

# MODELAGEM DINÂMICA DE BICICLETA

**Atila Felipe Onaya**  
atila.onaya@gmail.com

**Resumo.** O propósito deste trabalho de conclusão de curso é a análise dinâmica e vibracional de modelos físicos de bicicleta com o objetivo de determinar parâmetros de projeto, como geometrias e constantes físicas, ideais para determinadas utilidades dadas à bicicleta, podendo assim avaliar conforto e perdas de energia do sistema. O método utilizado tem por base a dedução das equações do movimento do sistema através das leis universais de Newton e de Lagrange, para depois simular numericamente às respostas do sistema para diferentes entradas do piso e também avaliar a sensibilidade do sistema a variação de coeficientes de amortecimento, entre outros parâmetros. O presente artigo apresenta o resultados da simulação de cinco modelos físicos, por meio de gráficos deslocamentos angulares e lineares pelo tempo, e a análise dos resultados obtidos.

**Palavras chave:** bicicleta, dinâmica, vibrações, modelagem, simulação.

## 1. Introdução

No caos das grandes cidades os meios de transporte figuram como questão chave para o convívio social e qualidade de vida da população mundial. Grandes engarrafamentos somados à correria do dia a dia e ao transporte público ineficiente resultam em falta de tempo para praticar esportes e estresse; é nesse cenário que a bicicleta, meio de transporte inventado na Europa no século XIX, se insere como uma alternativa barata ao sedentarismo e a locomoção.

Contudo a bicicleta é ainda tratada como lazer ao invés de meio de transporte efetivo e políticas públicas como construção de vias para circulação são praticamente inexistentes no Brasil, ao contrário do que ocorre em países desenvolvidos, como por exemplo, o Japão, que possui uma vasta rede de ciclovias por todo o país ou a capital alemã Berlin que possui a maior malha com 650 km e ainda a Inglaterra com um sistema central com locação de bicicletas.

Hoje se estima que existam cerca de 1 bilhão de bicicletas pelo mundo, com diversos modelos e fabricantes; o mercado brasileiro é o terceiro no mundo com uma produção anual de 5,5 milhões de unidades e fica atrás somente de dois gigantes, China e Índia, respectivamente primeiro e segundo maiores produtores mundiais.

## 2. Descrição do problema e objetivos

É de conhecimento geral que todos os produtos de engenharia evoluem com os avanços tecnológicos desenvolvidos pela sociedade, como numa espiral de projeto em que o produto tende sempre a ganhar qualidade e desempenho.

Como era de se esperar a bicicleta sofreu muitas modificações desde seu primeiro modelo de madeira, atendendo a novas necessidades e melhor a necessidades antigas. Se antes a locomoção era a principal necessidade a ser atendida pelo veículo em questão, hoje se tem como requisitos a atender também o lazer e competições esportivas. Foi com esse objetivo que as bicicletas atuais adquiriram melhor acabamento, qualidade de materiais, mais segurança e conforto.

Exemplificando os itens anteriores tem-se:

**Materiais :** uso de materiais mais leves e resistentes para estrutura, ligas metálicas e compósitos.

**Fabricação:** uso de processos mais precisos como o de montagem e soldagem, análise auxiliada por softwares.

**Segurança:** desenvolvimento de freios mais confiáveis e o emprego de freios a disco em modelos de alto desempenho e estruturas mais resistentes.

**Conforto:** uso de suspensões que minimizam o impacto sobre o ciclista, bancos anatômicos e reduções maiores que minimizem esforços de pedalo através das relações de velocidade angular e torque.

O problema do conforto pode-se definir dois tipos de conforto, conforto estático e dinâmico, o primeiro esta relacionado à posição do ciclista em relação à bicicleta e esta ligado intrinsecamente a morfologia do usuário e tamanho dos componentes selim, guidão e pedal.

O conforto dinâmico está relacionado diretamente às vibrações provenientes das irregularidades do piso, sejam elas excitações temporárias ou permanentes, assim percebidas pelo ciclista nos pontos de contato com a bicicleta (selim, pedal e guidão).

O deslocamento das rodas dianteira e traseira fazem com que ocorra a deformação dos elementos mecânicos e também a compressão ou tração dos tecidos moles do ciclista, eventualmente se a entrada for muito intensa em relação ao impacto, pode-se ter a solicitação até do esqueleto do usuário, se essas solicitações forem freqüentes podem levar ao stress físico, causando desconforto ou até lesões.

Ainda na literatura por Y.Champoux afirma que para predizermos o conforto podem-se considerar as acelerações dos pontos de contato do usuário com a bicicleta, contudo quando o usuário percebe níveis de aceleração altos ele tende por questão de estabilidade a aplicar mais força sobre o guidão ou diminui a intensidade de pedalo, assim o nível de aceleração diminui. Por essa razão a medida proposta mais condizente com conforto são as forças transmitidas nos pontos de contato.

Considerado o acima exposto, o presente trabalho tem por principal foco o estudo da resposta dinâmica e do conforto apoiado por artigos desenvolvidos sobre o tema, os conceitos utilizados para tal apóiam-se nas disciplinas ministradas, no curso de engenharia mecânica da escola, mecânica geral A e B, modelagem de sistemas dinâmicos,

vibrações e ainda os mais diversos conceitos adquiridos no decorrer do curso, como cálculo numérico, resistência dos materiais e geometria analítica.

## 2.1. Referencias bibliograficas e hipóteses simplificadoras

As hipóteses e modelos a seguir apresentados baseiam-se em dois trabalhos realizados e divulgados nos artigos da revista “vehicle system dynamics”, publicados por Matthias Waechter, Falk Riess e Norbert Zacharias na universidade alemã de Oldenburg em 2002, para modelos com suspensão dianteira e traseira e nos trabalhos de Qichang He, Xiumin Fan e Dengzhe Ma (2005) realizados na escola de engenharia mecânica e energia de Shanghai (modelos sem suspensão). Os modelos físicos podem ser visualizados nas figuras 1 e 2. Comercialmente eles são conhecidos como “full-suspension” e bicicleta rígida comum.

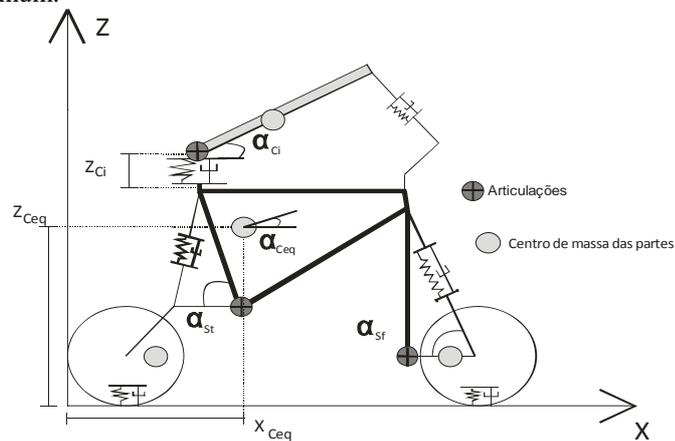


Figura 1: Modelo apresentado por Waechter Et al.

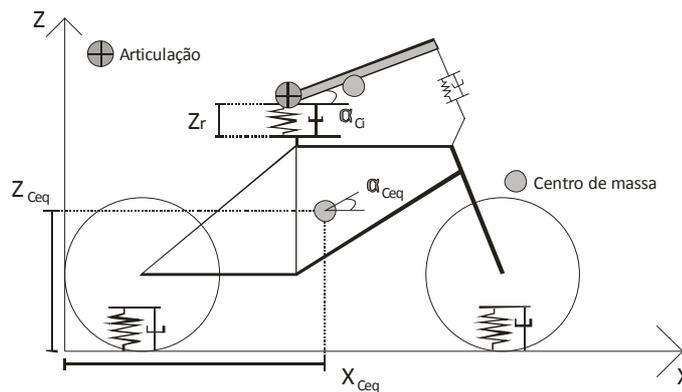


Figura 2: Modelo apresentado por He et al.

Para a modelagem dinâmica os componentes mais relevantes para essa análise são as rodas, quadro, selim, suspensões e garfo, pois esses representam 90% da massa do sistema bicicleta, representam mais amortecimento e elasticidade que os demais. Efeitos de amortecimento e dissipação adicionais de outros componentes que não sejam rodas e amortecedores são desprezíveis. Assim tem-se por hipóteses primárias:

A massa do ciclista representa mais de 80% da massa do sistema, portanto o modelo deve conter o ciclista também.

Os efeitos de amortecimento do ciclista são aproximados pelo conjunto de uma barra articulada no selim e fixa ao conjunto guiador por uma mola e um amortecedor.

O movimento estudado tem por referencial um plano com eixos cartesianos que estão fixos ao quadro.

As vibrações induzidas pelo ato de pedalar não são consideradas.

As forças de arrasto e sustentação devido a fluxos de ar laterais e frontais são desconsideradas nessa análise.

As rodas não perdem contato com o chão.

A posição x do ciclista em relação ao quadro não se altera, apenas a posição vertical z.

As molas e amortecedores não rotacionam.

### 3. Modelos físicos e matematicos

#### 3.1. Modelos físicos

Com base no exposto até o momento e tendo como foco o objetivo maior desse trabalho, que seria o conforto do ciclista, decidiu-se por estudar e comparar cinco modelos. Devido à dificuldade de determinação das equações diferenciais dos modelos encontrados na literatura optou-se por iniciar o estudo por modelos simples começando com dois graus de liberdade, e foi se acrescentado graus de liberdade, até que o modelo se aproxime o melhor possível da realidade, assim chegou-se até 6 graus de liberdade com o modelo com suspensões dianteira e traseira (full suspension).

Nas figuras Abaixo são apresentados os modelos e suas geometrias.

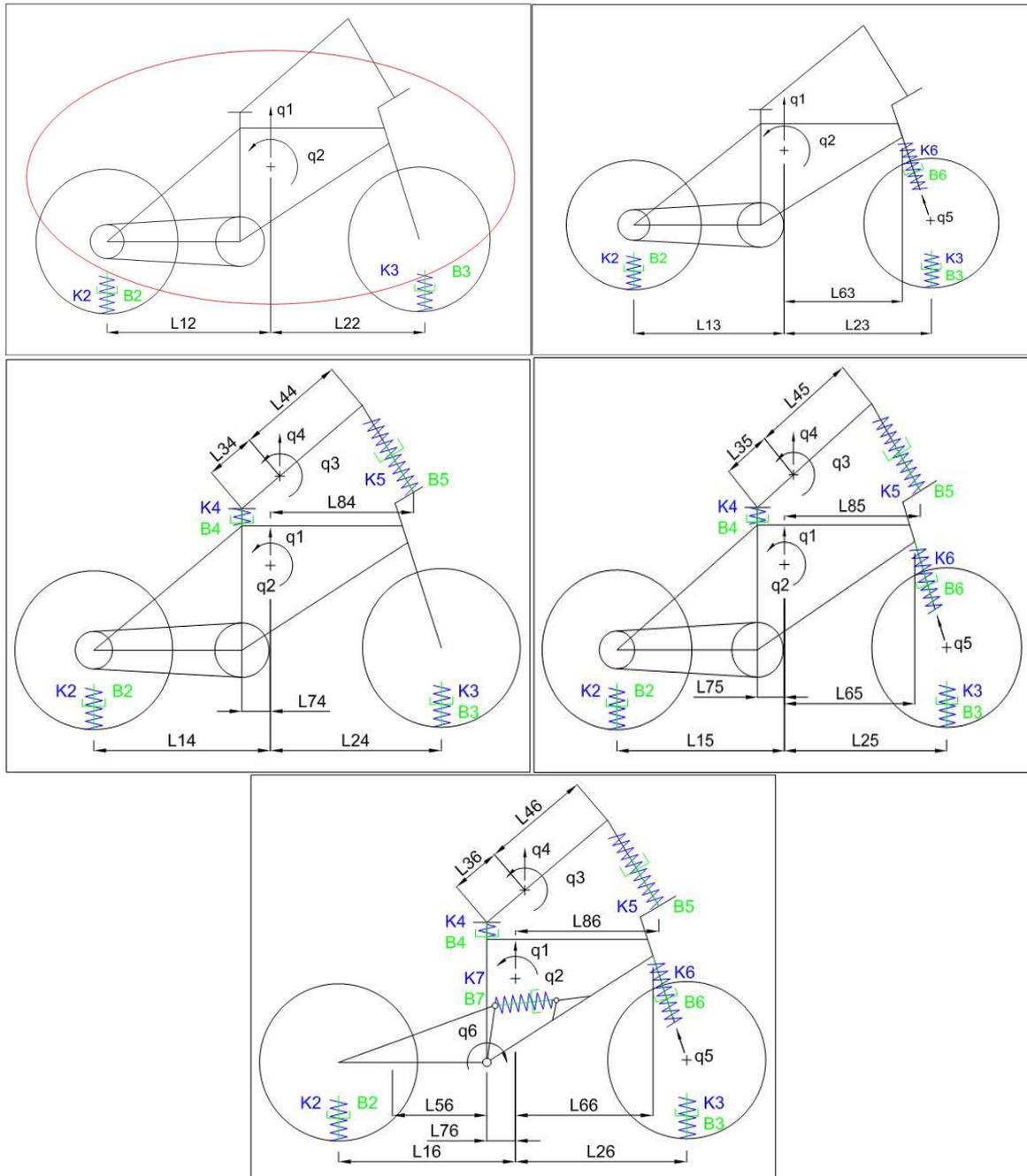


Figura 3: modelos físicos, de dois graus a seis graus de liberdade

O modelo com dois graus de liberdade pode ser visualizado na figura 3, nele o ciclista mais a bicicleta são englobados em uma só inércia e momento de inércia, com duas coordenadas generalizadas  $q_1$  e  $q_2$ , a primeira representa o movimento linear vertical do sistema e a segunda o movimento angular de pitch do mesmo. O amortecimento é representado pelos conjuntos mola amortecedor dianteiro e traseiro, respectivamente conjunto 2 e 3, as distâncias dos conjuntos mola e amortecedor ao centro de massa do sistema são representados também, sendo  $L_{12}$  e  $L_{22}$ , o segundo índice representa o modelo, pois essas distâncias serão alteradas no próximos modelos. Esse modelo

pode ser considerado como uma simplificação do modelo criado por Qichang He et al e pode ser encontrado facilmente em livros didáticos de simulação dinâmica.

O modelo com três graus de liberdade nada mais é do que uma evolução do modelo anterior, onde é acrescentada a massa suspensa da roda dianteira e um amortecimento do garfo, representado pela mola e amortecedor k6 e b6. Além disso o centro de massa da parte do sistema de maior massa desloca-se para esquerda e seu momento de inércia se reduz.

O sistema com quatro graus de liberdade o sistema é dividido em dois (ciclista e bicicleta) e adicionando mais dois conjuntos mola amortecedor representado na figura como o amortecimento do braço do ciclista 5 e o amortecimento entre o ciclista e o banco 4 (modelo de Qichang He), esse modelo seria uma evolução do modelo com 2 graus de liberdade, por consequência pode-se inferir conclusões a cerca da influência do ciclista sobre os modelos. Assim o modelo matemático ganha mais duas equações diferenciais representadas pelo movimento linear da massa do ciclista q4 e pelo movimento angular do ciclista em relação à articulação no selim q3.

O modelo com cinco graus de liberdade é obtido adicionando a suspensão dianteira na bicicleta e a massa suspensa da roda dianteira. Essa mesma passagem foi realizada do modelo dois para três. Por fim o modelo 6 representa uma bicicleta com suspensões dianteira e traseira, onde pode se notar a divisão do quadro da bicicleta em dois triângulos articulados, com o grau de liberdade angular q6 entre eles.

### 3.2. Modelagem matemática

A modelagem matemática dos sistemas foi feita das equações de Newton para sistemas com até 2, 3 e 5 graus de liberdade e as equações de Lagrange para o sistema com 4 e 6 graus de liberdade, como o modelo de bicicleta mais comum é o rígido a seguir é apresentado as equações do modelo 4.

$$T = \frac{m_{24} \cdot \dot{q}_1^2}{2} + \frac{I_{14} \cdot \dot{q}_2^2}{2} + \frac{I_{14} \cdot \dot{q}_3^2}{2} + \frac{M_{14} \cdot \dot{q}_4^2}{2}$$

$$D = \frac{b_5 \cdot (\dot{q}_4 + (l_{44} + l_{34}) \cdot \sin[\dot{q}_3] - \dot{q}_1 - l_{34} \cdot \sin[\dot{q}_2])^2}{2}$$

$$+ \frac{b_4 \cdot (\dot{q}_4 - (l_{44} + l_{34}) \cdot \sin[\dot{q}_3] - \dot{q}_1 + l_{34} \cdot \sin[\dot{q}_2])^2}{2}$$

$$+ \frac{b_3 \cdot (\dot{q}_1 + l_{24} \cdot \sin[\dot{q}_2] - \dot{u}(t))^2}{2} + \frac{b_2 \cdot (\dot{q}_1 - l_{14} \cdot \sin[\dot{q}_2] - \dot{u}(t - t'))^2}{2}$$

$$V = \frac{k_5 \cdot ((l_{34} + l_{44}) \cdot \sin[q_3] + q_4 - q_1 - l_{34} \cdot \sin[q_2])^2}{2}$$

$$+ \frac{k_4 \cdot ((l_{24} + l_{44}) \cdot \sin[q_2] - q_4 - q_1 + l_{34} \cdot \sin[q_2])^2}{2}$$

$$+ \frac{k_3 \cdot (q_1 + l_{24} \cdot \sin[q_2] - u(t))^2}{2} + \frac{k_2 \cdot (q_1 - l_{14} \cdot \sin[q_2] - u(t - t'))^2}{2}$$

Aplicando a equação de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

$$l_{24} \cdot \ddot{q}_2 - k_2 \cdot l_{24} \cdot \cos[q_2] \cdot (q_1 - l_{14} \cdot \sin[q_2] - u(t - t'))$$

$$+ k_3 \cdot l_{24} \cdot \cos[q_2] \cdot (q_1 + l_{24} \cdot \sin[q_2] - u(t))$$

$$+ k_4 \cdot l_{74} \cdot \cos[q_2] \cdot (-q_1 + q_4 + l_{74} \cdot \sin[q_2] - (l_{34} + l_{44}) \cdot \sin[q_3])$$

$$- k_5 \cdot l_{34} \cdot \cos[q_2] \cdot (-q_1 + q_4 - l_{24} \cdot \sin[q_2] + (l_{34} + l_{44}) \cdot \sin[q_3])$$

$$- b_2 \cdot l_{24} \cdot \cos[\dot{q}_2] \cdot (\dot{q}_1 - l_{14} \cdot \sin[\dot{q}_2] - \dot{u}(t - t'))$$

$$+ b_3 \cdot l_{24} \cdot \cos[\dot{q}_2] \cdot (\dot{q}_1 + l_{24} \cdot \sin[\dot{q}_2] - \dot{u}(t))$$

$$+ b_4 \cdot l_{74} \cdot \cos[\dot{q}_2] \cdot (-\dot{q}_1 + \dot{q}_4 + l_{74} \cdot \sin[\dot{q}_2] - (l_{34} + l_{44}) \cdot \sin[\dot{q}_3])$$

$$- b_5 \cdot l_{34} \cdot \cos[\dot{q}_2] \cdot (-\dot{q}_1 + \dot{q}_4 - l_{24} \cdot \sin[\dot{q}_2] + (l_{34} + l_{44}) \cdot \sin[\dot{q}_3]) = 0$$

$$m_{14} \cdot \ddot{q}_1 + k_2 \cdot (q_1 - l_{14} \cdot \sin[q_2] - u(t - t')) + k_3 \cdot (q_1 + l_{24} \cdot \sin[q_2] - u(t))$$

$$- k_4 \cdot (q_4 - (l_{44} + l_{34}) \cdot \sin[q_3] - q_1 + l_{74} \cdot \sin[q_2])$$

$$- k_5 \cdot (q_4 + (l_{34} + l_{44}) \cdot \sin[q_3] - q_1 - l_{24} \cdot \sin[q_2]) - b_4 \cdot (l_{74} \cdot \sin[\dot{q}_2]$$

$$- (l_{34} + l_{44}) \cdot \sin[\dot{q}_3] - \dot{q}_1 \cdot \ddot{u} + \dot{q}_4 \cdot \ddot{u}) - b_5 \cdot (-l_{24} \cdot \sin[\dot{q}_2] + (l_{34} + l_{44}) \cdot \sin[\dot{q}_3]$$

$$- \dot{q}_1 + \dot{q}_4) + b_2 \cdot (\dot{q}_1 - l_{14} \cdot \sin[\dot{q}_2] - \dot{u}(t - t')) + b_3 \cdot (\dot{q}_1 + l_{24} \cdot \sin[\dot{q}_2]$$

$$- \dot{u}(t)) = 0$$

$$\begin{aligned}
& J_{24} \cdot \ddot{q}_2 - k_4 \cdot (l_{24} + l_{44}) \cdot \cos[q_2] \cdot (-q_1 + q_4 + l_{24} \cdot \sin[q_2] - (l_{24} + l_{44}) \cdot \sin[q_2]) \\
& + k_5 \cdot (l_{34} + l_{44}) \cdot \cos[q_2] \cdot (-q_1 + q_4 - l_{34} \cdot \sin[q_2] + (l_{34} + l_{44}) \cdot \sin[q_2]) \\
& - h_4 \cdot (l_{34} + l_{44}) \cdot \cos[q_2] \cdot (-\dot{q}_1 + \dot{q}_4 + l_{34} \cdot \sin[q_2] - (l_{34} + l_{44}) \cdot \sin[q_2]) \\
& + b_5 \cdot (l_{34} + l_{44}) \cdot \cos[q_2] \cdot (-\dot{q}_1 + \dot{q}_4 - l_{34} \cdot \sin[q_2] + (l_{34} + l_{44}) \cdot \sin[q_2]) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& M_{24} \cdot \ddot{q}_4 + k_4 \cdot (-q_1 + q_4 + l_{24} \cdot \sin[q_2] - (l_{24} + l_{44}) \cdot \sin[q_2]) \\
& + k_5 \cdot (-q_1 + q_4 - l_{34} \cdot \sin[q_2] + (l_{34} + l_{44}) \cdot \sin[q_2]) \\
& + b_4 \cdot (-\dot{q}_1 + \dot{q}_4 + l_{24} \cdot \sin[q_2] - (l_{24} + l_{44}) \cdot \sin[q_2]) \\
& + b_5 \cdot (-\dot{q}_1 + \dot{q}_4 - l_{34} \cdot \sin[q_2] + (l_{34} + l_{44}) \cdot \sin[q_2]) = 0
\end{aligned}$$

#### 4. Resultados

Para a simulação do sistema foi considerado entradas do tipo degrau unitário de amplitude de 0.05 m, o que representaria a subida do ciclista em um obstaculo como a guia de uma calçada e impulso unitário que representa a passagem do ciclista por uma pedra por exemplo. A outra entrada simulada foi a em regime permanente, através de degraus aleatórios de amplitude de -0.01 a 0.01 m representando um perfil médio de um asfalto.

Ambos estão representados nas figuras a seguir:

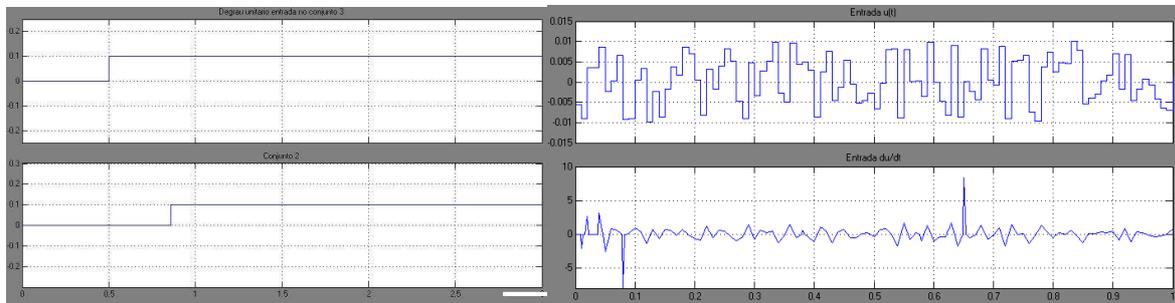


Figura 4: Entrada degrau e entrada aleatória

Nas figuras a seguir são apresentados os resultados mais significativos das simulações:

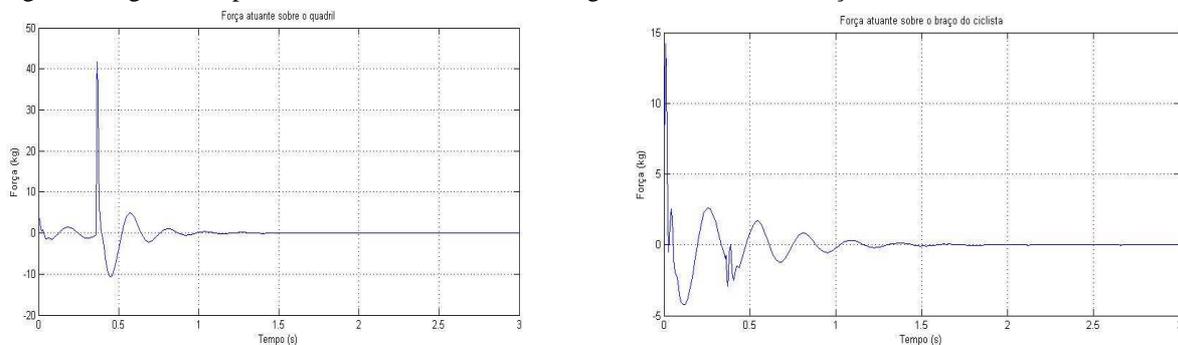


Figura 5: Forças atuantes no quadril e braço do ciclista no modelo rígido 4gl.

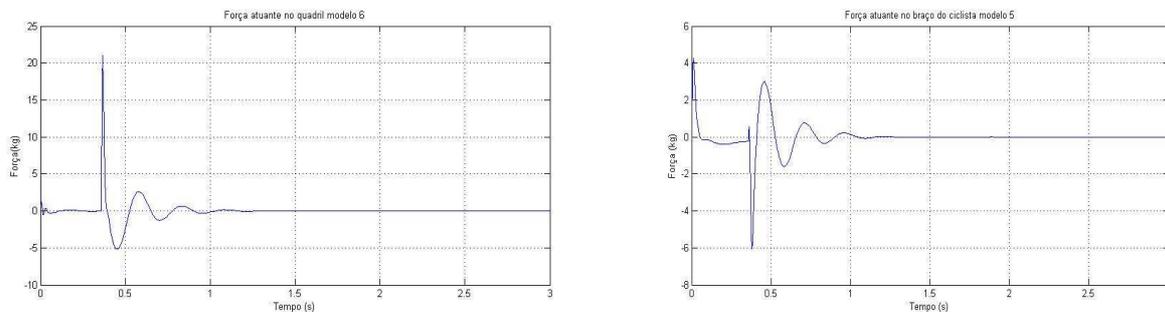
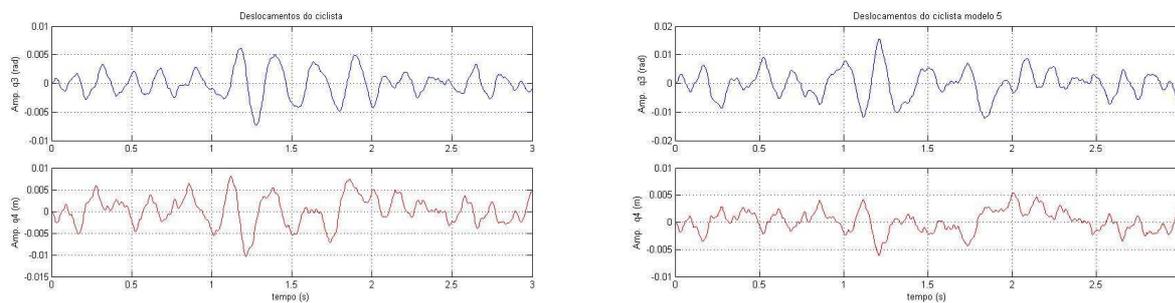


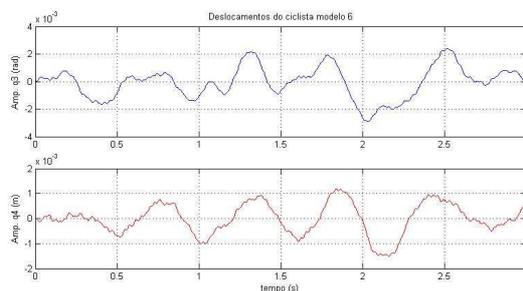
Figura 6: Forças atuantes no quadril e braço do ciclista nos modelos full suspension 6gl e 5 gl.

Comparando os gráficos relativos as forças pode-se inferir que a adição das suspensões dianteira e traseira reduziu significativamente as forças atuantes sobre o quadril e braço do ciclista. Para tal basta analisarmos as amplitudes das respostas apresentadas nos pares de comparação figura 5 com 6.

Soma-se ainda o fato de que a diferença entre os picos representa a defasagem na entrada nas rodas, quando excitadas pelo degrau unitário defasado no tempo.



**Figura 7: Vibrações induzidas no ciclista pelo solo modelos 4 e 5 gl.**



**Figura 8: Vibrações induzidas no ciclista pelo solo modelo 6 gl.**

Pelos gráficos de respostas em regime, percebe-se que a adição de um conjunto amortecedor dianteiro não influenciou significativamente as oscilações do centro de massa do ciclista (comparação na figura 7 modelos 4 e 5 gl), e piorou as oscilações angulares do mesmo.

Fisicamente isso pode ser possível, pois o centro de massa do ciclista encontra-se distante do guidão, e o conjunto a mais diminui a constante elástica equivalente (as molas K5 e K6, praticamente ficam em serie), aumentando assim o movimento de pitch do ciclista.

Opuesto ao resultado anterior a adição de um conjunto amortecedor mola traseiro e dianteiro, provou-se mais eficaz, pois reduziu as amplitudes em 50%, e sua frequência é nitidamente menor (comparação entre as figuras 7 e 8). Fisicamente isso foi possível, pois o momento causado pelo amortecedor traseiro contrabalança o momento do amortecedor dianteiro e o centro de massa este mais próximo do conjunto traseiro fazendo com que o sistema seja mais estável.

## 5. Conclusões

O presente trabalho teve como objetivo a análise do comportamento do ciclista quando este pedala bicicletas do tipo:

- Rígida, sem dispositivos de amortecimento;
- Com amortecimento dianteiro;
- Full suspension.

Para tanto, foi simulado os sistemas bicicleta mais ciclista sujeitos a entradas impulso e degrau unitários para o caso de bicicletas rígidas e com amortecimento dianteiro, e entrada de pista para o caso de bicicletas com amortecimento dianteiro e Full suspension.

As seguintes conclusões foram tomadas da análise dos gráficos:

Da análise das respostas dos modelos, percebe-se que todos apresentam comportamento de sistema de 2º ordem, do tipo massa-mola-amortecedor, resultando na estabilidade de todos os sistemas apresentado;

A hipótese de concentrar a massa do ciclista com a massa da bicicleta superdimensiona a frequência de oscilação do ciclista, quase dobrando esta. Porém, como conclusões válidas do modelo que podem ser tomadas com boa precisão estão a amplitude máxima de oscilação do ângulo de pitch e do deslocamento vertical, a resposta em regime e o tempo até que o sistema entre em equilíbrio.

No que diz respeito à comparação entre os modelo 4 com 5 e 6, nota-se a redução das forças atuantes sobre o braço do ciclista em 70% da amplitude máxima do modelo 4 ( a força reduziu de 15kgf para 5kgf aproximadamente), ao compararmos os modelos 4 e 6 temos uma redução de 50% ( a força sobre o quadril caiu de 40kgf para 20kgf).

A relação entre as amplitudes das forças esperadas sobre o quadril devem ser maiores pois o centro de massa do ciclista encontra-se mais próximo do selim do que do guidão, as simulações mostraram-se coerentes quanto a esse aspecto.

A redução das forças atuantes era esperada, contudo deve-se resaltar que para a perfeita coerência entre a realidade e os modelos deve-se compará-los com dados experimentais

A análise em regime mostrou coerência entre si, mas como citado no item anterior, a necessidade de dados experimentais que sustente o modelo é primordial para a boa prática de engenharia.

## 6. Referências

Associação Brasileira dos Fabricantes de Motocicletas, Ciclomotores, Motonetas, Bicicletas e Similares. Disponível em: <<http://abraciclo.com.br/>> Acesso em: 10 de outubro de 2009.

Waechter, Matthias.; Riess, Falk.; Zacharias, Norbert. A multibody Model for the Simulation of Bicycle Suspension Systems. Journal of Vehicle System Dynamics, vol. 37 2002 No1,pp3-28.

Qinchang, H.; Xiumin, F.; Dengzhe, M. Full Bicycle Dynamic Model for interactive Bicycle Simulator. Journal of Computing and Information Science in Engineering, vol. 5, 2005 Dezembro, ASME.

## 7. Direitos autorais

O autor é o único responsável pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

## MODELING DYNAMICS OF BICYCLE

### Atila Felipe Onaya

Atila.onaya@gmail.com

**Abstract.** The purpose of this final degree project is the dynamical and vibrational analysis of physical models of bicycles, in order to determine design parameters such as geometry and physical constants, trying to reach ideal values for certain utilities given to the bike, in this case, providing technological bases to evaluate comfort and energy losses of the system. The method is based on the deduction of motion equations through the universal Newton laws and Lagrange principles. Then, numerical simulations calculate the system responses to different inputs from the floor, and also, evaluate the sensitivity to variation of damping and elastic coefficients, among other parameters. This article presents results of the simulation of four physical models, using graphs, linear/angular displacements and analysis of results.

**Keywords.** Bicycle, dynamics, vibrations, modeling, simulation.