

O MÉTODO DOS PAINÉIS COM DISTRIBUIÇÃO DE VÓRTICES

Felipe Bezerra de Lima Lopes

felipe.bllopes@gmail.com

Resumo. Este artigo consiste em descrever a implementação do método dos painéis com o objetivo de estudar o comportamento de superfícies de sustentação com base na teoria do escoamento potencial. Para isso, serão realizadas considerações teóricas e equações que descrevem o método em questão. Conhecendo-se os princípios teóricos, o método será aplicado para o caso bidimensional, através de uma rotina computacional, utilizando um aerofólio NACA0012 e, com isso, serão calculadas propriedades como a distribuição do coeficiente de pressão. Em seguida, será feito um estudo inicial da Teoria da Linha da Linha de Sustentação, visando uma posterior comparação dos resultados e validação para o caso 3-D.

Palavras chave: Aerodinâmica, Método dos Painéis, Escoamento Potencial, Distribuição de Vórtices, Linha de Sustentação, Engenharia Mecânica.

1. Introdução

O objetivo do trabalho proposto é o desenvolvimento de uma rotina de simulação computacional para o Método dos Painéis, visando o projeto aerodinâmico de asas. Sendo o Método dos Painéis de fácil implementação, o software necessário para tal rotina será o MatLab, um software comercial, que pode ser utilizado em máquinas consideradas simples, apresentando resultados satisfatórios.

Primeiramente, são feitas considerações teóricas sobre a Teoria da Linha de Sustentação, bem como sua modelagem matemática de modo a torná-la passível de simulação para serem obtidos alguns resultados preliminares que serão utilizados para fins de comparação ao longo do trabalho. Com esses resultados faz-se as análises convenientes para a validação do código e dos resultados obtidos.

Em seguida parte-se para a modelagem matemática do Método dos Painéis, para o caso bidimensional, incompressível. Inicialmente faz-se uma modelagem genérica, para, com a metodologia de simulação correta, introduzir o vórtice como elemento de singularidade e obter, assim, os resultados desejados. Resultados esses que são propriedades do escoamento em torno do aerofólio, tais como sustentação, arrasto, velocidade de downwash, circulação, distribuição de pressão e diferença de pressão.

Após a simulação bidimensional, o método dos painéis será aplicado para o caso tridimensional, utilizando o vórtice ferradura como elemento de singularidade. Os resultados obtidos serão comparados com os resultados adquiridos anteriormente pela Teoria da Linha de Sustentação e, uma vez validados, o método tridimensional será aplicado para outra forma plana de asa.

2. Metodologia

Esta seção trata de todas as etapas de modelagem matemática e das metodologias empregadas nas simulações para a Teoria da Linha de Sustentação e para o Método dos Painéis.

2.1. A Teoria da Linha de Sustentação

Para a utilização do método dos painéis, devemos impor a satisfação das seguintes equações para o escoamento em torno do aerofólio:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1)$$

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad (2)$$

$$\gamma|_{TE} = 0 \quad (3)$$

Onde ϕ é o potencial de velocidades, ψ são as linhas de corrente e $\gamma|_{TE}$ é a circulação no bordo de fuga.

Uma vez que as equações que descrevem um escoamento potencial são lineares, podemos utilizar o princípio da superposição e, assim, pode-se utilizar uma série de escoamentos simples superpostos para o estudo de um escoamento mais complexo. Dessa forma, partindo da superposição do escoamento uniforme caracterizado pela velocidade ao longe com a superposição de vários painéis de fontes, sorvedouros ou vórtices, pode-se, através de cálculos numéricos, gerar a superfície da asa desejada. Com a geometria da asa em mãos, é possível calcular os parâmetros necessários para se avaliar as características da asa e compará-los com os mesmos se parâmetros tivessem sido calculados por teorias clássicas da aerodinâmica, como a Teoria da Linha de Sustentação. Para tal, serão feitas algumas considerações sobre a Teoria da Linha de Sustentação de Asa Finita.

A Teoria da Linha de Sustentação visa representar uma asa finita por uma linha de vórtices (*bound vortex*) como representado na figura 1.

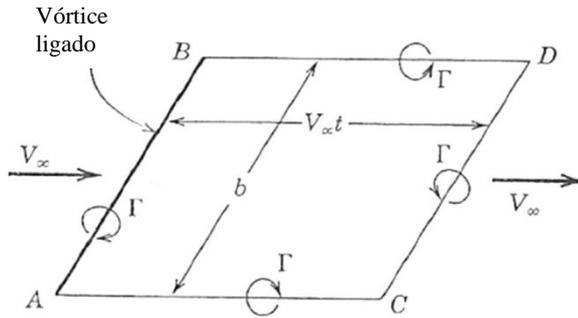


Figura 1: Configuração de vórtices após o início do escoamento ao redor de AB. Adaptado de Kuethe (1986)

Entretanto, pelas leis dos vórtices de Helmholtz (disponível em Kuethe (1986)), sabemos que uma linha de vórtices não pode terminar nas pontas da asa, mas a mesma deve formar um circuito fechado. Assim, é necessária a presença de um vórtice de início de mesma intensidade e sentido oposto no bordo de ataque representado pelo segmento CD. Os segmentos BD e AC são acrescentados para terminar o circuito fechado.

Esta configuração se encontra apenas no início do escoamento. Com o tempo, admitindo uma configuração estacionária, a linha de vórtice de início (CD) se encontrará muito distante da linha de vórtice AB. Assim, a asa assume uma configuração na qual cada seção da mesma possui uma intensidade de circulação variando de zero (na ponta da asa) até um valor máximo (no plano de simetria da asa) e com os vórtices se estendendo até o infinito, como representado na figura 2.

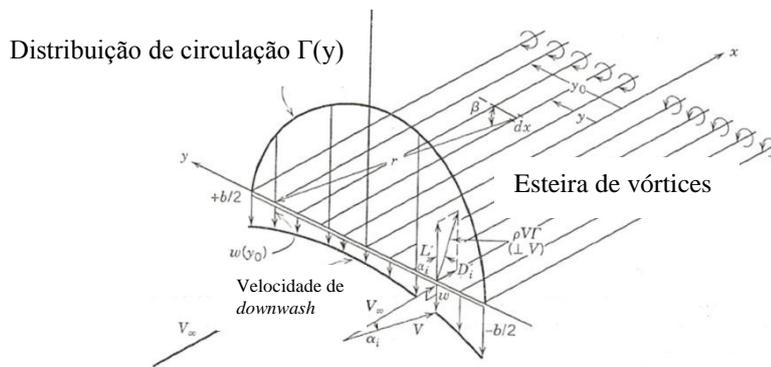


Figura 2: Distribuição de esforços em asa finita. Adaptado de Kuethe (1986)

Devido á diferença de pressão existente entre as superfícies superior e inferior da asa, surgem velocidades denominadas “downwash” (representadas por w), produzindo efeitos como a diminuição da força de sustentação e aumento da força de arrasto.

A velocidade induzida em cada ponto da envergadura, e a velocidade do escoamento ao longe (V_∞) determinam um ângulo de ataque induzido α_i , dado por:

$$\alpha_i(y) = \arctg \left(\frac{w}{V_\infty} \right) \cong \frac{w}{V_\infty} \quad (4)$$

Sendo ρ a densidade do ar Γ a circulação temos, pela lei de Kutta-Joukowski, que a força que atua na linha de vórtice tem intensidade $\rho V \Gamma$ e é normal a V . Assim:

$$L' = \rho V \Gamma \cos \alpha_i \cong \rho V \Gamma \quad (5)$$

E o arrasto induzido fica dado por:

$$D' = -\rho V \Gamma \sin \alpha_i \cong -\rho w \Gamma \quad (6)$$

Utilizando uma distribuição de circulação representada pela série de Fourier abaixo (disponível em Kuethe (1986)) que obedece a condição de Kutta) temos:

$$\Gamma = \frac{1}{2} m_0 c_s V_\infty \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \quad (7)$$

Onde c_s é a corda no plano de simetria da asa, m_0 é a inclinação da curva que descreve a variação do coeficiente de sustentação em função do ângulo de ataque e θ representa a posição ao longo da envergadura segundo a expressão $y = \left(\frac{b}{2}\right) \cos\theta$, sendo b o comprimento da envergadura da asa.

Após manipulações algébricas, disponíveis em Kuethe (1986), chegamos à equação geral que rege a teoria da linha de sustentação:

$$\alpha_a(\theta) = \frac{m_{0s}c_s}{m_0c} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta + \frac{m_{0s}c_s}{4b} \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \quad (8)$$

Assim, para uma dada distribuição de corda, podemos estruturar o equacionamento de forma matricial, onde, a partir de agora, o problema consiste em identificar os coeficientes de Fourier através da resolução do sistema linear abaixo:

$$[C]_{nxn}[A]_{nx1} = [\alpha]_{nx1} \quad (9)$$

Onde:

C: matriz correspondente às parcelas em θ ;

A: matriz dos coeficientes;

α : matriz dos ângulos;

Utilizando esta estruturação, foi aplicada uma rotina computacional que calcula as propriedades de uma asa de geometria elíptica com grande razão de aspecto cujos resultados encontram-se na figura 4.

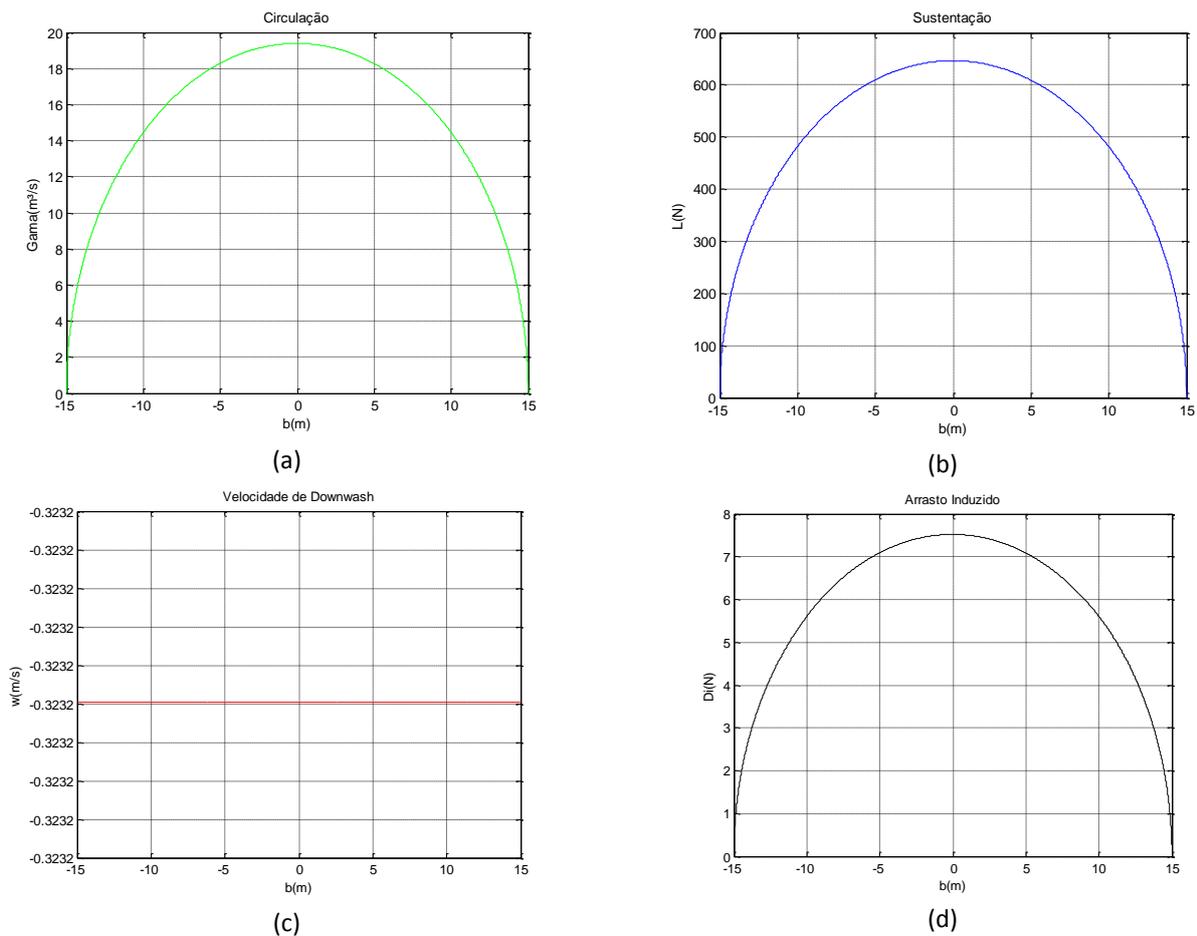


Figura 4. Gráficos das simulações para a Teoria da Linha de Sustentação com asa de perfil elíptico: (a) Distribuição de circulação sobre a asa; (b) Distribuição de sustentação; (c) Distribuição de *downwash*; (d) Distribuição de arrasto induzido.

2.2 Método dos Painéis

Como dito anteriormente, o método dos painéis baseia-se no princípio da superposição, onde se busca uma solução na qual a soma do escoamento ao longe com os escoamentos induzidos pelos painéis de dipolos obedeçam as condições impostas pelas equações (1), (2) e (3).

A implementação do método dos painéis é realizada seguindo uma metodologia que pode ser resumida em seis passos, listados nos itens seguintes.

2.2.1 Escolha do método de singularidade

Nesta etapa do trabalho, é determinado qual o elemento de singularidade irá ser usado e qual será a sua distribuição ao longo de cada painel. Neste trabalho, foram feitas simulações utilizando vórtices concentrados e uma distribuição de vórtices constantes.

2.2.2 Geração da malha

Após a escolha do elemento de singularidade, deve-se escolher a forma como a geometria em estudo será discretizada. No presente trabalho, definiu-se que a geometria será dividida em painéis planos. Junto com a definição dos painéis, que podem ser definidos pelos seus pontos iniciais e finais, é importante a definição dos pontos de controle, que serão os locais onde serão impostas as condições de contorno a serem verificadas.

No caso dos vórtices concentrados, os mesmos serão colocados a um quarto do comprimento do painel, enquanto que os pontos de controle serão colocados a três quartos do comprimento do painel.

Para uma distribuição de vórtices constantes, os pontos de controle serão colocados no centro de cada painel.

2.2.3 Cálculo dos coeficientes de influência

Os coeficientes de influência serão calculados impondo a condição de contorno de Neumann, que afirma que o escoamento na direção normal em cada ponto de controle deve ser nulo.

Para isso, inicialmente, devemos elaborar uma rotina que calcule a velocidade induzida por um dado elemento de singularidade em todos os outros pontos de controle. Para o caso em que foram utilizados vórtices concentrados, temos as seguintes equações, que calculam as velocidades em um ponto (x, z) induzidas por um vórtice discreto de intensidade Γ_j localizado no ponto (x_j, z_j) :

$$\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \frac{\Gamma_j}{2\pi r_j^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_j \\ z - z_j \end{pmatrix} \quad (10)$$

Onde $r_j^2 = (x - x_j)^2 + (z - z_j)^2$.

Já para uma distribuição constante de vórtices, as velocidades induzidas em um ponto (x, z) por um painel com cantos em (x_1, z_1) e (x_2, z_2) e intensidade γ são calculadas da seguinte forma:

$$u_p = \frac{\gamma}{2\pi} \left[\text{atan} \left(\frac{z - z_2}{x - x_2} \right) - \text{atan} \left(\frac{z - z_1}{x - x_1} \right) \right] \quad (11)$$

$$w_p = -\frac{\gamma}{4\pi} \ln \frac{(x - x_1)^2 + (z - z_1)^2}{(x - x_2)^2 + (z - z_2)^2} \quad (12)$$

Entretanto, esta velocidade será calculada segundo o sistema de coordenadas do painel, havendo, dessa forma, a necessidade de uma transformação de coordenadas para o sistema global, como mostra a figura abaixo:

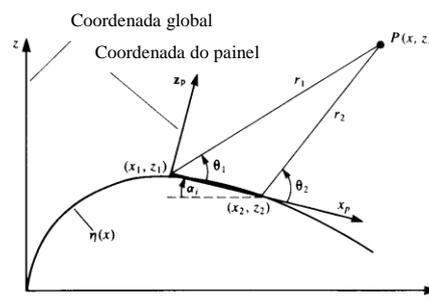


Figura 5: Sistemas de coordenadas utilizados no método dos painéis. Adaptado de Katz (2001)

$$\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_i & \sin\alpha_i \\ -\sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_p \\ w_p \end{pmatrix} \quad (13)$$

Assim, sendo \mathbf{n}_i o versor normal do painel i , os coeficientes de influência podem ser calculados como sendo a velocidade normal induzida por um vórtice de intensidade unitária pertencente ao j -ésimo painel no i -ésimo ponto de controle como segue:

$$a_{ij} = (u, w)_{ij} \cdot \mathbf{n}_i \quad (14)$$

No caso em que utilizamos uma distribuição constante de vórtices, deve ser feita uma modificação na condição de contorno de Neuman com o objetivo de evitar que a velocidade auto-induzida no centro do painel seja nula. Esta modificação consiste no fato de que, no interior do corpo, o escoamento potencial é constante. Assim, temos:

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial n} = \frac{\partial \Phi^*}{\partial l} = 0 \quad (15)$$

2.2.4 Condição de contorno

A condição de contorno de Neuman impõe que a soma de todas as velocidades induzidas em um dado painel seja zero. Assim, no caso dos vórtices concentrados temos, para o i -ésimo painel temos:

$$\sum_j (u, w)_{ij} \cdot \mathbf{n}_i + (U_\infty, W_\infty) \cdot \mathbf{n}_i = 0 \quad (16)$$

Já para uma distribuição constante de vórtices:

$$\sum_j (u, w)_{ij} \cdot \mathbf{t}_i + (U_\infty, W_\infty) \cdot \mathbf{t}_i = 0 \quad (17)$$

Onde \mathbf{t}_i é o versor tangente do painel.

2.2.5 Montagem e resolução do sistema linear

Após o estabelecimento das condições de contorno em todos os painéis, podemos montar um sistema linear no qual as incógnitas são as intensidades dos vórtices. Dessa forma, temos:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} RHS_1 \\ \vdots \\ RHS_N \end{pmatrix} \quad (18)$$

Onde, $RHS_i = -(U_\infty, W_\infty) \cdot \mathbf{t}_i$ (ou $RHS_i = -(U_\infty, W_\infty) \cdot \mathbf{n}_i$ para o caso de vórtices discretos).

Entretanto, no caso de uma distribuição constante de vórtices, devemos substituir uma das equações de impenetrabilidade pela condição de Kutta definida abaixo:

$$\gamma_1 + \gamma_N = 0 \quad (19)$$

2.2.6 Cálculo das pressões

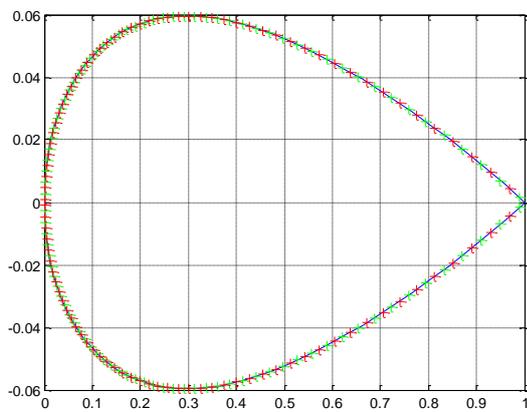
Uma vez conhecidas as intensidades dos vórtices, é possível calcular os coeficientes de pressões nos dorsos superior e inferior conforme as equações:

$$q_{t_i} = \sum_{j=1}^{N+1} (u, w)_{ij} \cdot \mathbf{t}_i \quad (20)$$

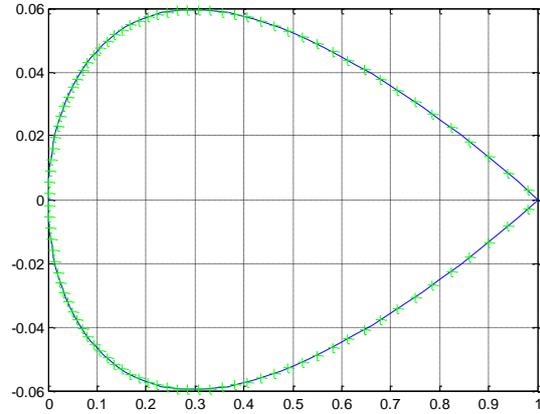
$$C_{p_i} = 1 - \frac{(Q_{t_\infty} + q_{t_i})^2}{Q_{t_\infty}^2} \quad (21)$$

Onde, q_{t_i} e Q_{t_∞} representam, respectivamente, as velocidades tangenciais induzidas no painel i pelos demais painéis, e a velocidade tangencial devido ao escoamento ao longe.

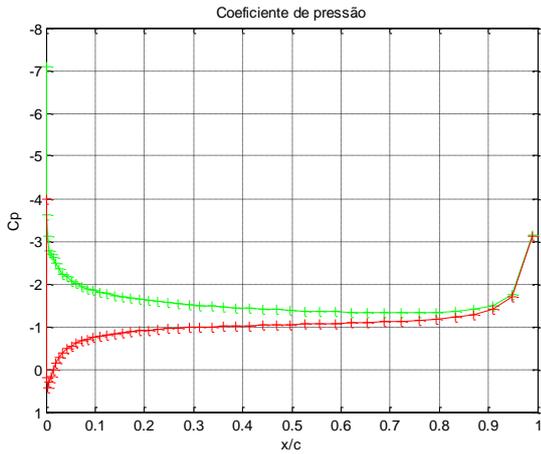
Assim, com a metodologia acima, pode-se reproduzir a seguinte distribuição de pressões para um aerofólio tipo NACA0012 $\alpha = 9^\circ$.



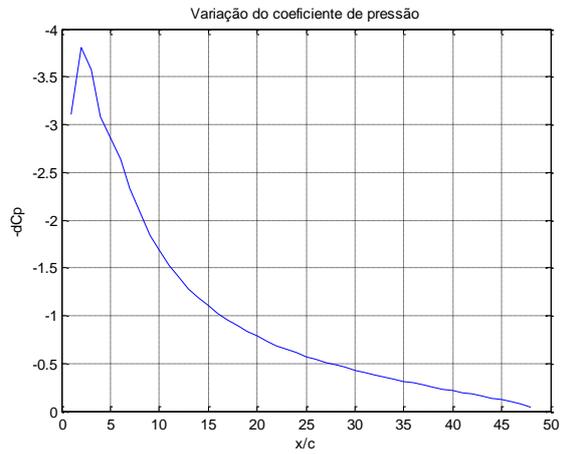
(a)



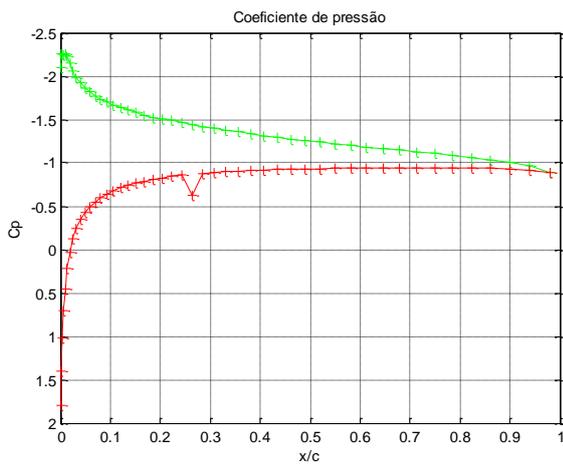
(b)



(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 6: Resultados das simulações executadas: (a) Discretização da geometria com os pontos de vórtices (vermelho) e pontos de controle (verde); (b) Discretização da geometria para painéis de vórtices constantes; (c) Distribuição de coeficientes de pressão utilizando vórtices discretos; (d) Diferença de coeficientes de pressões utilizando vórtices discretos; (e) Distribuição de coeficientes de pressão utilizando vórtices constantes; (f) Diferença de coeficientes de pressões utilizando vórtices constantes.

Uma comprovação dos resultados pode ser realizada através da observação da tendência do valor da diferença do coeficiente de pressão (figura 6) no bordo de fuga.

Sabemos que, como a vorticidade no bordo de fuga deve ser zero, não deve haver força de sustentação nesta região que, por outro lado, pode ser interpretado como a inexistência de diferença de pressão neste ponto. Este resultado pode ser observado na figura 6.

Podemos observar a presença de um ponto deslocado no caso da simulação utilizando painéis de vórtices constantes. Este fato ocorre devido à substituição de uma das equações de impenetrabilidade pela condição de Kutta, sendo o ponto deslocado localizado justamente na posição da equação substituída. Uma possibilidade de correção pode ser executada, a posteriori, através da interpolação linear entre os dois pontos adjacentes ao ponto deslocado.

2.3 Método dos Painéis – Caso Tridimensional

Nessa seção, será apresentado o Método dos Painéis para o caso Tridimensional, no qual foi implementado utilizando o Vórtice Ferradura (*Horseshoe Vortex*) como elemento de singularidade.

2.3.1 Método do Vórtice Ferradura

Esse método utiliza um vórtice ferradura como elemento de singularidade. O vórtice ferradura é composto por um segmento de vórtice para modelar as propriedades de sustentação, e dois vórtices semi-infinitos para modelar a esteira. Nesse caso, deve-se respeitar o Teorema de Helmholtz (segundo Katz, 2001), que afirma que um segmento de vórtice não possa simplesmente terminar no interior de um fluido, mas deve estender-se até a fronteira do sistema ou ainda se fechar formando um anel (vórtice de início). E a intensidade do vórtice deve ser constante por toda a sua extensão. Um modelo de vórtice ferradura está exibido na Fig. (7).

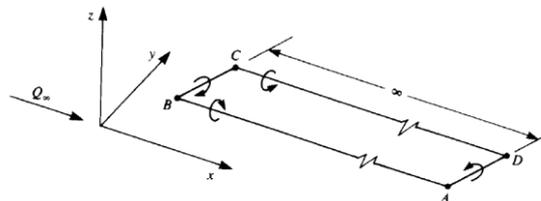


Figura 7. Modelo de vórtice ferradura. Adaptado de Katz (2001)

Para este elemento de singularidade, o segmento causador da sustentação (segmento BC) será posicionado a uma distância de um quarto de corda da asa. O segmento que corresponde ao vórtice de início (segmento DA) deverá ser colocado a uma distância suficiente grande de modo que a sua influência possa ser desprezada. O posicionamento do elemento, bem como o ponto de controle, pode ser visualizado na figura abaixo:

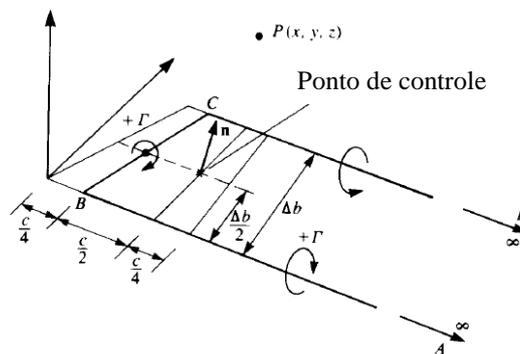


Figura 8. Posicionamento e ponto de controle do vórtice ferradura. Adaptado de Katz (2001)

Dessa forma, podemos calcular as velocidades induzidas por cada segmento de vórtice como uma função dos seus pontos inicial e final e do ponto onde se deseja calcular a velocidade induzida. Assim:

$$(u_1, v_1, w_1) = f(x, y, z, x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B, \Gamma) \quad (22)$$

$$(u_2, v_2, w_2) = f(x, y, z, x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C, \Gamma) \quad (23)$$

$$(u_3, v_3, w_3) = f(x, y, z, x_C, y_C, z_C, x_D, y_D, z_D, \Gamma) \quad (24)$$

Assim, a velocidade induzida pelos três segmentos fica:

$$(u, v, w) = (u_1, v_1, w_1) + (u_2, v_2, w_2) + (u_3, v_3, w_3) \quad (25)$$

E a velocidade de downwash é calculada como:

$$(u, v, w)^* = (u_1, v_1, w_1) + (u_3, v_3, w_3) \quad (26)$$

Com a asa discretizada, pode-se calcular os vetores normais de cada painel, como exibido na figura 9:

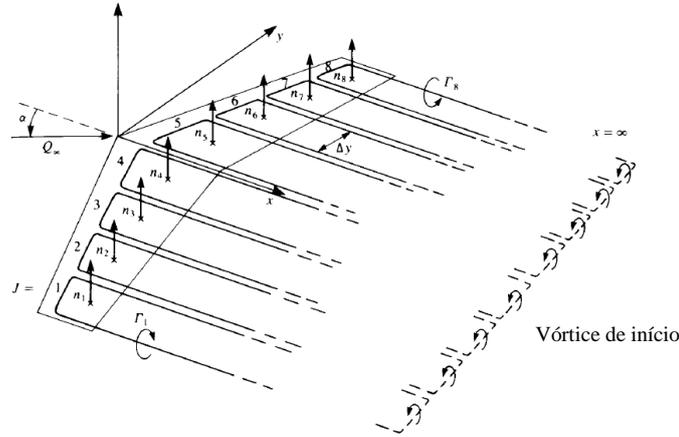


Figura 9. Superfície da asa discretizada com vórtices ferradura. Adaptado de Katz (2001)

Assim, podemos calcular os coeficientes de influência a_{ij} e b_{ij} como sendo a componente normal da velocidade induzida por uma circulação de intensidade unitária localizada no painel j no ponto de controle i . Assim:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= (u, v, w)_{ij} \cdot \mathbf{n}_i \\ b_{ij} &= (u, v, w)_{ij}^* \cdot \mathbf{n}_i \end{aligned} \quad (27)$$

Dessa forma, através da aplicação das condições de contorno em cada painel, podemos estruturar o problema na resolução de um sistema linear com N incógnitas (a circulação em cada painel) e N equações, sendo N o número de painéis. Assim, temos:

$$\begin{aligned} a_{11}\Gamma_1 + a_{12}\Gamma_2 + a_{13}\Gamma_3 + \dots + a_{1N}\Gamma_N &= -(U_\infty, V_\infty, W_\infty) \cdot \mathbf{n}_1 \\ a_{21}\Gamma_1 + a_{22}\Gamma_2 + a_{23}\Gamma_3 + \dots + a_{2N}\Gamma_N &= -(U_\infty, V_\infty, W_\infty) \cdot \mathbf{n}_2 \\ a_{31}\Gamma_1 + a_{32}\Gamma_2 + a_{33}\Gamma_3 + \dots + a_{3N}\Gamma_N &= -(U_\infty, V_\infty, W_\infty) \cdot \mathbf{n}_3 \\ &\vdots \\ a_{N1}\Gamma_1 + a_{N2}\Gamma_2 + a_{N3}\Gamma_3 + \dots + a_{NN}\Gamma_N &= -(U_\infty, V_\infty, W_\infty) \cdot \mathbf{n}_N \end{aligned} \quad (28)$$

Obtendo as circulações de cada painel, podemos calcular os carregamentos da asa como sustentação e arrasto induzido.

$$\begin{aligned} \Delta L_j &= \rho Q_\infty \Gamma_j \Delta y_j \\ \Delta D_j &= -\rho w_{ind_j} \Gamma_j \Delta y_j \end{aligned} \quad (29)$$

Onde w_{ind_i} é a velocidade de *downwash* que pode ser calculada por:

$$w_{ind_i} = \sum_j b_{ij} \Gamma_j \quad (30)$$

2.3.2 Simulações e resultados

Com base na metodologia descrita anteriormente, foi elaborada uma rotina computacional com o objetivo de calcular a circulação, sustentação e arrasto induzido. Inicialmente o método foi comparado com os resultados conhecidos da teoria da linha de sustentação para uma asa elíptica com o objetivo de validar o código. Com a validação dos resultados, pode-se implementar a mesma rotina para outras distribuições de corda. Nas figuras abaixo estão exibidos os resultados para uma asa com distribuições elíptica de corda, bem como a sua comparação com os resultados da teoria da linha de sustentação.

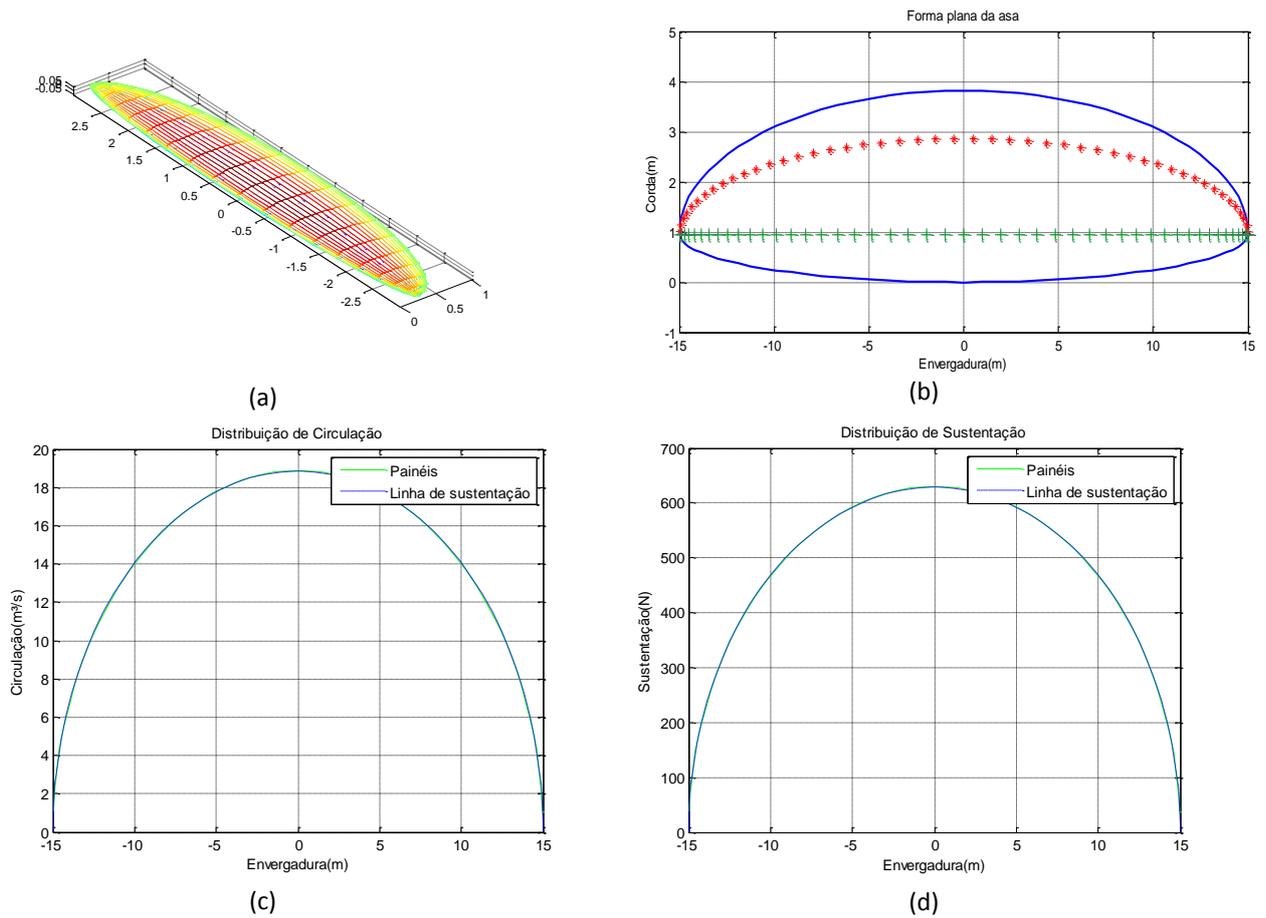
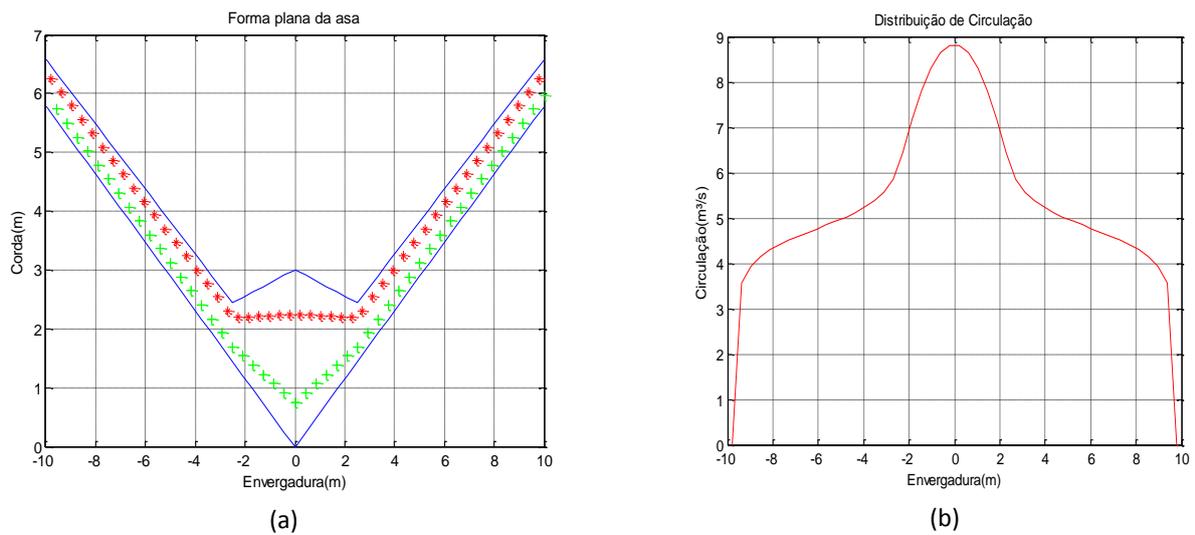


Figura 10. Resultados da simulação para o método do vórtice ferradura. a) Asa com distribuição elíptica de corda e perfil NACA 0012; b) Forma plana da asa, utilizada na simulação; c) Distribuição de circulação; d) Distribuição de sustentação.

Observando os resultados acima, podemos comprovar a proximidade entre os dois métodos. Assim, utilizou-se o método dos painéis para calcular os carregamentos para uma asa trapezoidal com *kink* no centro. A figura 11 mostra os resultados obtidos.



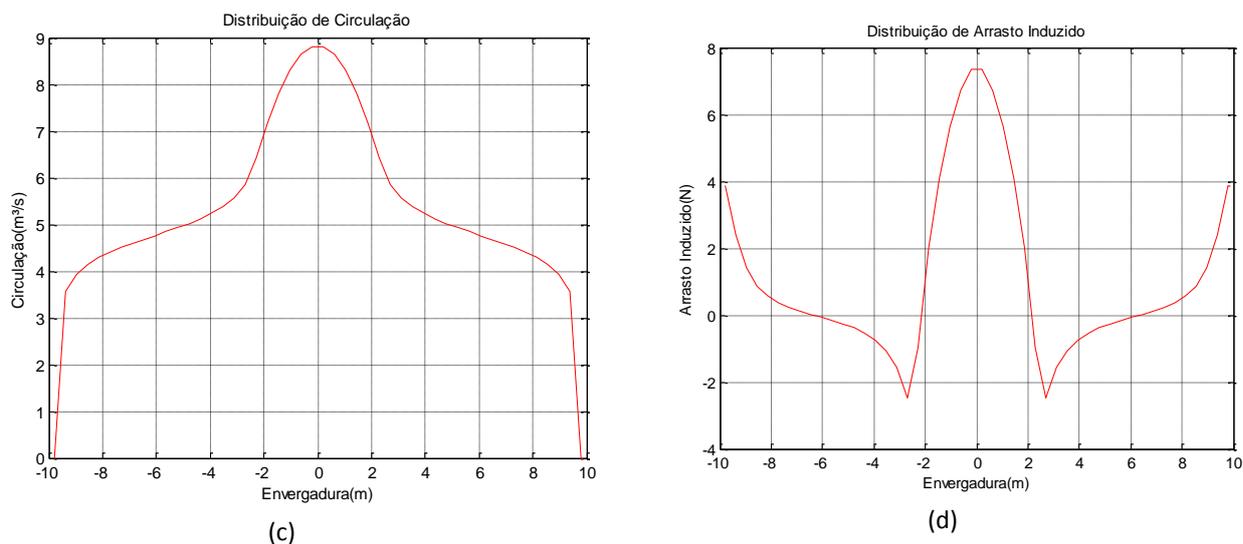


Figura 11. Resultados para asa com enflechamento de 30°; a) Forma plana da asa trapezoidal com *kink* b) Distribuição de circulação c) Distribuição de sustentação d) Distribuição de arrasto induzido.

3. Referências

Anderson, J.D., 1991, "Fundamentals of Aerodynamics" McGraw-Hill
 Katz, J., Plotkin, A., 2001, "Low Speed Aerodynamics", Cambridge Press
 Kuethe, A.M., Chow, C., 1986, "Foundations of Aerodynamics", Wiley
 White, F.M., 2002, "Mecânica dos Fluidos", McGraw-Hill

THE PANELS METHOD WITH VORTEX DISTRIBUTIONS

Felipe Bezerra de Lima Lopes
 felipe.bllopes@gmail.com

Abstract: This article describes the implementation of the panel method with the aim of studying the behavior of airfoils on the basis of the theory of potential flow. The theory behind the method is considered in detail, as well as its equations. Then, the method is applied to the two-dimensional case, for a "NACA0012" airfoil, by using a computational procedure and, therefore, properties such as pressure coefficient will be evaluated. Then, a study of Lifting Line Theory is done in order to have a basis for comparison of the 3-D results.

Keywords: Aerodynamics, Panel Method, Potential Flow, Vortex Distribution, Lifting Line, Mechanical Engineering.