

ESTUDO DA PRESSÃO DE CONTATO E DA TENSÃO NO PÉ DO DENTE DE UMA ENGRENAGEM

André Rodrigues Garcia da Silveira
andrergsilveira@gmail.com

Resumo. O presente trabalho visa mostrar uma análise por elementos finitos das tensões de pé de dente e das pressões de contato durante um engrenamento de um redutor de velocidade comercial. Essa análise é importante para se estudar outros efeitos de engrenamentos, como o da flexo-torção do dente da engrenagem. Para tanto, foi feita uma revisão bibliográfica a fim de se determinar os vários métodos de cálculo de engrenagens que são estudados atualmente. Posteriormente, cada um deles foi automatizado em uma planilha de Excel para que seu cálculo seja mais rápido. Depois disso, foi aplicado às planilhas o deslocamento de perfil de engrenagens conjuntamente com o ângulo de hélice. Após essa etapa, elaborou-se uma rotina, em VBA, no software AutoCAD Inventor 2011 que em conjunto com o Excel calcula a geometria da evolvente e desenha um dente de engrenagem no qual será possível fazer as análises corretamente. Como vários pares de engrenagens serão simulados ao longo deste e de outros trabalhos, automatizou-se a rotina para qualquer geometria, deslocamento de perfil e ângulo de hélice. A evolvente calculada é a definida na norma DIN 3960. Por fim, realizou-se a simulação do engrenamento por elementos finitos e concluiu-se que a metodologia de análise adotada está correta.

Palavras chave: Engrenagens, Tensão dos Materiais

1. Introdução

Este trabalho tem por objetivo analisar, utilizando o método dos elementos finitos (MEF), a tensão de pé de dente e a pressão de contato de um par de engrenagens durante um engrenamento. Para tanto, será utilizado o programa ANSYS Workbench versão 13, daqui em diante denominado apenas ANSYS. Porém, o programa fornecerá resultados que podem ou não estar corretos. Para validar a análise pelo programa, e concluir que o modelo está correto, os resultados serão comparados a cálculos teóricos de engrenagens definidos por diversos autores e normas.

No intuito de agilizar futuros cálculos de engrenagens para trabalhos subseqüentes, os métodos dos autores serão automatizados em diversas planilhas do software Microsoft Excel, daqui em diante denominado apenas Excel.

Outro ponto que deve ser ressaltado é o fato de que não há softwares que forneçam um desenho 3D de uma engrenagem com o perfil da evolvente corretamente desenhado. Este consiste em outro principal foco deste trabalho. Para fazer a análise correta do dentado, desenvolveu-se um programa que estabelece uma conexão entre os softwares: Excel e AutoCAD Inventor 2011, daqui em diante denominado apenas Inventor. Com essa Macro, digitam-se os parâmetros do engrenamento no Excel e iniciando o comando no Inventor, a engrenagem é plotada em 3D. Um tutorial de como se utiliza o programa está no Anexo B.

O objetivo deste trabalho é adquirir confiança no método de elementos finitos e no modelo de engrenamento utilizado para poder, então, estudar efeitos mais importantes como o da flexo-torção do dente da engrenagem ou o efeito do lubrificante no engrenamento.

Para a indústria essa análise também é válida, pois pode ratificar resultados pré-calculados com outros programas ou então retificá-los.

2. Revisão Bibliográfica

Como o foco do trabalho é engrenagens com perfil de evolvente, pretende-se agora dar uma breve explicação acerca desse tipo de engrenagem.

Para iniciar a apresentação, define-se a relação de transmissão de um engrenamento na Eq. (1):

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1} \quad (1)$$

Onde i é a relação de transmissão da engrenagem, ω_i é a velocidade angular em rad/s , z_i é o número de dentes e r_i é o raio primitivo em mm . O índice 1 denota a engrenagem de menor diâmetro e o índice 2 denota a de maior. Isso, porque a relação de transmissão é convencionada para ser sempre maior ou igual a um, ou seja, $i \geq 1$.

Essa equação mostra que para um dado engrenamento, a relação de velocidades angulares é fixa, pois o i é sempre o mesmo, ou seja, mantida a velocidade angular de entrada fixa, a velocidade de saída será constante. Isso é muito importante, pois, teoricamente, não há um surgimento de vibrações inerentes ao mecanismo de transmissão de movimento como há em um eixo cardã, por exemplo.

Ela também mostra que quanto maior for a velocidade angular da engrenagem, menor será seu raio, e vice-versa. Para um redutor, a entrada se dá pelo eixo da engrenagem menor (maior rotação) e a saída ocorre pelo eixo da engrenagem maior (menor rotação). Para um multiplicador ocorre o contrário, ou seja, a entrada se dá pela maior engrenagem e saída pela menor. Cada qual possui suas aplicações típicas, sendo mais comum, na prática, encontrar redutores.

Os redutores são mais utilizados em aplicações que:

- necessitem de grande torque, como um carro em aceleração ou um terno de moenda de usina de açúcar;
- necessitem diminuir a sua rotação, seja pouco como na geração de energia elétrica através de uma turbina a vapor (geralmente a redução é de 4000 para 1800 rpm com $i = 2,2$), seja muito como em um difusor de usina de açúcar (a redução ocorre de aproximadamente 1180 rpm para 0,4 rpm com $i = 3000$).

Os multiplicadores, por sua vez, possuem funções mais específicas, em que o aumento da velocidade traz algum benefício. São utilizados em aplicações que:

- necessitem aumentar a sua rotação, como em uma pequena central hidroelétrica (geralmente o aumento vai de 300 rpm para 1200 rpm). O benefício trazido é a diminuição do tamanho do gerador, diminuindo tanto o seu custo, quanto o custo das obras civis.

A Fig. (1) (retirada de FILHO, 1997) mostra as principais características geométricas das engrenagem cilíndricas de dentes retos. Serão discutidas também as equações que relacionam tais características entre si.

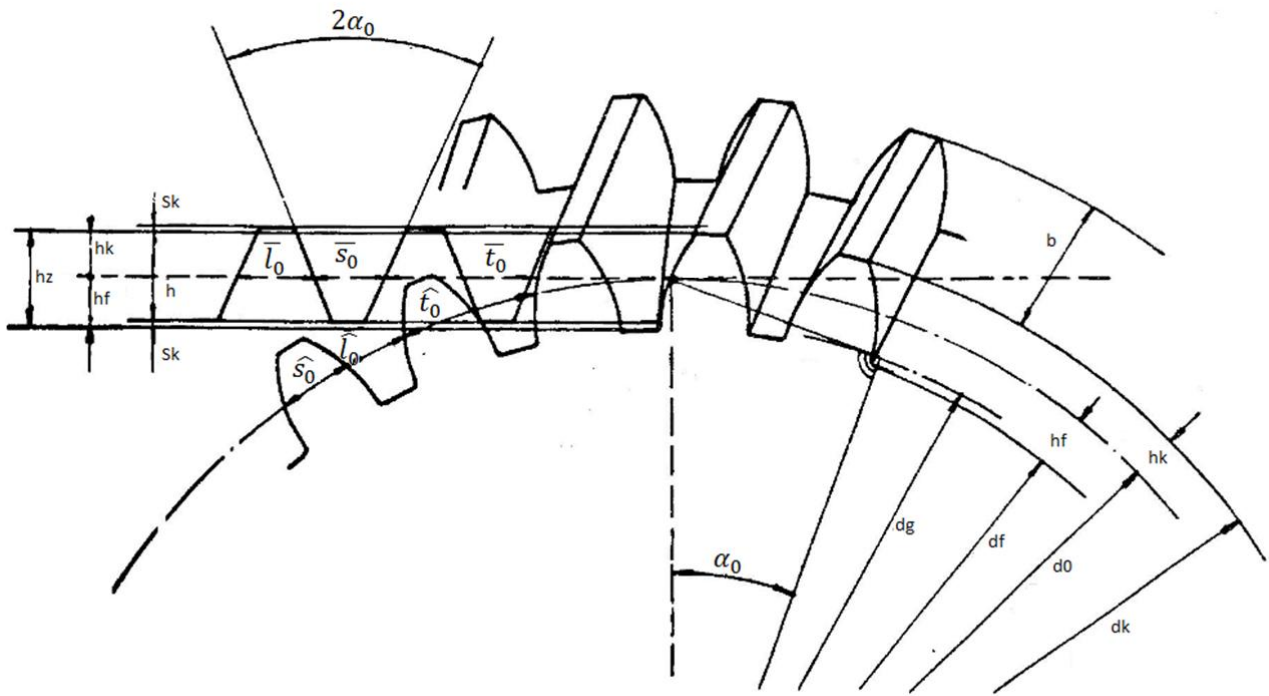


Figura 1 - Principais características de uma engrenagem cilíndrica de dentes retos (retirada de FILHO, 1997)

Uma das principais relações geométricas de uma engrenagem é:

$$z * t_0 = \pi * d_0 \quad (2)$$

Onde t_0 é o passo da engrenagem medido em mm e d_0 é o diâmetro primitivo da engrenagem também em mm .

O passo de uma engrenagem é a distância entre dois pontos equivalentes, como entre dois vales, medida sobre a circunferência primitiva.

A Eq. (2) iguala o perímetro do círculo primitivo com ele mesmo mudando apenas as variáveis da fórmula. Define-se, também, a variável “módulo” (m na Eq. (3), medido em mm), de tal forma que:

$$m = \frac{t_0}{\pi} \quad (3)$$

Dessa forma, a equação perde o π , ficando mais fácil de ser manipulada e calculada (Eq. (4)). Logo:

$$m * z = d_0 \quad (4)$$

Na Fig. (1), s_0 é a espessura do dente no círculo primitivo da engrenagem medida em mm , l_0 é o tamanho do vão entre dentes no círculo primitivo medido em mm , h é a altura comum dos dentes das duas engrenagens em mm , h_k é a altura da cabeça do dente em mm , h_f é a altura do pé do dente em mm , h_z é a altura total do dente em mm , d_k é o diâmetro externo (ou de cabeça de dente) medido em mm , d_f é o diâmetro do pé do dente medido em mm , d_g é o diâmetro de base medido em mm e α_0 é o ângulo de pressão medido em graus.

Vale ressaltar também, que, na figura, há dois tipos de ênfases: "[^]" e "-". A ênfase "[^]" é usada para dizer que aquela medida é da engrenagem e "-" é utilizada para demonstrar que aquele símbolo pertence à ferramenta.

O módulo das engrenagens é padronizado, assim como o ângulo de contato. No entanto, o último tende a variar muito menos que o primeiro. Geralmente o ângulo de contato vale 20°. O módulo, por sua vez, varia em uma gama enorme de valores que vão desde 0,3 mm até 75 mm. Para que haja um engrenamento correto, porém, ambas as engrenagens devem ter o mesmo ângulo de contato e o mesmo módulo.

Outro parâmetro importantíssimo para uma engrenagem é o deslocamento de perfil " x ". Esse deslocamento é utilizado para:

- evitar o efeito de interferência quando o número de dentes é reduzido - diminui o número mínimo de dentes;
- evitar o engripamento dos dentes;
- aumentar a capacidade de carga do conjunto;
- ajustar uma distância entre eixos que seria inalcançável mudando apenas módulo e número de dentes;

Para fazer esse deslocamento de perfil, basta aumentar/diminuir a distância da ferramenta em relação à engrenagem. Esse efeito pode ser mais bem visualizado na Fig. (2) abaixo:

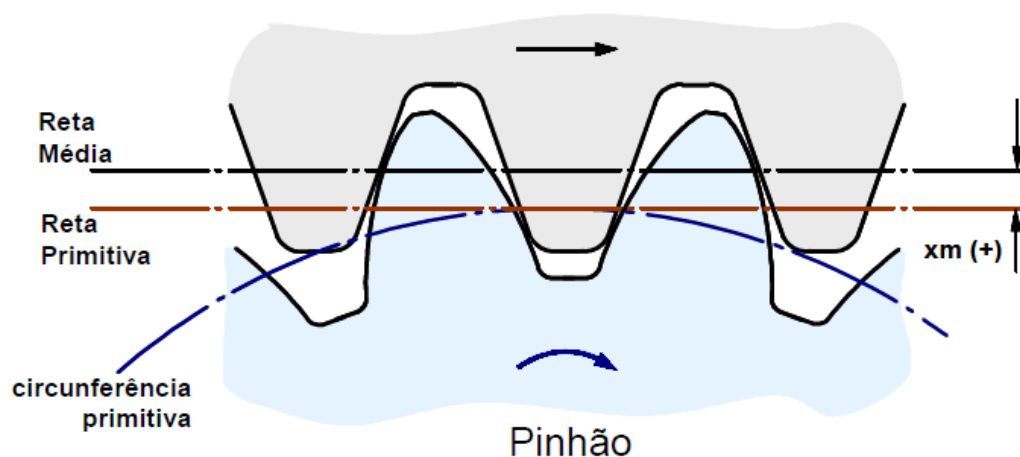


Figura 2 - Efeito do deslocamento de perfil na fabricação de uma engrenagem. (retirada de Gemaque, 2004)

Na Fig. 2, a reta primitiva é uma reta que tangencia o círculo primitivo da engrenagem (este não se altera com o deslocamento de perfil), e a reta média é a reta do "círculo primitivo" da ferramenta. Como a ferramenta é uma cremalheira, o diâmetro desse "círculo" é infinito e ele se torna uma reta. Ao se deslocar essa reta, a geometria do dente muda, apesar de a evolvente se manter a mesma (não se alteram o círculo de base, o módulo da engrenagem e nem o número de dentes). Exemplos desses dentes modificados podem ser vistos no fim do presente trabalho. Conforme mostrado, um deslocamento positivo é obtido aumentando a distância da ferramenta em relação à engrenagem, e um deslocamento negativo é obtido diminuindo essa distância.

Outros papers foram lidos, mas eles não são focados explicitamente na análise da tensão, mas sim em assuntos decorrentes, como "Determinação da vida de uma engrenagem através de um modelo computacional" abordado por Glodez; Sraml; Kramberger (2002), "Análise de impacto em um engrenamento através de elementos finitos" abordado por Lin; Ou; Li (2006) ou "Análise das tensões de contato no dente para redução do desgaste", abordado por Mao (2006). Porém, apesar de não ser o foco, esses papers abordam o assunto superficialmente e podem ser utilizados para se ter uma base de análises por MEF.

É importante também dar uma breve explicação de o que é a correção helicoidal em uma engrenagem. Como será visto mais para frente, como o torque é aplicado apenas em um lado da engrenagem, há ali uma concentração de tensão. O que se faz é usinar o dente para que, com a carga aplicada, o contato seja pleno. A Fig. (3) mostra esse efeito. Primeiramente, o perfil, paralelo com o eixo da engrenagem, está descarregado (a). Posteriormente é aplicado um momento na engrenagem, pelo lado esquerdo, e há uma deformação mostrada em (b) que será o perfil de trabalho da engrenagem. Porém, se o perfil inicial do dente fosse o mostrado em (c), com a carga aplicada o estado final seria o mostrado em (d), que é o ideal, pois diminui muito a concentração de tensão no dente.

Este efeito será visualizado nos resultados deste trabalho. Porém, um estudo mais aprofundado é um tema de mestrado ou doutorado.

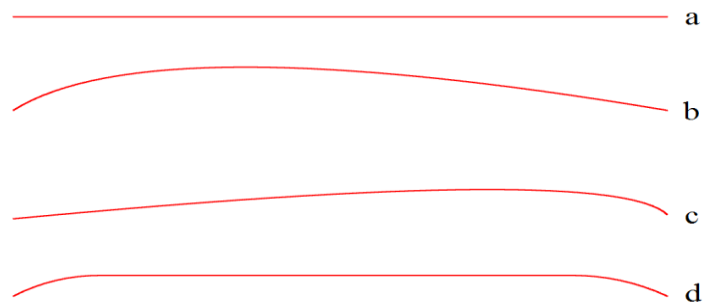


Figura 3 - Figura auxiliar à explicação da correção de hélice

3. Elaboração das Planilhas de Cálculo de Engrenagens

Como dito no resumo, foram estudados vários métodos de cálculo de engrenagens que foram implementados nas planilhas do Excel. Com isso, pretende-se ter uma noção da variação das tensões de pé de dente e das pressões de contato de um engrenamento se ele for calculado de maneiras distintas.

Os métodos implementados nas planilhas são os seguintes: do Stipkovic (1978), do Niemann (2002), do Oliveira (1961) e o de Buckingham (1949).

Foi estudado também o deslocamento de perfil do engrenamento e o ângulo de hélice que também foram aplicados às planilhas. Apesar de ter normas que auxiliam na escolha do deslocamento de perfil que deve ser utilizado, alguns autores fornecem outros métodos para calcular os deslocamentos.

Essas planilhas coletam um conjunto de dados de entrada e fornecem todas as dimensões, tensões de pé de dente e pressões de contato do par de engrenagens.

Exemplos de dados de entrada são: Módulo, número de dentes do pinhão, número de dentes da coroa, potência, rotação do pinhão, relação de transmissão, propriedades dos materiais das engrenagens, entre outros. Exemplos de dados de saída são: pressão de contato, tensão de pé de dente, coeficiente de segurança, entre outras.

Uma comparação entre as saídas dos diversos programas será mostrada no fim do trabalho.

4. Elaboração do dente de engrenagem no programa Inventor 2011

Serão utilizados dois softwares para a parte de simulação no decorrer deste trabalho, o ANSYS e o Inventor. O software Inventor será utilizado para gerar os pontos da evolvente e as engrenagens, enquanto que o software ANSYS será usado para simular o engrenamento em elementos finitos.

Atualmente o Inventor, ao desenhar o perfil de uma engrenagem, desenha uma circunferência ao invés da evolvente. Dessa forma, o programa precisa de um menor processamento gráfico para gerar as figuras, e como a sua função é majoritariamente ilustrativa, uma circunferência é suficiente para essa aplicação. Obviamente esse dente não pode ser simulado em elementos finitos. Para desenhar o perfil da evolvente no Inventor, precisou-se da sua equação. Para ver em detalhes a dedução da equação, o programa desenvolvido e como utilizar o programa, favor consultar o trabalho de formatura de Silveira (2011).

O resultado do programa é um dente de engrenagem. Para obter a engrenagem completa, basta apenas revolucionar este dente. Porém, como será visto à frente, apenas um dente é suficiente. Abaixo, na Fig. (4), estão plotados três dentes gerados pelo programa. Note que um dente com correção negativa tem um aspecto mais rombudo e uma espessura de pico maior que um dente sem correção. A correção positiva, por outro lado, afila a cabeça do dente e deixa este num formato mais triangular, como visto na prática.



Figura 4 – Três perfis de dente de engrenagem obtidos com o programa. O primeiro tem uma correção de -0,2, o segundo não possui correção e o terceiro tem correção de +0,5

5. Simulação por elementos finitos

Nesta seção será iniciada a análise por elementos finitos de um par de engrenagens.

Para tanto, foi utilizado o programa anterior para gerar os dentes da engrenagem. Não é permitido, por ser segredo industrial, revelar os dados do engrenamento, mas para dar ao leitor uma ordem de grandeza do ensaio, algumas propriedades foram fornecidas na Tab. (1) abaixo:

Tabela 1 - Algumas propriedades do engrenamento ensaiado

	Pinhão	Coroa
Diâmetro primitivo (mm)	385,73	1489,54
Ângulo de hélice (graus)	8	8
Ângulo de engrenamento (graus)	20	20
Largura (mm)	480	480

Para realizar os ensaios, definiram-se dois casos: um para o pé do dente e outro para a pressão de contato. Um fato importante a ser ressaltado neste ponto é que para ambos os casos foi utilizado apenas um dente da engrenagem, sem considerar o real grau de recobrimento do par. Toda a literatura considera que o engrenamento se dá em um dente de cada vez e que, portanto, ele tem que agüentar toda a força exercida entre as engrenagens. Como o objetivo do ensaio é comparar os resultados obtidos por elementos finitos com os obtidos teoricamente, utilizou-se apenas um dente em cada um dos casos.

Caso 1: O ensaio da tensão no pé do dente consiste em analisar apenas uma engrenagem, carregando-a com as forças do engrenamento. A engrenagem é fixada em um eixo imaginário e aplicam-se as forças do engrenamento em uma linha desenhada no diâmetro de trabalho. Com isso obtêm-se a tensão no pé do dente. Apesar de a tensão de contato obtida estar completamente errada, pois toda a carga do engrenamento é aplicada em uma linha, e não em uma área como é visualizados na prática, os resultados no pé do dente são satisfatórios.

Caso 2: O segundo ensaio é o da pressão de contato. Nele, as engrenagens são montadas cada uma em seu eixo imaginário e, fixando uma engrenagem, move-se a outra para que o contato seja ajustado. É importante frisar que, durante o ensaio, uma engrenagem deve permanecer fixa, enquanto que a outra deve poder rotacionar ao redor de seu eixo. A região de contato possui atrito e o modelo de elementos finitos deve ser capaz de reconhecer isto. Posteriormente, aplica-se o torque do engrenamento na engrenagem móvel e verifica-se o nível da pressão de contato e tensão no pé do dente nas duas engrenagens.

Mas, se o segundo ensaio fornece todos os resultados desejados, por quê fazer dois ensaios e não apenas um?

A resposta é simples. Depende do objetivo da análise. Como visto acima, o primeiro ensaio possui apenas uma engrenagem, e não duas. Além disso, não há região de contato para ser processada. Se o interesse do estudo for as tensões no pé do dente, o primeiro ensaio é muito mais vantajoso que o segundo. Por exemplo: nos ensaios realizados abaixo, o tempo de preparo da engrenagem para o primeiro ensaio é um quinto do tempo de preparo para o segundo. Além disso, o software ANSYS demorou, em média, cinco minutos para fornecer o primeiro resultado contra 12 horas e 40 minutos para o segundo. O modelo roda 150 vezes mais rápido!

5.1. Ensaio da tensão no pé do dente

Abaixo será explicado como fazer o pré-processamento deste ensaio. É importante que todos os dados sejam corretamente colocados, já que um mau pré-processamento implica diretamente em um mau resultado.

O primeiro passo é utilizar o programa desenvolvido para gerar um dente da engrenagem. Posteriormente, gera-se um cilindro no pé do dente da engrenagem e faz-se o furo (quando houver).

Depois, no dente, desenha-se uma linha que corresponde ao diâmetro de trabalho da engrenagem. Essa linha está mostrada na Fig. (5).

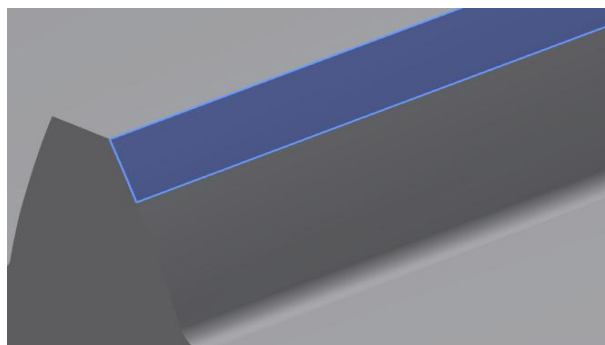


Figura 5 - Linha que mostra o diâmetro de trabalho da engrenagem

Com tudo isso pronto, carrega-se a engrenagem do Inventor para o ANSYS.

Dentro do ANSYS são definidas as condições de contorno e as forças aplicadas ao modelo. A primeira condição de contorno é fixar o furo da engrenagem. Posteriormente, são aplicadas as componentes da força de engrenamento na linha mostrada na Fig. (5). Depois é só rodar o modelo e obter os dados.

5.2. Ensaio da pressão de contato no engrenamento

Novamente, o primeiro passo é gerar as engrenagens no programa desenvolvido como no ensaio 1. Dessa vez, no entanto, não é necessário desenhar a linha do engrenamento, já que as faces entrarão em contato uma com a outra e a região de aplicação da força será determinada automaticamente. Com as engrenagens desenhadas, deve-se fazer a montagem delas. Essa é a parte mais difícil do segundo ensaio, pois as engrenagens devem estar em uma posição de contato pleno e não no início ou final do engrenamento. Errar essa posição significa que a força não será aplicada como na vida real e um resultado errado será obtido. Porém, essa é uma abordagem conservativa. Na vida real, vários dentes estão em contato ao mesmo tempo, então sempre haverá um dente entrando em contato e um saindo, de forma que há uma melhor distribuição das pressões de contato e essa posição deixa de ser tão importante. Esse é um tema que pode ser abordado em um futuro mestrado.

Depois, pode-se exportar as engrenagens para o ANSYS e iniciar o pré-processamento.

A coroa será fixada no seu centro. Para aproximar o modelo um pouco mais da realidade, colocaram-se mancais imaginários no pinhão que efetuarão a sustentação deste, possibilitando à engrenagem fletir e rotacionar em torno de seu eixo. O momento é aplicado em uma das faces do pinhão. Determinam-se também as superfícies que estão em contato, que no caso são as duas faces dos dentes. Para tanto, utilizaram-se elementos de contato de atrito com um coeficiente $\mu = 0,03$.

5.3. Obtenção dos dados

Foram colhidos 10 resultados ao longo da superfície do dente, rejeitaram-se o maior e o menor valor e foi tomada a média do resto como a tensão atuante. Os valores de todos os valores obtidos em todos os ensaios estão na Tab. (2).

Tabela 2 - Tensão (ou pressão) obtida em cada ensaio

	Ponto	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Média
Tensão no pé da coroa (ensaio 1)	Valor (MPa)	574,1	591,3	581,8	570,8	564,8	562,5	556,1	555,8	557,9	575,6	567,9
Tensão no pé do pinhão (ensaio 1)	Valor (MPa)	540,3	530,9	514,1	498,1	473,3	444,4	421,1	400,2	380,7	362,5	457,8
Pressão de contato (ensaio 2)	Valor (MPa)	1684,5	1812,8	1654,4	1555,9	1459,3	1521,8	1542,0	1544,9	1608,4	1583,9	1587,0
Tensão no pé da coroa (ensaio 2)	Valor (MPa)	543,1	552,6	570,1	555,6	552,7	522,2	501,4	501,1	511,1	518,2	532,1
Tensão no interior da engrenagem (ensaio 2)	Valor (MPa)	1111,6	1092,6	1001,4	984,5	962,6	969,7	1014,7	988,2	1070,2	1096,2	1027,2
Tensão no pé do pinhão (ensaio 2)	Valor (MPa)	716,1	731,3	706,9	599,7	522,0	451,8	366,0	334,0	312,7	293,4	501,2

6. Análise dos dados e conclusão

O primeiro passo é colocar em gráficos todos os dados coletados nas tabelas anteriores. Assim pode-se ter uma noção do comportamento das tensões ao longo do dente. Isso é importante para explicar efeitos que inevitavelmente ocorrerão, como o da flexo-torção. Os gráficos foram numerados de G1 a G6 na Fig. (6) abaixo.

Com base nos gráficos abaixo, pode-se perceber claramente que há dois efeitos predominantes no engrenamento. O primeiro é o efeito de borda, bem visível em todos os gráficos, com a exceção do G2. O outro é o efeito da flexo-torção, visível do G2 ao G5.

O efeito de borda é bem comum na vida real. Como a engrenagem não é infinita, a distribuição de tensão nas bordas é concentrada e há um aumento de seu valor nessas regiões. O perfil "ideal" do efeito de borda é visível na parte "a" da Fig. (7) abaixo.

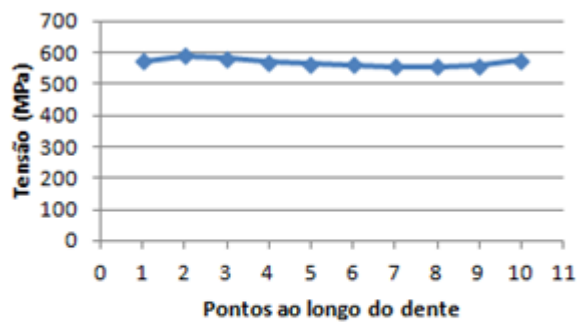
O efeito da flexo-torção - neste caso muito mais o da torção do que o da flexão, pela forma em que as engrenagens estão fixadas - concentra a tensão no lado em que está sendo aplicado o torque. A explicação é que como o corpo é elástico, ele se deforma e a tensão vai se acomodando e diminuindo ao longo do comprimento do dente. Este é um dos motivos pelo qual apenas aumentar a espessura da engrenagem para aumentar a capacidade de carga não é aconselhável. A largura total aumenta, mas a largura útil é em pouco alterada. Economicamente compensa atuar em outros fatores do engrenamento. O perfil "ideal" de um efeito de flexo-torção (com ênfase na torção, como no exemplo calculado) pode ser visualizado na parte "b" da Fig. (7) abaixo.

Note que apesar de o gráfico G2 mostrar exatamente um perfil deste tipo, naquele ensaio a força foi aplicada na linha do engrenamento, então este efeito não está presente.

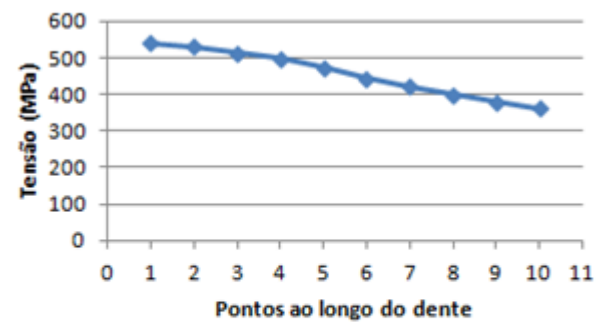
Na vida real, porém, quando o torque é aplicado em uma engrenagem não infinita, os efeitos se sobrepõem, e o que é visualizado está ilustrado na parte "c" da Fig. (7).

Pode-se observar um perfil semelhante ao da parte "c" (efeito de flexo-torção + borda) nos gráficos de G3 a G5. No entanto, G1 e G6 apresentam apenas o efeito de borda.

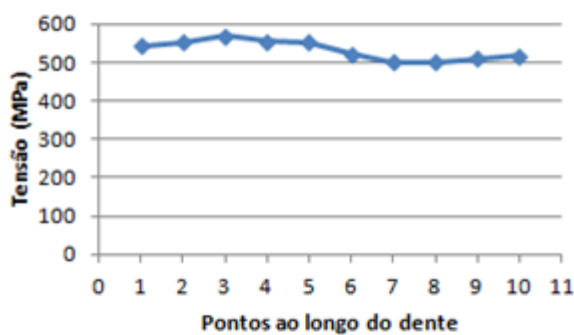
G1 Tensão no pé da coroa (ensaio 1)



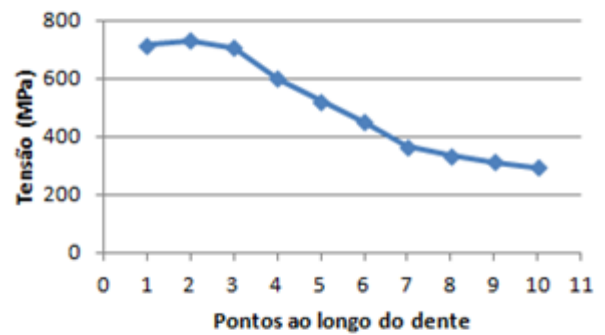
G2 Tensão no pé do pinhão (ensaio 1)



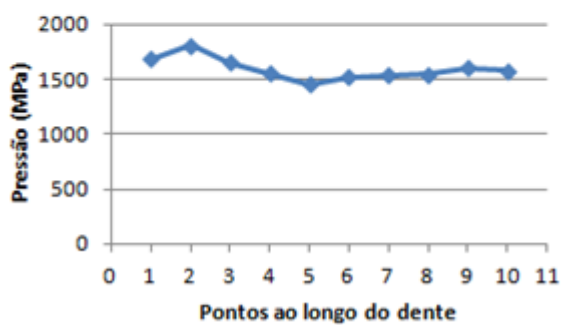
G3 Tensão no pé da coroa (ensaio 2)



G4 Tensão no pé do pinhão (ensaio 2)



G5 Pressão de contato (ensaio 2)



G6 Tensão no interior da engrenagem (ensaio 2)

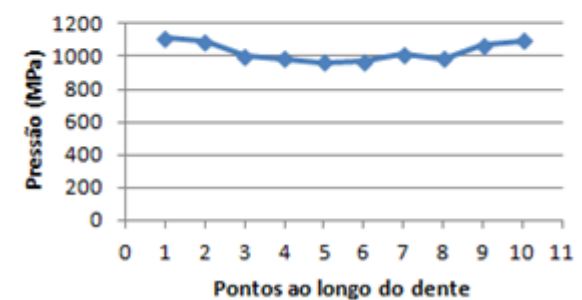


Figura 6 - Gráficos dos pontos coletados pelo ensaio de elementos finitos

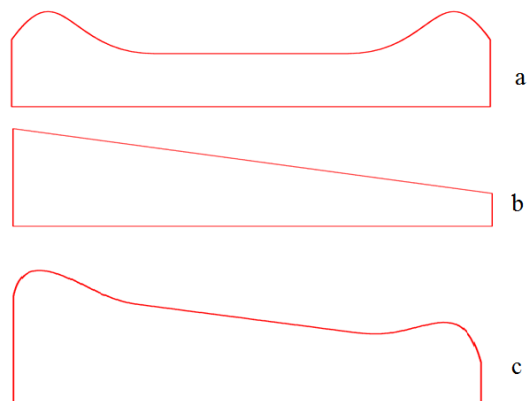


Figura 7 - Perfis "ideais" de deformações de engrenagem. (a) efeito de borda. (b) efeito da flexo-torção. (c) efeito da flexo-torção combinado com o efeito de borda

Como visto nas figuras acima, os valores das tensões no pinhão se alteram mais drasticamente devido a três motivos: O primeiro é que a coroa está fixa, enquanto que o pinhão está livre para girar e o seu centro está livre para se afastar da coroa. Como a coroa está fixa, o efeito da flexo-torção não é significativo, então se observa mais o efeito de borda. O segundo motivo é que o torque está aplicado no pinhão, então além deste estar livre, toda a carga é descarregada primeiro nele, para depois passar para a coroa. O terceiro motivo é que a seção transversal da coroa é muito maior que a do pinhão, então a resistência à torção é também muito maior, fazendo com que o pinhão se deforme mais.

Porém esse resultado não está de todo errado. Na prática, o dente do pinhão é corrigido para que, em carga máxima, o contato pleno seja atingido e a distribuição de tensão no pé do dente e de pressão no contato seja aproximadamente constante. Como o efeito é mais significativo no pinhão e ele possui menos dentes (menos tempo na retífica), opta-se por corrigi-lo ao invés da coroa.

Após todas estas considerações, pode-se se assegurar que os dados colhidos estão, qualitativamente, de acordo com o modelo mental do engrenamento. Assim, dar-se-á prosseguimento às análises. Para tanto, utilizaram-se as planilhas elaboradas na seção três para calcular as tensões teóricas em cada um dos casos estudados.

Os resultados para cada caso estão na Tab. (3) abaixo.

Tabela 3 - Tensões previstas pelos modelos das planilhas

	Tensão no pé do dente		Pressão de contato
	do pinhão	da coroa	
Stipkovic	680,03	521,42	1572,68
Gil	596,36	548,63	1867,63
Buckingham	975,08	785,48	1535,208
DIN 3990 (MITCalc)	596,23	575,37	1644,37
Hertz			1620
Todos os valores estão em MPa.			

Porém, antes de começar a comparar os valores da tabela acima com os obtidos nos ensaios, comparemos os valores entre si. Para tanto, é necessário ter um valor de referência com o qual possa se comparar os outros. A saída do programa MITCalc será tomada por referência, pois ele é um programa profissional, pago, baseado na norma DIN 3990, com mais de oito anos de experiência. A Fig. (8) abaixo mostra, em um gráfico, a tabela acima. Pode-se perceber que os valores calculados pelo MITCalc estão bem na média dos outros valores, indicando que não há muita divergência entre os vários modelos. Há uma exceção em cada parâmetro. Para ambas as tensões de pé de dente, o método do Buckingham fornece tensões bem maiores que os outros, enquanto que para a pressão de contato o método do Gil é o que se destaca. Mas, tirando esses valores, os outros estão muito próximos uns dos outros e fornecem uma base de comparação para os dados colhidos pelo método dos elementos finitos.

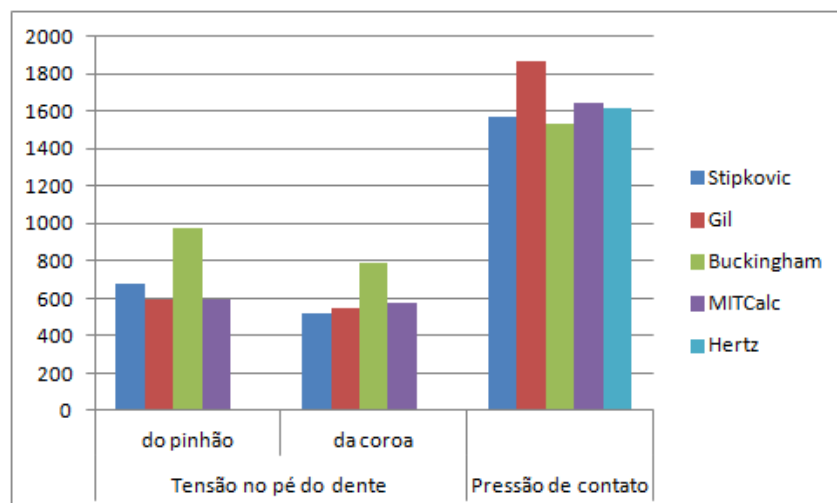


Figura 8 - Valores esperados dos ensaios para cada um dos métodos estudados

Com isto, pode-se agora plotar o gráfico dos valores obtidos pelos ensaios por MEF juntamente com os das planilhas. Foram feitos dois gráficos para essa análise. No primeiro, indicado na Fig. (9), estão plotados os valores médios dos ensaios. No segundo, mostrado na Fig. (10), estão plotados os valores máximos.

Através da Fig. (9), pode-se ver que os valores médios das tensões de pé de dente colhidos com a metodologia do ensaio 1 e com a do ensaio 2 são muito próximos entre si para o pinhão e para a coroa. Isso ratifica a afirmação feita

anteriormente de que não é necessário fazer o ensaio completo (o segundo) para conseguir o valor das tensões de pé de dente das engrenagens. O primeiro ensaio já fornece valores bem próximos dos calculados na teoria.

Porém, o valor da tensão de pé de dente do pinhão está um pouco abaixo dos valores teóricos. Voltando aos gráficos feitos acima, que mostram a distribuição da tensão ao longo do comprimento da engrenagem, vê-se que, para o pinhão, há uma grande variação da tensão com o comprimento da engrenagem. Com isso, toda a alta tensão está concentrada em uma pequena parcela do dente. Como o espaçamento entre os pontos é aproximadamente constante, apenas dois ou três pontos mostram resultados altos. Além disso, ignora-se o maior resultado, piorando ainda mais a situação. Como na coroa a distribuição é mais homogênea, os valores são mais próximos dos calculados.

A Fig. (10) mostra que essa informação pode estar correta. Para a coroa, a tensão máxima é muito próxima da média e praticamente não há alteração. Porém, as tensões no pinhão modificam bastante e ficam mais próximas das calculadas. Por incrível que pareça, o valor da tensão obtido pelo ensaio rápido está mais próximo dos valores teóricos das planilhas do que o resultado obtido pelo segundo ensaio (considerando apenas o critério de valor máximo). Isso pode ser causado devido ao efeito da flexo-torção que está presente apenas no ensaio demorado.

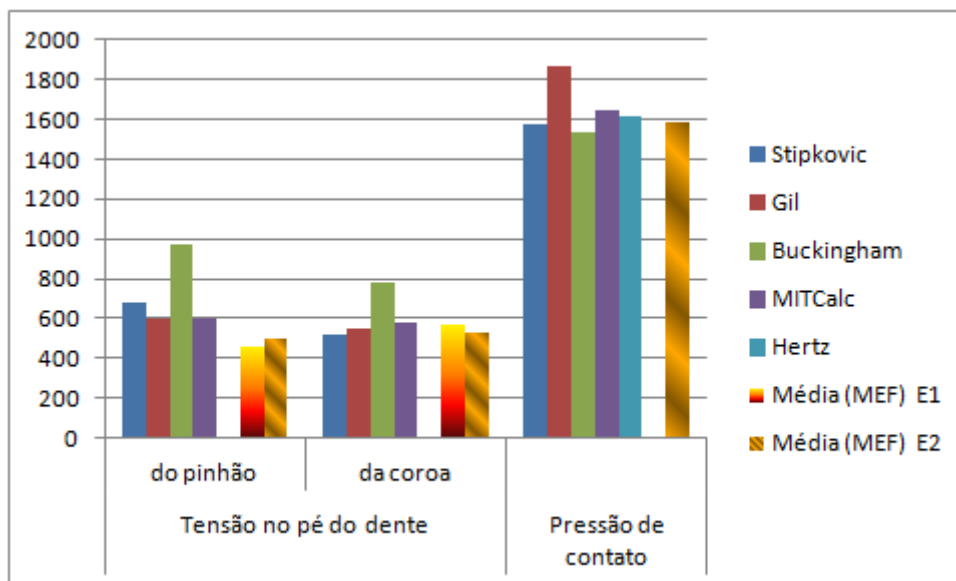


Figura 9 - Valores médios dos ensaios por MEF comparados com os valores das planilhas

Indo para as pressões de contato, vê-se que o resultado médio está muito próximo de todos os valores (com exceção do valor do Gil, já comentado anteriormente), o que valida o modelo utilizado. Vale ressaltar que o resultado deste ensaio ficou muito próximo da tensão calculada segundo Hertz. Na Fig. (10) pode-se ver que a pressão máxima do ensaio fica muito próxima da pressão calculada por Gil. Em seu livro, Gil indica que o valor da pressão calculado é o máximo e ele leva em conta a flexão do eixo nos cálculos. Isso pode indicar que ele almeja calcular o valor da pressão já levando em conta a concentração de tensão. Futuros ensaios focados nessa análise podem comprovar, ou rejeitar, a afirmação acima.

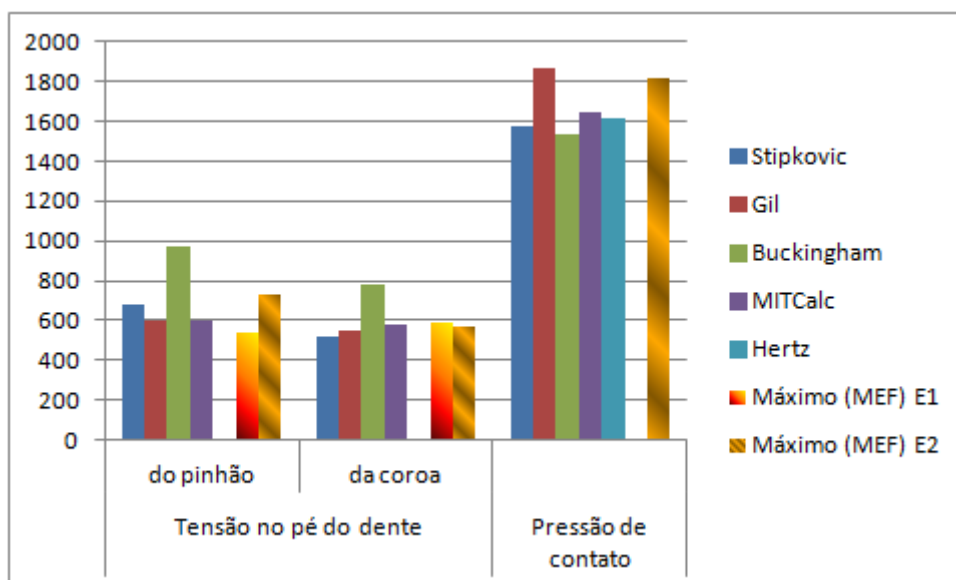


Figura 10 - Valores máximos dos ensaios por MEF comparados com os valores das planilhas

Por fim, será feita a comparação da tensão máxima no interior da engrenagem com o modelo fornecido pelo livro do Norton (2000). Essa é a única referência pesquisada que forneceu as tensões de Hertz no interior dos "cilindros" postos em contato.

O valor de $\sigma_{m\acute{a}x}$ teórico (tensão máxima dentro da engrenagem, medida em MPa) é de 1027 MPa. Utilizando a pressão máxima do ensaio na fórmula, tem-se que: $p_{m\acute{a}x} = 1813MPa$, logo $\sigma_{m\acute{a}x} = 1033MPa$. O valor obtido no ensaio é praticamente igual ao obtido pela teoria, validando, também, esta análise.

Com isso, pode-se afirmar que os três principais objetivos do trabalho foram alcançados:

Fazer um programa que desenhe um dente de engrenagem corretamente, com ângulo de hélice e com deslocamento de perfil (que foi o utilizado no exemplo calculado);

Validar os dois modelos utilizados, que são os definidos nos ensaios 1 (apenas tensão de pé de dente) e 2 (estudo da pressão de contato);

Ganhar confiança no modelo para permitir o seu uso futuro tanto para aplicações práticas, quanto para estudos teóricos (como num mestrado, em que se pode fazer o estudo da flexo-torção no dente).

7. Referências

- Buckingham, E., 1949, "Analytical Mechanics of Gears", Mcgraw-Hill Book Company, Inc, New York - Toronto – London, 546 p.
- Castro, R. M., 2005, "Critério de projeto para engrenagens helicoidais aplicadas em transmissões mecânicas veiculares", São Paulo.
- Gemaque, M. J., 2004, "Abordagem para solução de um problema metrológico na indústria - Medição de engrenagens", Florianópolis.
- Glodez, S., Sraml, M., Kramberger, J., 2002, "A computational model for determination of service life of gears", Maribor.
- Lin, T., Ou, H., Li, R., 2006, "A finite element method for 3D static and dynamic contact/impact analysis of gear drives", Belfast.
- Mao, K., 2006, "Gear tooth contact analysis and its application in the reduction of fatigue wear", Uxbridge.
- Niemann, G., 2002, "Elementos de Máquinas", Ed. Edgard Blucher, Vol. 2, 207 p.
- Norton, L. R., 2000, "Projeto de Máquinas, uma abordagem integrada" Ed. ARTMED EDITORA S. A., São Paulo, 932 p.
- Oliveira, N. C., 1961, "Engrenagens", Ed. Departamento de Livros e Publicações do Grêmio Politécnico, São Paulo, 194 p.
- Silveira, A. R. G., 2011, "Estudo da pressão de contato e da tensão no pé do dente de uma engrenagem", São Paulo, 91 p.
- Stipkovic, M. F., 1978, "Engrenagens: Geometria, dimensionamento, controle, geração", Ed. McGrawHill, São Paulo, 140 p.
- Stipkovic, M. F., 1997, "Parâmetros informativos sobre custos de projeto e fabricação de sistemas engrenados", São Paulo.

8. Direitos autorais

O autor é o único responsável pelo conteúdo do material impresso incluído neste trabalho.

A CONTACT PRESSURE AND GEAR TOOTH ROOT STRESS STUDY

André Rodrigues Garcia da Silveira

andrergsilveira@gmail.com

Abstract. This paper shows a finite element analysis (FEA) of the contact pressure and the gear tooth root stress during engagement in a commercial speed gearbox. This analysis is important because it can be used to study other contact effects, like the torsion-flexion in the gear tooth. To achieve that, firstly several books were read to establish a base of four different theoretical ways to calculate a gear. Afterwards, each one of them were automated in an Excel's sheet, so calculations can be quicker. After that, the profile displacement and helical angle were applied in the sheets. Then, a routine was made (in VBA) connecting the AutoCAD Inventor 2011 with Excel. The last one determines the involutes' geometry and gives it to the Inventor, so it can plot a gear's tooth ready to be used in the Finite Element Analysis. Because several gears will be simulated in this or others papers the program was automated to generate a tooth for any geometry, profile displacement and helical angle. The involute plotted is defined in DIN 3960. At last, a simulation of an engagement using FEA was made and we could conclude that the analysis made is correct.

Keywords. Gears, Materials' Stresses