UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

GABRIEL ROMUALDO DE AZEVEDO

Estudo de estabilidade hidrodinâmica em intermitência severa via método QZ

SÃO PAULO
2010

GABRIEL ROMUALDO DE AZEVEDO

Estudo de estabilidade hidrodinâmica em intermitência severa via método QZ

Trabalho de formatura apresentado à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de graduação em engenharia

Orientador: Prof. Dr. Jorge Luis Baliño

Colaborador: Prof. Dr. Karl Peter Burr
(Centro de Engenharia, Modelagem e Ciências Sociais Aplicadas,
Universidade Federal do ABC, São Paulo, SP)

Área de concentração:
Engenharia Mecânica

SÃO PAULO
2010

FICHA CATALOGRÁFICA

Azevedo, Gabriel Romualdo de
Estudo de estabilidade hidrodinâmica em intermitência severa
via método QZ / G.R. de Azevedo. – São Paulo, 2010.
109 p.

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1. Hidrodinâmica 2. Escoamento multifásico 3. Petróleo (Produção) I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II. t.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Professor Doutor Jorge Luis Baliño e ao Professor Karl Peter Burr por suas orientações e participação no desenvolvimento deste projeto além do envolvimento na implementação das rotinas que foram utilizadas.

Agradeço à minha família, pelo suporte e conforto nestes cinco anos.

Agradeço aos colaboradores do Núcleo de Dinâmica e Fluidos (NDF) da Escola Politécnica.

Agradeço também à Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), que através de uma bolsa de iniciação científica pode financiar o projeto.

RESUMO

Este trabalho de formatura tem como objetivo a análise de estabilidade hidrodinâmica de modelos de escoamentos multifásicos utilizados em sistemas de produção de petróleo. Serão desenvolvidas ferramentas computacionais e analíticas capazes de determinar no espaço de parâmetros as regiões onde o escoamento multifásico tem regime permanente e as regiões onde existem os diferentes tipos de intermitência, como por exemplo, a intermitência severa (*severe slugging*), com base na teoria de estabilidade linear. Serão desenvolvidas metodologias para classificar os diferentes tipos de instabilidade hidrodinâmicas observados, que serão úteis para determinar quais regimes intermitentes são aceitáveis ou não. A análise de estabilidade, através da verificação dos autovalores associados à solução numérica, será feita utilizando-se o método QZ, de tal maneira que a ferramenta possa corrigir qualquer eventualidade no cálculo dos autovalores.

ABSTRACT

This graduation work aims the hydrodynamic stability analysis of multiphase flow models applied to oil production systems. It will be developed analytical and computational tools capable of determining the parameter space regions where the multiphase flow is steady and the regions where there are different types of intermittency, such as the severe slugging. Methodologies will be developed for classifying different types of hydrodynamic instabilities which will be helpful in determining which intermittent regimens are acceptable or not. The stability analysis, by checking the eigenvalues related to the numerical solution, will be made by the QZ method, such that the tool can fix any eventuality in the calculation of eigenvalues.

Lista de Ilustrações

Lista de Tabelas

Sumário

1. INTRODUÇÃO

1.1 Contexto

A maior parte dos escoamentos que sempre ocorreram na natureza e que hoje podem ocorrer devido à tecnologia são escoamentos do tipo multifásicos. Devido a essa grande presença, o estudo dos escoamentos multifásicos tem grande importância e por isso existe a necessidade da descrição geral para que seja possível compreender todo seu comportamento.

Em um escoamento multifásico, as diferentes fases podem ser distinguidas fisicamente uma da outra. Uma vez que dentro de cada fase é possível encontrar diversos tipos de componentes e fenômenos turbulentos, o escoamento multifásico pode vir a apresentar um alto grau de complexidade.

O principal fator que incrementa a complexidade dos escoamentos multifásicos é a existência de interfaces, cuja forma e posição ao longo do tempo é impossível de ser determinada. Como em escoamentos turbulentos, recorre-se a um tratamento estatístico. Parâmetros de interesse que surgem do processo de média estatística (ensemble average) neste tipo de problemas são a fração de vazio (*void fraction*) e a densidade de área interfacial (*interfacial area*).

Existem na literatura diferentes modelos para tratar problemas de escoamentos multifásico, dos mais simples (modelo homogêneo) até os mais complexos (como o de escoamentos separados), nos quais se modelam os termos de interação entre as diferentes fases.

O estado da arte na modelagem dos escoamentos multifásicos ainda não evoluiu suficientemente para garantir o bom comportamento matemático das equações resultantes. Por exemplo, as equações para escoamento unidimensional polidisperso em bolhas (*bubbly flow*) possuem autovalores complexos para uma faixa de parâmetros de trabalho, o que é inaceitável fisicamente. É opinião dos especialistas que a aparição de autovalores complexos se deve ao acoplamento entre as equações de momento entre as fases.

Nos sistemas de produção de petróleo, o fluido que sai do meio poroso possui gás em solução e vem acompanhado de gás livre e água, dificultando a determinação de parâmetros simples como o gradiente de pressão na coluna de elevação [9]. O conhecimento dos mecanismos de transporte multifásico de gás, petróleo e água tem se tornado importante na tecnologia de exploração *offshore*. A tendência de poços satélite conectados por dutos em árvore está sendo substituído por condutos de transporte mais compridos até as plataformas. Além disto, a maior profundidade dos poços apresenta desafios particulares para a garantia do escoamento.

Com as vazões existentes em dutos, linhas de surgência e *risers*, o padrão de escoamento mais freqüente é o padrão "intermitente", em "golfada" ou *slug*, caracterizado por uma distribuição axial intermitente de líquido e gás. O gás é transportado como bolhas entre golfadas de líquido. O padrão em golfadas pode mudar em determinadas condições geométricas e de escoamento e originar um fenômeno indesejável conhecido como "intermitência severa" ou "golfada severa" (*severe slugging*).

As conseqüências indesejáveis da intermitência severa são [9]:

- Aumento da pressão na cabeça do poço, causando tremendas perdas de produção.
- Grandes vazões instantâneas, causando instabilidades no sistema de controle de líquido nos separadores e eventualmente um desligamento da plataforma.
- Oscilações de vazão no reservatório.

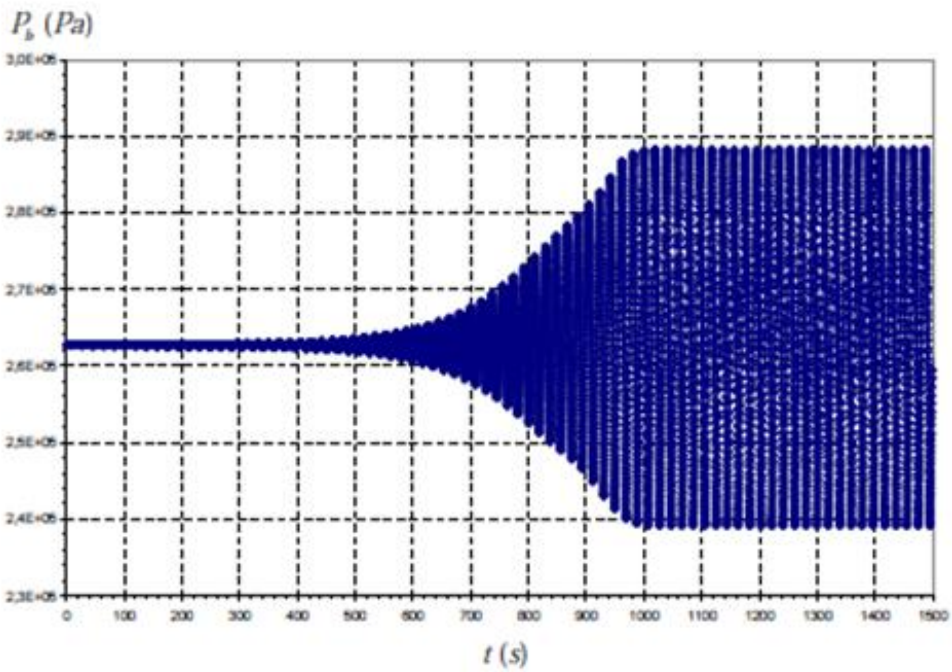

Figura 1 – Exemplo de efeito da instabilidade sobre a pressão na base do *riser* (ref. [2])

1.2 Objetivos

O objetivo a ser alcançado neste trabalho é analisar a estabilidade hidrodinâmica de modelos de escoamentos multifásicos utilizados em sistemas de produção de petróleo.

Serão desenvolvidas ferramentas computacionais e analíticas capazes de determinar no espaço de parâmetros as regiões onde o escoamento multifásico tem regime permanente e as regiões onde existem os diferentes tipos de intermitência, como por exemplo, a intermitência severa (*severe slugging*), com base na teoria de estabilidade linear. Serão desenvolvidas metodologias para classificar os diferentes tipos de instabilidade hidrodinâmicas observados, as quais serão úteis para se determinar quais regimes intermitentes são aceitáveis ou não do ponto de vista operacional.

A análise de estabilidade, através da verificação dos autovalores associados à solução numérica, será feita utilizando-se o método de QZ de tal maneira que a ferramenta possa corrigir qualquer eventualidade no cálculo dos autovalores. Tais autovalores irão revelar, para cada configuração, a estabilidade do sistema sob aquela condição. E partir desta análise pode-se construir um mapa de estabilidade correspondente.

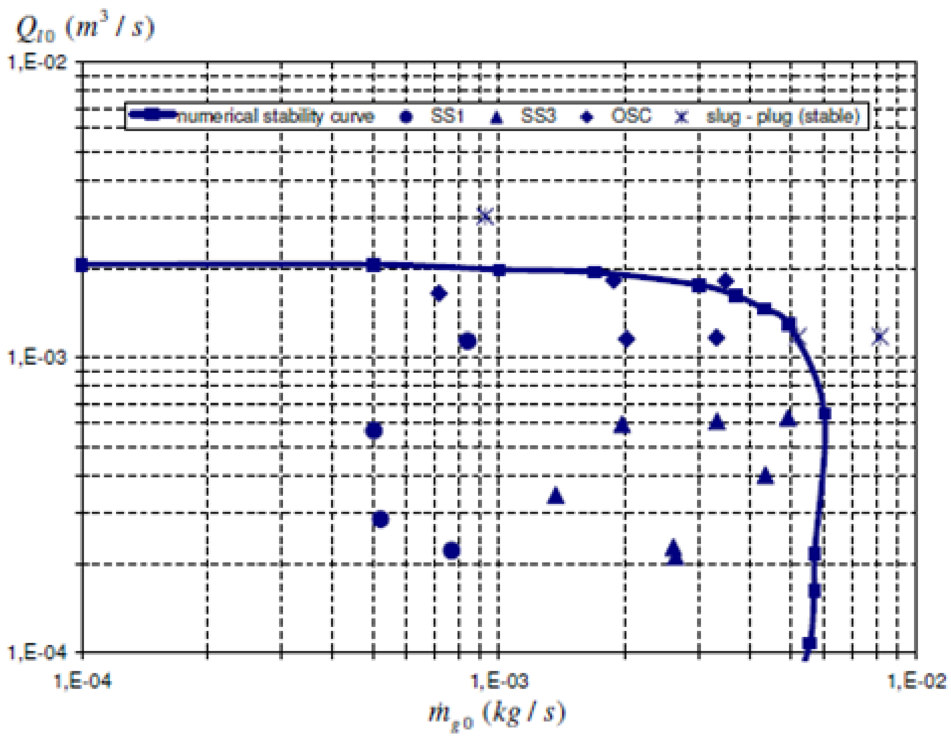

Figura 2 - Mapa de estabilidade (ref.[3])

Além disso, em longo prazo, os objetivos a serem alcançados neste trabalho estão relacionados com o melhoramento do modelo de intermitência severa desenvolvido e a implementação numérica da teoria de estabilidade linear e não-linear. Em particular, serão pesquisados os seguintes tópicos:

- Análise de estabilidade linear para modelo de escoamento multifásico adotado para *risers* verticais. Desenvolvimento de ferramenta computacional para traçar mapas de estabilidade do estado estacionário no espaço de parâmetros do sistema e comparação com resultados apresentados na literatura.
- Análise de estabilidade não linear para *risers* verticais. Construir teoria assintótica que permite obter equação de evoluçao para amplitude de instabilidade hidrodinâmica. A solução desta nos permite caracterizar a instabilidade hidrodinâmica e obter a amplitude e período do regime intermitente associado;
- Modificação do modelo desenvolvido para levar em consideração a interação com reservatório e avaporização no *riser*. No modelo original, as condições de contorno são a pressão no separador, a vazão mássica de gás e a vazão volumétrica de líquido na linha descendente. A condição de contorno de vazões de gás e líquido muda quando é considerada a interação com o reservatório;
- Estender a ferramenta computacional para análise de estabilidade linear de *riser* veriticais para o modelo modificado e com geometria geral;
- Estender análise de estabilidade não-linear para o modelo modificado e considerando geometria geral para o *riser*;
- Análise de transientes e de construção do mapa de estabilidade para condições operacionais correspondentes a sistemas reais. É importante destacar que a razão entre a pressão na base do *riser* e no separador é grande em sistemas linha-*riser* reais, invalidando hipóteses realizadas nos modelos que simulam condições experimentais (por exemplo, uma fração de vazio constante no *riser*).

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Introdução à Teoria de Escoamentos Multifásicos

Em sistemas de produção de petróleo, o fluido que sai do meio poroso possui gás em solução e vem acompanhado de gás livre e água, dificultando a determinação do gradiente de pressão na coluna de elevação. Além disso, outra dificuldade encontrada no estudo deste tipo de escoamentos é que a forma e a posição das interfaces são desconhecidas.

As diferenças de velocidades entre as fases e a sua geometria ou configuração influenciam diretamente no comportamento, sendo, por tanto, a base para a classificação dos regimes de escoamento. Por sua vez, a distribuição das fases depende da direção do escoamento em relação à gravidade. As propriedades físicas como a densidade, a viscosidade e a tensão superficial também influenciam no comportamento.

2.2 Padrão de Escoamento

A seguir são representadas as formas mais comuns de padrões de escoamentos, tanto vertical quanto horizontal.

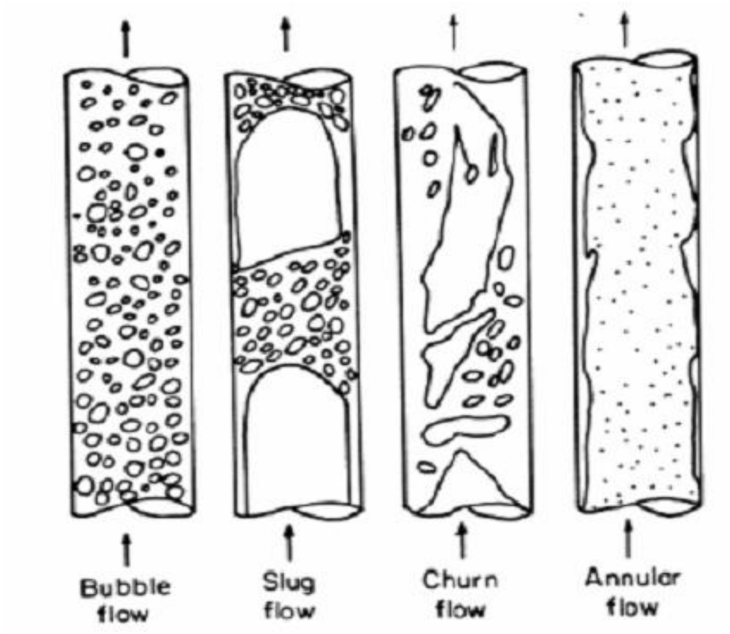

Figura 3 - Padrões de escoamento vertical.

Na Figura 3 (ref [8]) estão representados os quatro tipos de escoamento mais comuns em escoamentos verticais. O primeiro é o escoamento com presença de bolhas (*bubble flow*) de ar escoando junto ao líquido. O segundo padrão representa o escoamento em formato de golfada (*slug flow* ou “lesma”), este escoamento será analisado posteriormente neste projeto de formatura.

O terceiro representa um escoamento já em transição de fases (*churn flow*), ele é caracterizado por não ser possível definir qual a fase é predominante no escoamento. O quarto escoamento é chamado de anular (*annular flow*) e é caracterizado pela presença de líquido das extremidades da tubulação e também gotículas de líquido dispersas no gás.

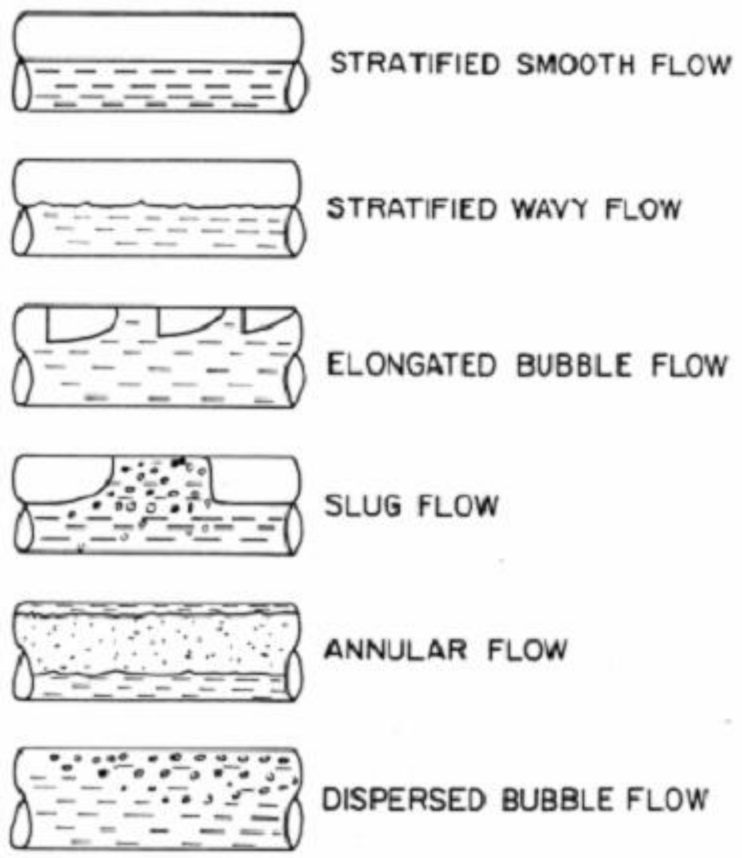

Figura 4 - Padrão de escoamento horizontal.

Na Figura 4 (ref. [8]) estão representados os padrões de escoamentos em dutos horizontais. Porém nesse presente trabalho serão analisados apenas escoamentos verticais e, portanto, não será o mesmo enfoque que aos padrões como aqueles mostrados na Figura 3.

O primeiro escoamento representa um escoamento estratificado suave, com as duas fases bem definidas e a fase gasosa dispersa no líquido. O segundo representa um escoamento estratificado ondulado, que se diferencia do estratificado suave por ter um comportamento mais agitado e por ter uma fase gasosa mais visível.

No terceiro, o escoamento de gás gera bolhas maiores e alongadas, enquanto o líquido preenche a região inferior do o tubo. No quarto, caracteriza-se a presença de golfadas de gás no escoamento de líquido, essas bolhas são maiores e começam a predominar na tubulação.

No quinto, a fase gasosa é predominante no centro da tubulação, com gotículas de líquido dispersas na fase gasosa. Neste caso, o líquido se concentra nas extremidades do tubo. No sexto padrão de escoamento, a fase gasosa é quase completamente predominante, e a fase líquida se encontra apenas dispersa dentro da fase gasosa no formato de pequenas gotículas.

2.3 Classificação de Padrões de Escoamento

Os escoamentos multifásicos podem classificados em três tipos diferentes de escoamentos e eles estão descritos a seguir:

- Escoamentos separados: caracterizado por fases contínuas, com algumas gotas ou bolhas dispersas em cada uma das fases (estratificado, estratificado ondulado e anular).
- Escoamentos intermitentes: caracterizado por ter uma das fases, pelo menos, descontínua (bolhas alongadas, golfadas, transição).
- Escoamentos dispersos: caracterizado por possuir a fase líquida continua, enquanto a fase gasosa é descontinua (bolhas, bolhas dispersas).

Neste trabalho serão analisados os escoamentos intermitentes, principalmente o escoamento em formato de golfada (*slug flow*). Ele é caracterizado por uma distribuição axial intermitente de líquido e gás. O gás é transportado através do líquido no formato de bolhas, por meio de golfadas (Figura 5).

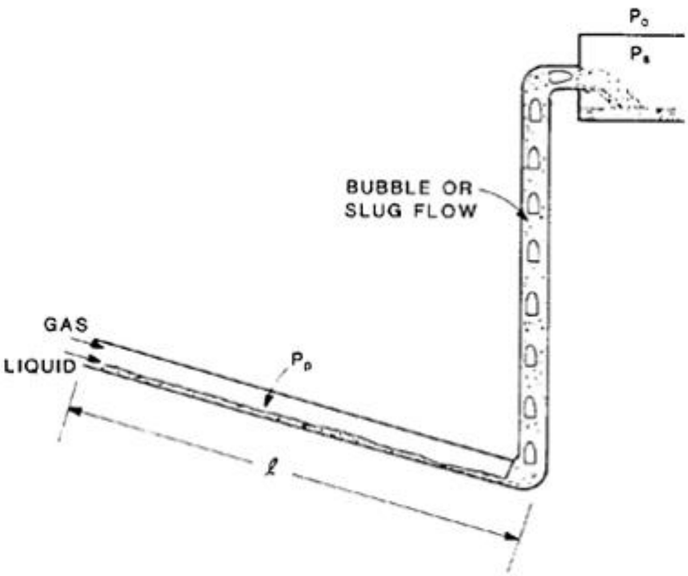

Figura 5 - Escoamento intermitente por golfadas (ref. [2])

Em determinadas situações o padrão em golfadas pode mudar devido às características geométricas e as características do próprio escoamento, originando um fenômeno indesejado chamado de intermitência severa. Geralmente, a situação típica, na qual ocorre o fenômeno, é devido ao acúmulo de líquido no fundo de um *riser*. Ele bloqueia a passagem de gás (Figura 6) e inicia um ciclo de golfada de períodos da ordem de horas, muito maior que o período de *slugs* em operação normal ou estado estacionário.

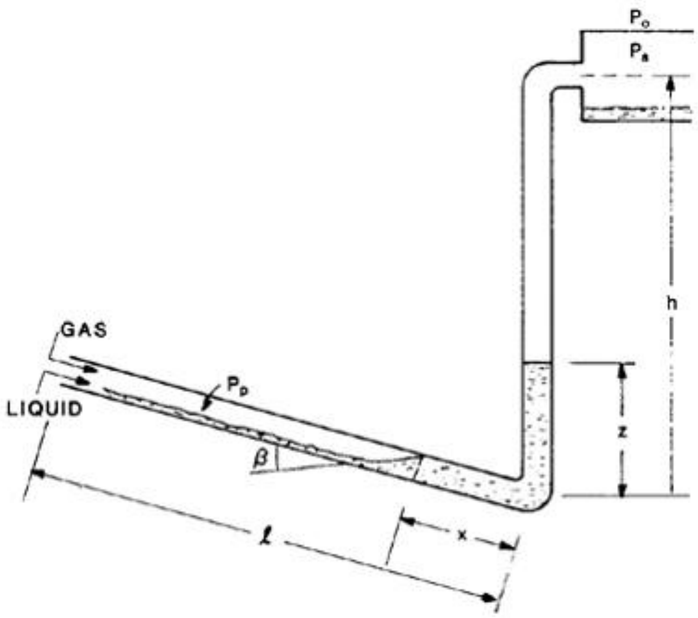

Figura 6 - Acúmulo de líquido na base do *riser* (ref. [2]).

A intermitência severa está associada a grandes oscilações de pressão e problemas de dimensionamento nas unidades de separação na plataforma de extração, provocando sua saída de serviço e perdas econômicas.

A intermitência severa ocorre geralmente num ponto com uma cota baixa na topografia do conduto, por exemplo, num trecho de tubulação descendente ou linha, seguido de um trecho ascendente ou *riser*. Os pré-requisitos para que isto aconteça são pressões e vazões baixas, tipicamente quando o poço já tem um tempo razoável de exploração. Na operação em estado permanente, o padrão de escoamento na linha pode ser estratificado, enquanto no *riser* resulta intermitente.

Um ciclo de intermitência severa pode ser descrito em termos das seguintes etapas [9]. Uma vez que o sistema se desestabiliza e a passagem de gás fica bloqueada na base do *riser*, o líquido continua entrando e o gás existente no *riser* continua saindo, sendo possível que o nível de líquido fique abaixo do nível máximo no separador. Como conseqüência disto, a coluna do *riser* se torna mais pesada e a pressão na base aumenta, comprimindo o gás na linha e criando uma região de acumulação de líquido; esta etapa é conhecida como formação do *slug*.

Quando o nível de líquido atinge o topo enquanto a passagem de gás permanece bloqueada, a pressão na base atinge seu máximo valor e há somente líquido escoando no *riser*, resultando a etapa de produção do *slug*.

Como o gás continua entrando na linha, a frente de acumulação de líquido é puxado de volta até que atinge o base do *riser*, começando a etapa de penetração de gás. A medida que o gás penetra no *riser* a coluna se torna mais leve, diminuindo a pressão e aumentando a vazão de gás. Quando o gás atinge o topo, a passagem de gás fica liberada através do escoamento estratificado na linha e do escoamento intermitente/anular no *riser*, causando uma violenta expulsão e uma rápida descompressão que leva novamente o processo à etapa de formação; esta etapa é conhecida como expulsão de gás.

2.4 Variáveis em Escoamentos Multifásicos

Neste tópico serão definidas as variáveis fundamentais para o entendimento e equacionamento dos modelos de escoamento multifásicos.

- Fração de vazio ou *void fraction*: fração de área de passagem ocupada pelo gás.

$$\alpha = \frac{A_G}{A};\, A = A_f + A_g \Rightarrow 1 - \alpha = \frac{A_f}{A} \tag{2.1}$$

- Título mássico ou *mass quality*: fração de vazão mássica de gás.

$$x = \frac{W_G}{W};W = W_f + W_g \Rightarrow 1 - x = \frac{W_f}{W} \tag{2.2}$$

- Fluxo mássico: vazão mássica por unidade de área de passagem.

$$G = \frac{W}{A} \Rightarrow W_g = G \cdot A \cdot x; W_f = G \cdot A \cdot (1 - x) \tag{2.3}$$

- Velocidades médias das fases:

$$u_g = \frac{W_g}{\rho_g A_g}; u_f = \frac{W_f}{\rho_f A_f} \tag{2.4}$$

- Título volumétrico ou *volumetric quality*: fração de vazão volumétrica de gás.

$$\beta = \frac{Q_g}{Q}; Q = Q_f + Q_g \Rightarrow 1 - \beta = \frac{Q_f}{Q} \tag{2.5}$$

- Fluxo volumétrico ou velocidade superficial: vazão volumétrica por unidade de área de passagem:

$$j = \frac{Q}{A} \Rightarrow Q_g = j \cdot A \cdot \beta; Q_f = j \cdot A \cdot (1 - \beta) \tag{2.6}$$

- Fluxos volumétricos ou velocidades superficiais das fases: velocidades médias das fases se estas escoassem em toda área de passagem.

$$j_g = \frac{Q_g}{A}; j_f = \frac{Q_f}{A} \tag{2.7}$$

A partir das definições anteriores, pode-se escrever que:

$$j_g = u_g \cdot \alpha = j \cdot \beta = \frac{G \cdot x}{\rho_g}; j_f = u_f \cdot (1 - \alpha) = j \cdot (1 - \beta) = \frac{G \cdot (1 - x)}{\rho_f} \tag{2.8}$$

$$G = G_g + G_f ; G_g = j_g \cdot \rho_g = G \cdot x ; G_f \, j_f \cdot \rho_f = G \cdot (1 - x) \tag{2.9}$$

- Relação de escorregamento (*slip*): relação entre as velocidades médias das fases (geralmente S > 1).

$$S = \frac{u_g}{u_f} = \frac{W_g}{W_f} \cdot \frac{\rho_f}{\rho_g} \cdot \frac{A_f}{A_g} = \frac{x}{1-x} \cdot \frac{\rho_f}{\rho_g} \cdot \frac{1-\alpha}{\alpha} \tag{2.10}$$

- Velocidades relativas entre as fases:

$$u_{gf} = u_g - u_f = -u_{fg} \tag{2.11}$$

- Velocidades de deriva ou *drift velocity*: diferença entre as velocidades das fases e velocidade superficial:

$$u_{fj} = u_f - j \; ; \; u_{gj} = u_g - j \tag{2.12}$$

- Fluxos de deriva ou *drift flux* das fases: fluxo volumétrico de uma fase, relativo a uma superfície se deslocando com uma velocidade j.

$$j_{gfj} = \alpha \cdot (u_g - j) = \alpha \cdot u_{gj} \; ; \; j_{fgj} = (1 - \alpha)(u_f - j) = (1 - \alpha) u_{fj} \tag{2.13}$$

Estas considerações resultam a propriedade de simetria e a proporcionalidade com a velocidade relativa:

$$j_{gfj} = -j_{fg} = \alpha \cdot (1 - \alpha) u_{gf} \tag{2.14}$$

2.5 Equações de conservação para escoamento multifásico

Para o escoamento multifásico podem-se escrever as equações de conservação de massa e conservação de momento linear, para o par gás-líquido. A principal dificuldade para resolver as equações de conservação é re-introduzir a informação perdida no processo de média temporal.

- Conservação de massa:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha_k \cdot \rho_k\right) + \nabla \cdot \left(\alpha_k \rho_k V_k\right) = \Gamma_k \tag{2.15}$$

- Conservação do momento linear:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha_k \cdot \rho_k \cdot V_k\right) + \nabla \cdot \left(\alpha_k \cdot \rho_k \cdot V_k \cdot V_k\right) = \Gamma_k \cdot V_{ki} + \nabla \cdot \left(\alpha_k \cdot T_k\right) + \alpha_k \cdot \rho_k \cdot G_k + M_k \tag{2.16}$$

Os modelos para analisar escoamentos multifásicos podem ser classificados segundo o grau de sofisticação. O modelo mais simples considera as equações de conservação para as fases escoando em conjunto, enquanto o modelo mais sofisticado trabalha com as equações de conservação aplicadas a cada uma das fases individuais.

- Modelo Homogêneo: é caracterizado por considerar a mistura como um pseudofluido com as propriedades médias da mistura. São desprezados efeitos de escorregamento entre as fases.
- Modelo de fluxo de deriva ou *drift*: é caracterizado por considerar as fases em formas separadas. Admite-se que existe uma diferença de velocidades entre a vazão de gás e a vazão de líquido, essa diferença gera um escorregamento entre as fases.

Os dois modelos serão explicitados com mais profundidade nas duas aplicações teóricas que estão demonstradas em sequência. Todas as considerações a respeito das hipóteses e das equações de conservação, para cada modelo, foram feitas na própria demonstração.

3. ANÁLISE DE CASO E COMPARAÇÃO COM O MODELO ESTUDADO

Neste capítulo será apresentada uma análise sobre o trabalho desenvolvido por S. Mokhatab, da Universidade de Terã, no artigo *Severe slugging in a catenary-shaped riser: experimental and simulation results*, publicado na revista *Petroleum Science and Technology* em junho de 2005. Neste artigo são apresentadas diversas condições de experimento sobre escoamento bifásico água-ar em um sistema *pipeline-riser*, com uma comparação entre dados experimentais e os valores preditos por um código computacional (OLGA).

Entre os objetivos deste estudo está verificar as áreas em que o código computacional desenvolvido em Baliño (ref. [2]) é capaz de predizer com boa aproximação o comportamento do sistema durante o fenômeno da intermitência severa, e da faixa em que o código pode apresentar falhas. A análise em questão foi desenvolvida em parceria com Wellington Lombardo Nunes de Mello, também aluno de graduação.

3.1 Apresentação do experimento

A geometria do sistema *pipeline-riser* utilizada no experimento de Mokhatab é apresentada na Figura 7. A partir dela, determinam-se as dimensões das tubulações necessárias para implementar no código numérico de Baliño.

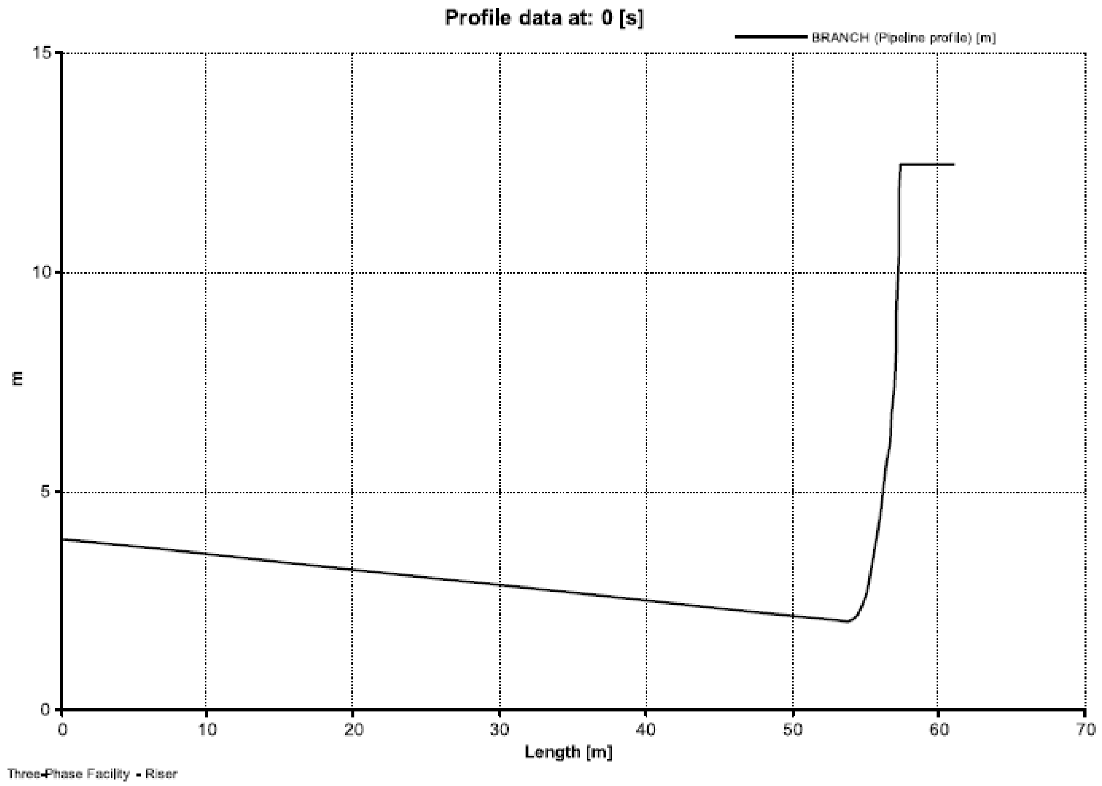

Figura 7 - Geometria do sistema *pipeline-riser* [1]

O experimento realizado por Mokhatab foi executado em dois testes. No Teste 1, manteve-se a vazão de ar aproximadamente constante no valor de 10 m^3/h, variando-se a vazão de água entre 2 L/s, 1 L/s e 0,5 L/s. O comportamento das vazões de líquido (água) e gás (ar) durante o período de realização do experimento pode ser visualizado na Figura 8.

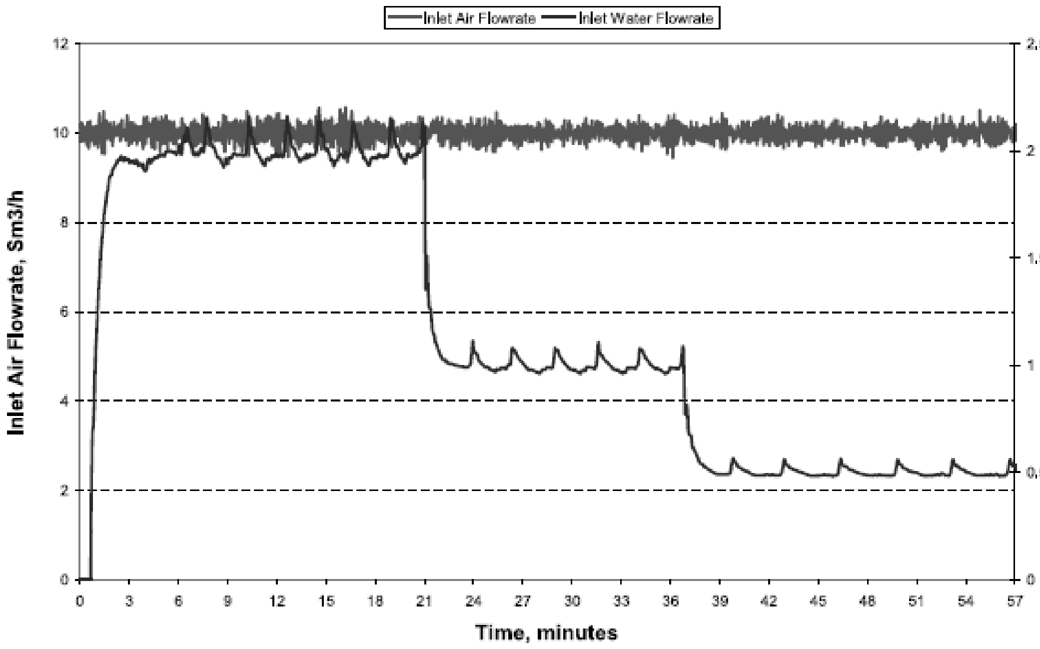

Figura 8 - Vazões de água e de ar utilizadas no experimento

Na Figura 9 apresenta-se uma comparação entre os valores experimentais e os valores preditos pelo código computacional utilizado por Mokhatab (ref.[1]) para a pressão na base do *riser* em função do tempo transcorrido para o Teste 1, durante o fenômeno de intermitência severa.

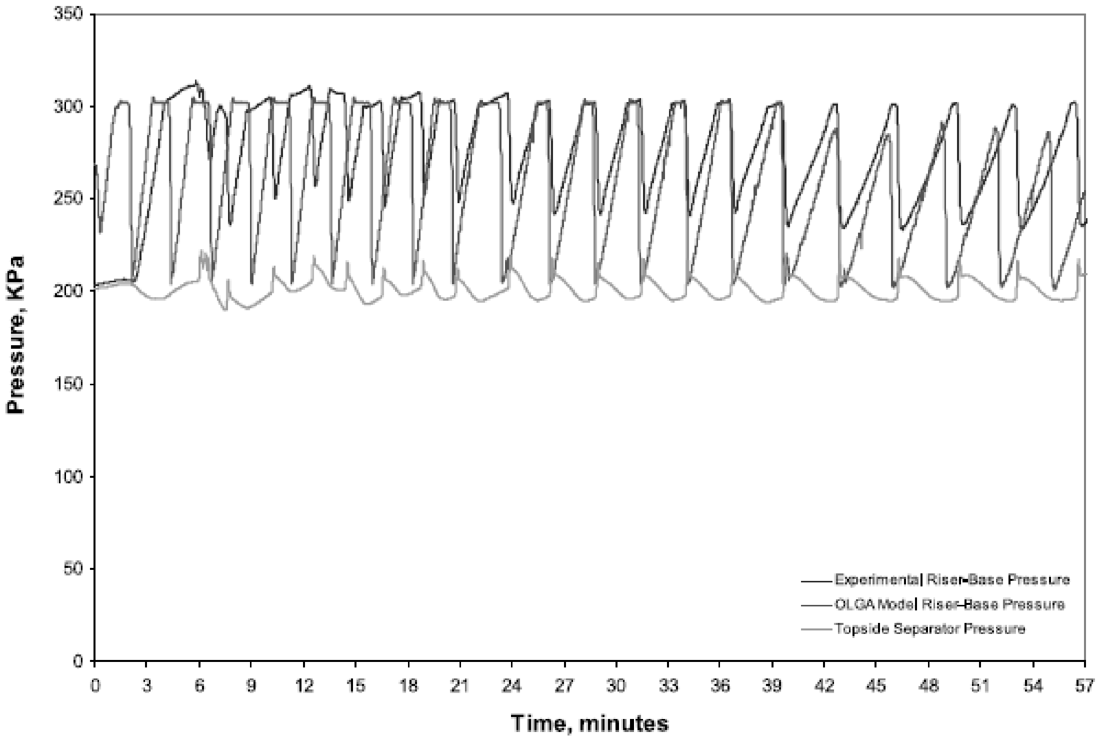

Figura 9 - Comparação dos valores de pressão na base do *riser* experimental e numérico.

3.2 Análise das simulações com o código em FORTRAN

De acordo com o trabalho feito por Mokhatab, os parâmetros e propriedades relacionados na Tabela 1 serão utilizados como entradas no modelo desenvolvido por J. Baliño (ref.[2]) utilizando o programa numérico FORTRAN. É imprescindível que as mesmas condições descritas no artigo sejam utilizadas nestas simulações para que a análise tenha alguma importância. Porém, o artigo pouco relata as condições do experimento, dando maior ênfase aos resultados obtidos. Dessa forma, algumas propriedades não explicitadas no artigo foram impostas para a realização das simulações.

Tabela 1 - Propriedades e parâmetros envolvidos no experimento.

Propriedades e parâmetros	Valor	Unidade
Viscosidade dinâmica do líquido	$1{,}8 \times 10^{-5}$	kg/(m.s)
Viscosidade dinâmica do gás	$1{,}0 \times 10^{-3}$	kg/(m.s)
Massa específica do líquido	1000	kg/m^3
Aceleração da gravidade	9,8	m/s^2
Constante do gás	287	$m^2/(s^2.K)$
Temperatura do gás	293	K
Comprimento do *pipeline*	53,84	m
Diâmetro da tubulação	0,1016	m
Espessura da tubulação	$4{,}5 \times 10^{-5}$	m
Inclinação do *pipeline*	2	Graus
Altura do *riser*	10,5	m
Comprimento do *riser*	3,58696	m
Pressão de separação	$2{,}0 \times 10^{5}$	Pa

Os valores das vazões utilizadas em cada teste são apresentados novamente na Tabela 2.

Tabela 2 - Vazões de água e ar utilizadas no Teste 1.

Vazão de ar	Vazões de água
10 m^3/h	2,0 L/s
10 m^3/h	1,0 L/s
10 m^3/h	0,5 L/s

A seguir, apresentam-se os resultados das simulações numéricas obtidas utilizando-se o modelo desenvolvido na referência [2] para o teste 1.

3.3 Apresentação dos resultados obtidos

Vazão de ar 10 m^3/h e vazão de água 2 L/s

O gráfico abaixo descreve a variação da pressão na base do *riser* predita pelo código FORTRAN para $Q_{L0} = 2\ L/s$ e $\dot{m}_G = 10\ m^3/h$.

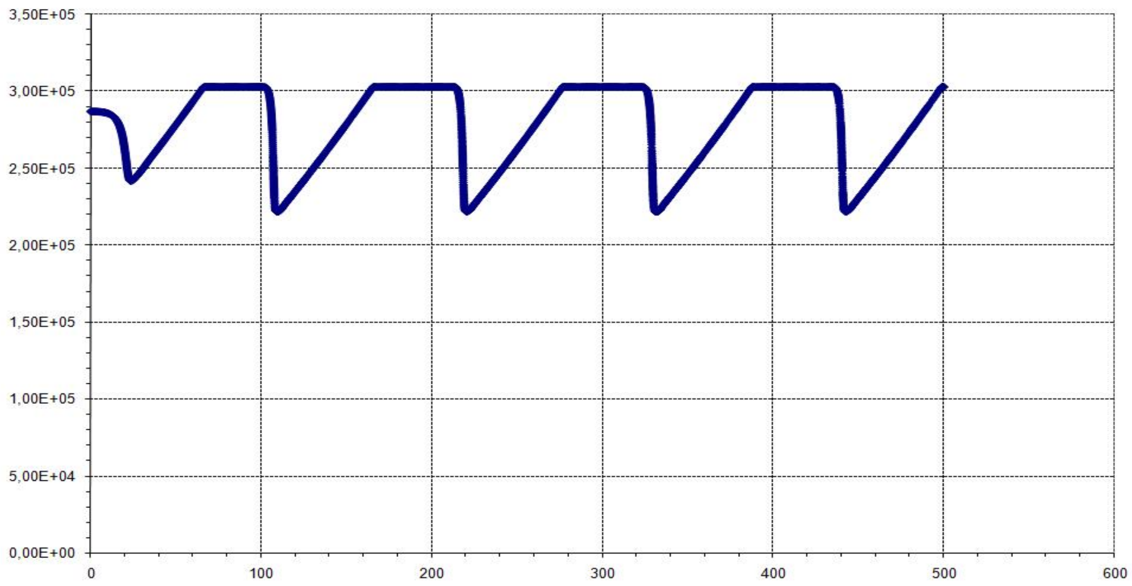

Figura 10 - Variação da pressão na base do *riser* para vazão de água de 2 L/s

A partir do gráfico da Figura 10, são obtidas as seguintes informações:

- Período do ciclo de intermitência severa: 111s = 1,85 min;
- Período de produção constante de líquido: 45 s;
- Pressão máxima: 303 kPa;
- Pressão mínima: 224 kPa.

Vazão de ar 10 m^3/h e vazão de água 1 L/s

O gráfico abaixo descreve a variação da pressão na base do *riser* predita pelo código FORTRAN para $Q_{L0} = 1\,L/s$ e $\dot{m}_G = 10\,m^3/h$.

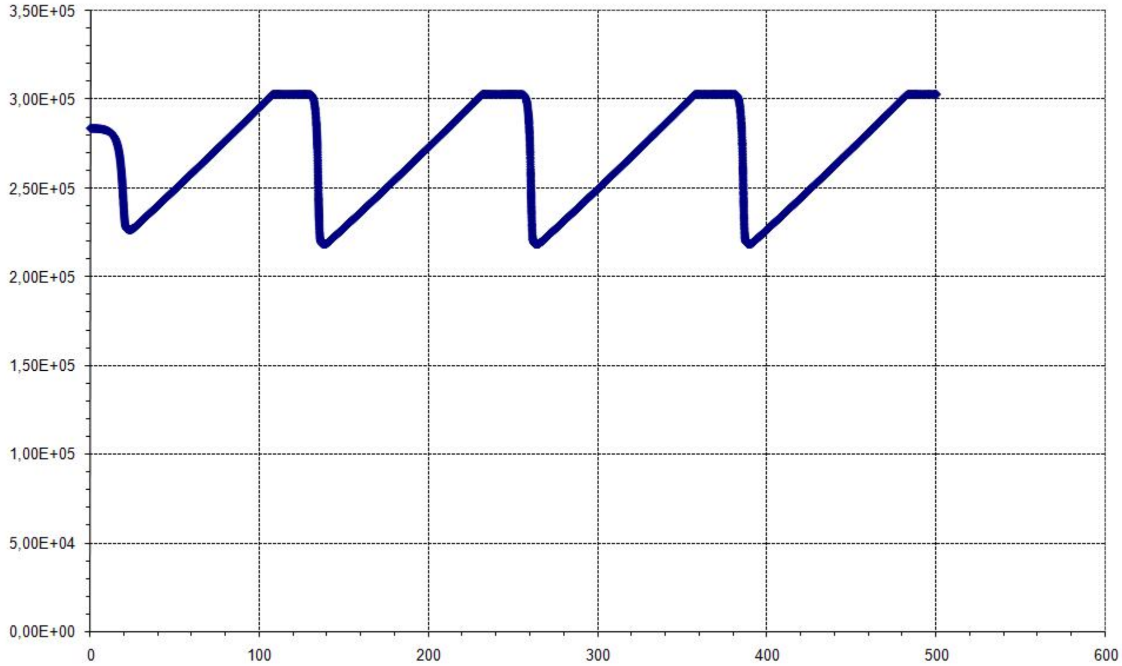

Figura 11 - Variação da pressão na base do *riser* para vazão de água de 1 L/s

A partir do gráfico da Figura 11, são obtidas as seguintes informações:

- Período do ciclo de intermitência severa: 125 s = 2,083 min;
- Período de produção constante de líquido: 20 s;
- Pressão máxima: 303 kPa;
- Pressão mínima: 220 kPa.

<u>Vazão de ar 10 m³/h e vazão de água 0,5 L/s</u>

O gráfico abaixo descreve a variação da pressão na base do *riser* predita pelo código FORTRAN para $Q_{L0} = 0{,}5\,L/s$ e $\dot{m}_G = 10\,m^3/h$.

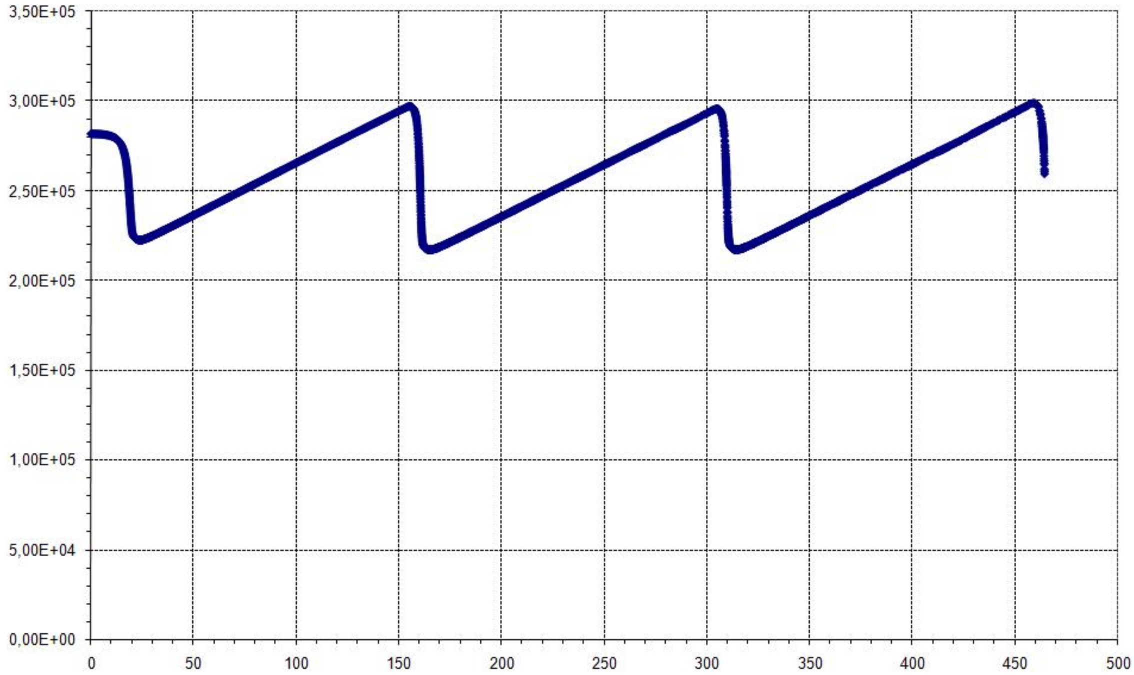

Figura 12 - Variação da pressão na base do *riser* para vazão de água de 0,5 L/s

A partir do gráfico da Figura 12, são obtidas as seguintes informações:

- Período do ciclo de intermitência severa: 143 s = 2,383 min;
- Período de produção constante de líquido: 2 s;
- Pressão máxima: 303 kPa;
- Pressão mínima: 219 kPa.

3.4 Análise dos resultados

Após o desenvolvimento das simulações pelo modelo desenvolvido por Baliño em [2], pode-se comparar os resultados adquiridos com aqueles mostrados por Mokhatab. Os resultados encontrados apresentam diferenças que devem ser comentadas.

- As pressões apresentadas pelo modelo possuem uma disparidade de 10% a 20% em relação aos períodos da curva de pressão experimental de Mokhatab. Essa diferença aumenta com a diminuição da vazão de líquido, o que diminui o período de produção de líquido, já que há menos líquido escoando, consequentemente o período de pulsação torna-se predominante, gerando instabilidade no sistema, o que é representado pelo erro associado a cada caso, esse último aumenta com a diminuição da vazão de líquido;

- O período total mostrado na curva de pressão aumenta quando a vazão de líquido diminui enquanto que o período de produção (intervalo de tempo em ocorre apenas vazão de líquido à pressão máxima) diminui quando comparado ao valor experimental. Com a diminuição da vazão, a produção de líquido diminui, ou seja, o período relacionado à produção diminui quando existe menos líquido dentro do *riser*;
- Também é possível notar que existe uma diferença considerável no valor de pressão mínima da base do *riser*. Do modelo, a pressão mínima chega a 225 kPa, enquanto que no experimento de Mokhatab a pressão chega no máximo a 250 kPa;
- As curvas representadas também apresentam uma defasagem temporal, um atraso, quando comparados ao experimental, tanto no modelo quanto no caso numérico apresentado por Mokhatab;
- O modelo utilizado para análise numérica usa apenas as condições iniciais para realizar as simulações, ou seja, ele não considera variações nas condições do problema. Porém, no experimento, a partir de observações das curvas representadas, conclui-se que existem variações nas medidas tanto da vazão quanto das pressões, o que pode aumentar a disparidade dos valores calculados numericamente com aqueles obtidos através do experimento.

4. CRITÉRIO DE ESTABILIDADE

Neste capítulo serão abordados os critérios para análise de estabilidade e de que maneira é possível fazer comparações com as curvas estabilidade construídas a partir de [6] e [13]. Tal análise é baseada no trabalho publicado por [12]. Nele são apresentados valores experimentais de escoamentos nos quais é sabido seu comportamento estável ou instável. Além disso, serão feitas comparações com as curvas de estabilidade levantadas por Taitel em relação às discrepâncias apresentadas pelos cálculos numéricos realizados neste relatório.

4.1 Critério de Boe para intermitência severa

O padrão de intermitência severa é tipicamente relacionado á baixas vazões de líquido e de gás. Isso requer que o padrão de escoamento no *pipeline* seja estratificado. Portanto, uma condição para a existência de intermitência severa é que o padrão de escoamento no trecho inclinado seja um padrão estratificado. Para a determinação dessa condição, é necessário utilizar os mapas de padrão de escoamento ou qualquer método que possa predizer os padrões de escoamento. Segue a relação dos parâmetros usados no equacionamento descrito por Taitel:

Tabela 3 - Parâmetros para equacionamento

Parâmetro	Representação
Pressão na base do riser	P_P
Densidade do líquido	ρ_L
Densidade do gás	ρ_{G0}
Aceleração da gravidade	g
Velocidade superficial do líquido	u_{LS}
Velocidade superficial do gás	u_{GS0}
Constante do gás	R
Temperatura	T
Comprimento do riser	l
Comprimento equivalente do buffer	L
Fração de vazio	α
Vazão mássica de gás	$\dot{m}_G$

Vazão volumétrica de líquido	V_G

Em adição a esta condição, a existência de um ciclo de intermitência severa requer que o líquido penetre no pipeline, a saber, x > 0 (Boe, 1981). Esse requerimento é geralmente satisfeito para escoamentos de gás relativamente baixos. Segundo Boe, a condição para x = 0 se encontra no instante em que o aumento da pressão devido á adição de líquido no *riser* é equilibrado pelo aumento na pressão no pipeline devido á adição de gás.

O aumento de pressão devido á entrada de líquido pode ser escrita como:

$$dP_p / dt = \rho_L .g.(dz / dt) = \rho_L .g.u_{Ls} \tag{4.1}$$

O aumento de pressão devido á adição de gás pode ser escrita como:

$$\frac{dP_p}{dt} = \frac{\dot{m}_G}{V_G} RT = \frac{u_{GS0} .\rho_{G0}}{l\alpha + L} RT = \frac{P_p .u_{Gs}}{l\alpha + L} \tag{4.2}$$

Igualando-se as equações (4.1) e (4.2), a região da fronteira de transição, proposto por Boe, entre padrão de intermitência severa e o regime estacionário no *riser* (geralmente escoamento em forma de bolhas ou escoamento intermitente) pode ser definida como:

$$u_{LS} = \frac{P_p .u_{Gs}}{\rho_L g(l\alpha + L)} u_{GS} \text{ ou } u_{LS} = \frac{\rho_{G0} RT}{\rho_L g(l\alpha + L)} u_{GS0} \tag{4.3}$$

A equação (4.3) representa o método para poder se determinar a fronteira de Boe, como mostrado na Figura 13, para um específico exemplo mostrado em [12], tal exemplo será analisado a seguir no decorrer do relatório.

Pode-se perceber que para baixas vazões de líquido, a velocidade superficial de líquido, u_{LS}, é uma função linear monotônica da velocidade superficial de gás no pipeline, u_{GS0}. Para altos valores da velocidade do líquido, a fração de vazio no pipeline (α) tende a 0 e a curva tende para a esquerda.

Contudo, neste caso a fração de vazio é calculada desconsiderando-se o cisalhamento do gás. Consequentemente, o limite superior está além da aplicabilidade do cálculo apresentado.

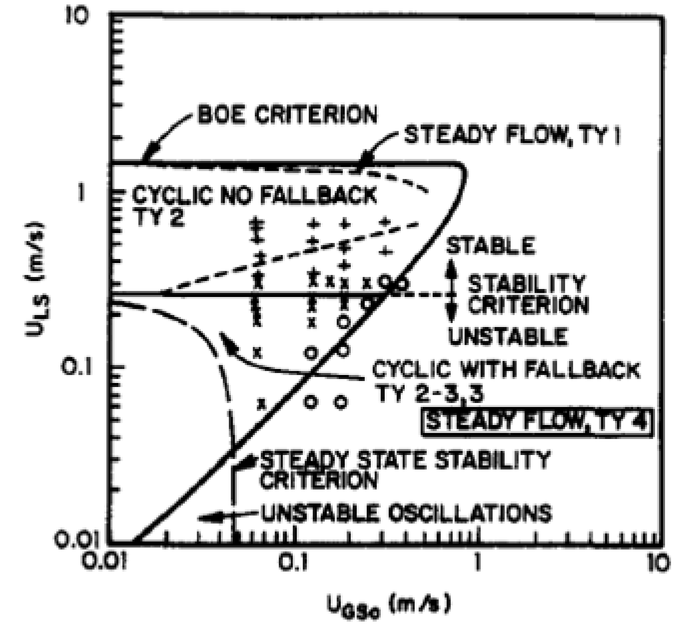

Figura 13 - Mapa de estabilidade em função de critérios

Em seu artigo, Boe alega que fora da região limitada pelo critério, o escoamento terá natureza de regime estacionário, enquanto que internamente a intermitência severa irá prevalecer. Está afirmação, contudo, não se mostra muito precisa. Na realidade, o critério de Boe pode ser violado por escoamentos em regime estacionário que se encontrem na região designada para escoamentos sobre intermitência severa e vice-versa. Tal situação poderá ser observada nas análises a seguir.

Para a construção da curva do critério de Boe, neste trabalho, será usada uma combinação entre equação (4.3) e a seguinte condição:

$$u_{L0} > 149\left(\frac{D}{4}\right)^{2/3}\left|\sin\theta_P\right|^{1/2} \tag{4.4}$$

Essa condição garante que para uma velocidade superficial do líquido, que só depende da geometria do conjunto, não ocorrerá intermitência severa. O sistema de equações formado pela equação (4.3) e (4.4), neste trabalho, será chamado curva do critério de Boe ou critério de Boe. Tal curva é referente a um limite teórico imposto sobre o mapa de estabilidade. Abaixo da linha o regime é instável e acima da linha o regime é estável.

Em escoamentos que apresentam intermitência severa, as oscilações (na pressão, fração de vazio, etc.) são muito grandes e o comprimento do *slugs* sempre excede o comprimento do *riser*. Nota-se que a intersecção entre as regiões limitadas pelo critério de Boe e a linha de estabilidade (*slug flow*) fornece uma melhor previsão dos escoamentos instáveis. Pode-se perceber também que o critério de estabilidade para escoamentos em bolhas no *riser* superestimam a região de instabilidade.

4.2 Parâmetros para simulação

Nesta seção serão apresentados os parâmetros de simulação tão como a definição de cada variável envolvida no desenvolvimento das rotinas que construíram os mapas de estabilidade. O equacionamento apresentado na seção anterior é baseado naquele proposto por Taitel em seu artigo (ref.[12]).

O modelo para o sistema *pipeline-riser* para os cálculos dos parâmetros será aquele definido em [6], consequentemente, os resultados serão comparados aos obtidos na dissertação. Contudo, os dados aqui apresentados são referentes a um sistema simplificado:

- Riser vertical;
- O atrito no riser pode ser desconsiderado.

Tabela 4 - Dados usados para análise pelo critério de Boe

Propriedades e parâmetros	Valor	Unidade
Viscosidade dinâmica do líquido	$1{,}8 \times 10^{-5}$	$kg/(m.s)$
Viscosidade dinâmica do gás	$1{,}0 \times 10^{-3}$	$kg/(m.s)$
Massa específica do líquido	1000	kg/m^3
Aceleração da gravidade	9,8	m/s^2
Constante do gás	287	$m^2/(s^2.K)$
Temperatura do gás	298	K
Comprimento do *pipeline*	9,1	m
Diâmetro da tubulação	0,0254	m
Espessura da tubulação	$1{,}5 \times 10^{-6}$	m
Inclinação do *pipeline*	5	*graus*

Altura do *riser*	9	*m*
Comprimento do *riser*	0	*m*
Pressão no separador	$1{,}013250 \times 10^5$	*Pa*

Tabela 5 - Casos simulados – Diferentes comprimentos equivalentes do *buffer*

Simulação	Valor	Unidade
1º caso	1,69	m
2º caso	5,1	m
3º caso	10	m

4.3 Dados experimentais (ref.[12])

Nesta seção serão apresentados pares de valores de u_{L0} e u_{GS0} que sabe-se serem estáveis ou instáveis, com objetivo de verificar a validade dos mapas pelo critério de Boe. Tais pontos serão apresentados também sobre as curvas para mostrar graficamente a eficácia do critério e compará-lo ao modelo de [6], para os mesmo pontos.

- Primeiro caso:

Tabela 6 - Dados experimentais para L=1,69m

u_{GS0} (m/s)	u_{LS} (m/s)	Q_{L0} (m^3/s)	$\dot{m}_{G0}$ (kg/s)	Estabilidade
0,063	0,124	6,28E-05	3,85E-05	Instável
0,064	0,209	1,06E-04	3,91E-05	Instável
0,123	0,183	9,27E-05	7,51E-05	Instável
0,124	0,212	1,07E-04	7,57E-05	Instável
0,062	0,679	3,44E-04	3,79E-05	Instável
0,063	0,367	1,86E-04	3,85E-05	Instável
0,063	0,679	3,44E-04	3,85E-05	Instável
0,064	0,535	2,71E-04	3,91E-05	Instável
0,065	0,226	1,15E-04	3,97E-05	Instável
0,122	0,374	1,90E-04	7,45E-05	Instável
0,123	0,621	3,15E-04	7,51E-05	Instável
0,126	0,228	1,16E-04	7,69E-05	Instável
0,187	0,226	1,15E-04	1,14E-04	Instável
0,188	0,466	2,36E-04	1,15E-04	Instável
0,188	0,502	2,54E-04	1,15E-04	Instável
0,19	0,312	1,58E-04	1,16E-04	Instável
0,058	0,705	3,57E-04	3,54E-05	Estável
0,063	0,698	3,54E-04	3,85E-05	Estável

0,122	0,73	3,70E-04	7,45E-05	Estável
0,126	0,673	3,41E-04	7,69E-05	Estável
0,126	0,085	4,31E-05	7,69E-05	Estável
0,184	0,127	6,44E-05	1,12E-04	Estável
0,185	0,161	8,16E-05	1,13E-04	Estável
0,187	0,551	2,79E-04	1,14E-04	Estável
0,188	0,755	3,83E-04	1,15E-04	Estável
0,19	0,685	3,47E-04	1,16E-04	Estável
0,313	0,433	2,19E-04	1,91E-04	Estável
0,314	0,347	1,76E-04	1,92E-04	Estável
0,319	0,614	3,11E-04	1,95E-04	Estável
0,321	0,744	3,77E-04	1,96E-04	Estável
0,43	0,604	3,06E-04	2,63E-04	Estável
0,433	0,701	3,55E-04	2,64E-04	Estável

- Segundo Caso:

Tabela 7 - Dados experimentais para L=5,1m

u_{GS0} (m/s)	u_{LS} (m/s)	Q_{L0} (m^3/s)	$\dot{m}_{G0}$ (kg/s)	Estabilidade
0,06	0,252	1,28E-04	3,66E-05	Instável
0,061	0,23	1,17E-04	3,72E-05	Instável
0,063	0,206	1,04E-04	3,85E-05	Instável
0,064	0,121	6,13E-05	3,91E-05	Instável
0,064	0,187	9,48E-05	3,91E-05	Instável
0,125	0,231	1,17E-04	7,63E-05	Instável
0,126	0,184	9,32E-05	7,69E-05	Instável
0,126	0,253	1,28E-04	7,69E-05	Instável
0,187	0,254	1,29E-04	1,14E-04	Instável
0,187	0,25	1,27E-04	1,14E-04	Instável
0,066	0,063	3,19E-05	4,03E-05	Instável
0,063	0,32	1,62E-04	3,85E-05	Instável
0,064	0,301	1,53E-04	3,91E-05	Instável
0,065	0,307	1,56E-04	3,97E-05	Instável
0,127	0,314	1,59E-04	7,75E-05	Instável
0,155	0,309	1,57E-04	9,46E-05	Instável
0,186	0,229	1,16E-04	1,14E-04	Instável
0,188	0,303	1,54E-04	1,15E-04	Instável
0,25	0,311	1,58E-04	1,53E-04	Instável
0,062	0,688	3,49E-04	3,79E-05	Instável
0,063	0,624	3,16E-04	3,85E-05	Instável
0,064	0,378	1,92E-04	3,91E-05	Instável
0,064	0,333	1,69E-04	3,91E-05	Instável
0,065	0,546	2,77E-04	3,97E-05	Instável
0,065	0,369	1,87E-04	3,97E-05	Instável

0,066	0,433	2,19E-04	4,03E-05	Instável
0,126	0,342	1,73E-04	7,69E-05	Instável
0,126	0,525	2,66E-04	7,69E-05	Instável
0,126	0,662	3,35E-04	7,69E-05	Instável
0,188	0,321	1,63E-04	1,15E-04	Instável
0,189	0,482	2,44E-04	1,15E-04	Instável
0,189	0,391	1,98E-04	1,15E-04	Instável
0,189	0,324	1,64E-04	1,15E-04	Instável
0,19	0,66	3,34E-04	1,16E-04	Instável
0,309	0,469	2,38E-04	1,89E-04	Instável
0,309	0,673	3,41E-04	1,89E-04	Instável
0,09	0,064	3,24E-05	5,49E-05	Estável
0,124	0,064	3,24E-05	7,57E-05	Estável
0,124	0,123	6,23E-05	7,57E-05	Estável
0,182	0,065	3,29E-05	1,11E-04	Estável
0,185	0,184	9,32E-05	1,13E-04	Estável
0,186	0,125	6,33E-05	1,14E-04	Estável
0,247	0,255	1,29E-04	1,51E-04	Estável
0,248	0,23	1,17E-04	1,51E-04	Estável
0,25	0,186	9,42E-05	1,53E-04	Estável
0,28	0,23	1,17E-04	1,71E-04	Estável
0,307	0,257	1,30E-04	1,87E-04	Estável
0,31	0,316	1,60E-04	1,89E-04	Estável
0,338	0,309	1,57E-04	2,06E-04	Estável
0,377	0,308	1,56E-04	2,30E-04	Estável

- Terceiro caso:

Tabela 8 - Dados experimentais para L=10m

u_{GS0} (m/s)	u_{LS} (m/s)	Q_{L0} (m^3/s)	$\dot{m}_{G0}$ (kg/s)	Estabilidade
0,061	0,064	3,24E-05	3,72E-05	Instável
0,062	0,191	9,68E-05	3,79E-05	Instável
0,063	0,247	1,25E-04	3,85E-05	Instável
0,063	0,405	2,05E-04	3,85E-05	Instável
0,064	0,157	7,96E-05	3,91E-05	Instável
0,094	0,064	3,24E-05	5,74E-05	Instável
0,123	0,357	1,81E-04	7,51E-05	Instável
0,124	0,157	7,96E-05	7,57E-05	Instável
0,157	0,249	1,26E-04	9,59E-05	Instável
0,185	0,118	5,98E-05	1,13E-04	Instável
0,185	0,155	7,85E-05	1,13E-04	Instável
0,186	0,351	1,78E-04	1,14E-04	Instável
0,232	0,351	1,78E-04	1,42E-04	Instável
0,233	0,147	7,45E-05	1,42E-04	Instável

0,247	0,349	1,77E-04	1,51E-04	Instável
0,249	0,246	1,25E-04	1,52E-04	Instável
0,304	0,339	1,72E-04	1,86E-04	Instável
0,311	0,247	1,25E-04	1,90E-04	Instável
0,124	0,065	3,29E-05	7,57E-05	Instável
0,185	0,078	3,95E-05	1,13E-04	Instável
0,185	0,066	3,34E-05	1,13E-04	Instável
0,229	0,067	3,39E-05	1,40E-04	Instável
0,23	0,091	4,61E-05	1,40E-04	Instável
0,246	0,087	4,41E-05	1,50E-04	Instável
0,062	0,433	2,19E-04	3,79E-05	Instável
0,64	0,538	2,73E-04	3,91E-04	Instável
0,124	0,414	2,10E-04	7,57E-05	Instável
0,124	0,523	2,65E-04	7,57E-05	Instável
0,184	0,513	2,60E-04	1,12E-04	Instável
0,187	0,375	1,90E-04	1,14E-04	Instável
0,228	0,405	2,05E-04	1,39E-04	Instável
0,23	0,543	2,75E-04	1,40E-04	Instável
0,245	0,527	2,67E-04	1,50E-04	Instável
0,247	0,416	2,11E-04	1,51E-04	Instável
0,307	0,532	2,70E-04	1,87E-04	Instável
0,313	0,385	1,95E-04	1,91E-04	Instável
0,247	0,158	8,01E-05	1,51E-04	Estável
0,28	0,071	3,60E-05	1,71E-04	Estável
0,308	0,149	7,55E-05	1,88E-04	Estável
0,327	0,108	5,47E-05	2,00E-04	Estável

4.4 Dados numéricos referentes à curva de estabilidade

Nesta sessão serão apresentados pontos que compõem a curva estabilidade, para cada um dos casos, em função das rotinas de [6] para um sistema simplificado *pipeline-riser*. Tais pontos foram determinados numericamente por [13].

- Primeiro caso:

Tabela 9 - Pontos sobre a curva de estabilidade para L=1,69 m

	$\dot{m}_{G0}$ **(kg/s)**	Q_{L0} **(m3/s)**	u_{GS} **(m/s)**	u_L **(m/s)**
1	6,11E-07	3,32E-04	0,001	0,655
2	1,83E-06	3,38E-04	0,003	0,668

3	5,13E-05	2,97E-04	0,084	0,586
4	8,18E-05	2,69E-04	0,134	0,531
5	1,25E-04	2,00E-04	0,205	0,395
6	1,31E-04	1,50E-04	0,214	0,296
7	1,33E-04	1,00E-04	0,218	0,197
8	1,26E-04	6,00E-05	0,206	0,118
9	1,03E-04	1,00E-05	0,168	0,02

- Segundo caso:

Tabela 10 - Pontos sobre a curva de estabilidade para a L=5,1 m

	$\dot{m}_{G0}$ (kg/s)	Q_{L0} (m3/s)	u_{GS} (m/s)	u_L (m/s)
1	1,00E-05	6,34E-04	0,017	1,251
2	1,00E-04	5,88E-04	0,167	1,159
3	2,00E-04	5,08E-04	0,334	1,002
4	2,93E-04	4,00E-04	0,491	0,789
5	3,40E-04	3,00E-04	0,567	0,592
6	3,33E-04	2,00E-04	0,556	0,395
7	2,63E-04	1,00E-04	0,44	0,197
8	1,66E-04	1,00E-05	0,277	0,02

- Terceiro caso:

Tabela 11 - Pontos sobre a curva de estabilidade para a L=10 m

	$\dot{m}_{G0}$ (kg/s)	Q_{L0} (m^3/s)	u_{GS} (m/s)	u_L (m/s)
1	1,00E-05	1,32E-03	0,017	2,595
2	1,00E-04	1,23E-03	0,167	2,418
3	3,00E-04	9,70E-04	0,501	1,924
4	5,65E-04	5,00E-04	0,944	0,987
5	5,87E-04	3,00E-04	0,98	0,592
6	4,39E-04	1,00E-04	0,733	0,197
7	2,75E-04	1,00E-05	0,46	0,02

4.5 Procedimento de simulação

Nesta seção será explicitada de que maneira o critério de estabilidade de Boe será aplicado ao modelo.

Com base nas rotinas desenvolvidas em [6], determina-se o estado estacionário para o sistema pipeline-riser em cada um dos casos.

A partir dos valores de velocidade superficial do líquido, do gás, da fração de vazio e da pressão ao longo do riser, podem-se determinar os respectivos valores na base do mesmo. Nesse caso, sabe-se que:

$$\alpha_{pipeline} = \alpha_{riser}(1);$$

$$u_{LPipeline} = u_{LRiser}(1);$$

$$u_{GPipeline} = \frac{P_G}{P_0} \cdot \frac{T_0}{T} u_{GRiser}(1);$$

Onde,

P_0 e T_0 são valores referentes á condição de atmosfera padrão

P_0 = 1,01325*10^5 Pa

T_0 = 293K

P_G é a pressão na base do riser.

Esse procedimento é realizado para diversos valores de vazão de líquido na entrada do pipeline. À medida que esta vazão varia, constrói-se uma matriz que contém todos os valores calculados para o pipeline, de fração de vazio, vazão mássica de gás, em função da vazão de líquido que satisfaça o critério de Boe.

O procedimento é realizado até o instante que o valor da velocidade superficial de líquido ultrapasse o limite imposto pela equação (4.4).

A equação (4.2) é utilizada de maneira interativa a partir de um método de bissecção, que garanta a convergência dos valores, para se determinar para cada valor de vazão de líquido os valores de fração de vazio, velocidade superficial do gás no pipeline e velocidade superficial do líquido que satisfaçam a seguinte condição:

$$Boe = u_{LS} - \frac{\rho_{G0} RT}{\rho_L g(l\alpha + L)} u_{GS0} = 0 \tag{4.5}$$

O conjunto de valores que satisfazer essa condição formará a curva do critério de Boe mostrada no mapa de estabilidade.

4.6 Estabilidade por *Taitel*

Segue os mapas de estabilidade levantados por Taitel (1990), todo o procedimento adotado pelo autor se encontra em [12]. Tais mapas serão comparados ás curvas construídas em função das velocidades superficiais de gás e de líquido.

- Comprimento equivalente do buffer L = 1,69 m:

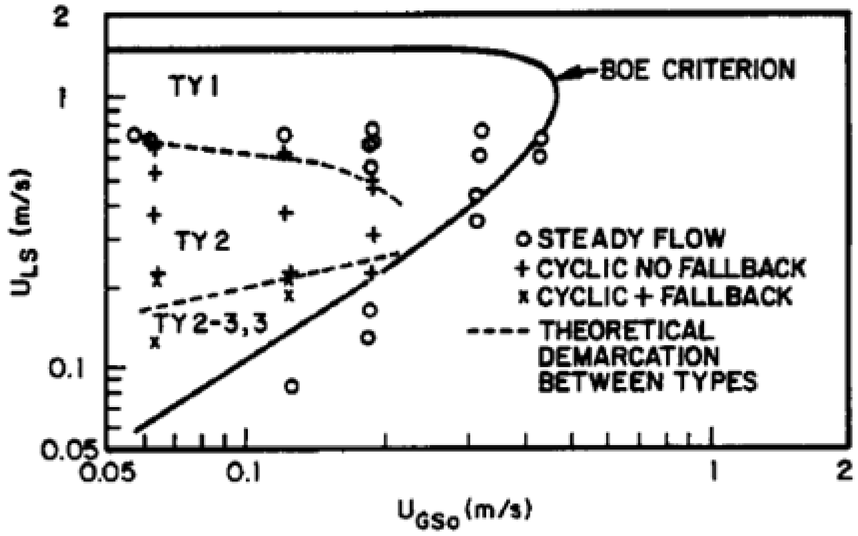

Figura 14 - Critério de Boe segundo [12]: L=1,69m

- Comprimento equivalente do buffer L = 5,1 m:

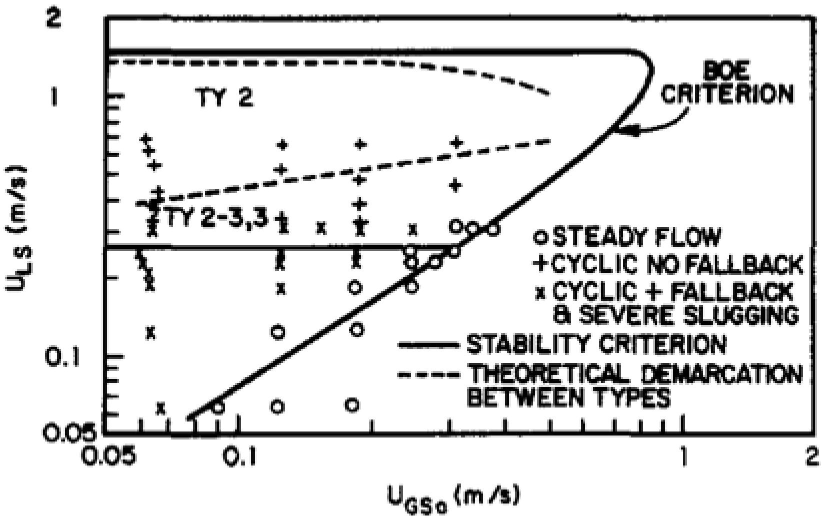

Figura 15 - Critério de Boe segundo [12]: L=5,1 m

- Comprimento equivalente do buffer L = 10 m:

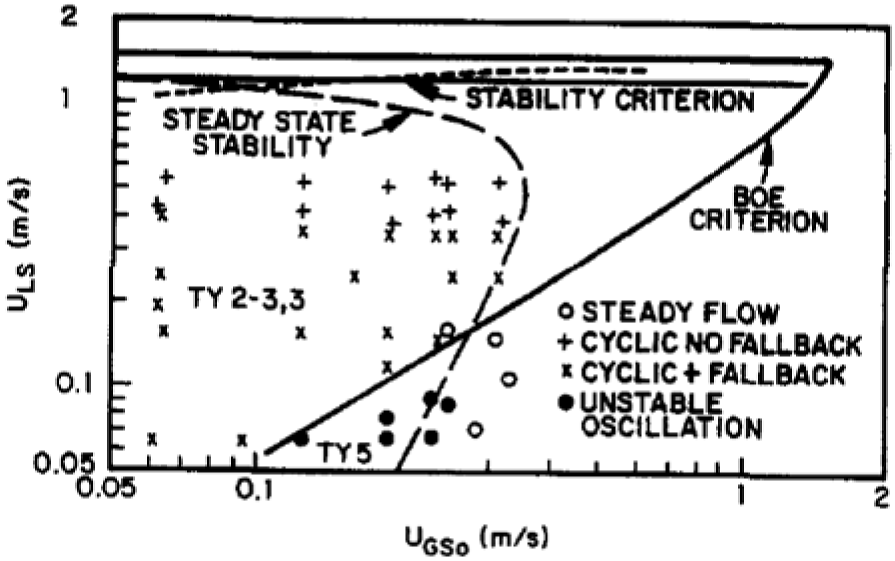

Figura 16 - Critério de Boe segundo [12]: L=10 m

4.7 Resultados

Apresentação das curvas obtidas a partir da simulação numérica em função do comprimento equivalente do *buffer*, na entrada do pipeline. São mostradas duas curvas para cada comprimento. No primeiro caso, a figura representa a curva do critério de Boe em função das velocidades superficiais, desta maneira analisa-se esse resultado diretamente com as curvas levantadas por Taitel.

No segundo caso, a figura representa o critério de Boe em função das vazões mássica de gás e volumétrica de líquido, para se fazer a comparação com as curvas de estabilidade já levantadas pelo modelo em [6] e [13] para o sistema *pipeline-riser*.

Em ambas as figuras, são também mostrados os valores experimentais determinados por [12]. A partir destes pares estáveis ou instáveis, pode-se verificar a eficácia do método escolhido para se analisar a estabilidade em cada configuração do sistema.

- Comprimento de Buffer: Le=1,69m;

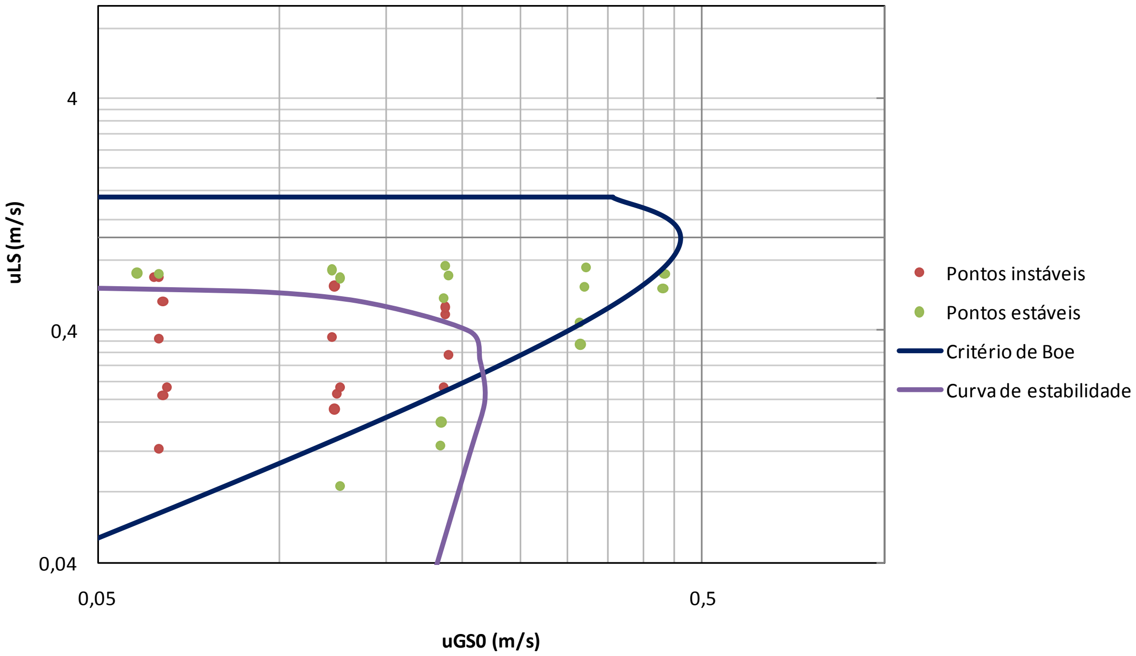

Figura 17 - Mapa de estabilidade para L=1,69 m

- Comprimento de Buffer: Le=5,1m:

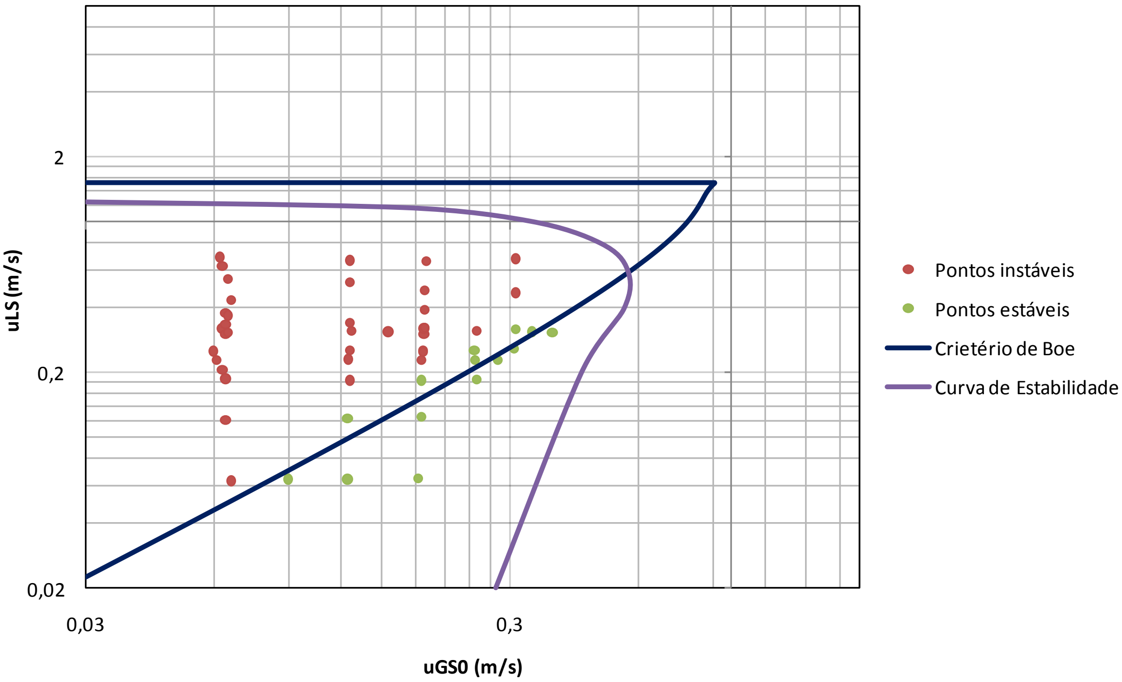

Figura 18 - Mapa de estabilidade para L=5,1 m

- Comprimento de Buffer: Le=10m;

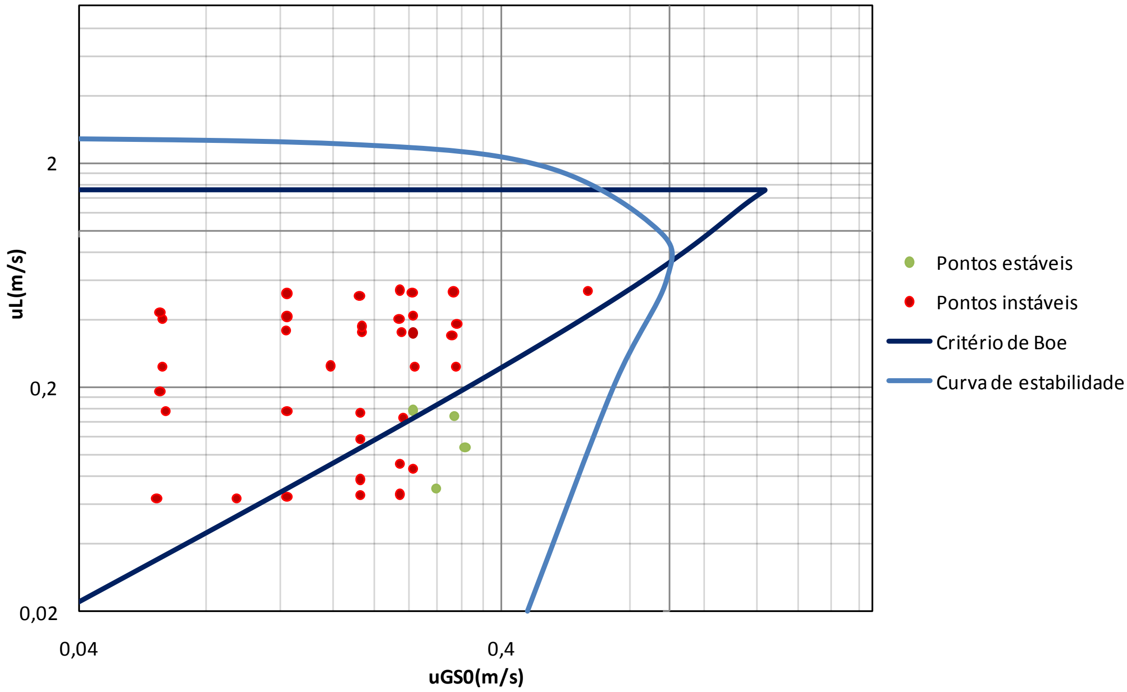

Figura 19 - Mapa de estabilidade para L=10 m

4.8 Análises

As seguintes análises podem ser feitas comparando-se os mapas de estabilidade apresentados:

- Comparando-se as curvas de [12] com os mapas construídos em função das velocidades superficiais, percebe-se uma semelhança entre os comportamentos das duas curvas. Pode-se notar que ambas possuem os valores limites de velocidades semelhantes e a geometria da curva é próxima uma da outra. Disso, concluí-se que o critério de Boe apresentado neste trabalho foi realizado de maneira análoga ao que Taitel mostrou em seu artigo e, portanto, os resultados são aceitáveis do ponto de vista de comparação. Pode-se, consequentemente, utilizar os resultados obtidos neste trabalho como base para análise futura das curvas de estabilidade, em sistemas *pipeline-riser* com *riser* vertical e sem atrito, de maneira que os resultados sejam comparáveis e as discrepâncias possam ser verificadas e analisadas.
- Para L = 1,69 m (Figura 17), pode se afirmar que a curva de estabilidade separa os regimes instáveis e estáveis através da fronteira da mesma. Por outro lado, o critério de Boe engloba todos os pontos dentro da mesma região de instabilidade. Pode-se concluir que, para este caso, a curva de estabilidade prediz com maior eficácia a região de estabilidade.
- Para L = 5,1 m (Figura 18), nota-se que a curva de estabilidade engloba todos os pontos experimentais, tanto estáveis quanto instáveis, e a curva referente ao critério de Boe consegue limitar os pontos estáveis ao limite da curva, separando-os dos pontos instáveis que ficam localizados internamente a região de instabilidade. Neste caso verifica-se que o critério de Boe apresenta resultados mais significativos do que a curva de estabilidade.
- Para L=10 m (Figura 19), analogamente ao caso anterior, o critério de Boe apresenta resultados mais satisfatórios. Os pontos estáveis se localizam fora da região limitada pelo critério de Boe, neste caso o critério consegue predizer a região de estabilidade satisfatoriamente, mesmo que existam pontos instáveis fora da região de. A curva de estabilidade, novamente engloba todos os pontos, não os separando em regiões estáveis ou instáveis.

- De uma maneira geral, o critério de Boe prediz melhor o comportamento de escoamentos para velocidades de líquido menores, contudo o modelo em [6] prediz melhor os resultados quando os valores se aproximam do limite imposto.
- Na Figura 19, nota-se que o limite da curva de estabilidade é maior do que o limite imposto (equação 5.4). Ou seja, o modelo afirma que nessa região deveria existir algum tipo de intermitência severa, contudo a imposição prediz que a partir deste valor não haverá tal tipo de escoamento. Essa consideração deve ser imposta ao modelo para corrigi-lo para eventuais análises futuras.

Pode-se perceber que existem pontos próximos entre si nos quais um deles instável e o outro é estável. Esta situação torna questionável a maneira que Taitel (ref.[12]) realizou o experimento e como ele garantiu a estabilidade de certos escoamentos. Análises mais recentes (ref.[6]) mostram que esses pontos podem se encontrar sob a região de SS3, tipo de intermitência severa, no qual Taitel não fez menção em seu trabalho.

5. ANÁLISE DE ESTABILIDADE PARA O SISTEMA *PIPELINE-RISER*

A metodologia exposta em [3-6] para obter os mapas de estabilidade é computacionalmente intensiva, pois para cada configuração do sistema é preciso fazer uma simulação temporal das equações de governo e verificar se a solução numérica converge para um regime permanente ou se para algum regime intermitente.

Quando se está próximo da fronteira de estabilidade, mas para uma configuração dos parâmetros do sistema onde o estado estacionário é instável, a evolução do sistema para o regime intermitente é lenta, pois a taxa de crescimento no tempo da instabilidade é muito pequena, o que leva a grandes períodos de simulação.

A teoria de estabilidade linear fornece uma metodologia que resulta em procedimento computacional mais econômico. Uma vez determinado o estado estacionário, escrevemos as variáveis dependentes como a soma de seus valores no estado estacionário mais uma perturbação e substituímos nas equações de governo do escoamento multifásico. Em seguida, lineariza-se as equações de governo das perturbações do estado estacionário. Para determinar a estabilidade do estado estacionário é necessário que se resolva o sistema de equações lineares que resultou do procedimento descrito.

Dessa forma obtém-se um sistema de equações algébricas, cuja solução pode ser escrita em termos de seus autovalores e autovetores. Em seguida realiza-se a transformada inversa de Laplace, que fornece que a evolução temporal da solução das equações lineares para as perturbações do estado estacionário depende dos autovalores do sistema de equações algébrico anteriormente obtido. Caso os autovalores tenham parte real negativa, a solução decai exponencialmente com o tempo e o estado estacionário é estável. Se pelo menos um autovalor possui parte real positiva, a solução cresce exponencialmente com o tempo e o estado estacionário é instável.

Resumindo, a estabilidade do estado estacionário em face de pequenas perturbações é definida pelo espectro do operador obtido via linearização das equações de governo em termos do estado estacionário.

Neste capítulo será apresentado um resumo das equações adimensionais que controlam as perturbações do estado estacionário de um escoamento bifásico em um sistema *pipeline-riser,* para uma geometria específica, como riser vertical, e algumas hipóteses simplificadoras como fração de vazio constante no riser e atrito desprezível entre os fluidos e o riser. O equacionamento completo encontra-se em [11]. Na Tabela 12 e na Tabela 13 são apresentados coeficientes presentes nas equações e sua definição tanto para o *pipeline* quanto para o *riser*.

Tabela 12 - Variáveis e coeficientes que aparecem nas equações adimensionais de controle do *riser*

Variável	Definição
s	Parametrização do *riser*
α_r	Fração de vazio no *riser*
j_l	Velocidade superficial do líquido no *riser*
P	Pressão no *riser*
j_g	Velocidade superficial do gás no *riser*
ρ_l	Massa específica da fase líquida
ρ_g	Massa específica da fase gasosa
g	Aceleração gravitacional
C_d	Coeficiente adimensional utilizado na relação de deriva para o *riser*
U_d	Coeficiente dimensional utilizado na relação de deriva para o *riser*
f_m	Coeficiente de atrito de Fanning entre fluido e *riser*
Re_m	Número de Reynolds para a mistura
ν_l	Viscosidade cinemática do líquido
δ_u	Razão entre as viscosidades dinâmica de gás e de líquido
$\in / D$	Razão entre rugosidade e diâmetro do *riser*
ρ_m	Massa específica da mistura gás-líquido
μ_m	Viscosidade dinâmica da mistura gás-líquido
R_g	Constante do gás
T_g	Temperatura absoluta do gás

Tabela 13 - Variáveis e coeficientes que aparecem nas equações de controle do *pipeline*.

Variável	Definição
L	Comprimento do *pipeline*
α_p	Fração de vazio na *pipeline*
Q_{l0}	Vazão volumétrica de líquido na entrada do *pipeline*
x	Comprimento da região do *pipeline* com acúmulo de líquido a partir da base do *riser*
j_{l1}	Velocidade superficial do líquido em $x = 0$
L_b	Comprimento equivalente do conduto *buffer* $(L_b = \upsilon_b / A)$, onde υ_b é o volume do *buffer* e A é a área da seção transversal do *pipeline*
P_g	Pressão do gás no *pipeline*
j_{g1}	Velocidade superficial do gás no *pipeline*
A	Área da seção do *pipeline*
R_g	Constante do gás
T_g	Temperatura absoluta do gás
$\dot{m}_{g0}$	Vazão em massa de gás na entrada do *pipeline*

5.1 Variáveis Adimensionais

Tanto para o *riser* quanto *pipeline* o equacionamento será feito com base em variáveis adimensionais, já que essas tornam mais simples o desenvolvimento das ferramentas computacionais. Para o *pipeline* pode-se escrever:

$$x^* = \frac{x}{L_r} \tag{5.1}$$

$$P_g^* = \frac{P_g}{\rho_l R_g T_g} \tag{5.2}$$

$$j^* = j\frac{A}{Q_{l0}} \tag{5.3}$$

$$t^* = t\frac{Q_{l0}}{AL_r} \tag{5.4}$$

$$m_{g0}^* = \frac{m_{g0}}{\rho_l Q_{l0}} \tag{5.5}$$

Onde j representa j_{l1} ou j_{g1} no caso do pipeline. Adota-se o comprimento do *riser* L_r como escala de comprimento. Para adimensionar a pressão adota-se $\rho_l R_g T_g$.. Para o riser, além das variáveis já mostradas, também se pode se escrever:

$$s^* = \frac{s}{L_r} \tag{5.6}$$

$$P^* = \frac{P}{\rho_l R_g T_g} \tag{5.7}$$

5.2 Equações adimensionais

As equações aqui apresentadas serão utilizadas para se determinar o regime estacionário. Essas equações foram demonstradas em [11] e nesta seção elas serão apresentadas, já que está fora do objetivo deste relatório demonstrar o equacionamento citado. A seguir o equacionamento adimensional para o sistema *pipeline-riser*.

- Para o *pipeline* em x* = 0:

  - Conservação de massa de líquido:

$$j_{l1}^* = 1 \tag{5.8}$$

  - Conservação de massa de gás:

$$P_g^* \cdot j_{g1}^* = \dot{m}_{g0}^* \tag{5.9}$$

  - Relação de deriva:

$$\alpha_p = \alpha_p(j_{l1}, j_{g1}, P_g)$$

- Equações de governo para o riser:

  - Conservação de massa para o líquido:

$$\frac{\partial j_l^*}{\partial s^*} = 0 \tag{5.10}$$

- Conservação de massa para o gás:

$$\frac{\partial (P^{*} \cdot {j_g}^{*})}{\partial s^{*}} = 0 \tag{5.11}$$

- Momento linear da mistura (sem atrito e riser vertical):

$$\frac{\partial P^{*}}{\partial s^{*}} = -\Pi_L \cdot \left[(1-\alpha_r) + P^{*} \cdot \alpha_r\right] \tag{5.12}$$

- Relação de deriva:

$$\alpha_r = \frac{{j_g}^{*}}{C_d \cdot ({j_g}^{*} + {j_l}^{*}) + {U_d}^{*}} \tag{5.13}$$

Nessas condições, para riser vertical e sem presença de atrito, pode-se escrever a seguinte relação de correlação de deriva:

$$C_d = 1{,}2 \tag{5.14}$$

$${U_d}^{*} = 0{,}35 \frac{A\sqrt{gD}}{Q_{l0}} \tag{5.15}$$

5.3 Condições de continuidade e de contorno na forma adimensional

As condições explicitadas nesta seção representam os contornos iniciais e finais no sistema *pipeline-riser*. A partir dessas condições os dois sistemas se relacionam e, conseqüentemente, o equacionamento e a análise de estabilidade podem ser realizados.

- Condição de continuidade entre o *riser* e o *pipeline*:

$$j_{l1}^{*} = j_l^{*}(s^{*} = 0, t^{*}) \tag{5.16}$$

$$j_{g1}^{*} = j_g^{*}(s^{*} = 0, t^{*}) \tag{5.17}$$

$$P_g^{*} = P^{*}(s^{*} = 0, t^{*}) \tag{5.18}$$

$$\alpha_r(j_{l1}^{*}, j_{g1}^{*}, P_g^{*}) = \alpha_r(s^{*} = 0, t^{*}) \tag{5.19}$$

As condições de contorno no *pipeline* que especificam a vazão volumétrica de líquido permanecem as mesmas, mas a vazão que especifica a vazão de massa de gás, em termos de variáveis adimensionais, assume a forma da equação (5.5).

- Condição de contorno no topo do *riser*:

$$P(s^{*} = 1, t^{*}) = \frac{P_S}{\rho_l R_g T_g} \tag{5.20}$$

Onde P_s é a pressão no separador.

5.4 Variáveis escritas como estado estacionário mais perturbação

Nesta seção as variáveis adimensionais serão escritas como a soma entre um termo referente ao regime estacionário e outro termo referente à perturbação. Os termos com "*" se referem as variáveis adimensionais, os termos com "~" se referem aos termos estacionários e o termos sem índice se referem às perturbações.

- No *pipeline*:

$$j_{l1}^{*} = \tilde{j}_{l1} + j_{l1} \tag{5.21}$$

$$j_{g1}^{*} = \tilde{j}_{g1} + j_{g1} \tag{5.22}$$

$$P_g^{*} = \tilde{P}_g + P_g \tag{5.23}$$

$$\alpha_p^{*} = \tilde{\alpha}_p + \alpha_p \tag{5.24}$$

- No *riser*:

$$j_l^{*}(s) = \tilde{j}_l(s) + j_l(s) \tag{5.25}$$

$$j_g^{*}(s) = \tilde{j}_g(s) + j_g(s) \tag{5.26}$$

$$P^{*}(s) = \tilde{P}(s) + P(s) \tag{5.27}$$

$$\alpha_r^{*}(s) = \tilde{\alpha}_r(s) + \alpha_r(s) \tag{5.28}$$

5.5 Equações de governo para as perturbações do estado estacionário

Para de obter as equações de governo das perturbações substitui-se os termos adimensionais nas equações do item 5.2, pelos termos mostrados no item 5.4, ou seja, introduz-se a soma dos termos estacionários com os termos de perturbação nas equações adimensionais e, desta maneira, determinam-se as equações de governo para as perturbações.

- Equações de governo de perturbações para o *pipeline* em x*=0 (no *pipeline* apenas um ponto é necessário para se analisar a estabilidade do sistema)

  - Conservação de massa de líquido:

$$j_{l1} = 0 \tag{5.29}$$

  - Conservação de massa de gás:

$$\left(\frac{L}{L_r} \cdot \tilde{\alpha}_p + \frac{L_b}{L_r} \right) \cdot \frac{\partial P_g}{\partial t} + \frac{L}{L_r} \cdot \tilde{P}_g \cdot \frac{\partial \alpha_p}{\partial t} + P_g \cdot \tilde{j}_{g1} + \tilde{P}_g \cdot j_{g1} = 0 \tag{5.30}$$

  - Relação de deriva:

Por hipótese admite-se que α_p é constate e, portanto, não será considerada a perturbação desta variável.

- Equações de governo para o riser:

  - Conservação de massa para o líquido:

$$-\frac{\partial \alpha_r}{\partial t}+\frac{\partial j_l}{\partial s}=0 \qquad (5.31)$$

- Conservação de massa para o gás:

$$\tilde{\alpha}_r \cdot \frac{\partial P}{\partial t}+\tilde{P}\cdot\frac{\partial \alpha_r}{\partial t}+\frac{\partial \tilde{P}}{\partial s}\cdot j_g+\tilde{P}\cdot\frac{\partial j_g}{\partial s}+\tilde{j}_g\cdot\frac{\partial P}{\partial s}+\frac{\partial \tilde{j}_g}{\partial s}\cdot P=0 \qquad (5.32)$$

- Momento linear da mistura (sem atrito e riser vertical):

$$\frac{\partial P}{\partial s}=-\Pi_L\cdot\left[\alpha_r+\tilde{P}\cdot\alpha_r+P.\tilde{\alpha}_r\right] \qquad (5.33)$$

- Relação de deriva:

$$(1-C_d.\tilde{\alpha}_r)\cdot j_g-(C_d.\tilde{\alpha}_r)\cdot j_l-(C_d.[\tilde{j}_l+\tilde{j}_g]+U_d*)\cdot\alpha_r=0 \qquad (5.34)$$

Nas equações acima se desprezaram os termos não lineares, como por exemplo, os produtos de dois termos de perturbação. O equacionamento necessário para se desenvolver as equações (5.32)-(5.34) está mostrado em [11] e, portanto, optou-se por não refazê-los neste relatório.

5.5.1 Condições de continuidade e de contorno para a perturbação do estado estacionário

As condições de continuidade na forma adimensional para as perturbações do estado estacionário são obtidas substituindo-se as equações (5.21)-(5.24) e (5.25)-(5.28) nas equações (5.16)-(5.18) e levando-se em conta que as variáveis para o estado estacionário satisfazem as equações (5.44)-(5.47). As condições de continuidade para a perturbação do estado estacionário são apresentadas abaixo.

- Entre a *pipeline* e o *riser*:

$$j_{l1} = j_l(s=0,t) \tag{5.34}$$

$$j_{g1} = j_g(s=0,t) \tag{5.35}$$

$$\alpha_r(j_{l1}, j_{g1}, \theta(s=0)) = \alpha_r(s=0,t) \tag{5.36}$$

$$P_g = P(s=0,t) \tag{5.37}$$

As condições de contorno para as perturbações do estado estacionário no *pipeline* são dados por $Q_{l0} = \dot{m}_{g0} = 0$ onde Q_{l0} e $\dot{m}_{g0}$ são, respectivamente, as perturbações de $\tilde{Q}_{l0}$ e $\tilde{m}_{g0}$ para o estado estacionário. No topo do *riser* a condição de contorno para as perturbações do estado estacionário é:

$$P(s=1,t) = 0 \tag{5.38}$$

5.5.2 Redução do número de equações de perturbação para o *riser*

Para tornar mais simples o procedimento computacional, nesta seção a equação (5.36) será eliminada para reduzir o número de equações de governo das perturbações do estado estacionário no *riser*. Portanto, pode-se reescrever a equação (5.36) como:

$$\alpha_r = \frac{\tilde{\alpha}_r \cdot (1 - C_d.\tilde{\alpha}_r)}{\tilde{j}_g} \cdot j_g - \frac{C_d.\tilde{\alpha}_r^{\,2}}{\tilde{j}_g} \cdot j_l \tag{5.39}$$

Podem-se reescrever as equações (5.33), (5.34) e (5.35) a partir da substituição de α_r pela equação (5.38), com $j_g(s,t)$, $j_l(s,t)$ e $P(s,t)$ como variáveis a serem determinadas, o que resulta nas equações representadas abaixo.

A partir de (5.31) obtém-se:

$$-\tilde{\alpha}_r \cdot (1 - \tilde{\alpha}_r.C_d)\frac{\partial j_g}{\partial t} + \tilde{\alpha}_r^{\,2}.C_d \cdot \frac{\partial j_l}{\partial t} + \tilde{j}_g \cdot \frac{\partial j_l}{\partial s} = 0 \tag{5.39}$$

A partir de (5.32) obtém-se:

$$\tilde{P}.\tilde{\alpha}_r \cdot (1 - \tilde{\alpha}_r.C_d)\frac{\partial j_g}{\partial t} - C_d.\tilde{P}.\tilde{\alpha}_r^{\,2} \cdot \frac{\partial j_l}{\partial t} + \tilde{j}_g.\tilde{\alpha}_r \cdot \frac{\partial P}{\partial t} + \tilde{j}_g \cdot \frac{\partial}{\partial s}\left(\tilde{j}_g.P + \tilde{P}.j_g\right) = 0 \tag{5.40}$$

A partir de (5.32) obtém-se:

$$\tilde{j}_g \cdot \frac{\partial P}{\partial s} = -\Pi_L \cdot \left[\tilde{j}_g .\tilde{\alpha}_r .P + (\tilde{P} - 1) \cdot \tilde{\alpha}_r .(1 - \tilde{\alpha}_r .C_d). j_g - (\tilde{P} - 1).\tilde{\alpha}_r{}^2 .C_d \cdot j_l \right] \tag{5.41}$$

As equações (5.39)-(5.41) podem ser reescritas na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial j_l}{\partial t} \\ \dfrac{\partial j_g}{\partial t} \\ \dfrac{\partial P}{\partial t} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & D_{22} & D_{23} \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial j_l}{\partial s} \\ \dfrac{\partial j_g}{\partial s} \\ \dfrac{\partial P}{\partial s} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} j_l \\ j_g \\ P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.42}$$

Da matriz representada por (5.42), os termos não nulos referentes a [B], [D] e [A] podem ser escritos como:

$$B_{11} = \tilde{\alpha}_r{}^2 .\tilde{C}_d \tag{5.43}$$

$$B_{12} = -\tilde{\alpha}_r .(1 - \tilde{\alpha}_r .\tilde{C}_d) \tag{5.44}$$

$$B_{21} = -\tilde{P}.\tilde{\alpha}_r{}^2 .\tilde{C}_d \tag{5.45}$$

$$B_{22} = \tilde{P}.\tilde{\alpha}_r .(1 - \tilde{\alpha}_r .\tilde{C}_d) \tag{5.46}$$

$$B_{23} = \tilde{j}_g .\tilde{\alpha}_r \tag{5.47}$$

$$D_{11} = \tilde{j}_g \tag{5.48}$$

$$D_{22} = \tilde{j}_g .\tilde{P} \tag{5.49}$$

$$D_{23} = \tilde{j}_g{}^2 \tag{5.50}$$

$$D_{33} = \tilde{j}_g \tag{5.51}$$

$$A_{22} = \tilde{j}_g \cdot \frac{\partial \tilde{P}}{\partial s} \tag{5.52}$$

$$A_{23} = \tilde{j}_g \cdot \frac{\partial \tilde{j}_g}{\partial s} \tag{5.53}$$

$$A_{31} = -\Pi_L .(\tilde{P} - 1).\tilde{\alpha}_r{}^2 .\tilde{C}_d \tag{5.54}$$

$$A_{32} = \Pi_L .(\tilde{P} - 1).\tilde{\alpha}_r \cdot (1 - \tilde{\alpha}_r .\tilde{C}_d) \tag{5.55}$$

$$A_{33} = \Pi_L \cdot \tilde{j}_g \cdot \tilde{\alpha}_r \tag{5.56}$$

Onde Π_L é definido de acordo com

$$\Pi_L = \frac{g \cdot L_r}{R_g \cdot T_g} \tag{5.57}$$

5.6 Análise de estabilidade

Como procedemos anteriormente, aplica-se a transformada de Laplace ao sistema de equações (5.42) e as equações (5.29) e (5.30) de forma a eliminar a dependência em relação ao tempo. Em seguida, vamos discretizar o domínio espacial (intervalo 0<s<1) e representar o operador de diferenciação via diferenças finitas. O resultado é um sistema de equações algébricas, que uma vez resolvido nos fornece a solução no domínio da variável da transformada de Laplace. A transformada inversa de Laplace dessa solução nos fornece a solução no domínio do tempo. Essa solução é função dos autovalores do sistema de equações algébricas resultante da discretização espacial. Caso todos esses autovalores possuam parte real negativa, a solução decai com o tempo e o estado estacionário é estável. Caso um autovalor possua parte real positiva, a solução cresce com o tempo e o estado estacionário é instável. Uma vez aplicada a transformada de Laplace às equações (5.29), (5.30) e (5.42) temos:

- Para a tubulação temos:

  - Para o líquido temos a equação:

$$\hat{j}_{l1} = 0 \tag{5.58}$$

  - Para o gás temos a equação:

$$\omega\left(\frac{L}{L_r}\tilde{\alpha}_P + \frac{L_b}{L_r}\right)\hat{P}_g - \left(\frac{L}{L_r}\tilde{\alpha}_P + \frac{L_b}{L_r}\right)\hat{P}_g(0) + P_g\tilde{j}_{g1} + \tilde{P}_g j_{g1} = 0 \tag{5.59}$$

- Para o riser temos

$$\left([A] + \omega[B]\right)\begin{Bmatrix}\hat{j}_l \\ \hat{j}_g \\ \hat{P}\end{Bmatrix} + [D]\begin{Bmatrix}\frac{\partial \hat{j}_l}{\partial s} \\ \frac{\partial \hat{j}_g}{\partial s} \\ \frac{\partial \hat{P}}{\partial s}\end{Bmatrix} = [B]\begin{Bmatrix}j_l \\ j_g \\ P\end{Bmatrix} \tag{5.60}$$

As equações (5.58) e (5.59) são utilizadas como condição de contorno para o riser em s = 0. No topo do riser, a condição de contorno é dada pela equação (5.18), e sua transformada de Laplace é dada pela equação (5.60).

5.7 Discretização

Vamos representar o operador $\partial / \partial s$ que aparece no sistema de equações (5.60) por operador de diferenças finitas. Utilizaremos fórmula de diferenças finitas de três pontos. Para podermos realizar isso, vamos discretizar o intervalo 0 < s<1 em N +1 pontos. Isso resultará em um total de 3N +3 variáveis, mas com condição de contorno dada pelas equações (5.58), (5.59), na realidade têm-se 3N variáveis desconhecidas. Logo, necessitam-se de 3N equações para determiná-las. Vamos utilizar a equação (5.59) para escrever $\hat{j}_{g1} = \hat{j}_{g1}(s = 0)$ em termos de $\hat{P}_g = P(s = 0)$,ou seja

$$\hat{j}_{g1} = \frac{\tilde{j}_{g1}}{\tilde{P}_g}\hat{P}_g - \omega\left(\frac{L}{L_r}\tilde{\alpha}_P + \frac{L_b}{L_r}\right)\frac{\hat{P}_g}{\tilde{P}_g} + \left(\frac{L}{L_r}\tilde{\alpha}_P + \frac{L_b}{L_r}\right)\frac{P_g(0)}{\tilde{P}_g} \tag{5.61}$$

Prossegui-se a discretização do sistema de equações (5.60) da maneira a seguir. No nó k = 1, impõe-se a forma discreta da equação para o momento linear da mistura, eliminando $\hat{j}_g$ em termos de $\hat{P}$ via a equação (5.61). Nos nós k = 2,..,N impõe-se a forma discreta do sistema de equações (5.60) e no nó k = N + 1 impõe-se somente a forma discreta das equações de continuidade para o líquido e o gás. A discretização das equações de governo do escoamento no riser, portanto, podem ser escritas como:

- Para o nó k=1 tem-se:

$$\frac{D_{33}(s_1)}{2\Delta s}\left[-3\hat{P}(s_1) + 4\hat{P}(s_2) - \hat{P}(s_3)\right] + A_{32}(s_1)\left\{-\frac{\tilde{j}_{g1}}{\tilde{P}_g}\right\}\hat{P}(s_1) + A_{33}(s_1)\hat{P}(s_1)$$

$$-\omega A_{32}(s_1)\left(\frac{L}{L_r}\tilde{\alpha}_P + \frac{L_b}{L_r}\right)P(s_1) = -A_{32}(s_1)\left(\frac{L}{L_r}\tilde{\alpha}_P + \frac{L_b}{L_r}\right)P_g(0) \tag{5.62}$$

- Para o nó k=2 tem-se:

$$\frac{D_{11}(s_2)}{2\Delta s}\hat{j}_l(s_3)+\omega\left[B_{11}(s_2)\hat{j}_l(s_2)+B_{12}(s_2)\hat{j}_g(s_2)\right]=B_{11}(s_2)j_l(s_2,0)+B_{12}(s_2)j_g(s_2,0)$$

(5.63)

$$\frac{\tilde{j}_g(s_2)}{2\Delta s}\left\{\tilde{P}\frac{\tilde{j}_{g1}}{\tilde{P}_g}\hat{P}(s_1)+\tilde{P}(s_3)\hat{j}_g(s_3)\right\}+\frac{\tilde{j}_g(s_2)}{2\Delta s}\left\{-\tilde{j}_g(s_1)\hat{P}(s_1)+\tilde{j}_g(s_3)\hat{P}(s_3)\right\}$$

$$+\omega\left[B_{21}(s_2)\hat{j}_l(s_2)+B_{22}(s_2)\hat{j}_g(s_2)+B_{23}(s_2)\hat{P}(s_2)+\frac{\hat{j}_g(s_2)}{2\Delta s}\frac{\tilde{P}(s_1)}{\tilde{P}_g}\left(\frac{L}{L_r}\tilde{\alpha}_p+\frac{L_b}{L_r}\right)\hat{P}(s_1)\right]=$$

$$\frac{\tilde{j}_g(s_2)}{2\Delta s}\frac{\tilde{P}(s_1)}{\tilde{P}_g}\left(\frac{L}{L_r}\tilde{\alpha}_P+\frac{L_b}{L_r}\right)P(s_1,0)+B_{21}(s_2)j_l(s_2,0)+B_{22}(s_2)j_g(s_2,0)+B_{23}(s_2)P(s_2,0)$$

(5.64)

$$\frac{D_{33}(s_2)}{2\Delta s}\left\{-\hat{P}(s_1)+\hat{P}(s_3)\right\}+A_{31}(s_2)j_l(s_2,0)+A_{32}(s_2)j_g(s_2,0)+A_{33}(s_2)P(s_2,0)=0$$

(5.65)

- Para os nós entre k=3 e N-1 tem-se:

$$\frac{D_{11}(s_k)}{2\Delta s}\left\{\hat{j}_l(s_{k+1})-\hat{j}_l(s_{k-1})\right\}+\omega\left[B_{11}(s_k)\hat{j}_l(s_k)+B_{12}(s_k)\hat{j}_g(s_k)\right]=B_{11}(s_k)j_l(s_k,0)+$$
$$+B_{12}(s_k)j_g(s_k,0) \qquad (5.66)$$

$$\frac{\tilde{j}_g(s_k)}{2\Delta s}\left\{\tilde{P}(s_{k+1})\hat{j}_g(s_{k-1})-\tilde{P}(s_{k-1})\hat{j}_g(s_{k-1})\right\}+\frac{\tilde{j}_g(s_k)}{2\Delta s}\left\{\tilde{j}_g(s_{k+1})\hat{P}(s_{k+1})-\tilde{j}_g(s_{k-1})\hat{P}(s_{k-1})\right\}$$

$$+\omega\left[B_{21}(s_k)\hat{j}_l(s_k)+B_{22}(s_k)\hat{j}_g(s_k)+B_{23}(s_k)\hat{P}(s_k)\right]=B_{21}(s_k)j_l(s_k,0)+B_{22}(s_k)j_g(s_k,0)+$$
$$+B_{23}(s_k)P(s_k,0) \qquad (5.67)$$

$$\frac{D_{33}(s_k)}{2\Delta s}\left\{\hat{P}(s_{k+1})-\hat{P}(s_{k-1})\right\}+A_{31}(s_k)\hat{j}_l(s_k)+A_{32}(s_k)\hat{j}_g(s_k)+A_{33}(s_k)\hat{P}(s_k)=0 \qquad (5.68)$$

- Para o nó k=N tem-se:

$$\frac{D_{11}(s_N)}{2\Delta s}\left\{\hat{j}_l(s_{N+1})-\hat{j}_l(s_{N-1})\right\}+\omega\left[B_{11}(s_N)\hat{j}_l(s_N)+B_{12}(s_N)\hat{j}_g(s_N)\right]=B_{11}(s_N)j_l(s_N,0)+$$

$$+B_{12}(s_N)j_g(s_N,0) \qquad (5.69)$$

$$\frac{\tilde{j}_g(s_N)}{2\Delta s}\left\{\tilde{P}(s_{N+1})\hat{j}_g(s_{N-1})-\tilde{P}(s_{N-1})\hat{j}_g(s_{N-1})\right\}+\frac{\tilde{j}_g(s_N)}{2\Delta s}\left\{\tilde{j}_g(s_{N+1})\hat{P}(s_{N+1})-\tilde{j}_g(s_{N-1})\hat{P}(s_{N-1})\right\}$$

$$+\omega\left[B_{21}(s_N)\hat{j}_l(s_N)+B_{22}(s_N)\hat{j}_g(s_N)+B_{23}(s_N)\hat{P}(s_N)\right]=B_{21}(s_N)j_l(s_N,0)+B_{22}(s_N)j_g(s_N,0)+$$
$$+B_{23}(s_N)P(s_N,0) \tag{5.70}$$

$$\frac{D_{33}(s_N)}{2\Delta s}\left\{-\hat{P}(s_{N-1})\right\}+A_{31}(s_N)\hat{j}_l(s_N)+A_{32}(s_N)\hat{j}_g(s_N)+A_{33}(s_N)\hat{P}(s_N)=0 \tag{5.71}$$

- Para o nó k=N+1:

$$\frac{D_{11}(s_{N+1})}{2\Delta s}\left\{\hat{j}_l(s_{N-1})-4\hat{j}_l(s_N)+3\hat{j}_l(s_{N+1})\right\}+\omega\left(B_{11}(s_{N+1})\hat{j}_l(s_{N+1})+B_{12}(s_{N+1})\hat{j}_g(s_{N+1})\right)=$$
$$B_{11}(s_{N+1})j_l(s_{N+1},0)++B_{12}(s_{N+1})j_g(s_{N+1},0) \tag{5.72}$$

$$\frac{\tilde{j}_g(s_{N+1})}{2\Delta s}\left\{\hat{P}(s_{N-1})\hat{j}_g(s_{N-1})-4\tilde{P}(s_N)\hat{j}_g(s_N)+3\tilde{P}(s_{N+1})\hat{j}_g(s_{N+1})\right\}+$$
$$\frac{\tilde{j}_g(s_N)}{2\Delta s}\left\{\hat{j}_g(s_{N-1})\hat{P}(s_{N-1})-4\tilde{j}_g(s_N)\hat{P}(s_N)\right\}$$
$$+\omega\left[B_{21}(s_{N+1})\hat{j}_l(s_{N+1})+B_{22}(s_{N+1})\hat{j}_g(s_{N+1})\right]=B_{21}(s_{N+1})j_l(s_N+1,0)+B_{22}(s_{N+1})j_g(s_{N+1},0)$$
$$\tag{5.73}$$

O resultado da discretização via diferenças finitas é o seguinte sistema de equações algébricas:

$$\left(\begin{bmatrix} K_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ 0 & 0 & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix}+\omega\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & 0 & 0 \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ 0 & 0 & M_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} \{\hat{j}_l\} \\ \{\hat{j}_g\} \\ \hat{P}_1 \\ \{\hat{P}\} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \\ F_3 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.74}$$

Os blocos K_{ij} e M_{ij}, i,j = 1; 2 tem dimensão N x N, o bloco K_{33} e M_{33} tem dimensão 1 x 1, os blocos K_{23} e M_{23} tem dimensão N x 1, os blocos K_{24} e M_{24} tem dimensão N x (N-1), os blocos K_{4j} ; j = 1; 2 tem dimensão (N -1) x N, o bloco K_{43} tem dimensão (N-1) x 1 e o bloco K_{44} tem dimensão (N-1) x (N-1). Os vetores $\{\hat{j}_l\}$ e $\{\hat{j}_g\}$ tem dimensão N e o vetor $\{\hat{P}\}$ tem dimensão N-1. Note que

$$\{\hat{j}_l\}=\begin{Bmatrix} \hat{j}_{l,2} \\ \hat{j}_{l,3} \\ \dots \\ \hat{j}_{l,N} \\ \hat{j}_{l,N+1} \end{Bmatrix}, \qquad \{\hat{j}_g\}=\begin{Bmatrix} \hat{j}_{g,2} \\ \hat{j}_{g,3} \\ \dots \\ \hat{j}_{g,N} \\ \hat{j}_{g,N+1} \end{Bmatrix} \text{ e } \qquad \{\hat{P}\}=\begin{Bmatrix} \hat{P}_2 \\ \hat{P}_3 \\ \dots \\ \hat{P}_{N-1} \\ \hat{P}_N \end{Bmatrix}. \tag{5.75}$$

A equação acima deixa claro que os vetores $\{\hat{j}_l\}$ e $\{\hat{j}_g\}$ tem dimensão N e que o vetor $\{\hat{P}\}$ tem dimensão N-1, mas os valores a serem determinados para a pressão $\hat{P}$ vão do nó 1 até o nó N, enquanto que os valores a serem determinados para $\hat{j}_l$ e $\hat{j}_g$ vão do nó 2 até o nó N + 1.

A primeira linha de blocos na equação matricial (5.74) representa a discretização da equação de continuidade para o líquido no riser (matrizes K_{1j} e M_{1j}). A segunda linha de blocos na equação matricial representa a discretização da equação de continuidade para o gás no riser (matrizes K_{2j} e M_{2j}). A terceira linha na equação matricial representa a equação do momento da mistura no primeiro nó da discretização do riser, e a quarta linha dessa equação matricial representa a discretização da equação do momento para a mistura ao longo do riser. A última linha da equação matricial será utilizada para eliminarmos o vetor de pressão e reduzir a dimensão do problema de autovalores/vetores associado a essa equação algébrica. A seguir, serão listados os elementos não nulos dos blocos K_{ij} e M_{ij}, i, j = 1,..,4.

$$[K_{11}]_{1,2} = \frac{[D_{11}]_2}{2\Delta s} \tag{5.76}$$

$$[K_{11}]_{j,j-1} = -\frac{[D_{11}]_{j+1}}{2\Delta s};\ j = 2,.., N-1 \tag{5.77}$$

$$[K_{11}]_{j,j+1} = \frac{[D_{11}]_{j+1}}{2\Delta s};\ j = 2,.., N-1 \tag{5.78}$$

$$[K_{11}]_{N,N} = 3\frac{[D_{11}]_{N+1}}{2\Delta s} \tag{5.79}$$

$$[K_{11}]_{N,N-1} = -2\frac{[D_{11}]_{N+1}}{2\Delta s} \tag{5.80}$$

$$[K_{11}]_{N,N-2} = \frac{[D_{11}]_{N+1}}{2\Delta s} \tag{5.81}$$

$$[M_{11}]_{j,j} = [B_{11}]_{j+1};\ j = 1,...N \tag{5.82}$$

$$[M_{12}]_{j,j} = [B_{12}]_{j+1};\ j = 1,...N \tag{5.83}$$

$$[K_{2,2}]_{1,2} = \frac{[\tilde{j}_g]_2}{2\Delta s}[\tilde{P}]_3 \tag{5.84}$$

$$[K_{22}]_{j,j-1} = -\frac{[\tilde{j}_g]_{j+1}}{2\Delta s}[\tilde{P}]_j;\ j = 2,..., N-1 \tag{5.85}$$

$$[K_{22}]_{j,j+1} = \frac{[\tilde{j}_g]_{j+1}}{2\Delta s}[\tilde{P}]_{j+2};\ j = 2,..., N-1 \tag{5.86}$$

$$(K_{22})_{N,N} = \frac{3}{2}\frac{\tilde{j}_g(N+1)}{2\Delta s}\tilde{P}(N+1) \tag{5.87}$$

$$(K_{22})_{N,N-1} = -2\frac{\tilde{j}_g(N+1)}{2\Delta s}\tilde{P}(N) \tag{5.88}$$

$$(K_{22})_{N,N-2} = \frac{\tilde{j}_g(N+1)}{2\Delta s}\tilde{P}(N-1) \tag{5.89}$$

$$(M_{21})_{j,j} = B_{21}(j+1);\ j = 1,\ldots,N \tag{5.90}$$

$$(M_{22})_{j,j} = B_{22}(j+1);\ j = 1,\ldots,N \tag{5.91}$$

$$(K_{23})_{1,1} = \frac{\tilde{j}_g(2)}{2\Delta s}\frac{\tilde{j}_{g1}}{\tilde{P}_g}\tilde{P}(1) - \frac{\tilde{j}_g(2)}{2\Delta s}\tilde{j}_g(1) \tag{5.92}$$

$$(M_{23})_{1,1} = \frac{\hat{j}_g(2)}{2\Delta s}\frac{\tilde{P}(1)}{\tilde{P}_g}\left(\frac{L}{L_r}\tilde{\alpha}_p + \frac{L_b}{L_r}\right) \tag{5.93}$$

$$(K_{24})_{1,2} = \frac{\tilde{j}_g(2)}{2\Delta s}\tilde{j}_g(3) \tag{5.94}$$

$$(K_{24})_{j,j-1} = -\frac{\tilde{j}_g(j+1)}{2\Delta s}\tilde{j}_g(j);\ j = 2,\ldots,N-1 \tag{5.95}$$

$$(K_{24})_{j,j+1} = \frac{\tilde{j}_g(j+1)}{2\Delta s}\tilde{j}_g(j+2);\ j = 2,\ldots,N-2 \tag{5.96}$$

$$(K_{24})_{N,N-1} = -2\frac{\tilde{j}_g(N+1)}{2\Delta s}\tilde{j}_g(N) \tag{5.97}$$

$$(K_{24})_{N,N-2} = \frac{\tilde{j}_g(N+1)}{2\Delta s}\tilde{j}_g(N-1) \tag{5.98}$$

$$(M_{24})_{j,j} = B_{23}(j+1);\ j = 1,\ldots,N-1 \tag{5.99}$$

$$(K_{33})_{1,1} = -\frac{3}{2}\frac{D_{33}(1)}{\Delta s} - A_{32}(1)\frac{\tilde{j}_{g1}}{\tilde{P}_g} + A_{33}(1) \tag{5.100}$$

$$(M_{33})_{1,1} = -A_{32}(1)\left(\frac{L}{L_r}\tilde{\alpha}_p + \frac{L_b}{L_r}\right)\frac{1}{\tilde{P}_g} \tag{5.101}$$

$$(K_{34})_{1,1} = 2\frac{D_{33}(1)}{\Delta s} \tag{5.102}$$

$$(K_{34})_{1,2} = -\frac{D_{33}(1)}{\Delta s} \tag{5.103}$$

$$(K_{41})_{j,j} = A_{31}(j+1);\ j = 1,\ldots,N-1 \tag{5.104}$$

$$(K_{42})_{j,j} = A_{32}(j+1);\ j = 1,\ldots,N-1 \tag{5.105}$$

$$(K_{43})_{1,1} = -\frac{D_{33}(2)}{2\Delta s} \tag{5.106}$$

$$(K_{44})_{j,j-1} = -\frac{D_{33}(j+1)}{2\Delta s};\ j = 2,\ldots,N-1 \tag{5.107}$$

$$(K_{44})_{j,j+1} = \frac{D_{33}(j+1)}{2\Delta s};\ j = 1,\ldots,N-2 \tag{5.108}$$

$$(K_{44})_{j,j} = A_{33}(\ _{j+1});\ j = 1,\ldots,N-1 \tag{5.109}$$

$$(K_{44})_{N-1,N-2} = \frac{-D_{33}(\ _N)}{2\Delta s} \tag{5.110}$$

Na sequência, especificam-se os elementos não nulos dos vetores $\{F_j\}$. Pode-se escrever, portanto,

$$(F_1)_1 = B_{11}(\ _2)\hat{j}_l(\ _2,0) + B_{12}(\ _2)\tilde{j}_g(\ _2,0) \tag{5.111}$$

$$(F_1)_j = B_{11}(\ _{j+1})\hat{j}_l(\ _{j+1},0) + B_{12}(\ _{j+1})\tilde{j}_g(\ _{j+1},0),\ j = 2,\ldots,N \tag{5.112}$$

$$(F_2)_1 = \frac{\tilde{j}_g(\ _2)\tilde{P}(\ _2)}{2\Delta s\ \tilde{P}_g}\left(\frac{L}{L_r}\tilde{\alpha}_p + \frac{L_b}{L_r}\right)B_{21}(\ _2)\hat{j}_l(\ _2,0) + B_{22}(\ _2)\tilde{j}_g(\ _2,0) + B_{23}(\ _2)\hat{P}(\ _2,0) \tag{5.113}$$

$$(F_2)_j = B_{21}(\ _{j+1})\hat{j}_l(\ _{j+1},0) + B_{22}(\ _{j+1})\tilde{j}_g(\ _{j+1},0) + B_{23}(\ _{j+1})\hat{P}(\ _{j+1},0),\ j = 2,\ldots N-1 \tag{5.114}$$

$$(F_2)_N = B_{21}(\ _{N+1})\hat{j}_l(\ _{N+1},0) + B_{22}(\ _{N+1})\tilde{j}_g(\ _{N+1},0) \tag{5.115}$$

$$F_3 = (F_3)_1 = -A_{32}(\ _1)\left(\frac{L}{L_r}\tilde{\alpha}_p + \frac{L_b}{L_r}\right)P_g(0) \tag{5.116}$$

A seguir, elimina-se $\{\hat{P}\}$ da equação (5.73). Pode-se escrever:

$$\{\hat{P}\} = -K_{44}^{-1}\left(K_{41}\{\hat{j}_l\} + K_{42}\{\hat{j}_g\} + K_{43}\hat{P}_1\right) \tag{5.117}$$

Onde K_{44}^{-1} é a matriz inversa da matriz K44. Substituindo-se a equação (5.117) na equação (5.73), esta última pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & 0 & 0 \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \{\hat{j}_l\} \\ \{\hat{j}_g\} \\ \hat{P}_1 \end{Bmatrix} + \omega\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ 0 & 0 & H_{33} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \{\hat{j}_l\} \\ \{\hat{j}_g\} \\ \hat{P}1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \\ F_3 \end{Bmatrix} \tag{5.118}$$

Onde,

$$G_{11} = K_{11} \tag{5.119}$$

$$G_{21} = -K_{24}K_{44}^{-1}K_{41} \tag{5.120}$$

$$G_{22} = K_{22} - K_{24}K_{44}^{-1}K_{42} \tag{5.121}$$

$$G_{23} = K_{23} - K_{24}K_{44}^{-1}K_{43} \tag{5.122}$$

$$G_{31} = -K_{34}K_{44}^{-1}K_{41} \tag{5.123}$$

$$G_{32} = -K_{34}K_{44}^{-1}K_{42} \tag{5.124}$$

$$G_{33} = K_{33} - K_{34}K_{44}^{-1}K_{43} \tag{5.125}$$

$$H_{11} = M_{11} \tag{5.126}$$

$$H_{12} = M_{12} \tag{5.127}$$

$$H_{21} = M_{21} - M_{24} K_{44}^{-1} K_{41} \tag{5.128}$$

$$H_{22} = M_{22} - M_{24} K_{44}^{-1} K_{42} \tag{5.129}$$

$$H_{33} = M_{33} \tag{5.130}$$

Para se determinar a estabilidade do estado estacionário basta determinar os autovalores do problema de autovalores/autovetores:

$$\left(\begin{bmatrix} G_{11} & 0 & 0 \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ 0 & 0 & H_{33} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{P}_1 \end{Bmatrix} = 0 \tag{5.131}$$

Onde ω representa o conjunto de autovalores a ser determinado. Se os 2N+1 autovalores apresentarem parte real negativa, o estado estacionário é estável, mas se um autovalor apresentar parte real positiva, o estado estacionário é instável.

6. PROCEDIMENTO NUMÉRICO

6.1 Introdução

Com base no equacionamento e sua discretização proposta no capítulo 5, desenvolver-se-ão rotinas numéricas que simulem o modelo proposto de um riser vertical com e sem atrito.

Nesta seção será apresentado a sequência adotada nas rotinas para a simulação numérica. Esta descrição tem como objetivo apresentar o procedimento para que outros que se interessarem em dar continuidade ao projeto, aqui desenvolvido, tenham condições de aplicar o modelo sem ter a necessidade de refazer os testes e/ou a revisão de cada rotina aqui descrita, ou seja, garantir que tudo está de acordo com a teoria estudada.

Serão descritas todas as rotinas que fazem parte da simulação, assim como os dados de entrada e os parâmetros de saída. A Figura 21 representa esquematicamente a sequência adotada na simulação. Portanto, cada etapa será descrito detalhadamente junto às descrições das rotinas e funções do modelo. Cada uma das etapas está representada por um dos blocos do diagrama. Todo o procedimento numérico foi realizado no software *Matlab*.

Os vetores A e B que constituem as matrizes G e H foram testados com exemplos baseados em sua formulação, já que tais vetores representam procedimentos algébricos dentro do equacionamento, vide equação 5.42. O teste se baseia em usar dois vetores distintos, porém correspondentes. No caso do vetor A, que representa uma diferenciação, basta que uma matriz qualquer multiplicada por A, obrigatoriamente, defina uma matriz correspondente a sua derivada. O procedimento exemplificado pode ser estendido também aos vetores B. Obviamente, o procedimento é valido para qualquer conjunto de parâmetros definidos.

Neste capítulo também constará a explicação do método de determinação dos autovalores associados ao sistema linear, como apresentado em (5.131). Tal método busca evitar qualquer singularidade nas matrizes de tal maneira que valores inconvenientes de autovalores que poderiam prejudicar a avaliação de uma determinada configuração do sistema sejam excluídos da análise.

6.2 Método de busca de autovalores

A proposta desta seção é apresentar o método utilizado como solução neste trabalho para resolver um problema relacionado à inconsistência numérica apresentadas nas matrizes G e H. Portanto, esta aplicação tem como propósito contornar um problema numérico encontrado durante testes feitos para os cálculos dos autovalores, que determinam a estabilidade do sistema.

Durante as simulações percebeu-se que indiferentemente da configuração utilizada para simulação, sempre surgiam autovalores com modulo “infinito”. Pela teoria de álgebra linear, sabe-se que tal situação só é possível quando uma linha ou coluna de umas das matrizes envolvidas tem todos os seus termos nulos, ou existem duas linhas e/ colunas que são proporcionais. Portanto, a partir desta situação, pode-se concluir que a matriz apresenta uma ordem maior do que deveria ter. Contudo, sabe-se que pela demonstração teórica, a demonstração do equacionamento (capítulo 5), garantiria que nenhum desses casos aconteceria.

Com base nisso, optou-se por utilizar um método numérico que dentro das matrizes G e H pudesse, efetivamente, filtrar as linhas e colunas que de alguma maneira pudessem contribuir para o fenômeno citado. A grande preocupação nesse sentido seria com a influência que o autovalor de módulo infinitamente maior que os outros poderia causar dentro do espectro analisado. Um autovalor de módulo infinito tonaria o sistema distorcido da realidade e seria necessária sua eliminação do procedimento numérico para poder analisar os valores de maneira mais satisfatória.

O procedimento algébrico feitos nas matrizes G e H busca reorganizar as matrizes de tal maneira que as linhas correspondentes á singularidade fiquem separadas daquelas que não são, portanto, pode-se calcular os autovalores desejados apenas para o trecho não-singular da matriz.

O método chama-se QZ, pois a função que calcula os autovalores para matrizes não simétricas no *Matlab* tem essa designação. O procedimento está descrito abaixo.

Seja, o problema de autovalores e autovetores associado à modelagem,

$$[G]\{x\} - \omega [H]\{x\} = 0 \tag{6.1}$$

A matriz H pode ser admitida como, o procedimento é análogo para a matriz G,

$$[H] = [P][D][V]^T \tag{6.2}$$

E, portanto,

$$[D] = [P]^T[H][V]^T \tag{6.3}$$

Onde,

$$[P]^T[P] = [I] \tag{6.4}$$

$$[V]^T[V] = [I] \tag{6.5}$$

Dessa maneira, na equação (6.1), considera-se o vetor x como:

$$\{x\} = [V]^T\{q\} \tag{6.6}$$

A equação (6.1) pode ser reescrita como

$$[G][V]^T\{q\} - \omega [H][V]^T\{q\} = 0 \tag{6.7}$$

Multiplica-se os termos da equação pela matriz transposta de P

$$[P]^T[G][V]^T\{q\} - \omega [P]^T[H][V]^T\{q\} = 0 \tag{6.8}$$

O sistema final equivalente pode ser escrito como

$$[K]\{q\} - \omega [D]\{q\} = 0 \tag{6.9}$$

Sob forma matricial, a equação (6.9) pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = 0 \qquad (6.10)$$

A partir da (6.10) pode-se separar os termos não singulares da matriz D dos termos singulares. O *rank* da matriz D_{11} representa a quantidade de autovalores relacionados ao trecho não singular. O vetor q_1 é o vetor de interesse, pois representa o equacionamento que realmente será estudado, já que ele multiplica D_{11} e não interfere na parte singular da matriz D.

Duas equações podem ser escritas em função da equação matricial, a partir delas pode-se determinar um sistema matricial equivalente no qual só será considerado, para efeito de cálculo, o trecho não-singular da mesma.

$$[K_{11}]\{q_1\} + [K_{12}]\{q_2\} + \omega [D_{11}]\{q_1\} = 0 \qquad (6.11)$$

$$[K_{21}]\{q_1\} + [K_{22}]\{q_2\} = 0 \qquad (6.12)$$

O vetor q_2 pode ser determinado em função de q_1

$$\{q_2\} = -[K_{22}]^{-1}[K_{21}]\{q_1\} \qquad (6.13)$$

E, substituindo (6.13) em (6.11), obtêm-se os sistema equivalente de *rank* igual ao número de termos do vetor q_1, ou seja, a quantidade de autovalores da parte não singular de (6.1),

$$\left([K_{11}] - [K_{12}][K_{21}]^{-1}[K_{21}]\right)\{q_1\} + \omega [D_{11}]\{q_1\} = 0 \qquad (6.14)$$

$$\left([K_{11}] - [K_{12}][K_{21}]^{-1}[K_{21}]\right) + \omega [D_{11}] = 0 \qquad (6.15)$$

O novo conjunto de autovalores ω pode ser determinado a partir de (6.15) utilizando o método de QZ para matrizes não simétricas. Os resultados apresentados neste trabalho foram determinados a partir do método demonstrado e estão representados em anexo pelas rotinas e funções do *Matlab* utilizadas na simulação.

6.3 Rotinas e funções

- MAIN: rotina principal na qual os dados de entrada são definidos e definem-se as variáveis de saída. Chama a sub-rotina STAB_CRITERIA_FDD_5P.

- STAB_CRITERIA_FDD_5P: sub-rotina responsável pelo cálculo de todos os parâmetros envolvidos no modelo. Chama a sub-rotinas STEADYSTATE, GEOMETRY, MONTA_MATRIZ_G_5P, MONTA_MATRIZ_H_5P, ESPECTRO, VECTOR_A31, VECTOR_A VECTOR_A3132, VECTOR_B11, VECTOR_B12, VECTOR_B21, VECTOR_B22, VECTOR_B23.

- STEADYSTATE: esta rotina determina o regime permanente usando as condições iniciais para a análise dinâmica. Chama as rotinas CDUD, DPDS, LOQ_EQ.

- CDUD: calcula os parâmetros de deriva para um dado número de *Froude* e geometria local.

- GEOMETRY: função calcula o vetor Z(s) e teta(s) para o riser.

- DPDS: função integra o gradiente de pressão ao longo do riser. Chama a função FFAN.

- FFAN: calcula o fator de atrito de *Fanning*

- LOQ_EQ: calcula a fração de vazio no *pipeline* utilizando a equação de equilíbrio local. Chama FFAN, INTERFACIAL_SPEED e GAMMA2AP.

- INTERFACIAL_SPEED: função calcula a velocidade da interface entre o gáz e o líquido. Chama GAMMA2AP.

- GAMMA2AP: calcula a fração de vazio no *pipeline* do perímetro molhado *gamma*.

- MONTA_MATRIZ_G_5P: monta a matriz G com a fórmula de discretização de 5 pontos. Chama as funções MATRIZ_K11_5P, MATRIZ_K22_5P, MATRIZ_K23_5P, MATRIZ_K24_5P, MATRIZ_K33_5P, MATRIZ_K34_5P, MATRIZ_K41_5P, MATRIZ_K42_5P, MATRIZ_K43_5P, MATRIZ_K44_5P e MATRIZ_K44_5P_INVERSA.

- MONTA_MATRIZ_H_5P: monta a matriz H com a fórmula de discretização de 5 pontos. Chama as funções MATRIZ_M11_5P, MATRIZ_M12_5P, MATRIZ_M21_5P, MATRIZ_M23_5P, MATRIZ_M24_5P, MATRIZ_M33_5P, MATRIZ_K44_5P, MATRIZ_K41_5P, MATRIZ_K42_5P e MATRIZ_K43_5P.

- ESPECTRO: esta rotina avalia parte do espectro do problema de autovalores.

- VECTOR_A31: calcula o vetor A31. Chama FFAN, DFMDRE, COEFICIENTECDUDRRSA.

- VECTOR_A32: calcula o vetor A32. Chama FFAN, DFMDRE, COEFICIENTECDUDRRSA.

- VECTOR_A33: calcula o vetor A33. Chama FFAN, DFMDRE.

- VECTOR_B21: calcula o vetor B21. Chama COEFICIENTECDUDRRSA.

- VECTOR_B22: calcula o vetor B23. Chama COEFICIENTECDUDRRSA.

- VECTOR_B23: calcula o vetor B23.

- MATRIZ_K11_5P: calcula a matriz K11.

- MATRIZ_K22_5P: calcula a matriz K22.

- MATRIZ_K23_5P: calcula a matriz K23.

- MATRIZ_K24_5P: calcula a matriz K24.

- MATRIZ_K33_5P: calcula a matriz K33.

- MATRIZ_K34_5P: calcula a matriz K34.

- MATRIZ_K41_5P: calcula a matriz K41.

- MATRIZ_K42_5P: calcula a matriz K42.

- MATRIZ_K43_5P: calcula a matriz K43.

- MATRIZ_K44_5P: calcula a matriz K44.

- MATRIZ_K44_5P_INVERSA: calcula a matriz inversa da matriz K44.

- MATRIZ_M11_5P: calcula a matriz M11.

- MATRIZ_M12_5P: calcula a matriz M12.
- MATRIZ_M21_5P: calcula a matriz M21.
- MATRIZ_M23_5P: calcula a matriz M23.
- MATRIZ_M24_5P: calcula a matriz M24.
- MATRIZ_M33_5P: calcula a matriz M33.

6.4 Entradas

Os seguintes parâmetros de entrada são considerados:

Mug: Viscosidade dinâmica do gás.
Mul: Viscosidade dinâmica do líquido.
Rol: Densidade do líquido (kg/m^3).
g: Aceleração da gravidade (m/s^2).
Rg: Constante dos gases ($m^2/s^2/K$).
T:Temperatura do gás (^oC).
L: Comprimento do pipeline (m).
Le: Comprimento equivalente do buffer (m).
D: Diâmetro do pipeline (m).
AREA: Área do pipeline (m^2).
eps: Espessura do pipeline (m).
beta: Ângulo de inclinação do pipeline (rad).
X: Comprimento horizontal do riser (m).
Z: Altura total do riser (m).
precision: Tolerância para verificação da convergência.
N: Número de nós para a discretização do riser.
subrel: Fator de sub-relaxação.
Ps: Pressão no separador (Pa).

6.5 Saída

Após a simulação estar completa, o software imprime três tipos de gráficos (vide capítulo 7) e salva os dados em um arquivo que contêm tantos os dados de entrada quanto as informações calculadas ao longo da simulação. O software cria o arquivo chamado DATA_STAB_CRITERIA_FDD_5P_N50.M

Name	Size	Bytes	Class	Attributes
AREA	1x1	8	double	
C2	2x3046	48736	double	
C3	2x1551	24816	double	
D	1x1	8	double	
Fig1	1x1	8	double	
Fig2	1x1	8	double	
Fig3	1x1	8	double	
L	1x1	8	double	
Le	1x1	8	double	
MUg	1x1	8	double	
MUl	1x1	8	double	
N	1x1	8	double	
P0	1x1	8	double	
Ps	1x1	8	double	
Ql0	1x73	584	double	
ROg	1x1	8	double	
ROl	1x1	8	double	
Rg	1x1	8	double	
T	1x1	8	double	
T0	1x1	8	double	
X	1x1	8	double	
Z	1x1	8	double	
beta	1x1	8	double	
eps	1x1	8	double	
g	1x1	8	double	
h2	1x1	8	double	
h3	1x1	8	double	
i	1x1	8	double	
j	1x1	8	double	
jg	1x73	584	double	
jl	1x73	584	double	
key	1x1	8	double	
lambda_i	1x132	1056	double	
lambda_r	1x132	1056	double	
m_key	73x73	42632	double	
m_maxlambda_r	73x73	42632	double	
m_n_pos_eigen	73x73	42632	double	
maxlambda_r	1x1	8	double	
mg0	1x73	584	double	
n	1x1	8	double	
n_pos_eigen	1x1	8	double	
precision	1x1	8	double	
subrel	1x1	8	double	

Figura 20 - Resultado pós-simulação

Descrição das variáveis:

AREA: área do *pipeline*;

D: Diâmetro do *pipeline*;

FIG1: Mapa de estabilidade

FIG2: Curva de nível – número de autovalores com parte real

FIG3: Curva de nível – maior parte real

L: Comprimento do *pipeline*

LE: Comprimento equivalente do *buffer*

MUG: Viscosidade dinâmica do gás

MUL: Viscosidade dinâmica do líquido

N: Número de nós para discretização do *riser*

P0: Pressão em condições em padrão

PS: Pressão no separador

QL0: Vazão volumétrica de líquido

ROG: Densidade do ar em condições padrão

ROL: Densidade do gás

RG: Constante universal dos gases

T: Temperatura do gás

T0: Temperatura em condições de atmosfera padrão

X: Comprimento horizontal do riser

Z: Comprimento vertical do riser

BETA: Inclinação do pipeline

EPS: Rugosidade do pipeline

G: Aceleração da gravidade

JG: Velocidade superficial do gás

JL: Velocidade superficial do líquido

KEY: Indica se configuração é estável (1) ou instável (0)

LAMBDA_I: Parte imaginária do autovalor

LAMBDA_R: Parte real do autovalor

M_KEY: Recebe todas as indicações de estabilidade para o intervalo estudado

M_MAXLAMBDA_R: Matriz que contém os maiores módulos dos autovalores de parte real positiva

M_N_POS_EIGEN: Matriz com a quantidade de autovalores positivos para cada configuração

MAX_LAMBDA_R: Maior autovalor de parte positiva por configuração

MG0: Vazão mássica de gás

N_POS_EIGEN: Quantidade de autovalores positivos por configuração

PRECISION: Tolerância para verificação de convergência

SUBREL: Fator de sub-relaxamento

7. RESULTADOS E ANÁLISES

7.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentados os resultados obtidos das simulações e sua eventual análise. Serão apresentadas as respostas obtidas com e sem atrito, variando-se o comprimento equivalente do *buffer*. Como já fora realizado nos capítulos anteriores, especialmente, no capítulo 5 que envolvia a comparação pelo critério de Boe.

7.2 Parâmetros

Os parâmetros geométricos correspondem àqueles já utilizados no capítulo 6 que também foram baseados em [2], enquanto que as propriedades físicas do líquido (água) e do gás (ar) correspondem às propriedades em temperatura ambiente. Na simulação foi adotado um sistema pipeline-riser com riser vertical e admitindo-se a fração de vazio no *pipeline* constante.

Os parâmetros fixados nas simulações:

- Viscosidade dinâmica do gás: MUg = 1,8e-5 (kg/m/s)
- Viscosidade dinâmica do líquido: MUl = 1,0e-3 (kg/m/s)
- Densidade do líquido: ROl = 1000 (kg/m3)
- Aceleração da gravidade: g = 9,8 (m/s2)
- Constante dos gases: Rg = 287 (m2/s2/K)
- Temperatura do gás: T = 293 (K)
- Comprimento do pipeline: L = 9,1 (m)

- Diâmetro do pipeline: D = 0,0254 (m)

- Área do pipeline: AREA = 5,066e-4 (m2)

- Rugosidade do pipeline: Eps = 1,5e-6 (m)

- Ângulo de inclinação do pipeline: Beta =8,726e-2 (rad)

- Comprimento horizontal do riser: X = 0 (m)

- Altura total do riser: Z = 3,0 (m)

- Tolerância para verificação da convergência: Precision = 1,0e-8

- Número de nós para a discretização do riser: N = 50

- Fator de sub-relaxação: Subrel = 0,5

- Condições da atmosfera padrão:
  - T_0 = 293 (K)
  - P_0 = 1,01325*10^5 (Pa)
  - ROg = P0/(T0*Rg) = 1,2932 (kg/m3)

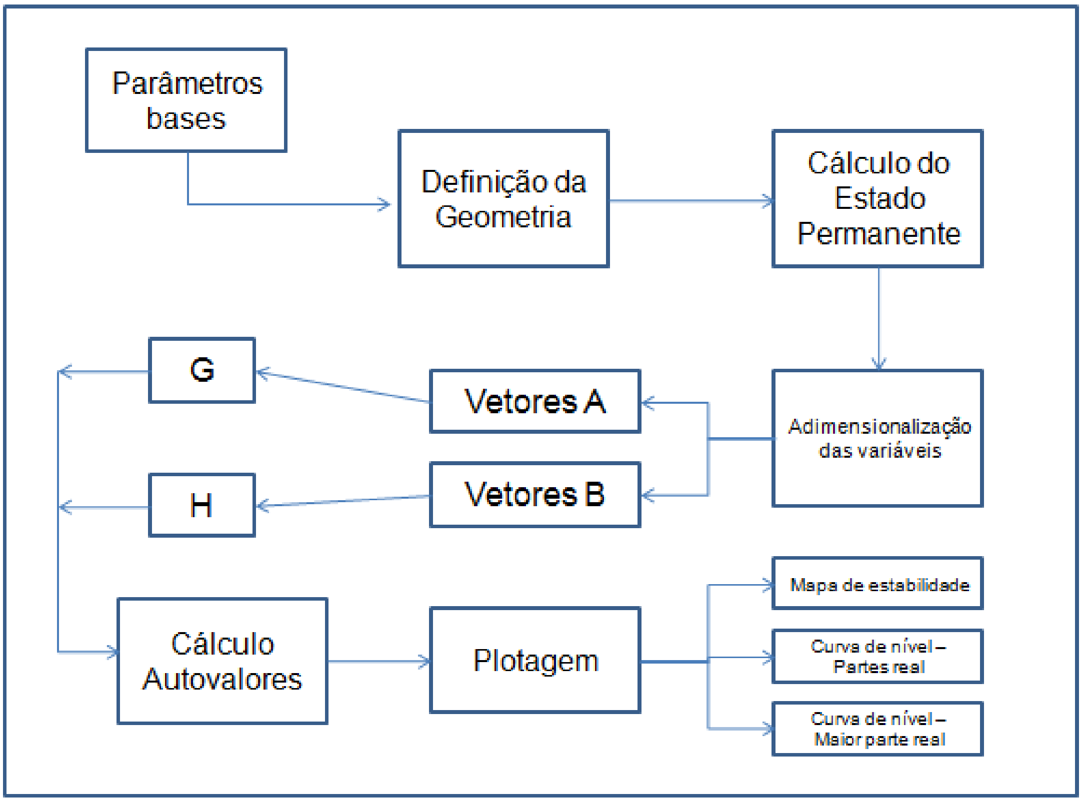

Figura 21 - Diagrama de blocos: Procedimento numérico.

Primeiramente, foi-se desenvolvida uma rotina que determina os pontos sob uma determinada curva ou geometria específica, no caso deste projeto optou-se por um modelo mais simples, riser vertical. Na sequência utilizando-se as rotinas de [2], calcula-se os regime em estado estacionário para os dados de entrada. Os dados calculados em regime são as referências para a estimativa das perturbações que é o objetivo de análise deste trabalho.

Em seguida, para tornar o equacionamento e a descrição dos parâmetros mais simplificada, adimensionaliza-se as variáveis calculadas anteriormente, como as pressões e as velocidades. Tal procedimento facilita o processo de construção e desenvolvimento das rotinas, pois diminui a quantidade de parâmetros que serão considerados nos cálculos. A única ressalva é a consideração de números adimensionais que compensariam tal simplificação.

Com as variáveis adimensionais, calculam-se os vetores A e B. Estes são responsáveis pela formação das matrizes G e H respectivamente. Vale ressaltar que estes vetores representam no equacionamento, procedimentos algébricos e, portanto, para se testar e garantir sua equivalência para qualquer configuração, basta criar vetores correspondentes a sua função desempenhada na equação e testá-los, como já citado no item 7.1.

Com as matrizes G e H construídas, determina-se os autovalores para cada configuração, estes são armazenados e no final da simulação imprimem-se os gráficos correspondentes.

Neste trabalho, a velocidade superficial de gás e de líquido serão definidas como intervalos de valores, ou seja, criam-se dentro da rotina principal vetores das velocidades. Estes formarão uma matriz que representará a região na qual será feita a simulação. Nesta matriz, o posicionamento de cada linha e coluna é determinado por valores da velocidade superficial de líquido (eixo Y) e por valores da velocidade superficial do gás (eixo X). Todos os cálculos ocorreram sobre este intervalo.

7.3 Resultados obtidos

Neste item serão apresentadas as curvas levantadas a partir das simulações realizadas em função do cálculo dos autovalores para diversas configurações, com e sem atrito. Três tipos de análises podem ser realizadas: a análise e comparação do mapa de estabilidade, em função do conjunto de parâmetros, com outros mapas disponíveis na bibliografia, a análise da quantidade de autovalores com parte positiva no intervalo estudado e a análise do módulo dos auto valores positivos encontrados, nos casos em que existam autovalores com parte real positiva.

Os mapas de estabilidade mostram, ponto a ponto, para quais configurações o sistema é estável ou não, sendo que os pontos azuis são instáveis, enquanto que os pontos vermelhos representam configurações estáveis do sistema. Estes mapas mostram o contorno da curva de estabilidade que pode ser representado pelos valores nos quais ocorre a mudança de instável para estável.

Os gráficos representados pelas curvas de nível revelam uma informação mais quantitativa do mapa de estabilidade. O primeiro mostra quantos autovalores positivos se encontram para uma determinada configuração do sistema. A quantidade de autovalores revela o quão próximo aquela configuração está próxima da fronteira de estabilidade, pois quanto menor o número de autovalores disponíveis em uma configuração mais próxima esta se posiciona próxima a região estável.

A segunda curva mostra os maiores módulos de autovalores de parte real. As duas curvas de nível se complementam, pois se pode concluir que configurações que apresentam muitos autovalores e com autovalores de parte real com módulos de grande intensidade se localizam em regiões distantes da fronteira de estabilidade. Tal análise torna-se relevante para se compreender a sensibilidade dos autovalores próximos a região de fronteira e de que maneira esse região pode-se comportar quando pequenas alterações nos parâmetros ou no equacionamento do modelo forem feitas.

As seguintes simulações foram realizadas:

- Sem atrito
  - Le =1,69 m

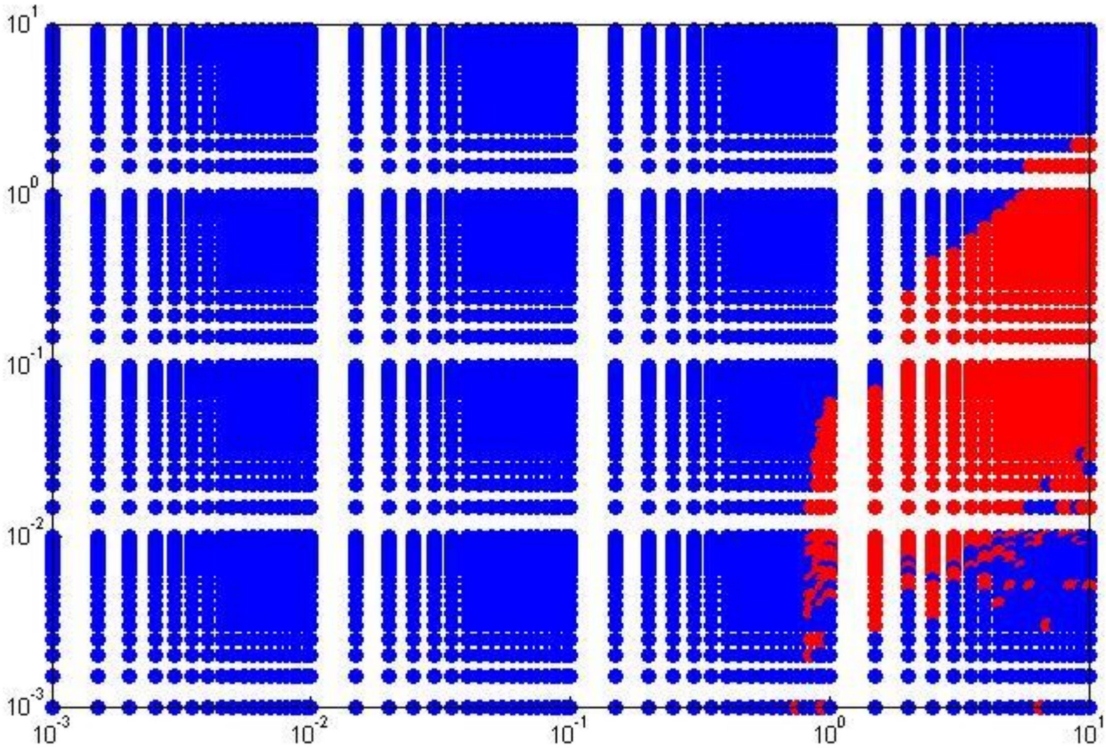

Figura 22 - Mapa de estabilidade Le=1,69 m (sem atrito)

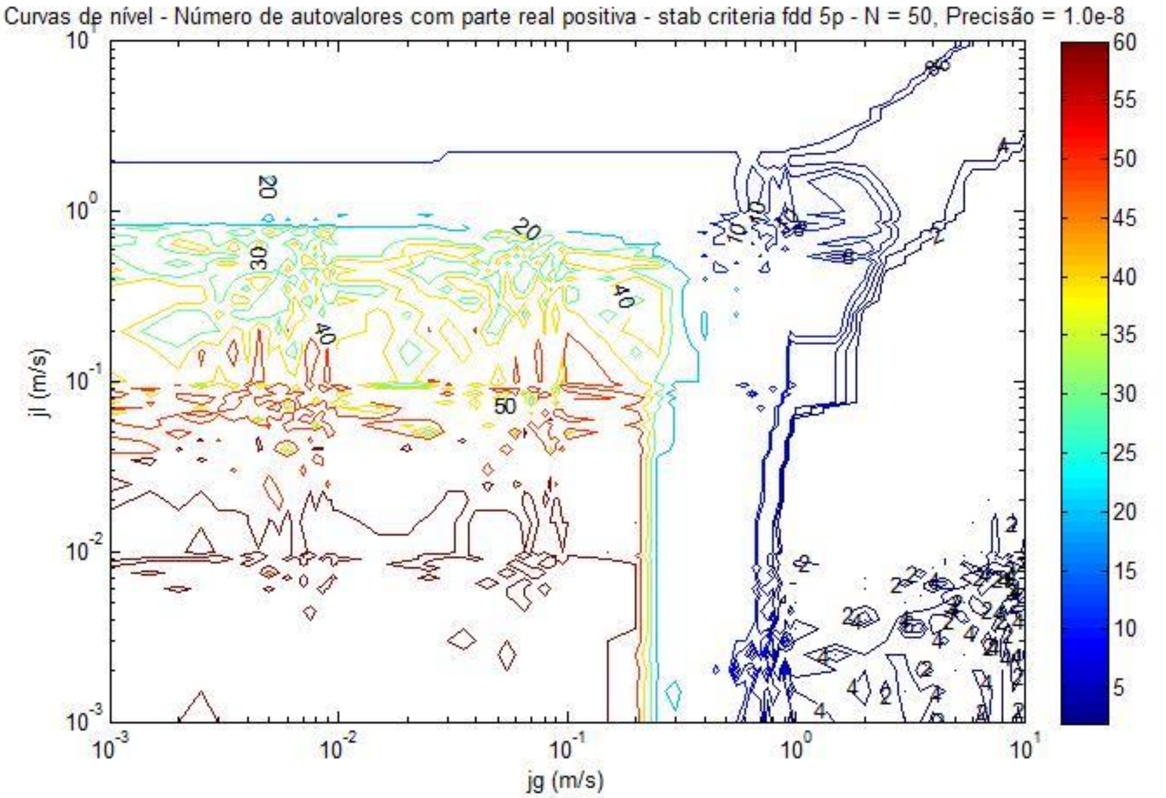

Figura 23 - Curva de nível Le=1,69 m - Número de autovalores com parte real positiva (sem atrito)

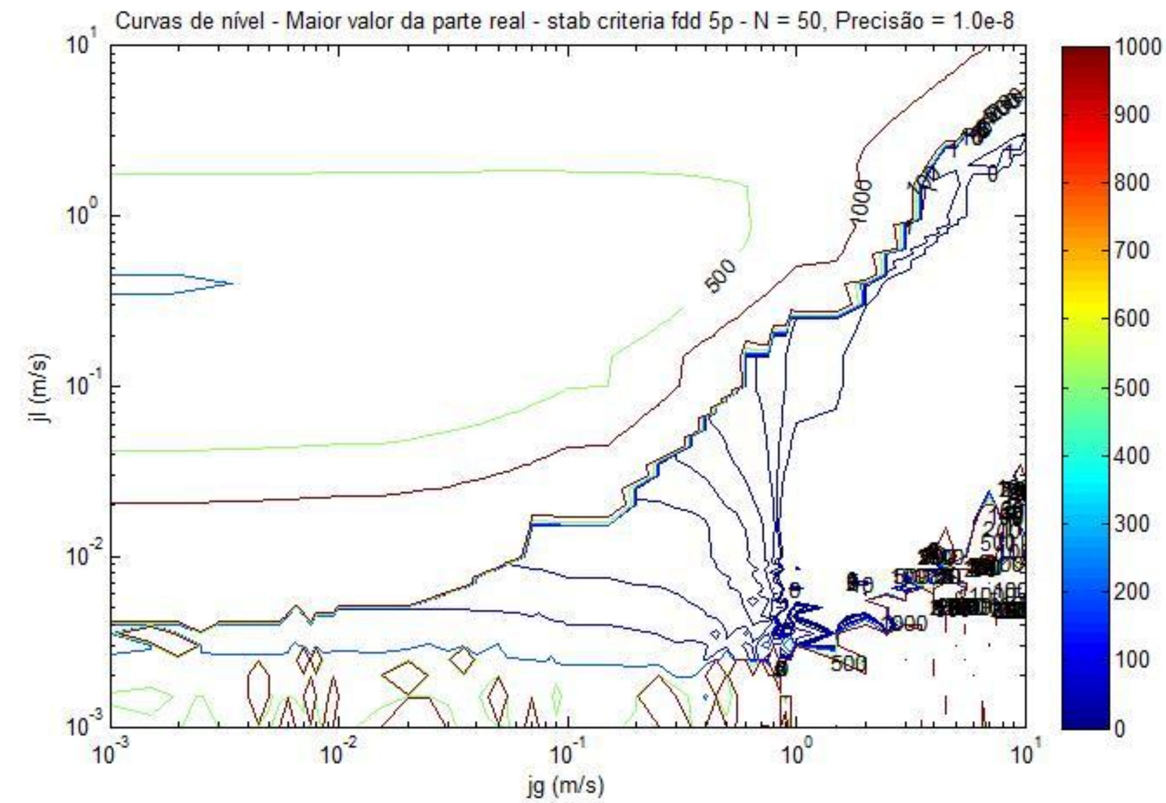

Figura 24 - Curva de nível Le=1,69 m - Maior valor parte rela (sem atrito)

- Com atrito
    - Le = 1,69 m

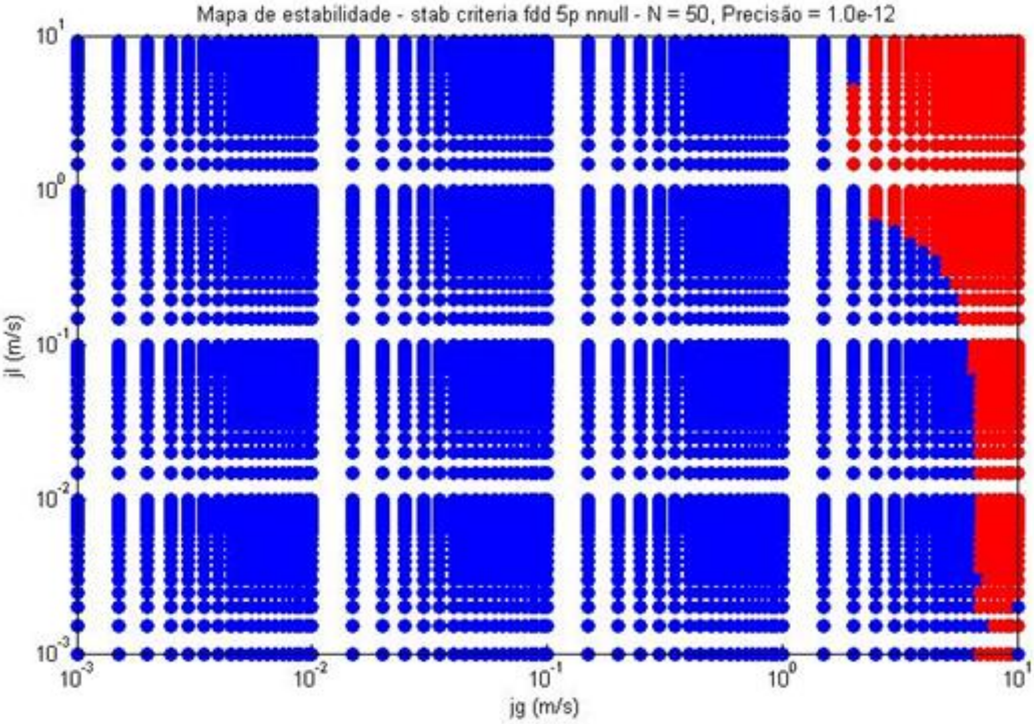

Figura 25 - Mapa de estabilidade Le=1,69 m

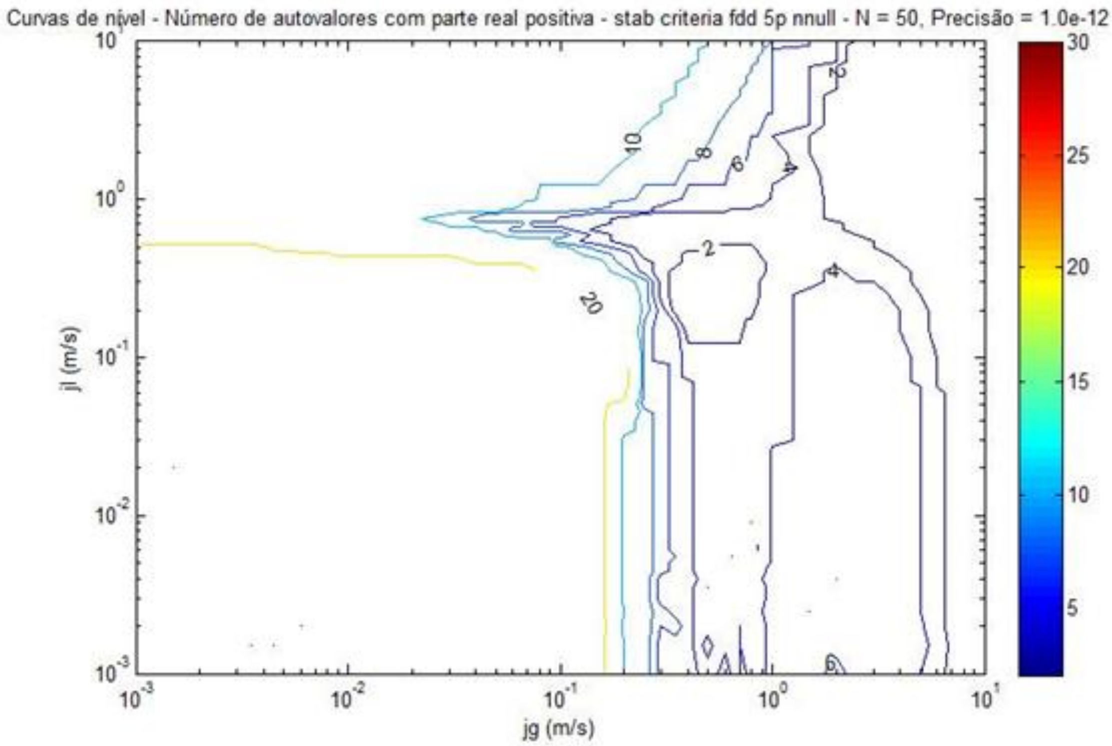

Figura 26 - Curva de nível Le=1,69 m - Número de autovalores com parte real positiva

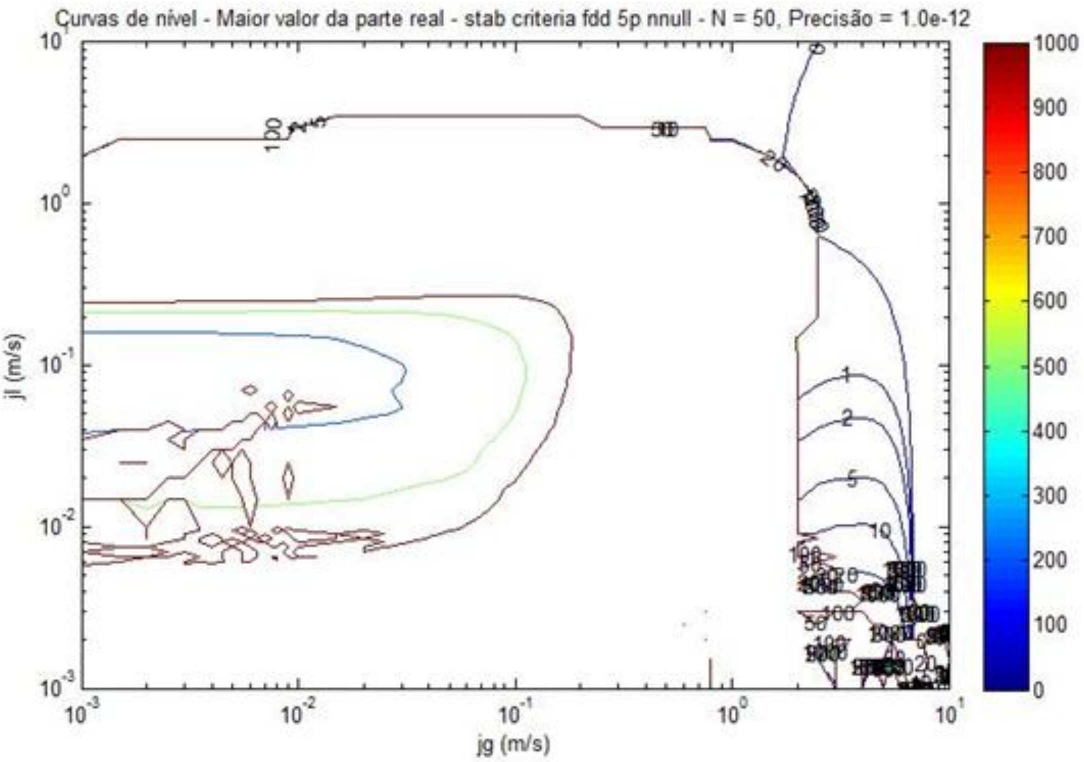

Figura 27 - Curva de nível Le=1,69 m - Mario valor da parte real

- Le = 5,1 m

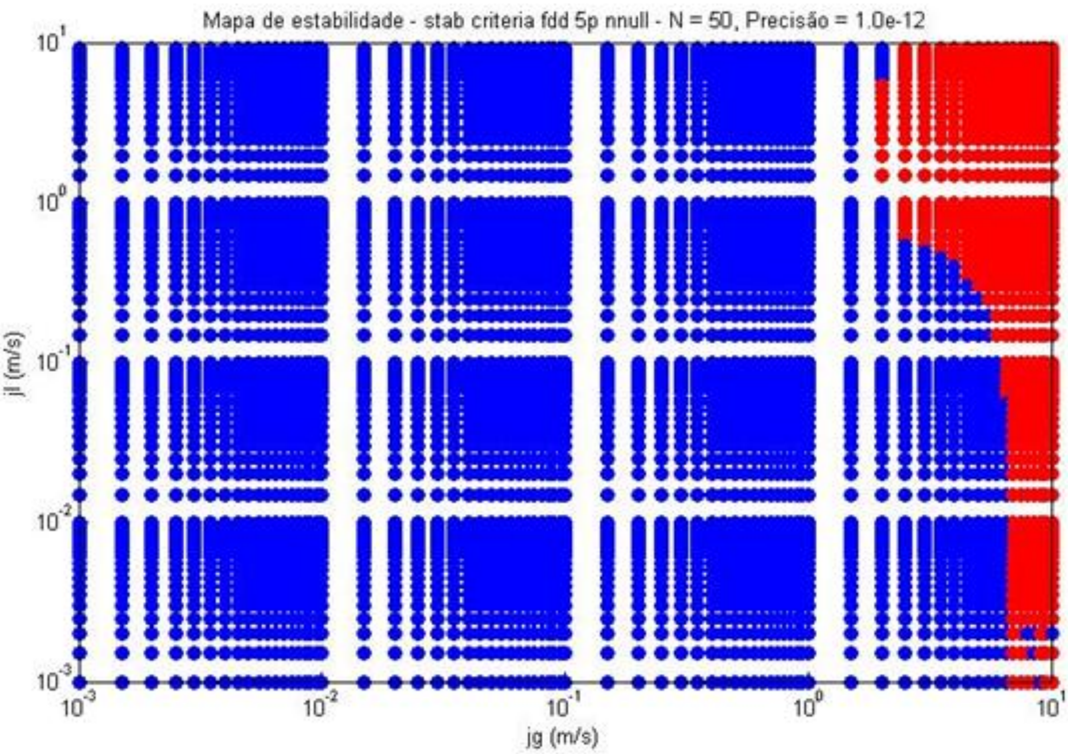

Figura 28 - Mapa de estabilidade Le=5,1 m

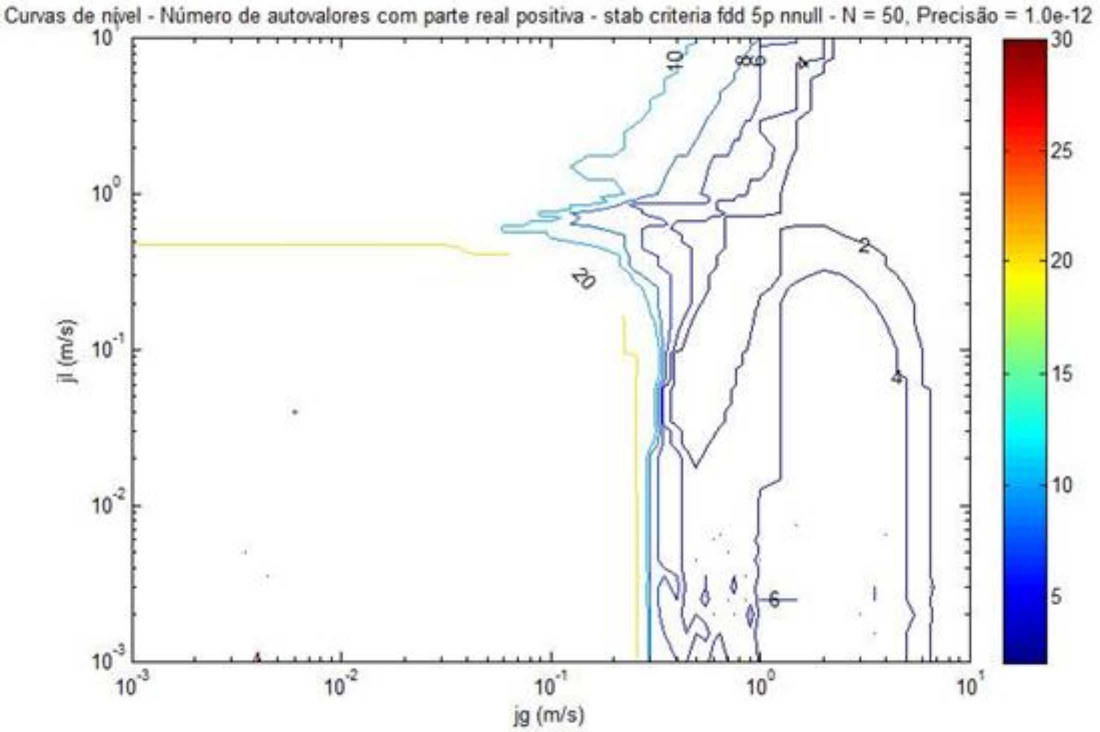

Figura 29 - Curva de nível Le=5,1 - Número de autovalores com parte real positiva

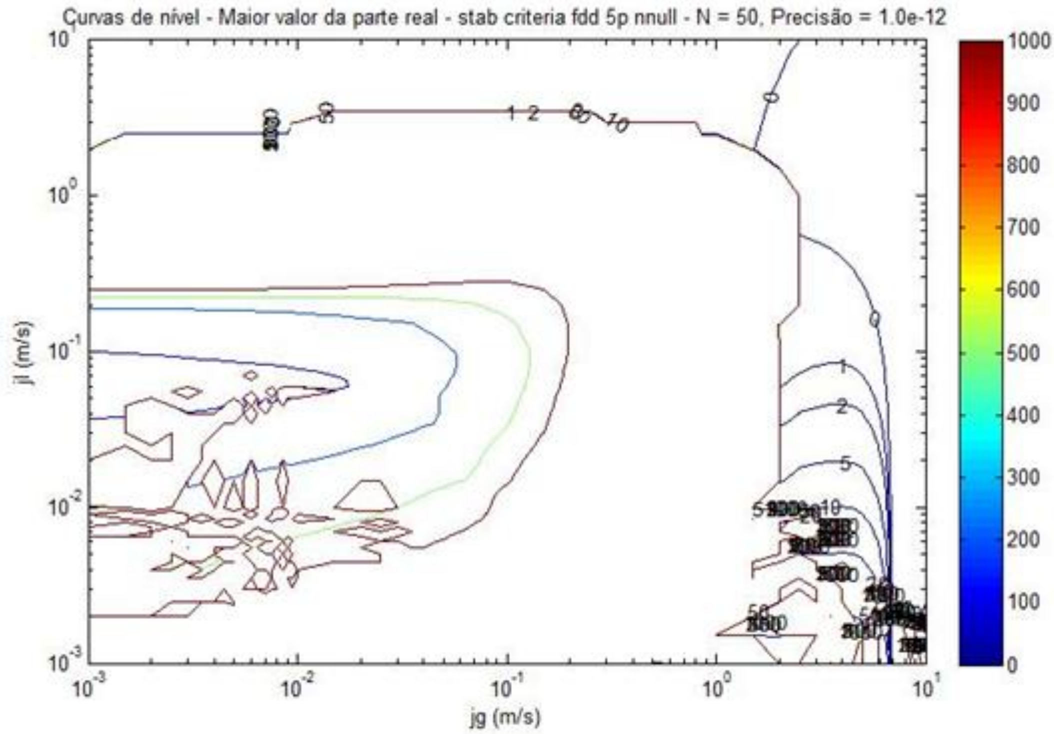

Figura 30 - Curva de nível Le=5,1 m - Maior valor da parte real

- Le = 10,0 m

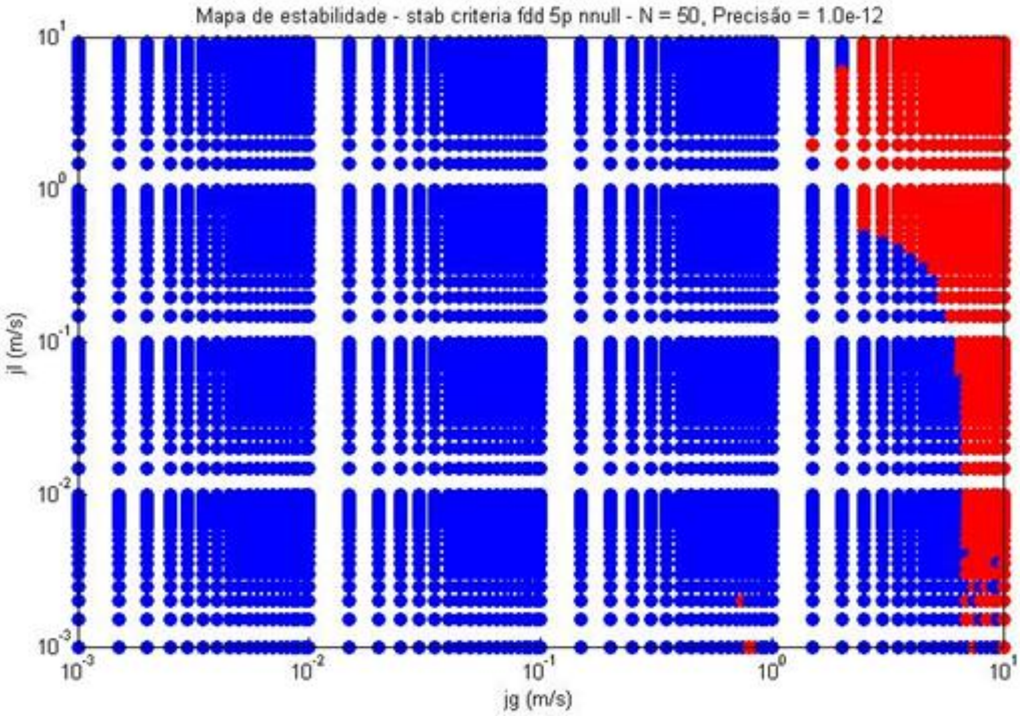

Figura 31 - Mapa de estabilidade Le=10 m

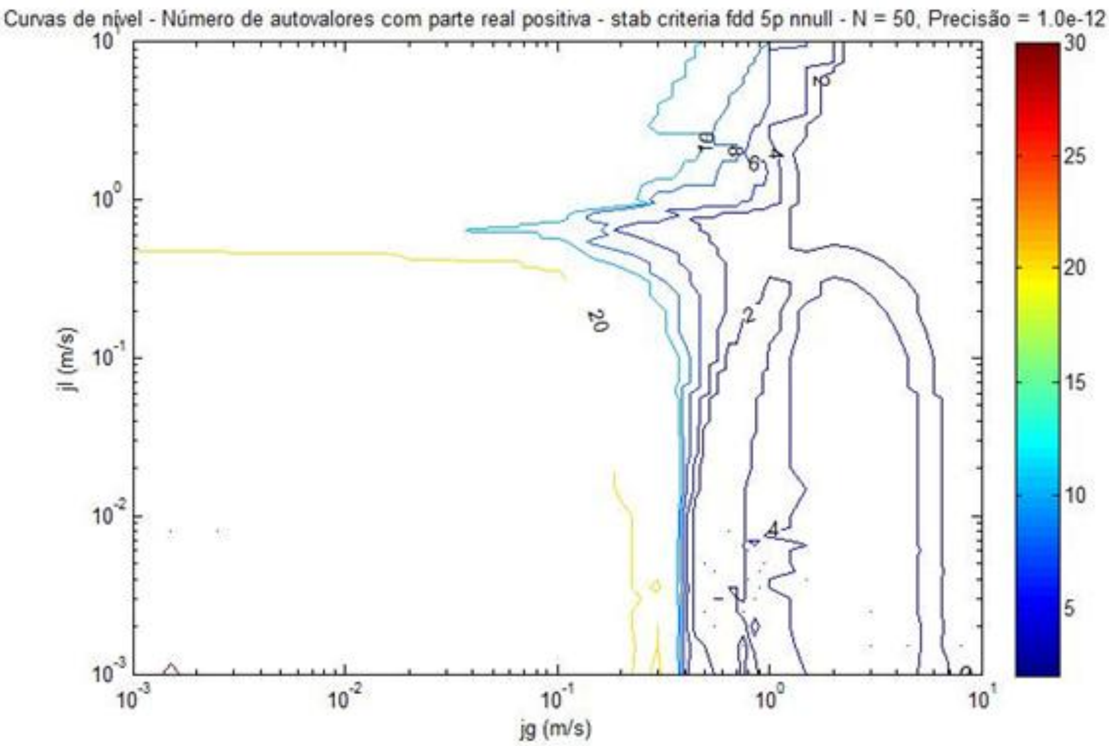

Figura 32 - Curva de nível Le=10 m - Número de autovalores com parte real positiva

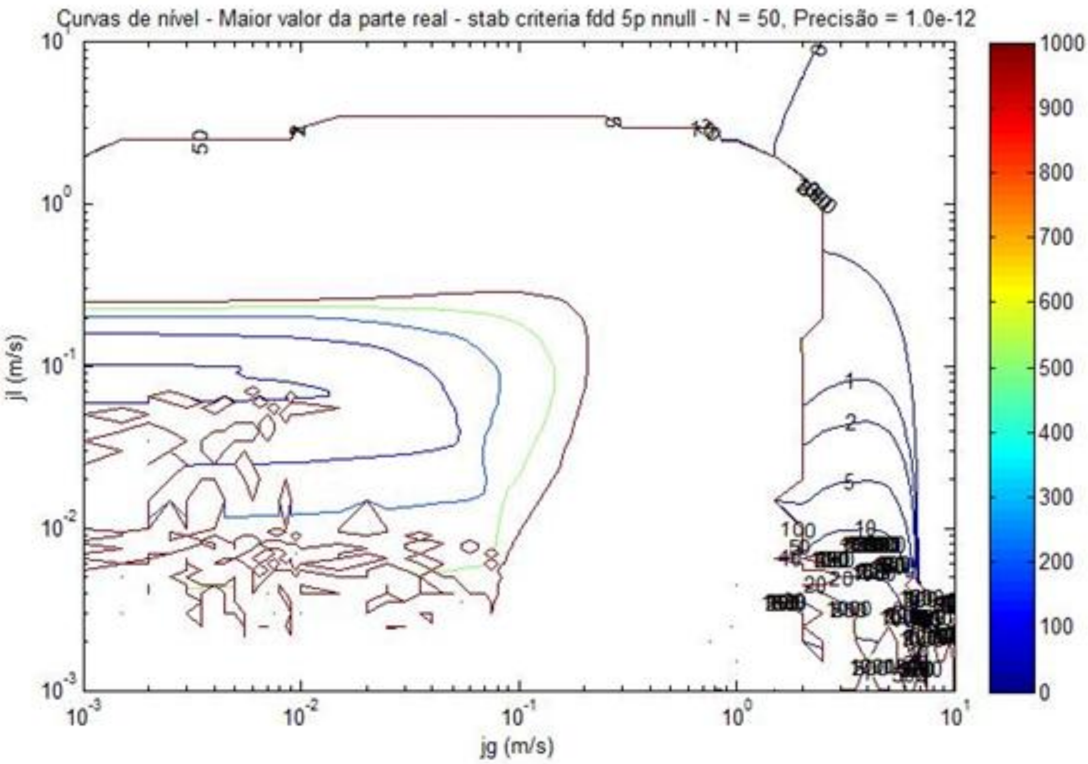

Figura 33 - Curva de nível Le=10 m - Maior valor da parte real

7.4 Análises dos resultados

Analisando-se os resultados e comparando-se as curvas levantadas com e sem atrito conclui-se que a inclusão do atrito na simulação altera profundamente o resultado. É possível perceber a sensibilidade do modelo para com qualquer alteração em seus parâmetros. Analisando-se as curvas de nível percebe-se que existem diversos configurações que se encontram próximas da fronteira de estabilidade, com um pequeno número de autovalores com parte real positiva e esses autovalores apresentam um módulo do autovalor de maior parte real muito pequeno, ou seja, muito possivelmente uma pequena correção ou inclusão de hipóteses mais sofisticadas possa tornar estas configurações estáveis.

Percebe-se que nas curvas de nível que mostram os autovalores de maior parte real, a mudança do módulo de um valor relativamente baixo para um valor muito alto (Figura 33) é brusca, o que pode justificar a análise do parágrafo acima.

Primeiramente, com relação ao cálculo dos autovalores, percebeu-se que o problema não se limita a questões numéricas, pois mesmo utilizando uma alternativa mais sofisticada para resolução, não houve uma melhora tão significativa a ponto de corrigir o problema, mesmo que o problema do autovalor de módulo infinito tenha sido corrigido com esta técnica. Portanto, o erro deve estar associado á modelagem do sistema que deve ser revista.

Acredita-se que esta questão possa estar relacionada à situação em que um bloco de matriz tenha valores muito grandes e outro bloco tenha valores muito pequenos, o que faz um bloco ter caráter dominante no sistema e o outro fica praticamente nulo. Esta condição pode criar um problema relacionado a um conjunto matricial que apresente comportamento de uma matriz singular. Uma alternativa que poderia modificar o resultado, de tal maneira que pudesse corrigir o problema, seria a inserção de termos relacionados à inércia.

Sabe-se que existem linhas e colunas que possuem praticamente todos os seus termos nulos, ou seja, esta adição ao modelo colocaria termos não nulos onde não existe nenhum valor diferente de zero até o momento. Tal mudança, além de tornar o equacionamento mais próximo do real, pois essa é uma das simplificações adotadas para se fazer a modelagem, poderia alterar as matrizes de tal maneira que deixassem de ser singulares.

Quanto aos resultados, o método de cálculo dos autovalores, método QZ, obtém um número de autovalores maior do que deveria, devido ao procedimento numérico internos das rotinas e também por erros numéricos associados à modelagem. Estes problemas podem fazer com que autovalores que deveriam ter parte real negativa sejam calculados com parte real positiva, neste caso originam-se as regiões onde há poucos autovalores com parte real positiva, como por exemplo, regiões de dois a oito autovalores. Nas figuras referentes ao mapa de estabilidade este problema é evidenciado pela parte superior do gráfico, que é sabido ser estável, e é indicada nessas simulações, em todos os casos, como instável, ou seja, o programa não consegue recuperar essa região nas simulações.

8. CONCLUSÕES

Com base nas atividades desenvolvidas pode-se verificar a real importância de se compreender os escoamentos multifásicos e suas implicações em sistemas de produção de petróleo, bem como os diversos fenômenos que podem ocorrer em diversas configurações do sistema, como a intermitência severa. Portanto, a adoção de um modelo adequado e válido para a análise do fenômeno de intermitência, que ocorre freqüentemente na exploração de petróleo, é de fundamental importância para que se possam evitar as crescentes perdas econômicas e a saída de serviço da plataforma.

Na primeira etapa do projeto foi fornecida toda a fundamentação para que fosse possível compreender a teoria envolvida, neste caso o principal motivo seria aplicação e análise do modelo desenvolvido em [6], seguido como referência para este projeto, e a aplicação da teoria de estabilidade linear para se verificar a estabilidade do modelo para diversas configurações, porém de uma maneira numericamente mais simples e rápida. Pode-se verificar que os objetivos traçados para serem concretizados até esta etapa foram todos atingidos, conforme o esperado no projeto.

A partir de estudos e exposições compararam-se dois modelos existentes na bibliografia, o modelo homogêneo e modelo de deriva. Constatou-se que o modelo de deriva fornece soluções mais próximas das soluções reais e, portanto, sua aplicação é mais vantajosa e correta. Em [6] utilizou-se o modelo de deriva como base para o equacionamento e o desenvolvimento.

Como era esperado a partir de uma análise e comparações com outro experimento [10] verificou-se uma satisfatória eficácia do modelo em [6], com base nos parâmetros que foram determinados a partir do mesmo. A análise revelou que as respostas fornecidas conseguiam predizer com certa precisão o comportamento das variáveis, fornecendo melhores resultados do que aqueles encontrados pelo modelo usado no próprio experimento.

A implementação do critério de Boe, segundo [12], pode predizer satisfatoriamente os tipos de regimes para diversos pontos experimentais. A curva de estabilidade construída em função das rotinas de [6] teve bons resultados quando o comprimento de *buffer* é relativamente menor do que o comprimento do *pipeline*. Contudo, quanto maior o comprimento, o modelo tolera escoamentos, que são estáveis, de se encontrar na região de instabilidade.

Fica claro que as curvas levantadas, neste relatório, a partir do critério de Boe são próximas das geometrias apresentadas em [12]. Portanto, conclui-se que os métodos utilizados para implementar o critério mostraram ser eficazes. Essa análise garante a credibilidade dos resultados determinados.

A partir da teoria de estabilidade, as equações de governo para perturbações em um sistema *riser-pipeline* simplificado foram desenvolvidas e a análise de estabilidade em função dos autovalores encontrados foi realizada. Até o presente o momento de entrega deste trabalho, os resultados da análise de estabilidade pela teoria de estabilidade linear não foi o desejado. Os principais problemas encontrados se apresentaram no cálculo dos autovalores, ou seja, sua determinação em função do método de procura do mesmo, baseado no método de QZ para matrizes não-simétricas. Acredita-se que este problema possa ser justificado pela singularidade apresentada pelas matrizes G e H que não deveriam ser singular, baseada em suas formulações teóricas.

Acredita-se que a inclusão de termos relacionados à inércia possa corrigir o problema da singularidade, porém todo o equacionamento deve ser realizado novamente para que essas mudanças sejam efetivamente consideradas e possa alterar o resultado de maneira satisfatória.

Com relação à metodologia utilizada, todos os testes foram realizados e garantiu-se a funcionalidade para qualquer uso eventual futuro destas rotinas e funções utilizadas neste trabalho de conclusão de curso. Também, foi possível corrigir problemas numéricos encontrados durante a programação das rotinas, consequentemente, todas as rotinas funcionam perfeitamente, com exceção daquilo que já foi exposto no relatório.

9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Mokhatab, S, **Severe Slugging In a Catenary-shaped Riser: Experimental and Simulation Studies**, *Petroleum Science and Technology*, 719-740, 2005.

[2] Baliño, J. L., **Análise de intermitência severa em *risers* de geometria catenária**, *Tese de Livre Docência*, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 141 p., 2008.

[3] Baliño, J. L., **Modelado y simulación de intermitencia severa (*severe slugging*) en sistemas *pipeline-riser*, aplicado a tecnología de petróleo**, *IX Reunión sobre Recientes Avances en Física e Fluidos y sus Aplicaciones* (*FLUIDOS 2006*), Mendoza, Argentina, 2005.

[4] Baliño, J. L. (coordenador), **Análise de intermitência severa em *risers* de geometria catenária**, *Relatório Final Projeto Petrobras / FUSP 0050.0007645.04.2*, 191 p., 2006

[5] Baliño, J. L., Burr, K. P. & Pereira, N. A. L**., Modeling and simulation of severe slugging in pipeline-riser systems**, *XIX International Congress of Mechanical Engineering* (*COBEM 2007*), Brasília, Brasil, Novembro 2005.

[6] Burr, K. P. & Baliño, J. L., **Evolution Equation for Two-Phase Flow Hydrodynamic Instabilities in Pipe-Riser Systems**, *Proceedings do XII International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics* (*XII DINAME*), Ilha Bela, Brasil, 2005.

[7] Burr, K. P. & Baliño, J. L., **Assymptotic solution for the stationary state of two-phase flows in pipeline-riser systems**, *XIX International Congress of Mechanical Engineering* (*COBEM 2007*), Brasília, Brasil, Novembro 2005.

[8] Burr, K. P. & Baliño, J. L., **Stationary state assymptotic solution for two-phase flows in pipeline-riser systems of general geometry**, *V Congresso Nacional de Engenharia Mecânica* (*CONEM 2008*), Salvador, Brasil, Agosto 2008.

[9] Wallis, Graham B., **One-dimensional two-phase flow**, New York: McGraw-Hill, 408 p., 1969.

[10] Strogatz, Steven H., **Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering**, Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 498 p., 1994.

[11] Apostilas da disciplina PME-2334 [8] - **Mecânica dos fluidos aplicada a dutos de petróleo e gás**, Escola Politécnica, 2008.

[12] Taitel, Y.; Vierkandt, S.; Shoham, O.; Brill, P., **Severe slugging in a riser system**: *Experiments and modeling*, *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 16, pp. 57-68, 1990.

[13] Thomaz, Ricardo da Carvalhinha, **Simulação de escoamentos multifásicos. Aplicação a intermitência severa em sistemas de produção de petróleo** – São Paulo, 2009. 60 p**.**

[14] Oliveira, Raoni, **xxx** – São Paulo, 2009. yy p**.**

10.ANEXOS

Neste capítulo serão anexadas as retinas utilizadas no para análise de estabilidade pela teoria de estabilidade linear. As rotinas para o cálculo do estado estacionário foram baseadas no trabalho apresentado por [14].

Rotinas

```
clc
clear variables
% ====================================================================
% Definiçao das variáveis
% ====================================================================
% Viscosidade dinâmica do gás
   MUg = 1.8e-5; %kg/m/s

% Viscosidade dinâmica do líquido
   MUl = 1.0e-3; %kg/m/s

% Densidade do líquido
   ROl = 1000; %[kg/m3]

% Aceleração da gravidade
   g = 9.8; %[m/s2]

% Constante dos gases
   Rg = 287; %[m2/s2/K]

% Temperatura do gás
   T = 293; %[K] [25°C]

% Comprimento do pipeline
   L = 9.1; %[m]

% Comprimento equivalente do buffer
   Le = 10; %[m]

% Diâmetro do pipeline
   D = 0.0254; %[m]

%Área do pipeline
   AREA = pi*(D/2)^2; %[m]

% Rugosidade do pipeline
   eps = 1.5e-6; %[m]

% Ângulo de inclinação do pipeline
   beta = 5*pi/180; %[rad]

% Comprimento horizontal do riser
   X = 0; %[m]

% Altura total do riser
   Z = 3.0; %[m]
```

```
% Tolerância para verificação da convergência
    precision = 1.0e-8;

% Número de nós para a discretização do riser
    N = 50;

% Fator de sub-relaxação
    subrel = 0.5;

% Condições da atmosfera padrão
    T0 = 293;  %  [K]
    P0 = 1.01325*10^5; %  [Pa]
    ROg = P0/(T0*Rg);

% Pressão no separador
    Ps = 1.01325*10^5; %  [Pa]

% Vetores jl, jg, Ql0, mg0
    jl(1) = 0.001;
    jg(1) = 0.001;
    Ql0(1) = AREA*jl(1);
    mg0(1) = AREA*ROg*jg(1);
    i = 1;

while jl(i) < 0.01
    i = i + 1;
    jl(i) = jl(i-1) + 5*(10^-4);
    jg(i) = jg(i-1) + 5*(10^-4);
    Ql0(i) = AREA*jl(i);
    mg0(i) = AREA*ROg*jg(i);
end

while jl(i) < 0.1
    i = i + 1;
    jl(i) = jl(i-1) + 5*(10^-3);
    jg(i) = jg(i-1) + 5*(10^-3);
    Ql0(i) = AREA*jl(i);
    mg0(i) = AREA*ROg*jg(i);
end

while jl(i) < 1
    i = i + 1;
    jl(i) = jl(i-1) + 5*(10^-2);
    jg(i) = jg(i-1) + 5*(10^-2);
    Ql0(i) = AREA*jl(i);
    mg0(i) = AREA*ROg*jg(i);
end

while jl(i) < 10
    i = i + 1;
    jl(i) = jl(i-1) + 5*(10^-1);
    jg(i) = jg(i-1) + 5*(10^-1);
    Ql0(i) = AREA*jl(i);
    mg0(i) = AREA*ROg*jg(i);
end

n = i;

% Simulação
```

```
Fig1 = figure('units','normalized','position',[.2 .2 .6 .6],'name','Mapa de estabilidade');

for i = n:-1:1
   for j = 1:n
       [key,n_pos_eigen,lambda_r,lambda_i,maxlambda_r] =
stab_criteria_fdd_nnull_5p(N,Ql0(i),mg0(j),Ps,D,eps,g,T,Rg,ROl,MUl,MUg,Z,beta,L,Le,subrel,precision
);
       m_key(n+1-i,j) = key;
       m_n_pos_eigen(i,j) = n_pos_eigen;
       m_maxlambda_r(i,j) = maxlambda_r;
       if(m_key(n+1-i,j) > 0)
          loglog(jg(j),jl(i),'ob','markerfacecolor','b')
          hold on
       else
          loglog(jg(j),jl(i),'or','markerfacecolor','r')
          hold on
       end
   end
end

xlabel('jg (m/s)')
ylabel('jl (m/s)')
title('Mapa de estabilidade - stab criteria fdd nnull 5p - N = 50, Precisão = 1.0e-8')

 Fig2 = figure('units','normalized','position',[.2 .2 .6 .6],'name','Número de autovalores com parte real
positiva');
 [C2,h2] = contour(jg,jl,m_n_pos_eigen,[2,4,6,8,10,20,30,40,50,60,80,100,120]);
 clabel(C2,h2,'LabelSpacing',1000)
 xlabel('jg (m/s)')
 ylabel('jl (m/s)')
 set(gca,'xscale','log')
 set(gca,'yscale','log')
 title('Curvas de nível - Número de autovalores com parte real positiva - stab criteria fdd nnull 5p - N =
50, Precisão = 1.0e-8')
 colorbar
%
 Fig3 = figure('units','normalized','position',[.2 .2 .6 .6],'name','Maior valor da parte real');
 [C3,h3] = contour(jg,jl,m_maxlambda_r,[0,1,2,5,10,20,50,100,200,500,1000]);
 clabel(C3,h3,'LabelSpacing',300)
 set(gca,'xscale','log')
 set(gca,'yscale','log')
 xlabel('jg (m/s)')
 ylabel('jl (m/s)')
 title('Curvas de nível - Maior valor da parte real - stab criteria fdd nnull 5p - N = 50, Precisão = 1.0e-8')
 colorbar

whos
save 'data_stab_criteria_fdd__nnull_5p_N50_L1000_sem_atrito'

function [key,n_pos_eigen,lambda_r,lambda_i,maxlambda_r] =
stab_criteria_fdd_nnull_5p(N,QL0D,MG0D,PTD,DIA,RUGOSIDADE,GRAVITY,TEMP,RGAS,RHOL,
MUL,MUG,LR,BETA,L,LB,subrel,tol)
%
%this function evaluates the part of the spectrum of G*x-lambda*H*x= 0
% pipe sectional area
%
AREA = pi*(DIA/2.0)^2; % meters^2
%
% non-dimensional number Pi_L
%
```

```
PIL = GRAVITY*LR/(RGAS*TEMP);
%
% non-dimensional number Delta_u
%
DELTAU = MUG/MUL;
%
% number of eigenvalues to evaluate. At least 6 eigenvalues with option
% 'lr' and at least 6 eigenvalues with option 'lm'.
%
NE = max(round((2*N-1)/3),6);
%
% non-dimensional number PID = g*D*(A/QL0)^2
%
PID = 2.0*GRAVITY*DIA*((AREA/QL0D)^2);
%
% non-dimensionalization
%
MG0 = MG0D/(RHOL*QL0D);
PT = PTD/(RHOL*RGAS*TEMP);
QL0 = QL0D;
%
% relative and absolute tolerance
%
RELTOL = 1.0e-13;
ABSTOL = 1.0e-15;
%
% riser position and inclination angle
%
ds = LR/(N-1);
VS(1) = 0;
[Z(1), THETA(1)] = geometry(VS(1));
%
for i = 2:N
   VS(i) = VS(i-1) + ds;
   [Z(i), THETA(i)] = geometry(VS(i));
end
%
% evaluate the stationary state
%
[VP,VALPHAR,VJG,VJL,ALPHAP] =
steadystate(PTD,MG0D,QL0D,TEMP,RGAS,RHOL,MUG,MUL,DIA,BETA,RUGOSIDADE,VS,THET
A,Z,N,subrel,tol);
%
% Adimensionalização das variáveis
%
VJL = VJL*(AREA/QL0D);
VP = VP/(RHOL*RGAS*TEMP);
VJG = VJG*(AREA/QL0D);
%
% spacial step
%
DeltaS = abs(VS(2)-VS(1));
%
% build vectors A31, A32 and A33
%
VA31 =
VECTOR_A31(PIL,PID,DELTAU,VP,VJG,VALPHAR,QL0,RHOL,MUL,AREA,DIA,GRAVITY,RUG
OSIDADE,THETA,N);
%
```

```
VA32 =
VECTOR_A32(PIL,PID,DELTAU,VP,VJG,VALPHAR,QL0,RHOL,MUL,AREA,DIA,GRAVITY,RUG
OSIDADE,THETA,N);
%
VA33 =
VECTOR_A33(PIL,PID,DELTAU,VP,VJG,VALPHAR,QL0,RHOL,MUL,AREA,DIA,RUGOSIDADE,
THETA,N);
%
% build matrix G using the 5 point finite diference formula
%
G =  Monta_Matriz_G_5p(N,VJG,VP,VP(1),VJG,VJG,VA31,VA32,VA33,DeltaS);
%
% build vectors B11, B12, B21, B22 and B23
%
VB11 = VECTOR_B11(VJG,VALPHAR,QL0,AREA,DIA,GRAVITY,THETA,N);
%
VB12 = VECTOR_B12(VJG,VALPHAR,QL0,AREA,DIA,GRAVITY,THETA,N);
%
VB21 = VECTOR_B21(VP,VJG,VALPHAR,QL0,AREA,DIA,GRAVITY,THETA,N);
%
VB22 = VECTOR_B22(VP,VJG,VALPHAR,QL0,AREA,DIA,GRAVITY,THETA,N);
%
VB23 = VECTOR_B23(VJG,VALPHAR,N);
%
% build matrix H
%
PG = VP(1);
[H,HA] =
Monta_Matriz_H_5p(N,VJG,VP,PG,L,LR,LB,VB11,VB12,VB21,VB22,VB23,VA31,VA32,VA33,VJG,
ALPHAP,DeltaS);
%
clear VS VJG VP VALPHAR PG VB11 VB12 VB21 VB22 VB23 VA31 VA32 VA33 ALPHAP DeltaS;
%
ABSTOL=tol;
ND = 2*(N-1)+1;
sigma = 0.0;
%
% use the large real part option for eigs (which = 'lr')
%
[lambda,NEN] = espectro(ND,G,H,sigma,'lr',NE,tol);
%ND
%NEN
%lambda
%pause
%
for i=1:1:(NE-NEN)
  lambda_r(i) = real(lambda(i));
  lambda_i(i) = imag(lambda(i));
end
%
k = NE-NEN;
%
clear lambda NEN;
%
% use the large modulus option for eigs (which = 'lm')
%
[lambda,NEN] = espectro(ND,G,H,sigma,'lm',NE,ABSTOL);
%ND
%NEN
%lambda
```

```
%pause
%
count = 0;
%
for i=1:1:(NE-NEN)
  key = 0;
  for j=1:1:k
    if abs(lambda(i)-complex(lambda_r(j),lambda_i(j))) < sqrt(tol)
      key = key+1;
    end
  end
%
  if key == 0
    count = count+1;
    lambda_r(k+count) = real(lambda(i));
    lambda_i(k+count) = imag(lambda(i));
  end
end
%
k = k+count;
%ND
%k
%pause
%
clear lambda NEN;
%
% use the large modulus option for eigs (which = 'lm') and sigma = -1000
%
sigma = -1000.0;
%
[lambda,NEN] = espectro(ND,G,H,sigma,'lm',NE,ABSTOL);
%ND
%NEN
%lambda
%pause
%
count = 0;
%
for i=1:1:(NE-NEN)
  key = 0;
  for j=1:1:k
    if abs(lambda(i)-complex(lambda_r(j),lambda_i(j))) < sqrt(tol)
      key = key+1;
    end
  end
%
  if key == 0
    count = count+1;
    lambda_r(k+count) = real(lambda(i));
    lambda_i(k+count) = imag(lambda(i));
  end
end
%
k = k+count;
%ND
%k
%pause
%
clear lambda NEN;
%
```

```
% use the large modulus option for eigs (which = 'lm') and sigma = -1
%
sigma = -1.0;
%
[lambda,NEN] = espectro(ND,G,H,sigma,'lm',NE,ABSTOL);
%ND
%NEN
%lambda
%pause
%
count = 0;
%
for i=1:1:(NE-NEN)
  key = 0;
  for j=1:1:k
    if abs(lambda(i)-complex(lambda_r(j),lambda_i(j))) < sqrt(tol)
      key = key+1;
    end
  end
%
  if key == 0
    count = count+1;
    lambda_r(k+count) = real(lambda(i));
    lambda_i(k+count) = imag(lambda(i));
  end
end
%
% total number of eigenvalues
%
k = k+count;
%ND
%k
%pause
%
% eliminate repeated eigenvalues
%
i = 1;
while i <= k
  j = i+1;
  while j <= k
    if abs(lambda_r(i)-lambda_r(j)) <= tol && abs(lambda_i(i)-lambda_i(j)) <= tol
      for l=j:1:k-1
        lamba_r(l) = lambda_r(l+1);
        lamba_i(l) = lambda_i(l+1);
      end
      lambda_r(k) = 0;
      lambda_i(k) = 0;
      k = k-1;
    end
      j = j+1;
  end
  i = i + 1;
end
%
% check if all complex eigenvalues are complex conjugate in the list
% of found eigenvalues
%
count = 0;
i = 1;
maxlambda_r = lambda_r(i);
```

```
%
while i <= k
  if i>1
    if lambda_r(i) > maxlambda_r
      maxlambda_r = lambda_r(i);
    end
  end
%
  if lambda_i(i) ~= 0
    key = 0;
    j = i+1;
    while j <= k
      if lambda_i(j) ~= 0
        if abs(lambda_i(i)+lambda_i(j)) <= sqrt(tol)
          key = 1;
          aux_r = lambda_r(j);
          aux_i = lambda_i(j);
          for l=j-1:-1:i+1
            lambda_r(l+1) = lambda_r(l);
            lambda_i(l+1) = lambda_i(l);
          end
      lambda_r(i+1) = aux_r;
      lambda_i(i+1) = aux_i;
          j = k;
          i = i+1;
        end
      end
      j = j+1;
    end
%
    if key == 0
      count = count+1;
      lambda_r(k+count) = lambda_r(i);
      lambda_i(k+count) = -lambda_i(i);
    end
  end
  i = i+1;
end
%
k = k + count;
%ND
%k
%pause
%
% check for eigenvalues with positive real part
%
count =0;
%
for i=1:1:k
  if lambda_r(i) > 0
    count = count+1;
  end
end
%
% stability criteria
%
if count > 0
  key = 1;
  n_pos_eigen = count;
else
```

```
  key = 0;
  n_pos_eigen = 0;
end
%
clear H HA G lambda;
end
%-------------------------------------------------------------------

function [P, a, jg, jl, ap] = steadystate(Ps, mg0, Ql0, T, Rg, ROl, MUg, MUl, D, beta, eps, s, theta, z, N,
subrel, precision)

%   This function calculates the steady state, used as initial condition

A = pi*(D^2)/4;
% jl is constant and equal to Ql0/A
jl = Ql0/A;

P(N) = Ps;
jg(N) = Rg*T*mg0/(Ps*A);
j = jg(N) + jl;
[Cd, Ud] = cdud(j, D, theta(N));
a(N) = jg(N)/(Cd*j + Ud);

for i = (N-1):(-1):1
    ds = s(i) - s(i+1);
    dz = z(i) - z(i+1);

    P(i) = P(i+1);
    jg(i) = Rg*T*mg0/(P(i)*A);
    j = jg(i) + jl;
    [Cd, Ud] = cdud(j, D, theta(i));
    a(i) = jg(i)/(Cd*j + Ud);

    DP = 1;
    Da = 1;

    while (DP > precision) || (Da > precision)
        Pnew = dpds(P(i+1), P(i), ds, dz, j, a(i), ROl, Rg, T, MUl, MUg, D, eps);

        jg(i) = Rg*T*mg0/(Pnew*A);
        j = jg(i) + jl;
        [Cd, Ud] = cdud(j, D, theta(i));
        anew = jg(i)/(Cd*j + Ud);

        DP = abs(P(i) - Pnew)/P(i);
        Da = abs(a(i) - anew)/a(i);

        P(i) = subrel*Pnew + (1 - subrel)*P(i);
        a(i) = subrel*anew + (1 - subrel)*a(i);
    end

    jg(i) = Rg*T*mg0/(P(i)*A);
    j = jg(i) + jl;
    [Cd, Ud] = cdud(j, D, theta(i));
    a(i) = jg(i)/(Cd*j + Ud);
end

jl = ones(1,N)*jl;
ap = loc_eq(P(1), jg(1), jl(1), ROl, (P(1)/(Rg*T)), MUl, MUg, D, eps, beta, precision);
%-------------------------------------------------------------------
```

```
function [Cd, Ud] = cdud(j, D, theta)

%   This fucntion calculates the drift parameters for a given Froude number and local geometry

g = 9.8;

Fr = abs(j)/sqrt(g*D);

if Fr < 3.495
    Cd = 1.05 + 0.15*sin(theta);
    Ud = (0.35*sin(theta) + 0.54*cos(theta))*sqrt(g*D);
elseif Fr > 3.505
    Cd = 1.2;
    Ud = 0.35*sin(theta)*sqrt(g*D);
else
    Cd1 = 1.05 + 0.15*sin(theta);
    Ud1 = (0.35*sin(theta) + 0.54*cos(theta))*sqrt(g*D);
    Cd2 = 1.2;
    Ud2 = 0.35*sin(theta)*sqrt(g*D);
    FRAC = (3.505 - Fr)*100;
    Cd = Cd1*FRAC + Cd2*(1 - FRAC);
    Ud = Ud1*FRAC + Ud2*(1 - FRAC);
end
%--------------------------------------------------------------------

function [z, theta] = geometry(s,A)

% This function calculates vectors Z(s) and teta(s) from riser geometry
z = s;
 theta = pi/2;
%--------------------------------------------------------------------

function P2 = dpds(P1, P2pc, ds, dz, j, a, ROl, Rg, T, MUl, MUg, D, eps)

%   This function integrates the pressure gradient along the riser.

g = 9.8;

ROm = ROl*(1-a) + P2pc*a/(Rg*T);
MUm = MUl*(1-a) + MUg*a;
Re = ROm*D*abs(j)/MUm;
fm = 0;%ffan(eps/D, Re);

dW = g*dz + 2*fm*j*abs(j)*ds/D;
P2 = ( P1 - ROl*(1 - a)*dW )/(1 + a*dW/(Rg*T));
%--------------------------------------------------------------------

function f = ffan(epsD, Re)

%   Calculates the Fanning friction factor.

if Re<2000
    f = 16 / Re;
elseif Re > 2300
    f = log10( (epsD^1.1098)/2.8257 + 5.8506/Re^0.8981 );
    f = epsD/3.7065 - 5.0452*f/Re;
    f = (-4*log10(f))^(-2);
else    % Interpolates between Re=2000 and Re=2300
    fl = 16/2000;
```

```
    ft = log10( (epsD^1.1098)/2.8257 + 5.8506/2300^0.8981 );
    ft = epsD/3.7065 - 5.0452*ft/2300;
    ft = (-4*log10(ft))^(-2);
    f = (Re-2000)*ft + (2300-Re)*fl;
    f = f/300;
end
%-------------------------------------------------------------------

function ap = loc_eq(P, jg, jl, ROl, ROg, MUl, MUg, D, eps, beta, precision)

%   Calculates the void fraction in the pipeline using the local
%   equilibrium equation (2.169) from Baliño's "Análise de Intermitência severa em Risers de Geometria
Catenária

fi = 0.0142; % Interfacial friction factor
g = 9.8;

gammamin=0;
gammamax=1;
gamma = (gammamin+gammamax)/2;

while (gammamax - gammamin) > precision
    ap = gamma2ap(gamma);
    gammai = sin(pi*gamma)/pi;
    Reg = abs(jg)*ROg*D/((1-gamma+gammai)*MUg);
    Rel = abs(jl)*ROl*D/(gamma*MUl);
    ui = interfacial_speed(jl, ROl, MUl, D, gamma);
    eq = 0.5*ffan(eps/D,Reg)*ROg*jg*abs(jg)*(1-gamma)/ap^3;
    eq = eq - 0.5*ffan(eps/D,Rel)*ROl*jl*abs(jl)*gamma/(1-ap)^3;
    eq = eq + 0.5*fi*ROg*(jg/ap-ui)*abs(jg/ap-ui)*gammai/(ap*(1-ap));
    eq = eq + (ROl-ROg)*D*g*sin(beta)/4;

    % We know that eq increases when gamma increases, and we search the gamma
    % for which eq = 0.

    if eq > 0
        gammamax=gamma;
        gamma = (gammamin+gammamax)/2;
    elseif eq < 0
        gammamin=gamma;
        gamma = (gammamin+gammamax)/2;
    else
        gammamin=gamma;
        gammamax=gamma;
    end

end

ap = gamma2ap(gamma);
%-------------------------------------------------------------------

function u = interfacial_speed(jl, ROl, mul, D, gamma)

%   This function calculates the speed of the interface between gas and liquid

Rel = abs(jl)*D*ROl/(gamma*mul);

ap = gamma2ap(gamma);

if Rel<2000
```

```
    u = 1.8*jl/(1-ap);
elseif Rel>2200
    u = jl/(1-ap);
else % interpolates between 2000 and 2200
    u = jl/(1-ap) * (1.8*(2200-Rel) + (Rel-2000) )/200;
end


function ap = gamma2ap(gamma)

if (gamma>=0) && (gamma <1)
    ap = 1 - gamma + sin(2*pi*gamma)/(2*pi);
elseif gamma == 1
    ap = 0;
else
    display('Gamma must be a positive number smaller than 1')
end
%-------------------------------------------------------------------

function VA31 = VECTOR_A31(PIL,PID,DELTAU,VP,VJG,VALPHAR,QL0,
RHOL,MUL,AREA,DIA,GRAVITY,RUGOSIDADE,THETA,N)

EDIA = RUGOSIDADE/DIA;
for i=1:1:N
    J = 1.0 + VJG(i);
    [CD,UD] = coeficienteCDUDRRSA(J,AREA,DIA,GRAVITY,QL0,THETA(i));
    Rem = (QL0*DIA*RHOL)/(AREA*MUL);
    Rem = Rem*(1.0 - VALPHAR(i) + VP(i)*VALPHAR(i))*abs(J)/(1.0 - VALPHAR(i) +
DELTAU*VALPHAR(i));
    fm = ffan(EDIA,Rem);
    dfm = dfmdRe(EDIA,Rem);

    aux1 = (1.0 - VALPHAR(i) + VP(i)*VALPHAR(i))*abs(J)*(DELTAU -
1.0)*VALPHAR(i)*VALPHAR(i)*CD;
    aux1 = aux1/(1.0 - VALPHAR(i) + DELTAU*VALPHAR(i));
    aux1 = aux1/VJG(i);
    aux1 = aux1 - (VP(i) - 1.0)*VALPHAR(i)*VALPHAR(i)*CD*abs(J)/VJG(i);
    aux1 = ((1.0 - VALPHAR(i) + VP(i)*VALPHAR(i))*abs(J)/J) + aux1;
    aux1 = aux1/(1.0 - VALPHAR(i) + DELTAU*VALPHAR(i));
    aux1 = aux1*dfm*abs(J)*J*QL0*DIA*RHOL/(AREA*MUL);
    aux1 = 2*fm*abs(J) + aux1;
    aux1 = 4*(PIL/PID)*VJG(i)*(1.0 - VALPHAR(i) + VP(i)*VALPHAR(i))*aux1;
    aux2 = sin(THETA(i)) + 4*fm*abs(J)*J/PID;
    aux2 = PIL*(VP(i) - 1.0)*VALPHAR(i)*VALPHAR(i)*CD*aux2;
    VA31(i) = aux1 - aux2;
%   VA31(i) = -PIL*(VP(i) - 1.0)*CD*(VALPHAR(i)^2);
end;
end
%-------------------------------------------------------------------

function VA32 = VECTOR_A32(PIL,PID,DELTAU,VP,VJG,VALPHAR,
QL0,RHOL,MUL,AREA,DIA,GRAVITY,RUGOSIDADE,THETA,N)
EDIA = RUGOSIDADE/DIA;

for i=1:1:N
    J = 1.0 + VJG(i);
    [CD,UD] = coeficienteCDUDRRSA(J,AREA,DIA,GRAVITY,QL0,THETA(i));
    Rem = (QL0*DIA*RHOL)/(AREA*MUL);
    Rem = Rem*(1.0 - VALPHAR(i) + VP(i)*VALPHAR(i))*abs(J)/(1.0 - VALPHAR(i) +
DELTAU*VALPHAR(i));
```

```
    fm = ffan(EDIA,Rem);
    dfm = dfmdRe(EDIA,Rem);

    aux1 = (1.0 - VALPHAR(i) + VP(i)*VALPHAR(i))*abs(J)*(DELTAU - 1.0)*VALPHAR(i)*(1.0 -
CD*VALPHAR(i));
    aux1 = aux1/(1.0 - VALPHAR(i) + DELTAU*VALPHAR(i));
    aux1 = aux1/VJG(i);
    aux1 = (VP(i) - 1.0)*VALPHAR(i)*(1.0 - CD*VALPHAR(i))*abs(J)/VJG(i) - aux1;
    aux1 = ((1.0 - VALPHAR(i) + VP(i)*VALPHAR(i))*abs(J)/J) + aux1;
    aux1 = aux1/(1.0 - VALPHAR(i) + DELTAU*VALPHAR(i));
    aux1 = aux1*dfm*abs(J)*J*QL0*DIA*RHOL/(AREA*MUL);
    aux1 = 2*fm*abs(J) + aux1;
    aux1 = 4*(PIL/PID)*VJG(i)*(1.0 - VALPHAR(i) + VP(i)*VALPHAR(i))*aux1;
    aux2 = sin(THETA(i)) + 4*fm*abs(J)*J/PID;
    aux2 = PIL*(VP(i) - 1.0)*VALPHAR(i)*(1.0 - CD*VALPHAR(i))*aux2;
    VA32(i) = aux1 + aux2;
end;
end
%-------------------------------------------------------------------

function VA33 =
VECTOR_A33(PIL,PID,DELTAU,VP,VJG,VALPHAR,QL0,RHOL,MUL,AREA,DIA,RUGOSIDADE,
THETA,N)
%
  % Esta função calcula a função -pi_L*J_g*alpha_r

EDIA = RUGOSIDADE/DIA;
for i=1:1:N
    J = 1.0 + VJG(i);
    Rem = (QL0*DIA*RHOL)/(AREA*MUL);
    Rem = Rem*(1.0 - VALPHAR(i) + VP(i)*VALPHAR(i))*abs(J)/(1.0 - VALPHAR(i) +
DELTAU*VALPHAR(i));
    fm = ffan(EDIA,Rem);
    dfm = dfmdRe(EDIA,Rem);

    aux1 = 4*PIL/PID;
    aux1 = aux1*VJG(i)*(1.0 - VALPHAR(i) + VP(i)*VALPHAR(i));
    aux1 = aux1*dfm*abs(J)*J*QL0*DIA*RHOL/(AREA*MUL);
    aux1 = aux1*abs(J)*VALPHAR(i)/(1.0 - VALPHAR(i) + DELTAU*VALPHAR(i));
    aux2 = sin(THETA(i)) + 4*fm*abs(J)*J/PID;
    aux2 = PIL*VJG(i)*VALPHAR(i)*aux2;
    VA33(i) = aux1 + aux2;
%     VA33(i) = -PIL*VJG(i)*VALPHAR(i);
  end;
end
%-------------------------------------------------------------------

function VB11 = VECTOR_B11(VJG,VALPHAR,QL0,AREA,DIA,GRAVITY,THETA,N)
%
% Esta função calcula a função C_d*alpha^2

for i=1:1:N
  J = 1.0+VJG(i);
  [CD,UD] = coeficienteCDUDRRSA(J,AREA,DIA,GRAVITY,QL0,THETA(i));
  VB11(i) = CD*(VALPHAR(i)^2);
end;
end
%-------------------------------------------------------------------

function VB22 = VECTOR_B22(VP,VJG,VALPHAR,QL0,AREA,DIA,GRAVITY,THETA,N)
```

```
%
% Esta função calcula a função P*alpha_r*(1-C_d*alpha_r)

for i=1:1:N
  J = 1.0+VJG(i);
  [CD,UD] = coeficienteCDUDRRSA(J,AREA,DIA,GRAVITY,QL0,THETA(i));
  VB22(i) = VP(i)*VALPHAR(i)*(1.0-CD*VALPHAR(i));
end;
end
%-------------------------------------------------------------------

function VB23 = VECTOR_B23(VJG,VALPHAR,N)
%
% Esta função calcula a função j_g*alpha_r

for i=1:1:N
  VB23(i) = VJG(i)*VALPHAR(i);
end;
end
%-------------------------------------------------------------------

function [G] = Monta_Matriz_G_5p(N,JG,P,PG,D11,D33,A31,A32,A33,DeltaS)
%
% esta rotina monta a matriz G com formula de diferenciação de 5 pontos
K11 = Matriz_K11_5p(N,D11,DeltaS);
%
K22 = Matriz_K22_5p(N,JG,P,DeltaS);
%
K23 = Matriz_K23_5p(N,JG,P,DeltaS);
%
K24 = Matriz_K24_5p(N,JG,DeltaS);
%
K33 = Matriz_K33_5p(JG,P,D33,A32,A33,DeltaS);
%
K34 = Matriz_K34_5p(N,D33,DeltaS);
%
K41 = Matriz_K41_5p(N,A31);
%
K42 = Matriz_K42_5p(N,A32);
%
K43 = Matriz_K43_5p(N,D33,DeltaS);
%
K44 = Matriz_K44_5p(N,D33,A33,DeltaS);
%
% inversa do bloco K44
%
K44I = Matriz_K44_5p_inversa(K44,N);
%
clear K44;
%
% montagem dos blocos da matriz G
%
G1 = [K11 zeros([N-1 N-1]) zeros([N-1 1])];
%
clear K11;
%
% calculo de K44I*K4j, j=1,2,3
%
K44I1 = K44I*K41;
%
```

```
K44I2 = K44I*K42;
%
K44I3 = K44I*K43;
%
G2 = [-K24*K44I1 K22-K24*K44I2 K23-K24*K44I3];
%
clear K22 K23 K24;
%
G3 = [-K34*K44I1 -K34*K44I2 K33-K34*K44I3];
%
clear K33 K34 K44I1 K44I2 K44I3;
%
% montagem da matriz G
%
G = [G1; G2; G3];
%
clear G1 G2 G3;
%
end
%------------------------------------------------------------------


function [H,HA] = Monta_Matriz_H_5p(N,JG,P,PG,L,LR,LB,B11,
B12,B21,B22,B23,A31,A32,A33,D33,ALPHAP,DeltaS)
%
% esta rotina monta a matriz H com formula de diferenciação de 5 pontos

M11 = Matriz_M11_5p(N,B11);
%
M12 = Matriz_M12_5p(N,B12);
%
M21 = Matriz_M21_5p(N,B21);
%
M22 = Matriz_M22_5p(N,B22);
%
M23 = Matriz_M23_5p(N,JG,P,PG,L,LR,LB,ALPHAP,DeltaS);
%
M24 = Matriz_M24_5p(N,B23);
%
M33 = Matriz_M33_5p(A32,PG,L,LR,LB,ALPHAP);
%
% matriz K44 e sua inversa e matrizes K41 e K42
%
K44 = Matriz_K44_5p(N,D33,A33,DeltaS);
%
% inversa do bloco K44
%
K44I = Matriz_K44_5p_inversa(K44,N);
%K44I
%pause
%
clear K44;
%
K41 = Matriz_K41_5p(N,A31);
%K41
%pause
%
K42 = Matriz_K42_5p(N,A32);
%K42
%pause
```

```
%
K43 = Matriz_K43_5p(N,D33,DeltaS);
%K43
%pause
%
HA = [M11 M12 zeros([N-1 1]); M21 M22 M23; zeros([1 2*N-2]) M33];
%
% montagem das matrizes auxiliares
%
H1 = [M11 M12 zeros([N-1 1])];
%
clear M11 M12;
%
H2 = [M21-M24*(K44I*K41) M22-M24*(K44I*K42) M23-M24*(K44I*K43)];
%
clear M21 M22 M23 M24 K44I K41 K42 K43;
%
H3 = [zeros([1 N-1]) zeros([1 N-1]) M33];
%
% montagem da matriz H
%
H = [H1; H2; H3];
%
clear H1 H2 H3;
end
%--------------------------------------------------------------------

function [lambda,NEN] = espectro(ND,K,M,sigma,which,NE,tol)
%
% Esta rotina avalia parte do espectro do problema de autovalores Kx=lambda Mx.
%

if sigma==0
  for i=1:1:ND
    for j=1:1:ND
      A(i,j)=K(i,j);
    end
  end
else
  for i=1:1:ND
    for j=1:1:ND
      A(i,j)=K(i,j)-sigma*M(i,j);
    end
  end
end
%
% fatorização LU da matriz A = K-sigma*M
%
SA = sparse(A);
%
[L,U,P,Q,R] = lu(SA);
%
% parametros para a rotina eigs
%
opts.issyn = 0;
opts.isreal = 1;
opts.tol = tol;
opts.p = 2*NE+2;
%
% chamada da rotina eigs
```

```
%
nu = eigs(@(x) ksmifun(x,ND,L,U,P,Q,R,M),ND,NE,which,opts);
%nu
%
% contagem do números de autovalores não nulos ou maiores que tol
%
NENN = 0;   % numero de autovalores não nulos
NEN = 0;    % numero de autovalores nulos
%
%B = inv(A);
%B = B*M;
%
for i=1:1:NE
  if abs(nu(i)) >= tol
     NENN = NENN+1;
     aux = abs(nu(i));
     aux = aux^2;
     auxr = real(nu(i));
     auxi = imag(nu(i));
     lambda(NENN) = complex(-sigma-auxr/aux,auxi/aux);
  else
     NEN = NEN+1;
  end
end
%
clear A L U P Q R nu NENN aux auxr auxi;
end
%-------------------------------------------------------------------
```