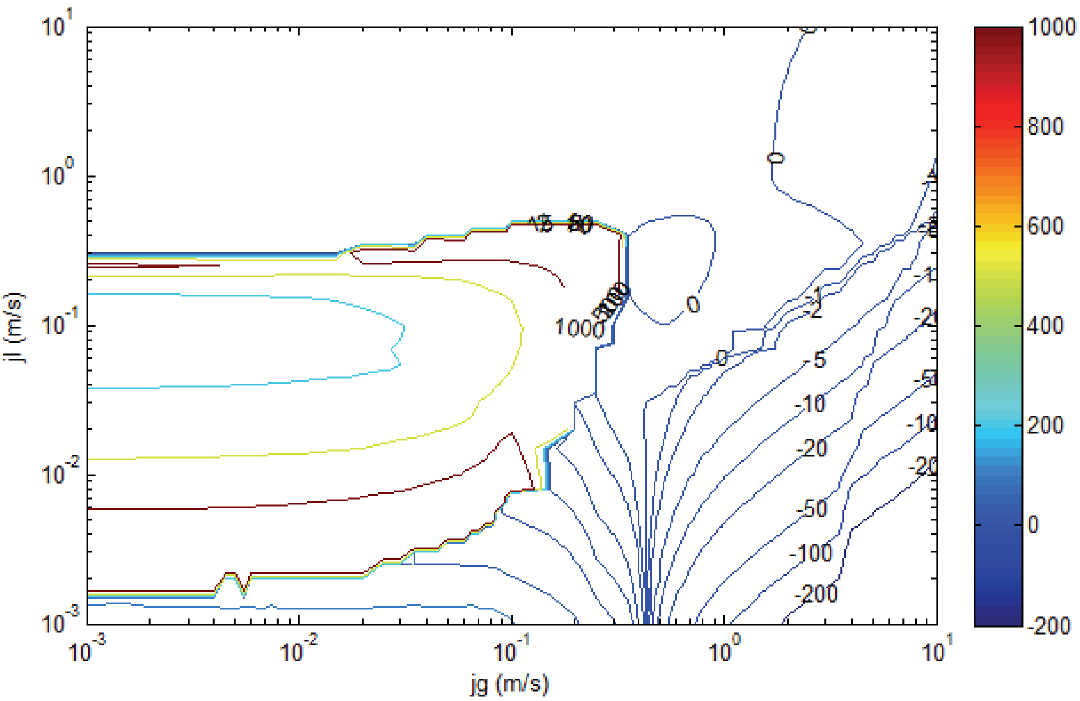

Figura 38 – Curvas de nível para o maior valor da parte real dos autovalores - L_e = 1,69m.

14.4.2 Resultados para comprimento equivalente L_e = 5,1m

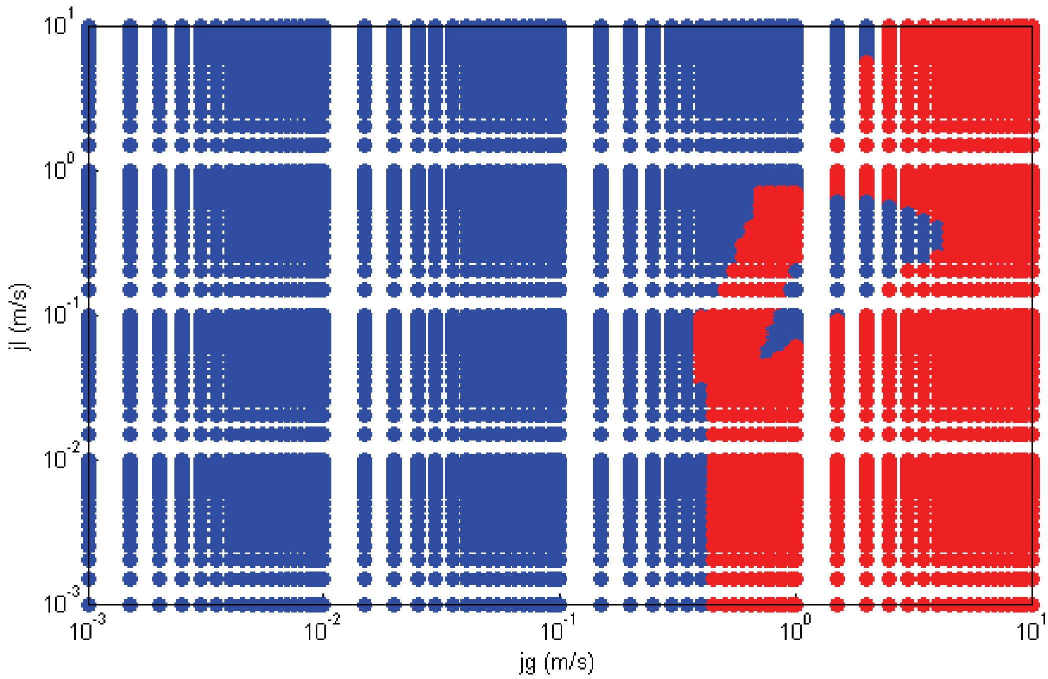

Figura 39 - Mapa de estabilidade para comprimento equivalente L_e = 5,1m.

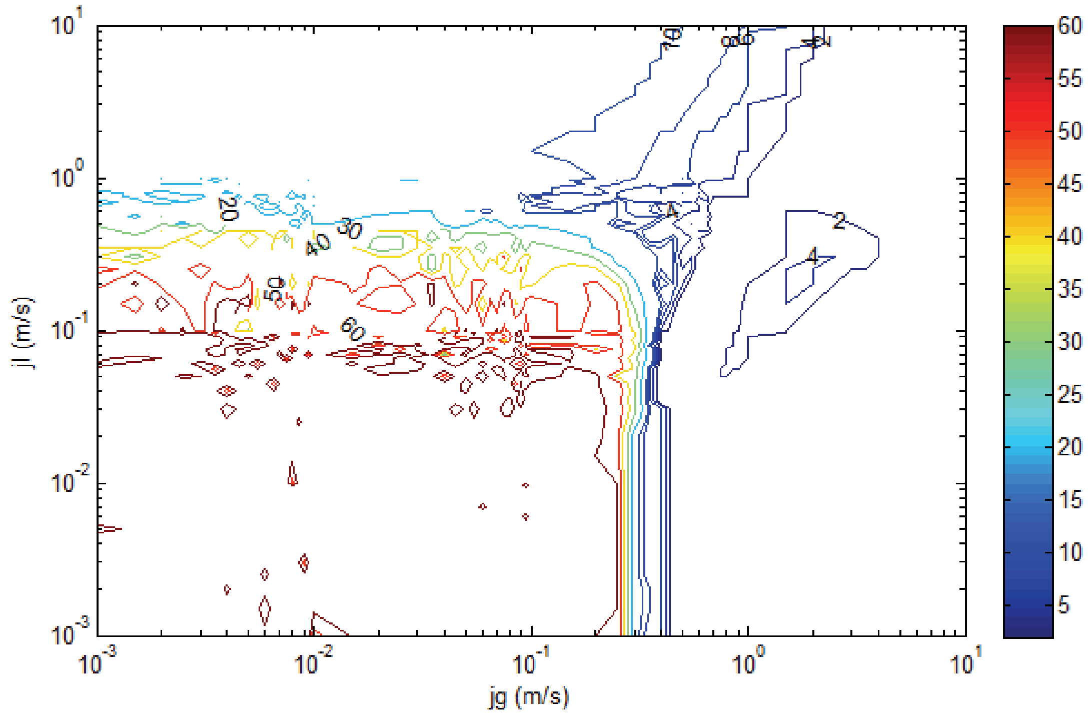

Figura 40 - Curvas de nível para o número de autovalores com parte real positiva - L_e = 5,1m.

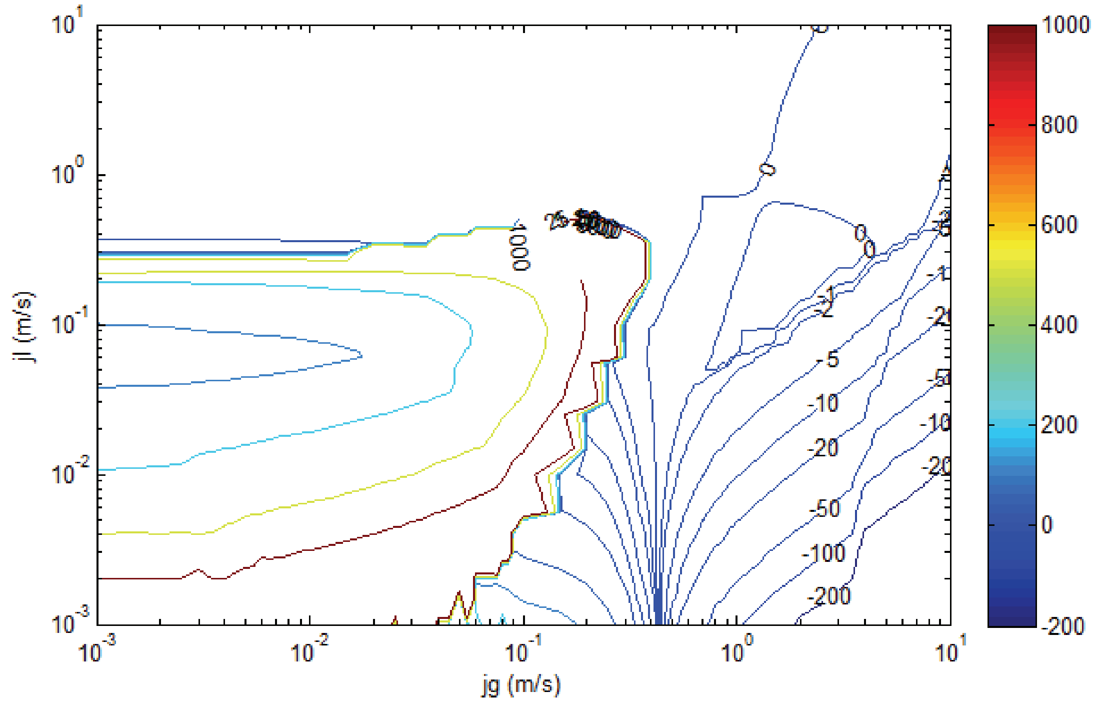

Figura 41 - Curvas de nível para o maior valor da parte real dos autovalores - L_e = 5,1m.

14.4.3 Resultados para comprimento equivalente L_e = 10m

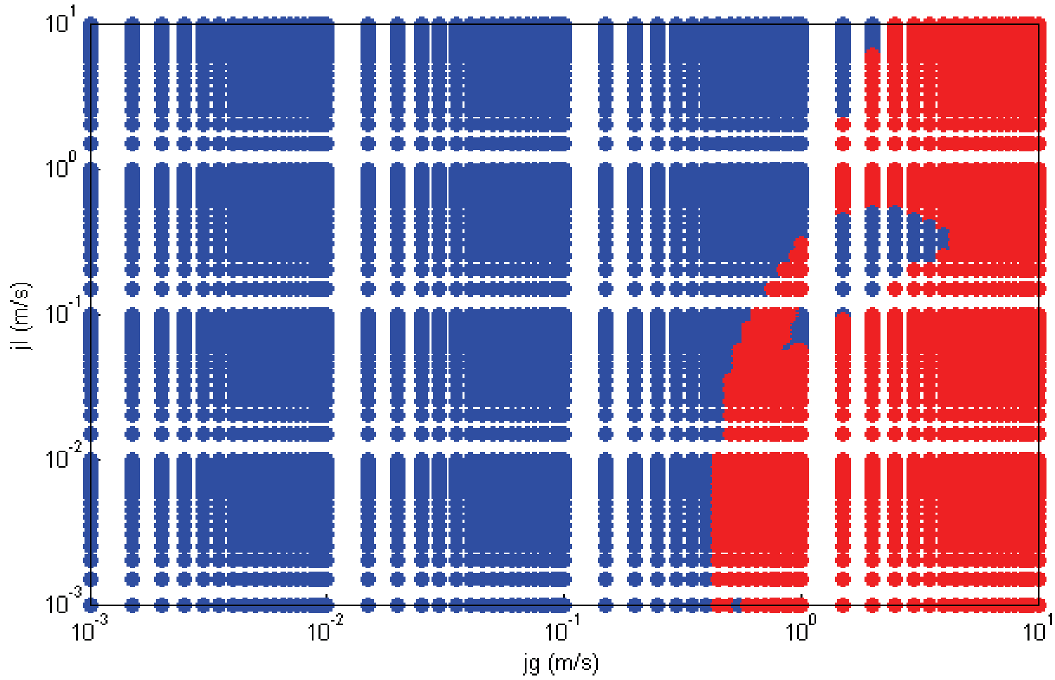

Figura 42 - Mapa de estabilidade para comprimento equivalente L_e = 10m.

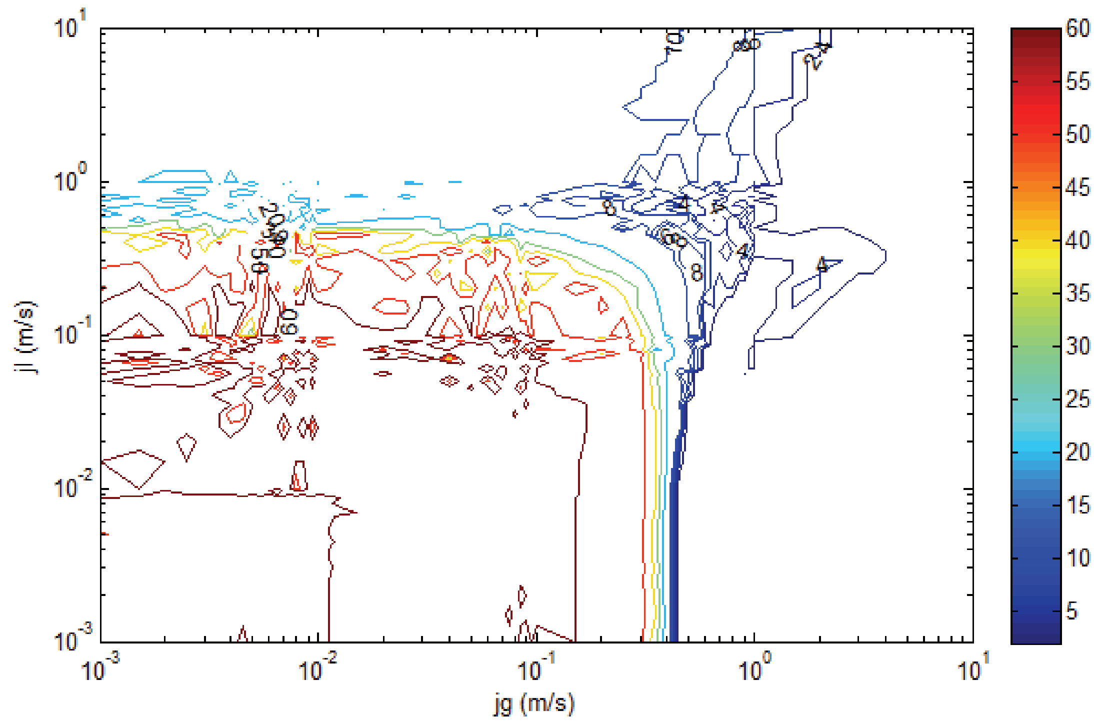

Figura 43 - Curvas de nível para o número de autovalores com parte real positiva - L_e = 10m.

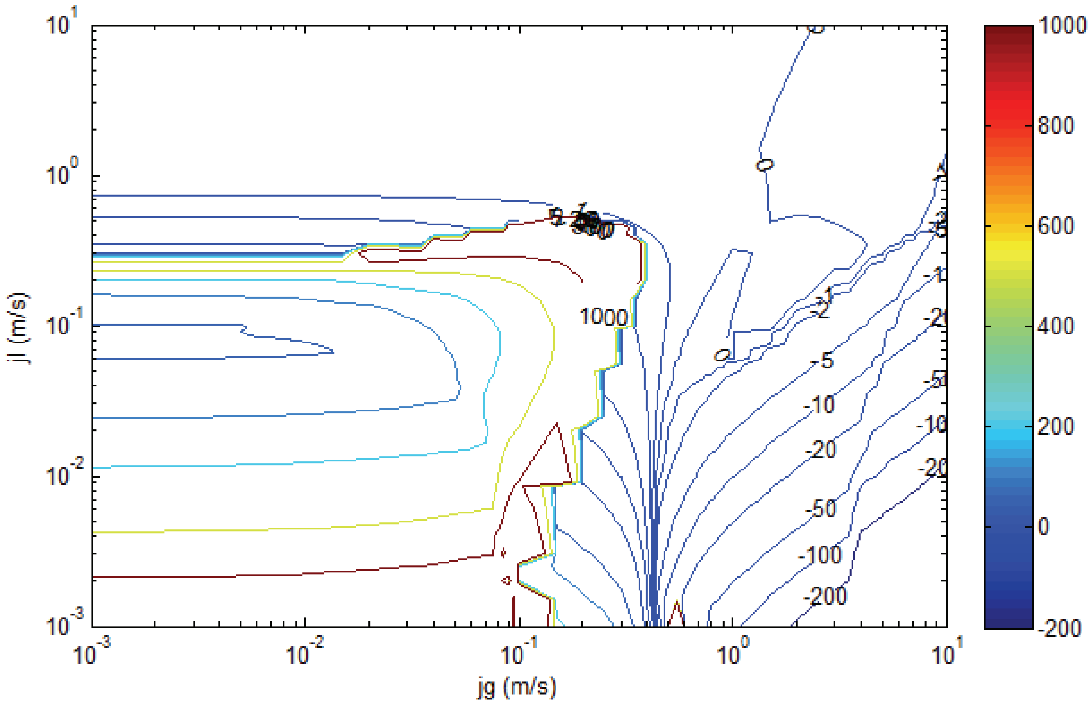

Figura 44 - Curvas de nível para o maior valor da parte real dos autovalores - L_e = 10m.

14.4.4 Análise dos resultados

O desenvolvimento das rotinas computacionais em *Matlab* foi realizado em duas etapas: inicialmente, foi empregado o modelo de *riser* sem efeito de atrito devido à maior simplicidade do equacionamento e à menor dificuldade de implementação; posteriormente, o efeito do atrito foi introduzido nas rotinas.

Conforme as Figuras 33, 34 e 35, nota-se que os mapas de estabilidade obtidos nas simulações sem atrito no *riser* apresentam uma configuração destoante em relação a mapas de estabilidade em geral, exibindo pontos de operação instável dentro da região estável, e não delimita uma fronteira entre as regiões estável e instável como da forma expressa nas Figuras 26, 27 e 28 da seção 5.5. Neste caso, o programa computacional desenvolvido não conseguiu recuperar o trecho horizontal da fronteira de estabilidade, acima do qual o escoamento é experimentalmente determinado como estável, e exibiu uma região instável para baixos valores de velocidade superficial de líquido e altos valores de velocidade superficial de gás.

Os resultados insatisfatórios obtidos devem-se principalmente à utilização de um modelo muito simplificado, onde a ausência do atrito entre as fases líquida e gasosa no escoamento no *riser* tem contribuição significativa, e ao método de cálculo dos autovalores, em que o espectro pode não ser completamente obtido.

Conforme as Figuras 36, 39 e 42, percebe-se que os mapas de estabilidade obtidos nas simulações com atrito no *riser* apresentam uma configuração mais coerente com mapas de estabilidade em geral, não mais exibindo pontos de operação instável isolados dentro da região estável e recuperando a região estável característica de escoamentos com baixos valores de velocidade superficial de líquido e altos valores de velocidade superficial de gás. Observa-se que se delimita parte de uma possível fronteira entre as regiões estável e instável, semelhante ao comportamento exibido nas Figuras 26, 27 e 28 da seção 5.5, mas o programa computacional desenvolvido também não conseguiu recuperar o trecho horizontal da fronteira de estabilidade completando a fronteira de estabilidade.

Na Figura 36, correspondente à simulação com atrito para comprimento equivalente de *buffer* L_e = 1,69m, é notável uma região estável quase circular isolada dentro da região determinada como instável. Esta região estável parece se alongar e se deslocar para baixo nas Figuras 39 e 42 (L_e = 5,1m e L_e = 10m, respectivamente), unindo-se à região estável dada por altos valores de velocidade superficial de gás e causando a impressão de que há uma região instável isolada dentro da região estável.

Ainda em relação aos mapas de estabilidade, nota-se que o trecho aproximadamente vertical da fronteira de estabilidade tende sempre a um valor próximo de $j_g \approx 0{,}45$ m/s. Conforme os resultados obtidos na Figura 29 da seção 5.5, este comportamento é coerente apenas para L_e = 10m, sendo que o esperado para L_e = 5,1m era $j_g \approx 0{,}25$ m/s e para L_e = 1,69m era $j_g \approx 0{,}15$ m/s.

Os resultados insatisfatórios obtidos devem-se principalmente ao método de cálculo dos autovalores utilizado já que, embora adição do efeito do atrito no *riser* tenha alterado significativamente a disposição do mapa de estabilidade, ainda assim não foi o suficiente para apresentar resultados próximos dos obtidos na seção 5.5.

Com o intuito de entender as causas destas discrepâncias, foram gerados gráficos indicando o número de autovalores com parte real positiva e o maior valor da parte real do espectro de autovalores obtido para cada ponto da grade.

A partir das curvas de nível das Figuras 37, 40 e 43, observa-se que há um pequeno número de autovalores com parte real positiva (2 a 8 autovalores) em determinadas regiões instáveis próximas à fronteira de estabilidade que deveriam ser estáveis.

A partir das curvas de nível das Figuras 38, 41 e 44, nota-se que, nas regiões onde o número de autovalores com parte real positiva é pequeno, o valor da parte real do autovalor que apresenta maior parte real também é pequeno, indicando que estes autovalores estão próximos do eixo imaginário e, portanto, próximos da fronteira de estabilidade. Possivelmente, a utilização de um modelo mais completo (por exemplo, incluir termos de inércia) provoque a passagem destes autovalores do lado direito (parte real positiva) para o lado esquerdo do eixo imaginário (parte real negativa), tornando estas configurações estáveis.

Teoricamente, a fronteira de estabilidade é composta pelos pontos da grade onde a parte real do autovalor de maior parte real do problema é nula. Isso é confirmado confrontando o mapa de estabilidade com o correspondente gráfico de maior valor da parte real, onde a curva de nível 0 está perfeitamente sobre a fronteira entre as regiões estável e instável.

Uma das principais dificuldades encontradas neste trabalho foi a determinação dos autovalores do problema. Devido à singularidade apresentada pela matriz M na eq.(193), não foi possível determinar os autovalores utilizando uma função convencional do *Matlab*.

Uma alternativa utilizada foi eliminar o vetor de pressões conforme eq.(305), eliminando a última linha da matriz M (linha nula), mas mesmo desta forma o problema da singularidade permaneceu (o determinante da matriz M resultava nulo ou muito próximo de zero) e até o momento sua causa é desconhecida.

Para tratar o problema de singularidade verificado, o trabalho propôs utilizar o Método de Arnoldi com Reinício Implícito - IRAM ([19]) para tentar obter o espectro de autovalores. Segundo este método, o problema pode ser transformado no seguinte problema: $(G-\sigma \cdot H)^{-1} H \cdot \hat{x} = nu \cdot \hat{x}$, onde $nu = \dfrac{1}{\lambda - \sigma}$ e o valor de σ deve ser escolhido. Podem ser realizadas buscas por autovalores com diferentes opções. Para implementar esta estratégia, realiza-se fatoração LU da matriz $(G-\sigma \cdot H)$, e calcula-se iterativamente nu e, indiretamente, os autovalores λ.

No entanto, todo método iterativo implica em um erro, o qual é determinado pela precisão que se deseja trabalhar. Estes erros somados a erros numéricos eventualmente cometidos pelo *software Matlab* podem fazer com que autovalores que deveriam ter parte real negativa sejam calculados com parte real positiva, originando as regiões onde há poucos autovalores com parte real positiva nas Figuras 37, 40 e 43.

Neste método de cálculo por blocos de autovalores (autovalores próximos a um valor σ), pode ocorrer sobreposição de determinados blocos, e alguns autovalores são obtidos mais de uma vez.

Além disso, o caráter singular da matriz M pode estar relacionado à presença de um bloco de matrizes com valores muito baixos e outro bloco com valores muito altos, resultando numa matriz com comportamento de matriz singular.

Verificou-se que há linhas e colunas nas matrizes G e H que possuem termos muito pequenos (praticamente nulos), contribuindo para a singularidade encontrada. A adição de termos de inércia ao equacionamento possivelmente eliminaria tal singularidade e tornaria o modelo mais próximo de um escoamento real, mas tornaria o equacionamento mais complexo e fugiria ao escopo deste trabalho. Uma excelente continuação para este trabalho seria complementar o modelo com os termos inerciais e implementar as alterações necessárias nas rotinas computacionais.

15 CONCLUSÕES

As atividades desenvolvidas neste trabalho permitiram verificar a importância de se compreender o fenômeno de intermitência severa em escoamentos multifásicos, frequente em sistemas de exploração de petróleo, bem como a influência das diferentes configurações de escoamento sobre o comportamento do sistema. Assim, a adoção de um modelo adequado e válido para a análise do fenômeno de intermitência é de fundamental importância para que se possam evitar as crescentes perdas econômicas e a saída de serviço da plataforma.

Inicialmente, foi fornecida toda a fundamentação teórica para a compreensão dos modelos de equacionamento formulados na literatura, e dos fenômenos envolvidos durante um ciclo de intermitência severa e das condições em que esta poderá ocorrer.

A partir dos estudos iniciais desenvolvidos, foi possível realizar uma comparação entre os dois principais modelos de escoamentos multifásicos existentes na literatura: o modelo homogêneo e modelo de *drift*. Verificou-se que o modelo de *drift* fornece soluções mais próximas das condições reais de escoamento e, portanto, sua aplicação é mais usual. Não por acaso, no equacionamento do fenômeno desenvolvido em [1] foi utilizado este modelo.

A análise dos resultados de uma comparação entre o modelo desenvolvido por Baliño em [1] e o modelo desenvolvido por Mokhatab em [5] permitiu verificar a validade do modelo desenvolvido por Baliño, capaz de predizer com grande precisão o comportamento de diversas variáveis ao longo do tempo, e fornecendo resultados mais próximos dos dados experimentais expostos por Mokhatab.

A implementação do critério de estabilidade de Boe ([7]) no *Matlab* possibilitou uma comparação entre este critério e a curva de estabilidade construída em função do modelo em FORTRAN de Baliño ([1]). Ambos predizem satisfatoriamente a estabilidade do escoamento para diversos pontos experimentais.

Com base na teoria de estabilidade linear, foram desenvolvidas as equações que governam as perturbações do estado estacionário em um escoamento em um sistema *pipeline-riser* simplificado. O equacionamento resultante foi implementado em rotinas computacionais no programa de simulação numérica *Matlab*, as quais foram devidamente testadas quanto ao seu correto funcionamento. Concluídos os testes das rotinas desenvolvidas, possibilitou-se a análise da estabilidade do estado estacionário para diversas configurações de parâmetros, de forma mais simples e computacionalmente mais econômica que o modelo utilizado em [10], através de mapas de estabilidade gerados em função do espectro de autovalores obtido.

Os principais objetivos deste trabalho foram concretizados: foi aplicada a teoria da estabilidade linear para estudar escoamentos multifásicos e foi desenvolvido um extenso pacote de rotinas computacionais para a análise da estabilidade do estado estacionário utilizando o Método de Arnoldi com Reinício Implícito (IRAM).

Até a data de entrega deste trabalho, os resultados da análise de estabilidade pela teoria de estabilidade linear não foram satisfatórios. O modelo prediz regiões instáveis para configurações experimentalmente comprovadas estáveis. A singularidade da matriz H do problema estudado faz necessário o uso de um método iterativo para o cálculo dos autovalores, implicando em erros numéricos inerentes a este tipo de cálculo.

É importante salientar que a aplicação da teoria da estabilidade linear aqui utilizada para traçar mapas de estabilidade é um trabalho original, jamais empregado para analisar o comportamento de escoamentos multifásicos como o do modelo estudado, e que todas as rotinas desenvolvidas foram testadas e estão funcionando corretamente, de modo que os interessados em continuar este trabalho possam utilizá-las sem necessidade de revisão ou de refazer os testes.

Como continuação deste trabalho, sugere-se pesquisar e aplicar ao modelo: novas alternativas para o cálculo do espectro de autovalores (como separar o problema singular do problema com autovalores finitos e não nulos), considerar um *riser* de geometria catenária e fração de vazio no *pipeline* variável no tempo e adicionar termos inerciais ao equacionamento, a fim de eliminar o problema da singularidade, adequando o equacionamento às alterações eventualmente propostas. Também seria interessante desenvolver metodologias para classificar os diferentes tipos de instabilidades hidrodinâmicas observadas, como intermitência severa dos tipos SS1, SS2 e SS3. Tais metodologias são úteis para determinar quais regimes intermitentes são aceitáveis ou não do ponto de vista operacional.

ANEXO A - Rotina para a Estabilidade pelo Critério de Boe

Rotina **Criterio_Boe**

```
% Definição das variáveis
% Viscosidade dinâmica do gás
    MUg = 1.8e-5; %[kg/m/s]
% Viscosidade dinâmica do líquido
    MUl = 1.0e-3; %[kg/m/s]
% Densidade do líquido
    ROl = 1000; %[kg/m3]
% Aceleração da gravidade
    g = 9.8; %[m/s2]
% Constante dos gases
    Rg = 287; %[m2/s2/K]
% Temperatura do gás
    T = 293; %[K]
% Comprimento do pipeline
    L = 9.1; %[m]
% Comprimento equivalente do buffer
    Le = 1.69; %[m]
% Diâmetro do pipeline
    D = 0.0254; %[m]
%Área do pipeline
    AREA = 0.25*pi*(D^2); %[m]
% Rugosidade do pipeline
    eps = 1.5e-6; %[m]
% Ângulo de inclinação do pipeline
    beta = 5*pi/180; %[rad]
 % Comprimento horizontal do riser
    X = 0; %[m]
% Altura total do riser
    Z = 3; %[m]
% Tolerância para verificação da convergência
    precision = 1.0e-6;
% Número de nós para a discretização do riser
    N = 51;
% Fator de sub-relaxação
    subrel = 0.5;
% Condições da atmosfera padrão
    T0 = 293; %[K]
    P0 = 1.01325*10^5; %[Pa]
    ROG = P0/(T0*Rg);

% Cálculo da geometria do problema
% Vetores posição, altura e inclinação
st = Z;
ds = st/(N-1);
s(1) = 0;
[z(1), theta(1)] = geometry(s(1));
AJL0max = 149*((D/4)^(2/3))*abs(sin(beta))^0.5;
Ql0max = AJL0max*AREA;
Ql0i = 1.0e-5; %[m3/s]
LIM = floor(Ql0max/Ql0i);
for i = 2:N
    s(i) = s(i-1) + ds;
    [z(i), theta(i)] = geometry(s(i));
```

```
end
% Vazão mássica de gás na entrada da tubulação
    mg0i = 1.0e-6; %[kg/s]
% Pressão no separador
    Ps = 1.01325*10^5; %[Pa]
i = 0;
Fig1 = figure('units','normalized','position',[.2 .2 .6 .6],'name',
'Criterio de Boe');

% Critério de Boe
for Ql0 = Ql0i:Ql0i:Ql0max
% Vazão mássica de gás na entrada da tubulação
    mg0 = 1.0e-6; %[kg/s]
% Pressão no separador
    Ps = 1.01325*10^5; %[Pa]
    AJG0 = 1;
    i = i + 1;
    Boe = 0.9;
    while ( (abs(Boe) > precision) )%&& (abs(Boe) < 1) )
    % Estado estacionário (Raoni)
        [P, a, jg, jl, ap] = steadystate(Ps, mg0, Ql0, T, Rg, ROl,
MUg, MUl, D, beta, eps, s, theta, z, N, subrel, precision);
        AJLb = jl(1);
        AJGb = jg(1);
        AP = ap;
        Pg = P(1);
    % Análise critério de BOE
        AJG0 = (Pg/P0)*(T0/T)*AJGb;
        Boe = AJLb - (P0*AJG0/(ROl*g*(L*AP + Le)));
        ajgo0 = (AJLb)*(ROl*g*(L*AP + Le))/P0;
        dAJGb= 1.1*abs(ajgo0 - AJG0);
        if (Boe > 0) && (Boe > precision)
            AJG0 = AJG0 + dAJGb;
            mg0 = ROG*AJG0*AREA;
        elseif ( (Boe < 0) && (abs(Boe) > precision) )
            AJG0 = AJG0 - dAJGb;
            mg0 = ROG*AJG0*AREA;
        end
    end
    jg0(i) = AJG0;
    jl0(i) = AJLb;
    plot(jg0(i),jl0(i),'ok','markerfacecolor','k')
    hold on
    figure(Fig1);
end
MG0 = mg0;
lim = floor(MG0/mg0i);
for mg0 = MG0:(-mg0i):mg0i
        i = i + 1;
        jl0(i) = AJL0max;
        jg0(i) = mg0/(ROG*AREA);
        plot(jg0(i),jl0(i),'ok','markerfacecolor','k')
        hold on
        figure(Fig1);
end
save 'data_Criterio_Boe'
```

ANEXO B – Rotinas do Programa Computacional Desenvolvido

Rotina **main_stab_criteria_fdd_5p**

```
% Definição das variáveis
% Viscosidade dinâmica do gás
    MUg = 1.8e-5; %[kg/m/s]
% Viscosidade dinâmica do líquido
    MUl = 1.0e-3; %[kg/m/s]
% Densidade do líquido
    ROl = 1000; %[kg/m3]
% Aceleração da gravidade
    g = 9.8; %[m/s2]
% Constante dos gases
    Rg = 287; %[m2/s2/K]
% Temperatura do gás
    T = 293; %[K]
% Comprimento do pipeline
    L = 9.1; %[m]
% Comprimento equivalente do buffer
    Le = 1.69; % 5.1 ; 10 [m]
% Diâmetro do conduto
    D = 0.0254; %[m]
% Área do conduto
    AREA = pi*(D/2)^2; %[m2]
% Rugosidade do conduto
    eps = 1.5e-6; %[m]
% Ângulo de inclinação do pipeline
    beta = 5*pi/180; %[rad]
% Comprimento horizontal do riser
    X = 0; %[m]
% Altura total do riser
    Z = 3.0; %[m]
% Tolerância para verificação da convergência
    precision = 1.0e-8;
% Número de nós para a discretização do riser
    N = 50;
% Fator de sub-relaxação
    subrel = 0.5;
% Condições da atmosfera padrão
    T0 = 293; %[K]
    P0 = 1.01325*10^5; %[Pa]
    ROg = P0/(T0*Rg); %[kg/m3]
% Pressão no separador
    Ps = 1.01325*10^5; %[Pa]
% Vetores jl, jg, Ql0, mg0
    jl(1) = 0.001;
    jg(1) = 0.001;
    QL0(1) = AREA*jl(1);
    mg0(1) = AREA*ROg*jg(1);
    i = 1;
while jl(i) < 0.01
    i = i + 1;
    jl(i) = jl(i-1) + 5*(10^-4);
    jg(i) = jg(i-1) + 5*(10^-4);
    QL0(i) = AREA*jl(i);
    mg0(i) = AREA*ROg*jg(i);
```

```
end
while jl(i) < 0.1
    i = i + 1;
    jl(i) = jl(i-1) + 5*(10^-3);
    jg(i) = jg(i-1) + 5*(10^-3);
    QL0(i) = AREA*jl(i);
    mg0(i) = AREA*ROg*jg(i);
end
while jl(i) < 1
    i = i + 1;
    jl(i) = jl(i-1) + 5*(10^-2);
    jg(i) = jg(i-1) + 5*(10^-2);
    QL0(i) = AREA*jl(i);
    mg0(i) = AREA*ROg*jg(i);
end
while jl(i) < 10
    i = i + 1;
    jl(i) = jl(i-1) + 5*(10^-1);
    jg(i) = jg(i-1) + 5*(10^-1);
    QL0(i) = AREA*jl(i);
    mg0(i) = AREA*ROg*jg(i);
end
n = i;
% Simulação
Fig1 = figure('units','normalized','position',[.2 .2 .6 .6],'name',
'Mapa de estabilidade');
for i = n:-1:1
    for j = 1:n
        [key,n_pos_eigen,lambda_r,lambda_i,maxlambda_r] =
stab_criteria_fdd_5p(N,QL0(i),mg0(j),Ps,D,eps,g,T,Rg,ROl,MUl,MUg,Z,b
eta,L,Le,subrel,precision);
        m_key(n+1-i,j) = key;
        m_n_pos_eigen(i,j) = n_pos_eigen;
        m_maxlambda_r(i,j) = maxlambda_r;
        if(m_key(n+1-i,j) > 0)
            loglog(jg(j),jl(i),'ob','markerfacecolor','b')
            hold on
        else
            loglog(jg(j),jl(i),'or','markerfacecolor','r')
            hold on
        end
        figure(Fig1);
    end
end
xlabel('jg (m/s)')
ylabel('jl (m/s)')
title('Mapa de estabilidade - stab criteria - N = 50, Tolerância =
1.0e-12')
Fig2 = figure('units','normalized','position',[.2 .2 .6 .6],'name',
'Número de autovalores com parte real positiva');
[C2,h2] =
contour(jg,jl,m_n_pos_eigen,[2,4,6,8,10,20,30,40,50,60,80,100,120]);
clabel(C2,h2,'LabelSpacing',1000)
xlabel('jg (m/s)')
ylabel('jl (m/s)')
set(gca,'xscale','log')
set(gca,'yscale','log')
title('Curvas de nível - Número de autovalores com parte real
positiva - stab criteria - N = 50, Tolerância = 1.0e-12')
```

```
colorbar
Fig3 = figure('units','normalized','position',[.2 .2 .6
.6],'name','Maior valor da parte real');
[C3,h3] = contour(jg,jl,m_maxlambda_r,[-200,-100,-50,-20,-10,-5,-2,-
1,0,1,2,5,10, 20,50,100,200,500,1000]);
clabel(C3,h3,'LabelSpacing',300)
set(gca,'xscale','log')
set(gca,'yscale','log')
xlabel('jg (m/s)')
ylabel('jl (m/s)')
title('Curvas de nível - Maior valor da parte real - stab criteria -
N = 50, Tolerância = 1.0e-12')
colorbar
save 'data_stab_criteria_N50_Beta_-5°_Le_1,69'
```

Rotina **stab_criteria_ fdd_5p**

```
function [key,n_pos_eigen,lambda_r,lambda_i,maxlambda_r] =
stab_criteria_fdd_5p(N,QL0D,MG0D,PTD,DIA,RUGOSIDADE,GRAVITY,TEMP,RGA
S,RHOL,MUL,MUG,LR,BETA,L,LB,subrel,tol)
% pipe sectional area
    AREA = pi*(DIA/2.0)^2; % meters^2
% non-dimensional number Pi_L
    PIL = GRAVITY*LR/(RGAS*TEMP);
% non-dimensional number Delta_u
    DELTAU = MUG/MUL;
% number of eigenvalues to evaluate. At least 6 eigenvalues with
option 'lr' and at least 6 eigenvalues with option 'lm'.
NE = max(round((2*N-1)/3),6);
% non-dimensional number
    PID = 2.0*GRAVITY*DIA*((AREA/QL0D)^2);
% non-dimensionalization
    MG0 = MG0D/(RHOL*QL0D);
    PT = PTD/(RHOL*RGAS*TEMP);
    QL0 = QL0D;
% relative and absolute tolerance
    RELTOL = 1.0e-13;
    ABSTOL = 1.0e-15;
% riser position and inclination angle
    ds = LR/(N-1);
    VS(1) = 0;
    [Z(1), THETA(1)] = geometry(VS(1));
    for i = 2:N
        VS(i) = VS(i-1) + ds;
        [Z(i), THETA(i)] = geometry(VS(i));
    end

% evaluate the stationary state
    [VP,VALPHAR,VJG,VJL,ALPHAP] = steadystate(PTD, MG0D, QL0D, TEMP,
RGAS, RHOL, MUG, MUL, DIA, BETA, RUGOSIDADE,VS, THETA, Z, N, subrel,
tol);
% Adimensionalização das variáveis
    VJL = VJL*(AREA/QL0D);
    VP = VP/(RHOL*RGAS*TEMP);
    VJG = VJG*(AREA/QL0D);
% spacial step
    DeltaS = abs(VS(2)-VS(1));
% build vectors A31, A32 and A33
```

```
    VA31 = VECTOR_A31(PIL, PID, DELTAU, VP, VJG, VALPHAR, QL0, RHOL,
MUL, AREA, DIA, GRAVITY, RUGOSIDADE, THETA, N);
    VA32 = VECTOR_A32(PIL, PID, DELTAU, VP, VJG, VALPHAR, QL0, RHOL,
MUL, AREA, DIA, GRAVITY, RUGOSIDADE, THETA, N);
    VA33 = VECTOR_A33(PIL, PID, DELTAU, VP, VJG, VALPHAR, QL0, RHOL,
MUL, AREA, DIA, RUGOSIDADE, THETA, N);
% build matrix G using the 5 point finite diference formula
    G =  Monta_Matriz_G_5p(N, VJG, VP, VP(1), VJG, VJG, VA31, VA32,
VA33, DeltaS);
% build vectors B11, B12, B21, B22 and B23
    VB11 = VECTOR_B11(VJG, VALPHAR, QL0, AREA, DIA, GRAVITY, THETA,
N);
    VB12 = VECTOR_B12(VJG, VALPHAR, QL0, AREA, DIA, GRAVITY, THETA,
N);
    VB21 = VECTOR_B21(VP, VJG, VALPHAR, QL0, AREA, DIA, GRAVITY,
THETA, N);
    VB22 = VECTOR_B22(VP, VJG, VALPHAR, QL0, AREA, DIA, GRAVITY,
THETA, N);
    VB23 = VECTOR_B23(VJG, VALPHAR, N);
% build matrix H
    PG = VP(1);
    [H,HA] =  Monta_Matriz_H_5p(N, VJG, VP, PG, L, LR, LB, VB11,
VB12, VB21, VB22, VB23, VA31, VA32, VA33, VJG, ALPHAP, DeltaS);
%
    ABSTOL = 1.0e-12;
    tol = ABSTOL;
    ND = 2*(N-1)+1;
    sigma = 0.0;
% use the large real part option for eigs (which = 'lr')
    [lambda,NEN] = espectro(ND,G,H,sigma,'lr',NE,ABSTOL);
    for i=1:1:(NE-NEN)
        lambda_r(i) = real(lambda(i));
        lambda_i(i) = imag(lambda(i));
    end
    k = NE-NEN;
    clear lambda NEN;
% use the large modulus option for eigs (which = 'lm')
    [lambda,NEN] = espectro(ND,G,H,sigma,'lm',NE,ABSTOL);
    count = 0;
    for i=1:1:(NE-NEN)
        key = 0;
        for j=1:1:k
            if abs(lambda(i)-complex(lambda_r(j),lambda_i(j))) <
sqrt(tol)
                key = key+1;
            end
        end
        if key == 0
            count = count+1;
            lambda_r(k+count) = real(lambda(i));
            lambda_i(k+count) = imag(lambda(i));
        end
    end
    k = k+count;
    clear lambda NEN;
% use the large modulus option for eigs (which = 'lm') and sigma = -
1000
    sigma = -1000.0;
    [lambda,NEN] = espectro(ND,G,H,sigma,'lm',NE,ABSTOL);
```

```
    count = 0;
    for i=1:1:(NE-NEN)
        key = 0;
        for j=1:1:k
            if abs(lambda(i)-complex(lambda_r(j),lambda_i(j))) <
sqrt(tol)
                key = key+1;
            end
        end
        if key == 0
            count = count+1;
            lambda_r(k+count) = real(lambda(i));
            lambda_i(k+count) = imag(lambda(i));
        end
    end
    k = k+count;
    clear lambda NEN;
% use the large modulus option for eigs (which = 'lm') and sigma = -
1
    sigma = -1.0;
    [lambda,NEN] = espectro(ND,G,H,sigma,'lm',NE,ABSTOL);
    count = 0;
    for i=1:1:(NE-NEN)
        key = 0;
        for j=1:1:k
            if abs(lambda(i)-complex(lambda_r(j),lambda_i(j))) <
sqrt(tol)
                key = key+1;
            end
        end
        if key == 0
            count = count+1;
            lambda_r(k+count) = real(lambda(i));
            lambda_i(k+count) = imag(lambda(i));
        end
    end
% total number of eigenvalues
    k = k+count;
% eliminate repeated eigenvalues
    i = 1;
    while i <= k
        j = i+1;
       while j <= k
           if abs(lambda_r(i)-lambda_r(j)) <= tol &&
abs(lambda_i(i)-lambda_i(j)) <= tol
               for l = j:1:k-1
                   lamba_r(l) = lambda_r(l+1);
                   lamba_i(l) = lambda_i(l+1);
               end
               lambda_r(k) = 0;
               lambda_i(k) = 0;
               k = k-1;
           end
            j = j+1;
       end
       i = i + 1;
    end
% check if all complex eigenvalues are complex conjugate in the list
of found eigenvalues
```

```
    count = 0;
    i = 1;
    maxlambda_r = lambda_r(i);
    while i <= k
        if i>1
            if lambda_r(i) > maxlambda_r
                maxlambda_r = lambda_r(i);
            end
        end
        if lambda_i(i) ~= 0
            key = 0;
            j = i+1;
               while j <= k
                  if lambda_i(j) ~= 0
                      if abs(lambda_i(i)+lambda_i(j)) <= sqrt(tol)
                          key = 1;
                          aux_r = lambda_r(j);
                          aux_i = lambda_i(j);
                          for l = j-1:-1:i+1
                              lambda_r(l+1) = lambda_r(l);
                              lambda_i(l+1) = lambda_i(l);
                          end
                          lambda_r(i+1) = aux_r;
                          lambda_i(i+1) = aux_i;
                          j = k;
                          i = i+1;
                      end
                   end
                j = j+1;
            end
            if key == 0
                count = count+1;
                lambda_r(k+count) = lambda_r(i);
                lambda_i(k+count) = -lambda_i(i);
            end
        end
        i = i+1;
    end
    k = k + count;
% check for eigenvalues with positive real part
    count =0;
    for i = 1:1:k
        if lambda_r(i) > 0
            count = count+1;
        end
    end
% stability criteria
    if count > 0
        key = 1;
        n_pos_eigen = count;
    else
        key = 0;
        n_pos_eigen = 0;
    end
    clear H HA G lambda;
end
```

Rotina **VECTOR_A31**

```
function VA31 = VECTOR_A31(PIL, PID, DELTAU, VP, VJG, VALPHAR, QL0,
RHOL, MUL, AREA, DIA, GRAVITY, RUGOSIDADE, THETA, N)
EDIA = RUGOSIDADE/DIA;
    for i=1:1:N
        J = 1.0 + VJG(i);
        [CD,UD] = coeficienteCDUDRRSA(J, AREA, DIA, GRAVITY, QL0,
THETA(i));
        Rem = (QL0*DIA*RHOL)/(AREA*MUL);
        Rem = Rem*(1.0 - VALPHAR(i) + VP(i)*VALPHAR(i))*abs(J)/(1.0
- VALPHAR(i) + DELTAU*VALPHAR(i));
        fm = ffan(EDIA, Rem);
        dfm = dfmdRe(EDIA, Rem);
        aux1 = (1.0 - VALPHAR(i) + VP(i)*VALPHAR(i))*abs(J)*(DELTAU
- 1.0) *VALPHAR(i)*VALPHAR(i)*CD;
        aux1 = aux1/(1.0 - VALPHAR(i) + DELTAU*VALPHAR(i));
        aux1 = aux1/VJG(i);
        aux1 = aux1 - (VP(i) -
1.0)*VALPHAR(i)*VALPHAR(i)*CD*abs(J)/VJG(i);
        aux1 = ((1.0 - VALPHAR(i) + VP(i)*VALPHAR(i))*abs(J)/J) +
aux1;
        aux1 = aux1/(1.0 - VALPHAR(i) + DELTAU*VALPHAR(i));
        aux1 = aux1*dfm*abs(J)*J*QL0*DIA*RHOL/(AREA*MUL);
        aux1 = 2*fm*abs(J) + aux1;
        aux1 = 4*(PIL/PID)*VJG(i)*(1.0 - VALPHAR(i) +
VP(i)*VALPHAR(i))*aux1;
        aux2 = sin(THETA(i)) + 4*fm*abs(J)*J/PID;
        aux2 = PIL*(VP(i) - 1.0)*VALPHAR(i)*VALPHAR(i)*CD*aux2;
        VA31(i) = aux1 - aux2;
    end
end
```

Rotina **VECTOR_A32**

```
function VA32 = VECTOR_A32(PIL, PID, DELTAU, VP, VJG, VALPHAR, QL0,
RHOL, MUL, AREA, DIA, GRAVITY, RUGOSIDADE, THETA, N)
EDIA = RUGOSIDADE/DIA;
    for i=1:1:N
        J = 1.0 + VJG(i);
        [CD,UD] = coeficienteCDUDRRSA(J, AREA, DIA, GRAVITY, QL0,
THETA(i));
        Rem = (QL0*DIA*RHOL)/(AREA*MUL);
        Rem = Rem*(1.0 - VALPHAR(i) + VP(i)*VALPHAR(i))*abs(J)/(1.0
- VALPHAR(i) + DELTAU*VALPHAR(i));
        fm = ffan(EDIA, Rem);
        dfm = dfmdRe(EDIA, Rem);
        aux1 = (1.0 - VALPHAR(i) + VP(i)*VALPHAR(i))*abs(J)*(DELTAU
- 1.0) *VALPHAR(i)*(1.0 - CD*VALPHAR(i));
        aux1 = aux1/(1.0 - VALPHAR(i) + DELTAU*VALPHAR(i));
        aux1 = aux1/VJG(i);
        aux1 = (VP(i) - 1.0)*VALPHAR(i)*(1.0 -
CD*VALPHAR(i))*abs(J)/VJG(i) - aux1;
        aux1 = ((1.0 - VALPHAR(i) + VP(i)*VALPHAR(i))*abs(J)/J) +
aux1;
        aux1 = aux1/(1.0 - VALPHAR(i) + DELTAU*VALPHAR(i));
        aux1 = aux1*dfm*abs(J)*J*QL0*DIA*RHOL/(AREA*MUL);
        aux1 = 2*fm*abs(J) + aux1;
```

```
        aux1 = 4*(PIL/PID)*VJG(i)*(1.0 - VALPHAR(i) +
VP(i)*VALPHAR(i))*aux1;
        aux2 = sin(THETA(i)) + 4*fm*abs(J)*J/PID;
        aux2 = PIL*(VP(i) - 1.0)*VALPHAR(i)*(1.0 -
CD*VALPHAR(i))*aux2;
        VA32(i) = aux1 + aux2;
    end
end
```

Rotina **VECTOR_A33**

```
function VA33 = VECTOR_A33(PIL, PID, DELTAU, VP, VJG, VALPHAR, QL0,
RHOL, MUL, AREA, DIA, RUGOSIDADE, THETA, N)
EDIA = RUGOSIDADE/DIA;
    for i=1:1:N
        J = 1.0 + VJG(i);
        Rem = (QL0*DIA*RHOL)/(AREA*MUL);
        Rem = Rem*(1.0 - VALPHAR(i) + VP(i)*VALPHAR(i))*abs(J)/(1.0
- VALPHAR(i) + DELTAU*VALPHAR(i));
        fm = ffan(EDIA, Rem);
        dfm = dfmdRe(EDIA, Rem);
        aux1 = 4*PIL/PID;
        aux1 = aux1*VJG(i)*(1.0 - VALPHAR(i) + VP(i)*VALPHAR(i));
        aux1 = aux1*dfm*abs(J)*J*QL0*DIA*RHOL/(AREA*MUL);
        aux1 = aux1*abs(J)*VALPHAR(i)/(1.0 - VALPHAR(i) +
DELTAU*VALPHAR(i));
        aux2 = sin(THETA(i)) + 4*fm*abs(J)*J/PID;
        aux2 = PIL*VJG(i)*VALPHAR(i)*aux2;
        VA33(i) = aux1 + aux2;
    end
end
```

Rotina **VECTOR_B11**

```
function VB11 = VECTOR_B11(VJG, VALPHAR, QL0, AREA, DIA, GRAVITY,
THETA,N)
    for i=1:1:N
        J = 1.0 + VJG(i);
        [CD,UD] = coeficienteCDUDRRSA(J, AREA, DIA, GRAVITY, QL0,
THETA(i));
        VB11(i) = CD*(VALPHAR(i)^2);
    end;
end
```

Rotina **VECTOR_B12**

```
function VB12 = VECTOR_B12(VJG, VALPHAR, QL0, AREA, DIA, GRAVITY,
THETA,N)
    for i=1:1:N
        J = 1.0 + VJG(i);
        [CD,UD] = coeficienteCDUDRRSA(J, AREA, DIA, GRAVITY, QL0,
THETA(i));
        VB12(i) = -VALPHAR(i)*(1.0 - CD*VALPHAR(i));
    end
end
```

Rotina **VECTOR_B21**

```
function VB21 =
VECTOR_B21(VP,VJG,VALPHAR,QL0,AREA,DIA,GRAVITY,THETA,N)
    for i=1:1:N
        J = 1.0+VJG(i);
        [CD,UD] = coeficienteCDUDRRSA(J, AREA, DIA, GRAVITY, QL0,
THETA(i));
        VB21(i) = -VP(i)*CD*(VALPHAR(i)^2);
    end
end
```

Rotina **VECTOR_B22**

```
function VB22 =
VECTOR_B22(VP,VJG,VALPHAR,QL0,AREA,DIA,GRAVITY,THETA,N)
    for i=1:1:N
        J = 1.0 + VJG(i);
        [CD,UD] = coeficienteCDUDRRSA(J, AREA, DIA, GRAVITY, QL0,
THETA(i));
        VB22(i) = VP(i)*VALPHAR(i)*(1.0 - CD*VALPHAR(i));
    end
end
```

Rotina **VECTOR_B23**

```
function VB23 = VECTOR_B23(VJG, VALPHAR, N)
    for i=1:1:N
        VB23(i) = VJG(i)*VALPHAR(i);
    end
end
```

Rotina **Matriz_K11_5p**

```
function [K11] = Matriz_K11_5p(N, D11, DeltaS)
    K11 = zeros([N-1 N-1]);
    K11(1,1) = -10*D11(2)/(12*DeltaS);
    K11(1,2) = 18*D11(2)/(12*DeltaS);
    K11(1,3) = -6*D11(2)/(12*DeltaS);
    K11(1,4) = D11(2)/(12*DeltaS);
    K11(2,1) = -8*D11(3)/(12*DeltaS);
    K11(2,3) = 8*D11(3)/(12*DeltaS);
    K11(2,4) = -D11(3)/(12*DeltaS);
    for i = 3:1:N-3
        K11(i,i-2) = D11(i+1)/(12*DeltaS);
        K11(i,i-1) = -8*D11(i+1)/(12*DeltaS);
        K11(i,i+1) = 8*D11(i+1)/(12*DeltaS);
        K11(i,i+2) = -D11(i+1)/(12*DeltaS);
    end
    K11(N-2,N-5) = -D11(N-1)/(12*DeltaS);
    K11(N-2,N-4) = 6*D11(N-1)/(12*DeltaS);
    K11(N-2,N-3) = -18*D11(N-1)/(12*DeltaS);
    K11(N-2,N-2) = 10*D11(N-1)/(12*DeltaS);
    K11(N-2,N-1) = 3*D11(N-1)/(12*DeltaS);
    K11(N-1,N-5) = 3*D11(N)/(12*DeltaS);
    K11(N-1,N-4) = -16*D11(N)/(12*DeltaS);
    K11(N-1,N-3) = 36*D11(N)/(12*DeltaS);
```

```
    K11(N-1,N-2) = -48*D11(N)/(12*DeltaS);
    K11(N-1,N-1) = 25*D11(N)/(12*DeltaS);
end
```

Rotina **Matriz_K22_5p**

```
function [K22] = Matriz_K22_5p(N,jg,P,DeltaS)
    K22 = zeros([N-1 N-1]);
    K22(1,1) = -10*jg(2)*P(2)/(12*DeltaS);
    K22(1,2) = 18*jg(2)*P(3)/(12*DeltaS);
    K22(1,3) = -6*jg(2)*P(4)/(12*DeltaS);
    K22(1,4) = jg(2)*P(5)/(12*DeltaS);
    K22(2,1) = -8*jg(3)*P(2)/(12*DeltaS);
    K22(2,3) = 8*jg(3)*P(4)/(12*DeltaS);
    K22(2,4) = -jg(3)*P(5)/(12*DeltaS);
    for i = 3:1:N-3
        K22(i,i-2) = jg(i+1)*P(i-1)/(12*DeltaS);
        K22(i,i-1) = -8*jg(i+1)*P(i)/(12*DeltaS);
        K22(i,i+1) = 8*jg(i+1)*P(i+2)/(12*DeltaS);
        K22(i,i+2) = -jg(i+1)*P(i+3)/(12*DeltaS);
    end
    K22(N-2,N-5) = -jg(N-1)*P(N-4)/(12*DeltaS);
    K22(N-2,N-4) = 6*jg(N-1)*P(N-3)/(12*DeltaS);
    K22(N-2,N-3) = -18*jg(N-1)*P(N-2)/(12*DeltaS);
    K22(N-2,N-2) = 10*jg(N-1)*P(N-1)/(12*DeltaS);
    K22(N-2,N-1) = 3*jg(N-1)*P(N)/(12*DeltaS);
    K22(N-1,N-5) = 3*jg(N)*P(N-4)/(12*DeltaS);
    K22(N-1,N-4) = -16*jg(N)*P(N-3)/(12*DeltaS);
    K22(N-1,N-3) = 36*jg(N)*P(N-2)/(12*DeltaS);
    K22(N-1,N-2) = -48*jg(N)*P(N-1)/(12*DeltaS);
    K22(N-1,N-1) = 25*jg(N)*P(N)/(12*DeltaS);
end
```

Rotina **Matriz_K23_5p**

```
function [K23] = Matriz_K23_5p(N,jg,P,DeltaS)
    K23 = zeros ([N-1 1]);
    K23(1,1) = -3*jg(2)*jg(1)/(12*DeltaS) +
3*jg(2)*jg(1)*P(1)/(12*DeltaS*P(1));
    K23(2,1) = jg(3)*jg(1)/(12*DeltaS) -
jg(3)*jg(1)*P(1)/(12*DeltaS*P(1));
end
```

Rotina **Matriz_K24_5p**

```
function [K24] = Matriz_K24_5p(N,jg,DeltaS)
    K24(1,1) = -10*jg(2)*jg(2)/(12*DeltaS);
    K24(1,2) = 18*jg(2)*jg(3)/(12*DeltaS);
    K24(1,3) = -6*jg(2)*jg(4)/(12*DeltaS);
    K24(1,4) = jg(2)*jg(5)/(12*DeltaS);
    K24(2,1) = -8*jg(3)*jg(2)/(12*DeltaS);
    K24(2,3) = 8*jg(3)*jg(4)/(12*DeltaS);
    K24(2,4) = -jg(3)*jg(5)/(12*DeltaS);
    for i = 3:1:N-4
        K24(i,i-2) = jg(i+1)*jg(i-1)/(12*DeltaS);
        K24(i,i-1) = -8*jg(i+1)*jg(i)/(12*DeltaS);
        K24(i,i+1) = 8*jg(i+1)*jg(i+2)/(12*DeltaS);
```

```
        K24(i,i+2) = -jg(i+1)*jg(i+3)/(12*DeltaS);
    end
    K24(N-3,N-5) = jg(N-2)*jg(N-4)/(12*DeltaS);
    K24(N-3,N-4) = -8*jg(N-2)*jg(N-3)/(12*DeltaS);
    K24(N-3,N-2) = 8*jg(N-2)*jg(N-1)/(12*DeltaS);
    K24(N-2,N-5) = -jg(N-1)*jg(N-4)/(12*DeltaS);
    K24(N-2,N-4) = 6*jg(N-1)*jg(N-3)/(12*DeltaS);
    K24(N-2,N-3) = -18*jg(N-1)*jg(N-2)/(12*DeltaS);
    K24(N-2,N-2) = 10*jg(N-1)*jg(N-1)/(12*DeltaS);
    K24(N-1,N-5) = 3*jg(N)*jg(N-4)/(12*DeltaS);
    K24(N-1,N-4) = -16*jg(N)*jg(N-3)/(12*DeltaS);
    K24(N-1,N-3) = 36*jg(N)*jg(N-2)/(12*DeltaS);
    K24(N-1,N-2) = -48*jg(N)*jg(N-1)/(12*DeltaS);
end
```

Rotina **Matriz_K33_5p**

```
function [K33] = Matriz_K33_5p(jg,P,D33,A32,A33,DeltaS)
    K33(1,1) = -25*D33(1)/(12*DeltaS) - A32(1)*jg(1)/P(1) + A33(1);
end
```

Rotina **Matriz_K34_5p**

```
function [K34] = Matriz_K34_5p(N,D33,DeltaS)
    K34 = zeros([1 N-2]);
    K34(1,1) = 48*D33(1)/(12*DeltaS);
    K34(1,2) = -36*D33(1)/(12*DeltaS);
    K34(1,3) = 16*D33(1)/(12*DeltaS);
    K34(1,4) = -3*D33(1)/(12*DeltaS);
end
```

Rotina **Matriz_K41_5p**

```
function [K41] = Matriz_K41_5p(N,A31)
    K41 = zeros([N-2 N-1]);
    for i = 1:1:N-2
        K41(i,i) = A31(i+1);
    end
end
```

Rotina **Matriz_K42_5p**

```
function [K42] = Matriz_K42_5p(N,A32)
    K42 = zeros([N-2 N-1]);
    for i = 1:1:N-2
        K42(i,i) = A32(i+1);
    end
end
```

Rotina **Matriz_K43_5p**

```
function [K43] = Matriz_K43_5p(N,D33,DeltaS)
    K43 = zeros([N-2 1]);
    K43(1,1) = -3*D33(2)/(12*DeltaS);
    K43(2,1) = D33(3)/(12*DeltaS);
end
```

Rotina **Matriz_K44_5p**

```
function [K44] = Matriz_K44_5p(N,D33,A33,DeltaS)
    K44(1,1) = A33(2) - 10*D33(2)/(12*DeltaS);
    K44(1,2) = 18*D33(2)/(12*DeltaS);
    K44(1,3) = -6*D33(2)/(12*DeltaS);
    K44(1,4) = D33(2)/(12*DeltaS);
    K44(2,1) = -8*D33(3)/(12*DeltaS);
    K44(2,2) = A33(3);
    K44(2,3) = 8*D33(3)/(12*DeltaS);
    K44(2,4) = -D33(3)/(12*DeltaS);
    for i = 3:1:N-4
        K44(i,i-2) = D33(i+1)/(12*DeltaS);
        K44(i,i-1) = -8*D33(i+1)/(12*DeltaS);
        K44(i,i) = A33(i+1);
        K44(i,i+1) = 8*D33(i+1)/(12*DeltaS);
        K44(i,i+2) = -D33(i+1)/(12*DeltaS);
    end
    K44(N-3,N-5) = D33(N-2)/(12*DeltaS);
    K44(N-3,N-4) = -8*D33(N-2)/(12*DeltaS);
    K44(N-3,N-3) = A33(N-2);
    K44(N-3,N-2) = 8*D33(N-2)/(12*DeltaS);
    K44(N-2,N-5) = -D33(N-1)/(12*DeltaS);
    K44(N-2,N-4) = 6*D33(N-1)/(12*DeltaS);
    K44(N-2,N-3) = -18*D33(N-1)/(12*DeltaS);
    K44(N-2,N-2) = A33(N-1) + 10*D33(N-1)/(12*DeltaS);
end
```

Rotina **Matriz_K44_5p_inversa**

```
function [K44I] = Matriz_K44_5p_inversa(K44,N)
    K44I = inv(K44);
end
```

Rotina **Matriz_M11_5p**

```
function [M11] = Matriz_M11_5p(N,B11)
    for i = 1:1:N-1
        M11(i,i) = B11(i+1);
    end
end
```

Rotina **Matriz_M12_5p**

```
function [M12] = Matriz_M12_5p(N,B12)
    for i = 1:1:N-1
        M12(i,i) = B12(i+1);
    end
end
```

Rotina **Matriz_M21_5p**

```
function [M21] = Matriz_M21_5p(N,B21)
    for i = 1:1:N-1
        M21(i,i) = B21(i+1);
    end
end
```

Rotina **Matriz_M22_5p**

```
function [M22] = Matriz_M22_5p(N,B22)
    for i = 1:1:N-1
        M22(i,i) = B22(i+1);
    end
end
```

Rotina **Matriz_M23_5p**

```
function [M23] = Matriz_M23_5p(N,jg,P,PG,L,LR,LB,ALPHAP,DeltaS)
    M23 = zeros([N-1 1]);
    M23(1,1) = ((3*jg(2)*P(1))/(12*DeltaS*PG))*((L/LR)*ALPHAP +
LB/LR);
    M23(2,1) = -((jg(3)*P(1))/(12*DeltaS*PG))*((L/LR)*ALPHAP +
LB/LR);
end
```

Rotina **Matriz_M24_5p**

```
function [M24] = Matriz_M24_5p(N,B23)
    M24 = zeros([N-1 N-2]);
    for i = 1:1:N-2
        M24(i,i) = B23(i+1);
    end
end
```

Rotina **Matriz_M33_5p**

```
function [M33] = Matriz_M33_5p(A32,PG,L,LR,LB,ALPHAP)
    M33(1,1) = -(A32(1)/PG)*((L/LR)*ALPHAP + LB/LR);
end
```

Rotina **Monta_Matriz_G_5p**

```
function [G] = Monta_Matriz_G_5p(N, JG, P, PG, D11, D33, A31, A32,
A33, DeltaS)
% geração dos blocos com elementos não nulos da matriz K
    K11 = Matriz_K11_5p(N,D11,DeltaS);
    K22 = Matriz_K22_5p(N,JG,P,DeltaS);
    K23 = Matriz_K23_5p(N,JG,P,DeltaS);
    K24 = Matriz_K24_5p(N,JG,DeltaS);
    K33 = Matriz_K33_5p(JG,P,D33,A32,A33,DeltaS);
    K34 = Matriz_K34_5p(N,D33,DeltaS);
    K41 = Matriz_K41_5p(N,A31);
    K42 = Matriz_K42_5p(N,A32);
    K43 = Matriz_K43_5p(N,D33,DeltaS);
    K44 = Matriz_K44_5p(N,D33,A33,DeltaS);
    K44I = Matriz_K44_5p_inversa(K44,N);
% montagem dos blocos da matriz G
    G1 = [K11 zeros([N-1 N-1]) zeros([N-1 1])];
% calculo de K44I*K4j, j=1,2,3
    K44I1 = K44I*K41;
    K44I2 = K44I*K42;
    K44I3 = K44I*K43;
    G2 = [-K24*K44I1 K22-K24*K44I2 K23-K24*K44I3];
    G3 = [-K34*K44I1 -K34*K44I2 K33-K34*K44I3];
```

```
% montagem da matriz G
    G = [G1; G2; G3];
end
```

Rotina **Monta_Matriz_H_5p**

```
function [H,HA] = Monta_Matriz_H_5p(N, JG, P, PG, L, LR, LB, B11,
B12, B21, B22, B23, A31, A32, A33, D33, ALPHAP, DeltaS)
% geração dos blocos com elementos não nulos
    M11 = Matriz_M11_5p(N,B11);
    M12 = Matriz_M12_5p(N,B12);
    M21 = Matriz_M21_5p(N,B21);
    M22 = Matriz_M22_5p(N,B22);
    M23 = Matriz_M23_5p(N,JG,P,PG,L,LR,LB,ALPHAP,DeltaS);
    M24 = Matriz_M24_5p(N,B23);
    M33 = Matriz_M33_5p(A32,PG,L,LR,LB,ALPHAP);
% matriz K44 e sua inversa e matrizes K41 e K42
    K44 = Matriz_K44_5p(N,D33,A33,DeltaS);
    K44I = Matriz_K44_5p_inversa(K44,N);
    K41 = Matriz_K41_5p(N,A31);
    K42 = Matriz_K42_5p(N,A32);
    K43 = Matriz_K43_5p(N,D33,DeltaS);
    HA = [M11 M12 zeros([N-1 1]); M21 M22 M23; zeros([1 2*N-2])
M33];
% montagem das matrizes auxiliares
    H1 = [M11 M12 zeros([N-1 1])];
    H2 = [M21-M24*(K44I*K41) M22-M24*(K44I*K42) M23-M24*(K44I*K43)];
    H3 = [zeros([1 N-1]) zeros([1 N-1]) M33];
% montagem da matriz H
    H = [H1; H2; H3];
end
```

Rotina **espectro**

```
function [lambda,NEN] = espectro(ND,K,M,sigma,which,NE,tol)
% montagem de K-sigma M
    if sigma= = 0
        for i = 1:1:ND
            for j = 1:1:ND
                A(i,j) = K(i,j);
            end
        end
    else
        for i = 1:1:ND
            for  j =1:1:ND
                A(i,j) = K(i,j)-sigma*M(i,j);
            end
        end
    end
% fatoração LU da matriz A = K-sigma*M
    SA = sparse(A);
    [L,U,P,Q,R] = lu(SA);
% parâmetros para a rotina eigs
    opts.issyn = 0;
    opts.isreal = 1;
    opts.tol = tol;
    opts.p = 2*NE+2;
    opts.disp = 0;
```

```
% chamada da rotina eigs
    nu = eigs(@(x) ksmifun(x, ND, L, U, P, Q, R, M), ND, NE, which,
opts);
% contagem do números de autovalores não nulos ou maiores que tol
    NENN = 0; % numero de autovalores não nulos
    NEN = 0; % numero de autovalores nulos
    for i=1:1:NE
        if abs(nu(i)) >= tol
            NENN = NENN+1;
            aux = abs(nu(i));
            aux = aux^2;
            auxr = real(nu(i));
            auxi = imag(nu(i));
            lambda(NENN) = complex(-sigma-auxr/aux,auxi/aux);
        else
            NEN = NEN+1;
        end
    end
end
```

Rotina **ksmifun**

```
function y = ksmifun(x,n,L,U,P,Q,R,M)
% multiplicação por M
    z = zeros([n 1]);
    for i=1:1:n
        for j=1:1:n
            z(i) = z(i)+M(i,j)*x(j);
        end
    end
% obter y tal que (K-sigma*M)*y = z
    w = mldivide(R,z);
    z = P*w;
    w = mldivide(L,z);
    z = mldivide(U,w);
    y = Q*z;
end
```

Rotina **coeficienteCDUDRRSA**

```
function [CD,UD] = coeficienteCDUDRRSA(J, AREA, DIA, GRAVITY, QL0,
THETA)
    aux =  AREA*sqrt(GRAVITY*DIA)/QL0;
    if (abs(J) < 3.5*aux)
        UD =  aux*(0.35*sin(THETA)+0.54*cos(THETA));
        CD = 1.05+0.15*sin(THETA);
    else
        UD = aux*0.35*sin(THETA);
        CD = 1.2;
    End
end
```

Rotina **dfmdRe**

```
function dfm = dfmdRe(EDIA,Rem)
    a = EDIA/3.7065;
    b = 5.0452;
```

```
    c = (EDIA^1.1098)/2.8257;
    d = 5.8506;
    e = 0.8981;
    aux1 = a - b*log(c + d*(Rem^-e))/(Rem*log(10));
    aux2 = (log(aux1))^3;
    dfm = 1/(aux1*aux2);
    dfm = -(1/8)*log(10)*log(10)*dfm;
    dfm = dfm*(b/log(10))*((d*e*(Rem^(-2 - e))/(c + d*(Rem^-e))) +
log(c + d*(Rem^-e))/ (Rem^2));
end
```

Rotina **TESTE_VECTOR_A33**

```
% Definição das variáveis
% Viscosidade dinâmica do gás
   MUG = 1.8e-5; %[kg/m/s]
% Viscosidade dinâmica do líquido
   MUL = 1.0e-3; %[kg/m/s]
% Densidade do líquido
   RHOL = 1000; %[kg/m3]
% Aceleração da gravidade
   GRAVITY = 9.8; %[m/s2]
% Constante dos gases
   RGAS = 287; %[m2/s2/K]
% Temperatura do gás
   TEMP = 293; %[K]
% Comprimento do pipeline
   L = 9.1; %[m]
% Comprimento equivalente do buffer
   Le = 1.69; %[m]
% Diâmetro do pipeline
   DIA = 0.0254; %[m]
% Área do pipeline
   AREA = pi*(DIA/2)^2; %[m]
% Rugosidade do pipeline
   RUGOSIDADE = 1.5e-6; %[m]
% Ângulo de inclinação do pipeline
   BETA = 5*pi/180; %[rad]
% Comprimento horizontal do riser
   X = 0; %[m]
% Altura total do riser
   LR = 3.0; %[m]
% Tolerância para verificação da convergência
   precision = 1.0e-8;
% Número de nós para a discretização do riser
   N = 50;
% Fator de sub-relaxação
   subrel = 0.5;
% Condições da atmosfera padrão
   T0 = 293; %[K]
   P0 = 1.01325*10^5; %[Pa]
   RHOG = P0/(T0*RGAS);
% Pressão no separador
   PTD = 1.01325*10^5; %[Pa]
% Vetores jl, jg, Ql0, mg0
   jl = 0.01;
   jg = 0.1;
   QL0D = AREA*jl;
```

```
   MG0D = AREA*RHOG*jg;
% non-dimensional number Pi_L
   PIL = GRAVITY*LR/(RGAS*TEMP);
% non-dimensional number Delta_u
   DELTAU = MUG/MUL;
% non-dimensional number PID = g*D*(A/QL0)^2
   PID = 2.0*GRAVITY*DIA*((AREA/QL0D)^2);
% non-dimensionalization
   MG0 = MG0D/(RHOL*QL0D);
   PT = PTD/(RHOL*RGAS*TEMP);
   QL0 = QL0D;
% relative and absolute tolerance
   RELTOL = 1.0e-13;
   ABSTOL = 1.0e-15;
% riser position and inclination angle
   ds = LR/(N-1);
   VS(1) = 0;
   [Z(1), THETA(1)] = geometry(VS(1));
   for i = 2:N
       VS(i) = VS(i-1) + ds;
       [Z(i), THETA(i)] = geometry(VS(i));
   end
% evaluate the stationary state
   [VP,VALPHAR,VJG,VJL,ALPHAP] = steadystate(PTD,MG0D,QL0D,TEMP,
RGAS,RHOL,MUG,MUL,DIA,BETA,RUGOSIDADE,VS,THETA,Z,N,subrel,precision)
% Adimensionalização das variáveis
   VJL = VJL*(AREA/QL0D);
   VP = VP/(RHOL*RGAS*TEMP);
   VJG = VJG*(AREA/QL0D);
% check the vector A33
   VA33 = VECTOR_A33(PIL,PID,DELTAU,VP,VJG,VALPHAR,QL0,RHOL,MUL,
AREA,DIA,RUGOSIDADE,THETA,N);
% Perturbação em P
   DELTAVP = 0.01*VP(1);
% compare values for A33
   EDIA = RUGOSIDADE/DIA;
   for i = 1:1:N
     J = 1.0 + VJG(i);
     [CD,UD] = coeficienteCDUDRRSA(J,AREA,DIA,GRAVITY,QL0,THETA(i));
     Rem_tilde = ((QL0*DIA*RHOL)/(AREA*MUL))*(1.0 - VALPHAR(i) +
VP(i)*VALPHAR(i))*abs(J)/(1.0 - VALPHAR(i) + DELTAU*VALPHAR(i));
     aux = VALPHAR(i)*abs(J);
     Rem_hat_plus = ((QL0*DIA*RHOL)/(AREA*MUL))*(1.0/(1.0 -
VALPHAR(i) + DELTAU*VALPHAR(i)))*aux*(+DELTAVP);
     Rem_hat_minus = ((QL0*DIA*RHOL)/(AREA*MUL))*(1.0/(1.0 -
VALPHAR(i) + DELTAU*VALPHAR(i)))*aux*(-DELTAVP);
     D1fm_plus = dfmdRe(EDIA,Rem_tilde);
     D1fm_minus = dfmdRe(EDIA,Rem_tilde);
     fm_plus = ffan(EDIA,Rem_tilde);
     fm_minus = ffan(EDIA,Rem_tilde);
% dpds+
     aux1 = sin(THETA(i)) + (4/PID)*(fm_plus +
D1fm_plus*Rem_hat_plus)*(abs(J)*J);
     aux2 = VJG(i)*(1.0 - VALPHAR(i) + VP(i)*VALPHAR(i) +
VALPHAR(i)*DELTAVP);
     dpds_plus = - PIL*aux1*aux2;
% dpds-
     aux1 = sin(THETA(i)) + (4/PID)*(fm_minus
+D1fm_minus*Rem_hat_minus)*(abs(J)*J);
```

```
      aux2 = VJG(i)*(1.0 - VALPHAR(i) + VP(i)*VALPHAR(i) +
VALPHAR(i)*(-DELTAVP));
      dpds_minus = - PIL*aux1*aux2;
      A33(i) = (dpds_minus - dpds_plus)/(2*DELTAVP);
      VERROS(i) = 100*(A33(i) - VA33(i))/A33(i);
   end
   plot(VS,VERROS)
```

ANEXO C - Rotinas para o cálculo do estado estacionário [21]

Rotina **geometry**

```
function [z, theta] = geometry(s, A)
    z = s;
    theta = pi/2;
end
```

Rotina **steadystate**

```
function [P, a, jg, jl, ap] = steadystate(Ps, mg0, Ql0, T, Rg, ROl,
MUg, MUl, D, beta, eps, s, theta, z, N, subrel, precision)
    A = pi*(D^2)/4;
% jl is constant and equal to Ql0/A
    jl = Ql0/A;
    P(N) = Ps;
    jg(N) = Rg*T*mg0/(Ps*A);
    j = jg(N) + jl;
    [Cd, Ud] = cdud(j, D, theta(N));
    a(N) = jg(N)/(Cd*j + Ud);
    for i = (N-1):(-1):1
        ds = s(i) - s(i+1);
        dz = z(i) - z(i+1);
        P(i) = P(i+1);
        jg(i) = Rg*T*mg0/(P(i)*A);
        j = jg(i) + jl;
        [Cd, Ud] = cdud(j, D, theta(i));
        a(i) = jg(i)/(Cd*j + Ud);
        DP = 1;
        Da = 1;
        while (DP > precision) || (Da > precision)
            Pnew = dpds(P(i+1), P(i), ds, dz, j, a(i), ROl, Rg, T,
MUl, MUg, D, eps);
             jg(i) = Rg*T*mg0/(Pnew*A);
             j = jg(i) + jl;
            [Cd, Ud] = cdud(j, D, theta(i));
            anew = jg(i)/(Cd*j + Ud);
            DP = abs(P(i) - Pnew)/P(i);
            Da = abs(a(i) - anew)/a(i);
            P(i) = subrel*Pnew + (1 - subrel)*P(i);
            a(i) = subrel*anew + (1 - subrel)*a(i);
        end
         jg(i) = Rg*T*mg0/(P(i)*A);
         j = jg(i) + jl;
         [Cd, Ud] = cdud(j, D, theta(i));
         a(i) = jg(i)/(Cd*j + Ud);
     end
      jl = ones(1,N)*jl;
     ap = loc_eq(P(1), jg(1), jl(1), ROl, (P(1)/(Rg*T)), MUl, MUg,
D, eps, beta, precision);
end
```

Rotina **cdud**

```
function [Cd, Ud] = cdud(j, D, theta)
    g = 9.8;
    Fr = abs(j)/sqrt(g*D);
    if Fr < 3.495
        Cd = 1.05 + 0.15*sin(theta);
        Ud = (0.35*sin(theta) + 0.54*cos(theta))*sqrt(g*D);
    elseif Fr > 3.505
        Cd = 1.2;
        Ud = 0.35*sin(theta)*sqrt(g*D);
    else
        Cd1 = 1.05 + 0.15*sin(theta);
        Ud1 = (0.35*sin(theta) + 0.54*cos(theta))*sqrt(g*D);
        Cd2 = 1.2;
        Ud2 = 0.35*sin(theta)*sqrt(g*D);
        FRAC = (3.505 - Fr)*100;
        Cd = Cd1*FRAC + Cd2*(1 - FRAC);
        Ud = Ud1*FRAC + Ud2*(1 - FRAC);
    end
end
```

Rotina **dpds**

```
function P2 = dpds(P1, P2pc, ds, dz, j, a, ROl, Rg, T, MUl, MUg, D,
eps)
    g = 9.8;
    ROm = ROl*(1-a) + P2pc*a/(Rg*T);
    MUm = MUl*(1-a) + MUg*a;
    Re = ROm*D*abs(j)/MUm;
    fm = ffan(eps/D, Re);
    dW = g*dz + 2*fm*j*abs(j)*ds/D;
    P2 = ( P1 - ROl*(1 - a)*dW )/(1 + a*dW/(Rg*T));
end
```

Rotina **ffan**

```
function f = ffan(epsD, Re)
    if Re<2000
        f = 16 / Re;
    elseif Re > 2300
        f = log10( (epsD^1.1098)/2.8257 + 5.8506/Re^0.8981 );
        f = epsD/3.7065 - 5.0452*f/Re;
        f = (-4*log10(f))^(-2);
    else    % Interpolates between Re=2000 and Re=2300
        fl = 16/2000;
        ft = log10( (epsD^1.1098)/2.8257 + 5.8506/2300^0.8981 );
        ft = epsD/3.7065 - 5.0452*ft/2300;
        ft = (-4*log10(ft))^(-2);
        f = (Re-2000)*ft + (2300-Re)*fl;
        f = f/300;
    end
end
```

Rotina **loc_eq**

```
function ap = loc_eq(P, jg, jl, ROl, ROg, MUl, MUg, D, eps, beta,
precision)
  fi = 0.0142; % Interfacial friction factor
  g = 9.8;
  gammamin=0;
  gammamax=1;
  gamma = (gammamin+gammamax)/2;
  while (gammamax - gammamin) > precision
    ap = gamma2ap(gamma);
    gammai = sin(pi*gamma)/pi;
    Reg = abs(jg)*ROg*D/((1-gamma+gammai)*MUg);
    Rel = abs(jl)*ROl*D/(gamma*MUl);
    ui = interfacial_speed(jl, ROl, MUl, D, gamma);
    eq = 0.5*ffan(eps/D,Reg)*ROg*jg*abs(jg)*(1-gamma)/ap^3;
    eq = eq - 0.5*ffan(eps/D,Rel)*ROl*jl*abs(jl)*gamma/(1-ap)^3;
    eq = eq+ 0.5*fi*ROg*(jg/ap-ui)*abs(jg/ap-ui)*gammai/(ap*(1-ap));
    eq = eq + (ROl-ROg)*D*g*sin(beta)/4;
      if eq > 0
          gammamax=gamma;
          gamma = (gammamin+gammamax)/2;
      elseif eq < 0
          gammamin=gamma;
          gamma = (gammamin+gammamax)/2;
      else
          gammamin=gamma;
          gammamax=gamma;
      end
  end
  ap = gamma2ap(gamma);
end
```

Rotina **gamma2ap**

```
function ap = gamma2ap(gamma)
    if (gamma>=0) && (gamma <1)
        ap = 1 - gamma + sin(2*pi*gamma)/(2*pi);
    elseif gamma == 1
        ap = 0;
    else
        display('Gamma must be a positive number smaller than 1')
    end
end
```

Rotina **interfacial_speed**

```
function u = interfacial_speed(jl, ROl, mul, D, gamma)
    Rel = abs(jl)*D*ROl/(gamma*mul);
    ap = gamma2ap(gamma);
    if Rel<2000
        u = 1.8*jl/(1-ap);
    elseif Rel>2200
        u = jl/(1-ap);
    else  % interpolates between 2000 and 2200
        u = jl/(1-ap) * (1.8*(2200-Rel) + (Rel-2000) )/200;
    end
end
```

REFERÊNCIAS

[1] BALIÑO, J. L., **Análise de intermitência severa em *risers* de geometria catenária**, *Tese de Livre Docência*, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 2008, 141 p.

[2] MECÂNICA DOS FLUIDOS APLICADA A DUTOS DE PETRÓLEO E GÁS, **Apostila**, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 2008.

[3] TAITEL, Y., **Stability of severe slugging**, *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 12, pp. 203-217, 1986.

[4] WALLIS, GRAHAM B., **One-dimensional two-phase flow**, New York: McGraw-Hill, 1969, 408 p.

[5] MOKHATAB, S., **Severe slugging in a catenary-shaped riser**: experimental and simulation studies, *Petroleum Science and Technology*, 2007, 719-740 p.

[6] THOMAZ, R. C., **Simulação de escoamentos multifásicos. Aplicação a intermitência severa em sistemas de produção de petróleo**, São Paulo, 2009. 60 p.

[7] TAITEL, Y. *et al.*, **Severe Slugging in a riser system: experiments and modeling**, *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 16, pp. 57-68, 1990.

[8] ZAKARIAN, E., **Analysis of two-phase flow instabilities in pipe-riser systems**, *2000 ASME Pressure Vessels and Piping Conference*, Seattle, Washington, USA, 2000.

[9] BALIÑO, J. L., **Modelado y simulación de intermitencia severa (*severe slugging*) en sistemas *pipeline-riser*, aplicado a tecnología de petróleo**, *IX Reunión sobre Recientes Avances en Física e Fluidos y sus Aplicaciones* (*FLUIDOS 2006*), Mendoza, Argentina, 2006.

[10] BALIÑO, J. L., **Análise de intermitência severa em *risers* de geometria catenária**, *Relatório Final Projeto Petrobras/FUSP 0050.0007646.04.2*, 2006, 191 p.

[11] BALIÑO, J. L., BURR, K. P. & PEREIRA, N. A. L., **Modeling and simulation of severe slugging in pipeline-riser systems**, *XIX International Congress of Mechanical Engineering* (*COBEM 2007*), Brasília, Brasil, Novembro 2007.

[12] JANSEN, F. E., SHOHAM, O. & TAITEL, Y., **The elimination of severe slugging - Experiments and modeling**, *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 22, No. 6, pp. 1055-1072, 1996.

[13] SARICA, C. & SHOHAM, O., **A simplified transient model for pipeline-riser systems**, *Chemical Engineering Science*, vol. 46, No. 9, pp. 2167-2179, 1991.

[14] BURR, K. P., **Análise de estabilidade para *riser* em catenária: resumo de equações**, São Paulo, 2009, 45 p.

[15] BURR, K. P., **Análise de estabilidade para *riser* em catenária: resumo de equações**, São Paulo, 2010, 57 p.

[16] BURR, K. P. & BALIÑO, J. L., **Evolution Equation for Two-Phase Flow Hydrodynamic Instabilities in Pipe-Riser Systems**, *Proceedings do XII International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics* (*XII DINAME*), Ilha Bela, Brasil, 2007.

[17] BURR, K. P. & BALIÑO, J. L., **Assymptotic solution for the stationary state of two-phase flows in pipeline-riser systems**, *XIX International Congress of Mechanical Engineering* (*COBEM 2007*), Brasília, Brasil, Novembro 2007.

[18] BURR, K. P. & BALIÑO, J. L., **Stationary state assymptotic solution for two-phase flows in pipeline-riser systems of general geometry**, *V Congresso Nacional de Engenharia Mecânica* (*CONEM 2008*), Salvador, Brasil, Agosto 2008.

[19] LEHOUCQ, R.B., SORENSEN, D.C., & YANG, C., **ARPACK Users' Guide: Solution of Large-Scale Eigenvalue Problems with Implicitly Restarted Arnoldi Methods**, SIAM Publications, Philadelphia, 1998, 152p.

[20] RADKE, R.J., **A Matlab Implementation of the Implicitly Restarted Arnoldi Method for Solving Large-Scale Eigenvalue Problems**, Rice University, Houston, Texas, 1996, 100 p.

[21] OLIVEIRA, R. R. A. de, **Implementação numérica e análises paramétricas para estudos de Intermitência Severa em sistemas de produção de petróleo.** São Paulo, 2009, 66p.