

ANÁLISE DE ESCOAMENTO EM BOCAIS COM TROCA DE CALOR

Ian Sardinha Perez de Moraes

iansardinha@gmail.com

***Resumo.** Muitos sistemas térmicos utilizados em diversas áreas empregam um fluido compressível (vapor d'água, ar, entre outros) como substância de trabalho. No entanto, a abordagem didática utilizada na maioria dos casos consiste em um escoamento simples, onde apenas um potencial é responsável pelas variações de propriedades do fluido. O propósito deste artigo é apresentar um método prático de resolução numérica para problemas específicos de escoamentos compressíveis e suas combinações, chamados de escoamentos generalizados, de modo que possa ser usado para resolução de diferentes problemas. O método empregado para resolução desses escoamentos generalizados será o método dos coeficientes de influência, ou fatores de influência juntamente com o método de solução numérica de equações diferenciais de Runge-Kutta.*

Palavras chave: Engenharia Mecânica, Termodinâmica de Fluidos, Escoamentos Generalizados, Dinâmica de Fluidos.

1. Introdução

Na abordagem de escoamentos generalizados é comum utilizar o método de coeficientes de influência, onde aplicamos equações de balanço para tubos de correntes infinitesimais, tais como: conservação de massa, de quantidade de movimento e de energia. Podem-se incluir efeitos simultâneos tais como: variação de área, atrito, arrasto, troca de calor e adição ou retirada de massa.

Neste trabalho, será dado enfoque à abordagem de escoamentos onde há troca de calor e variação de área para o desenvolvimento de uma planilha de cálculo. Porém, para explicar e aplicar o método desenvolvendo os conceitos teóricos de dinâmica de escoamentos compressíveis, um problema específico será proposto de maneira que englobe a composição desses escoamentos simples e sua resolução será feita utilizando o método de coeficientes de influência utilizando a planilha de cálculo desenvolvida, permitindo a determinação das propriedades do escoamento nas seções de entrada e saída e a comparação entre diferentes situações.

2. Metodologia

A análise de escoamentos generalizados está baseada nos mesmos princípios fundamentais da Dinâmica dos Fluidos ou Termodinâmica, ou seja:

1. Conservação de massa;
2. Conservação de energia;
3. Conservação da quantidade de movimento.

Além disso, quando aplicamos esses princípios para a solução de problemas específicos, também deve se conhecer algumas propriedades do fluido. Pode-se encontrar uma introdução aos conceitos fundamentais para iniciar essa análise em Shapiro et al (1953). Para um aprofundamento nos conceitos e nas deduções que serão apresentadas, bem como exemplos de aplicação, recomenda-se a leitura de Zucrow et al (1977) e Hodge et al (1955).

Como este tipo de análise torna-se muito complexa na abordagem convencional de sistemas, iremos utilizar equações e conceitos adaptados para aplicação em volumes de controle finitos.

Utilizando o volume de controle apresentado na Fig. (1) vamos considerar o escoamento como sendo “quase unidimensional” uma vez que as variações na direção y são desprezíveis para uma posição em x . Isso decorre do fato de que para variações de área, a componente da velocidade em y é desprezível. Assim temos indicações esquemáticas de trabalho de eixo, transferência de calor, adição de massa, entre outras.

Logo, teremos um sistema de oito equações (mostradas a seguir) com doze incógnitas que não possui solução, uma vez que o número de incógnitas do sistema é maior que o número de equações. Particularmente, qualquer definição acrescentada a esse sistema de equações só estará adicionando uma nova incógnita e uma nova equação. O sistema possui solução se quatro das variáveis em questão forem tomadas como conhecidas, enquanto as outras oito permanecem como incógnitas do sistema.

Essas variáveis serão chamadas de potenciais do escoamento, uma vez que são assumidas conhecidas e definem as características das outras oito variáveis do sistema. As incógnitas serão denominadas propriedades do escoamento, já que envolvem alguma propriedade do escoamento unidimensional.

Para que o sistema seja tratável, as variações dos *potenciais do escoamento* devem ser funções da variável x . É apropriado sempre examinar esses potenciais do escoamento para verificar se eles realmente são variáveis necessárias para representar uma situação.

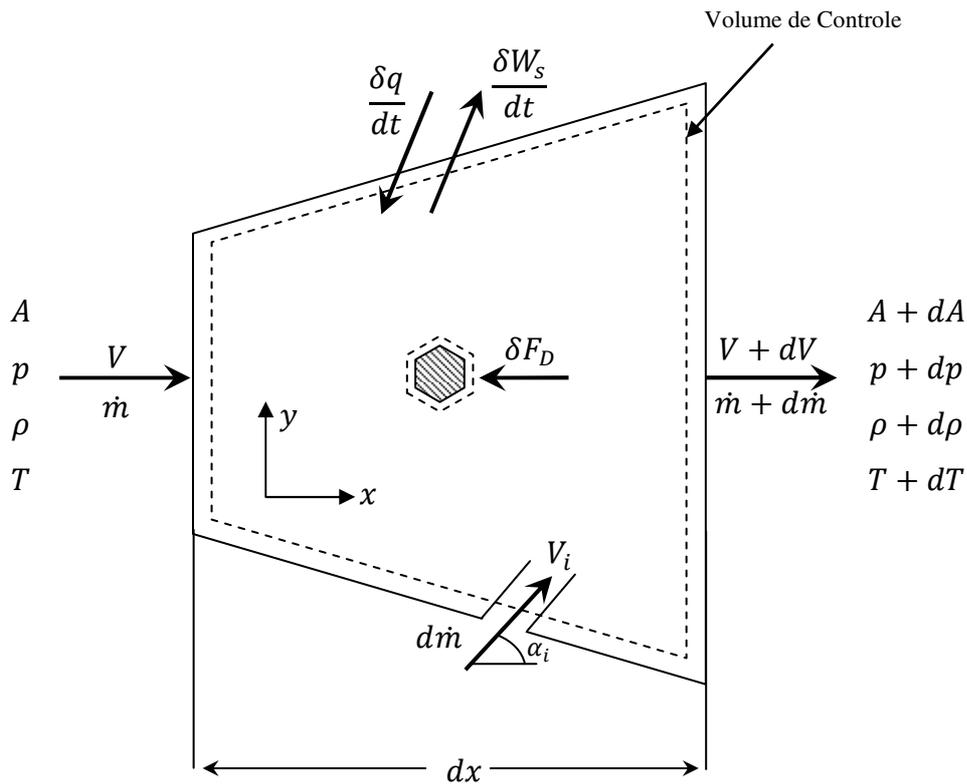


Figura 1 – Esquema de Escoamento Generalizado e Volume de Controle

Como temos um volume de controle diferencial, o resultado da análise será um sistema de equações diferenciais que será a base para o estudo de escoamentos generalizados.

2.1. Equação de Estado

A equação de gás perfeito é dada por:

$$p = \frac{RT}{v} = \rho RT \quad (1)$$

Aplicando o logaritmo natural nessa expressão e diferenciando ambos os lados:

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad (2)$$

2.2. Definição do Número de Mach

Da definição do número de Mach temos:

$$M = \frac{V}{\sqrt{kRT}} \quad (3)$$

Elevando essa igualdade ao quadrado e utilizando o mesmo processo de 2.1 de aplicar o logaritmo natural e diferenciação:

$$\frac{dM^2}{M^2} = 2 \frac{dV}{V} - \frac{dT}{T} \quad (4)$$

Essa equação poderia ter sido expressada em função de M ao invés de M^2 , no entanto, a análise se torna mais fácil utilizando M^2 .

2.3. Conservação da Massa

Como o fluxo de massa é uma variável de interesse para o estudo, a expressão a seguir será usada ao invés da aplicação integral da conservação de massa.

$$\dot{m} = \rho AV \quad (5)$$

Aplicando o logaritmo natural e diferenciando, temos:

$$\frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} \quad (6)$$

2.4. Conservação da Quantidade de Movimento Linear

A componente na direção x da equação integral da conservação de momento linear para uma estado estacionário é dada por:

$$\sum \vec{F} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{Vc} \rho \vec{v} dv + \int_{Sc} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA \quad (7)$$

Além da pressão que atua sobre os limites do volume de controle, considerações são feitas acerca da tensão de cisalhamento (atrito), τ_w , que atua sobre a superfície de área A_w e da força de arrasto dF_D que atua na direção x.

Da Fig. (1) tem-se a injeção de massa, $d\dot{m}$, entrando no volume de controle com velocidade V_i com um ângulo α_i em relação à direção x. Assume-se que o fluido injetado possui os mesmos valores de k e R do fluido principal. Assim, o fluxo momento realizado pela massa injetada, $d\dot{m}$, será $V_i \cos \alpha_i d\dot{m}$. Aplicando a equação apresentada para o volume de controle teremos:

$$pA - (p + dp)(A + dA) + \left(p + \frac{dp}{2}\right) dA - dF_D - \tau_w A_w = (\dot{m} + d\dot{m})(V + dV) - \dot{m}V - V_i \cos \alpha_i d\dot{m} \quad (8)$$

Expandindo os termos e desprezando os termos de ordem dois ou superior envolvendo diferenciais e o termo $d\dot{m}dV$ frente ao termo $\dot{m}dV$:

$$\frac{dp}{p} + \frac{dF_D}{pA} + \frac{\tau_w A_w}{pA} + \frac{\dot{m}}{pA} dV + \frac{V}{pA} d\dot{m} - \frac{V_i \cos \alpha_i d\dot{m}}{pA} = 0 \quad (9)$$

A tensão de cisalhamento na parede devido ao atrito pode ser expressa em função do Fator de atrito de Fanno. Utilizando o coeficiente de atrito de Darcy-Weisbach, o termo envolvendo τ_w fica:

$$\frac{\tau_w A_w}{pA} = \frac{kM^2}{2} \frac{4f}{D_h} dx \quad (10)$$

O diâmetro hidráulico D_h é definido em termos da área transversal A e do perímetro em contato com o fluido P_w , assim:

$$D_h = \frac{4A}{P_w} \quad (11)$$

Sendo a área A_w igual a $P_w dx$ e aplicando a seguinte transformação:

$$\frac{V_i \cos \alpha_i}{V} = r_i \quad (12)$$

Finalmente obtemos a seguinte equação:

$$\frac{dp}{p} + \frac{kM^2}{2} \left(4f \frac{dx}{D_h} + \frac{2dF_D}{kM^2 pA} - 2r_i \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \right) + kM^2 \frac{dV}{V} + kM^2 \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = 0 \quad (13)$$

2.5. Conservação da Energia

A forma integral da equação da conservação da energia para um estado estacionário é:

$$\frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\partial w_s}{\partial t} = \int_{Sc} \rho \left(h + \frac{V^2}{2} \right) (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA \quad (14)$$

Aplicada ao volume de controle da Fig. (1), expandindo os termos e desprezando os termos de ordem dois ou superior envolvendo diferenciais, a Eq. (14) fica reduzida para:

$$\delta Q - \delta W_s - \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \left(h - h_i + \frac{V^2 - V_i^2}{2} \right) = d \left(h + \frac{V^2}{2} \right) = dh_o \quad (15)$$

Para um gás termicamente perfeito, $dh_o = c_p dT_o$, assim:

$$\frac{\delta Q - \delta W_s - \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \left(h - h_i + \frac{V^2 - V_i^2}{2} \right)}{c_p T_o} = \frac{dT_o}{T_o} \quad (16)$$

Dessa equação podemos concluir que a combinação de diferentes efeitos de transferência de calor, trabalho de eixo e mudança de entalpia associada à injeção de massa, são equivalentes à variação da temperatura de estagnação. Logo podemos usar esta ao invés de cada contribuição individual através da relação entre temperatura estática e temperatura de estagnação, expressa na Eq. (16):

$$\frac{dT_o}{T_o} = \frac{dT}{T} + \frac{\frac{k-1}{2} M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \frac{dM^2}{M^2} \quad (17)$$

2.6. Função Impulso

A função impulso é definida como:

$$I = pA + \dot{m}V = pA(1 + kM^2) \quad (18)$$

Aplicando o logaritmo natural e diferenciando, temos:

$$\frac{dI}{I} = \frac{dp}{p} + \frac{dA}{A} + \frac{kM^2}{1 + kM^2} \frac{dM^2}{M^2} \quad (20)$$

2.7. Pressão de Estagnação

A relação entre a pressão estática e a pressão de estagnação é:

$$p_o = p \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (21)$$

Que pode ser escrita como:

$$\frac{dp_o}{p_o} = \frac{dp}{p} + \frac{\frac{1}{2} k M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \frac{dM^2}{M^2} \quad (22)$$

2.8. Entropia

Temos a seguinte expressão para a variação de entropia de um processo (segunda lei da termodinâmica):

$$\frac{ds}{c_p} = \frac{dT}{T} - \frac{k-1}{k} \frac{dp}{p} \quad (23)$$

Portanto, desenvolvemos oito equações, que compõem um sistema de equações diferenciais. Os potenciais do escoamento serão definidos como:

$$\begin{aligned} dA/A & & d\dot{m}/\dot{m} \\ dT_o/T_o & & 4f dx/D_h + 2dF_D/kM^2 pA \end{aligned}$$

A variável A , ou $A(x)$, define a distribuição da área transversal, conhecida a partir da forma do duto. A variável \dot{m} , ou $\dot{m}(x)$, contabiliza qualquer adição de massa e é conhecida se fluxo de massa for uma função de x definida. Já a variável T_o , ou $T_o(x)$, nos mostra variações na temperatura de estagnação, que como mencionado anteriormente podem ser resultado da transferência de calor, trabalho de eixo ou injeção de massa. A última variável, $4f dx/D_h + 2dF_D/kM^2 pA$, caracteriza o atrito ($4f dx/D_h$) e/ou arrasto ($2dF_D/kM^2 pA$). O atrito nas paredes é uma função de f , que pode ser escrita como $f(x)$. Objetos colocados no fluxo do escoamento podem resultar em arrasto adicional que é contabilizado pelo termo F_D . Para as situações de interesse abordadas nessa análise vamos considerar o atrito de parede como sendo o único termo produtor de arrasto.

Cabe ressaltar que outras escolhas poderiam ter sido feitas para os potenciais do escoamento, porém para os fins de análise que será feita adiante estes são os tradicionalmente utilizados.

Dispondo o sistema de equações na forma matricial e realizando procedimento algébrico de inversão de matrizes, podemos resolver o sistema simbolicamente obtendo oito equações diferenciais, uma para cada propriedade desconhecida do escoamento, expressa em termos dos potenciais do escoamento e do número de Mach.

Uma das oito equações diferenciais mais útil é a equação para o número de Mach. A equação diferencial que representa a variação no número de Mach de um escoamento compressível generalizado unidimensional é a solução do sistema de equações diferenciais para dM^2/dx expresso na forma:

$$\frac{1}{M^2} \frac{dM^2}{dx} = -\frac{2\psi}{1-M^2} \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} + \frac{(kM^2+1)\psi}{1-M^2} \frac{1}{T_o} \frac{dT_o}{dx} + \frac{kM^2\psi}{1-M^2} \left(\frac{4f}{D_h} + \frac{2}{kpAM^2} \frac{dF_D}{dx} - 2r_i \frac{1}{\dot{m}} \frac{d\dot{m}}{dx} \right) + \frac{2(kM^2+1)\psi}{1-M^2} \frac{1}{\dot{m}} \frac{d\dot{m}}{dx} \quad (24)$$

Uma vez determinado o número de Mach, é possível determinar todas as propriedades do escoamento, utilizando as equações integrais apresentadas abaixo:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_{o2} \left[1 + \frac{(k-1)M_1^2}{2} \right]}{T_{o1} \left[1 + \frac{(k-1)M_2^2}{2} \right]} \quad (25.1)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\dot{m}_2 A_1 M_1}{\dot{m}_1 A_2 M_2} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \quad (25.2)$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{M_2}{M_1} \sqrt{\frac{kRT_2}{kRT_1}} = \frac{M_2}{M_1} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \quad (25.3)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_2 T_1}{p_1 T_2} \quad (25.4)$$

$$\frac{p_{o2}}{p_{o1}} = \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{T_{o2} T_1}{T_{o1} T_2} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (25.5)$$

$$\frac{\Delta s}{c_p} = \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - \frac{k-1}{k} \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \quad (25.6)$$

É interessante determinar um procedimento para análise de escoamentos generalizados:

1. Estabelecer as condições iniciais. Geralmente, o número de Mach, a velocidade, a massa específica, e as pressões e temperaturas estáticas e de estagnação na entrada.
2. Elaborar os modelos dos potenciais de escoamento presentes e aplicar as simplificações pertinentes na Equação 24.
3. Analisar a equação obtida no passo anterior quanto a presença de pontos sônicos e quanto ao comportamento do escoamento ao longo do comprimento x .
4. Integrar a equação obtida para um passo de integração Δx ao longo do comprimento x de interesse.
5. A partir das relações integrais, Equações 25, determinar as propriedades do escoamento.

Agora, com essa base teórica, podemos introduzir um caso específico de escoamento para aplicarmos o método numérico de solução de equações diferenciais de Runge-Kutta.

3. Escoamento em Bocais com Troca de Calor

Temos que a Equação 24 para este tipo de escoamento fica reduzida a:

$$\frac{dM^2}{M^2} = -\frac{2\psi}{1-M^2} \frac{dA}{A} + \frac{(kM^2+1)\psi}{1-M^2} \frac{dT_o}{T_o} \quad (26)$$

Reescrevendo em termos de dM/dx :

$$\frac{dM}{dx} = \frac{M \cdot \psi}{1-M^2} \left(-\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} + \frac{(kM^2+1)}{2} \cdot \frac{1}{T_o} \frac{dT_o}{dx} \right) \quad (27)$$

Logo, tendo os potenciais do escoamento definidos, é possível utilizar o algoritmo de Runge-Kutta apresentado para determinar o número de Mach em função do comprimento do duto. Em seguida, utilizando as Equações 25 pode-se determinar todas as propriedades do escoamento.

Será adotado que a variação da temperatura de estagnação se dá de forma linear em função do comprimento do duto. Assim temos:

$$T_o(x) = T_{o1} + \alpha x \quad (28)$$

A variação da área será dada em função da variação do diâmetro (perfil) do duto, $D(x)$. Na planilha de cálculos há cinco perfis de duto para o usuário utilizar nas simulações.

Utilizando a planilha desenvolvida: "Escoamento Generalizado.xlsm", vamos resolver um problema e obter a variação das propriedades do escoamento.

Dado um conjunto de condições iniciais, é possível calcular todos os parâmetros necessários para a determinação das propriedades do escoamento.

Vamos supor três sistemas diferentes com:

$$D(x) = \sqrt{2,25 + 0,15(x-3)} \quad (29)$$

$$T_o(x) = T_{o1} - 50x \quad (30)$$

Onde temos três conjuntos de condições iniciais diferentes, de acordo com a Figura 2:

Simulação 1			Simulação 2			Simulação 3		
M_1	0,25		M_1	0,30		M_1	0,35	
V_1	3,17	[m/s]	V_1	3,80	[m/s]	V_1	4,44	[m/s]
T_1	400,00	[K]	T_1	400,00	[K]	T_1	400,00	[K]
T_{o1}	405,00	[K]	T_{o1}	407,20	[K]	T_{o1}	409,80	[K]
P_1	350,00	[kPa]	P_1	350,00	[kPa]	P_1	350,00	[kPa]
P_{o1}	365,55	[kPa]	P_{o1}	372,55	[kPa]	P_{o1}	380,94	[kPa]
ρ_1	3,05	[kg/m³]	ρ_1	3,05	[kg/m³]	ρ_1	3,05	[kg/m³]
k	1,40		k	1,40		k	1,40	
R	0,29	kJ/kg.K	R	0,29	kJ/kg.K	R	0,29	kJ/kg.K

Figura 2 – Condições Iniciais para três simulações

E para os parâmetros de integração:

$$\Delta x = 0,01$$

$$x_{inicial} = 0$$

$$x_{final} = 7$$

Assim, obtemos os seguintes resultados apresentados nos Gráficos abaixo:

Número de Mach

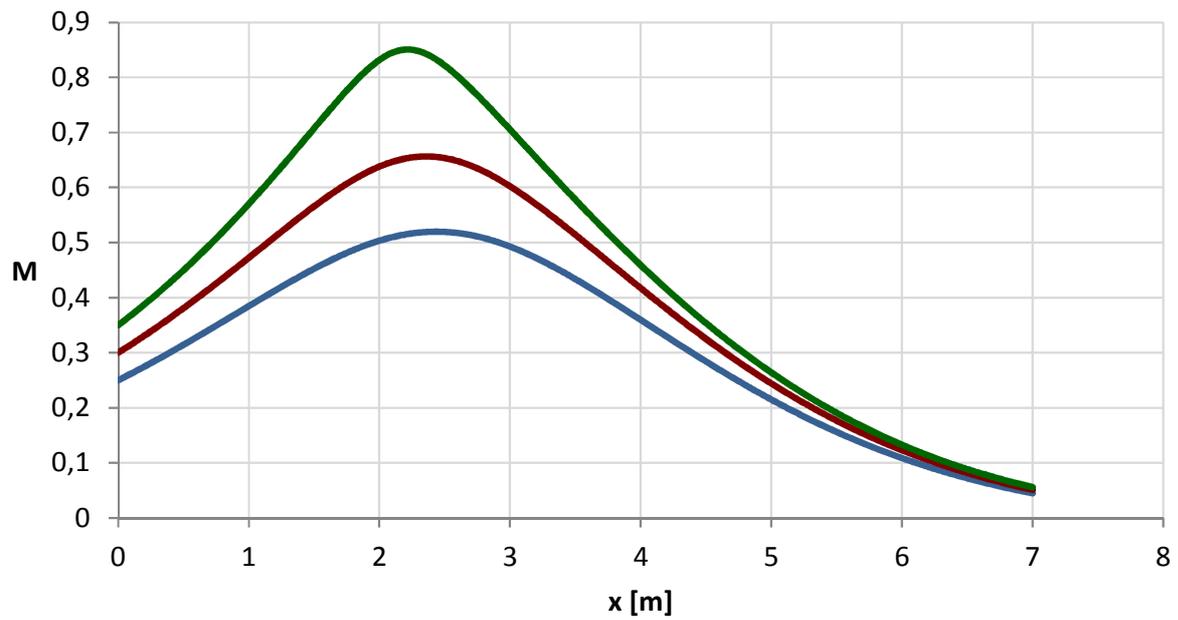


Gráfico 1 – Número de Mach em função do comprimento

Temperatura Estática

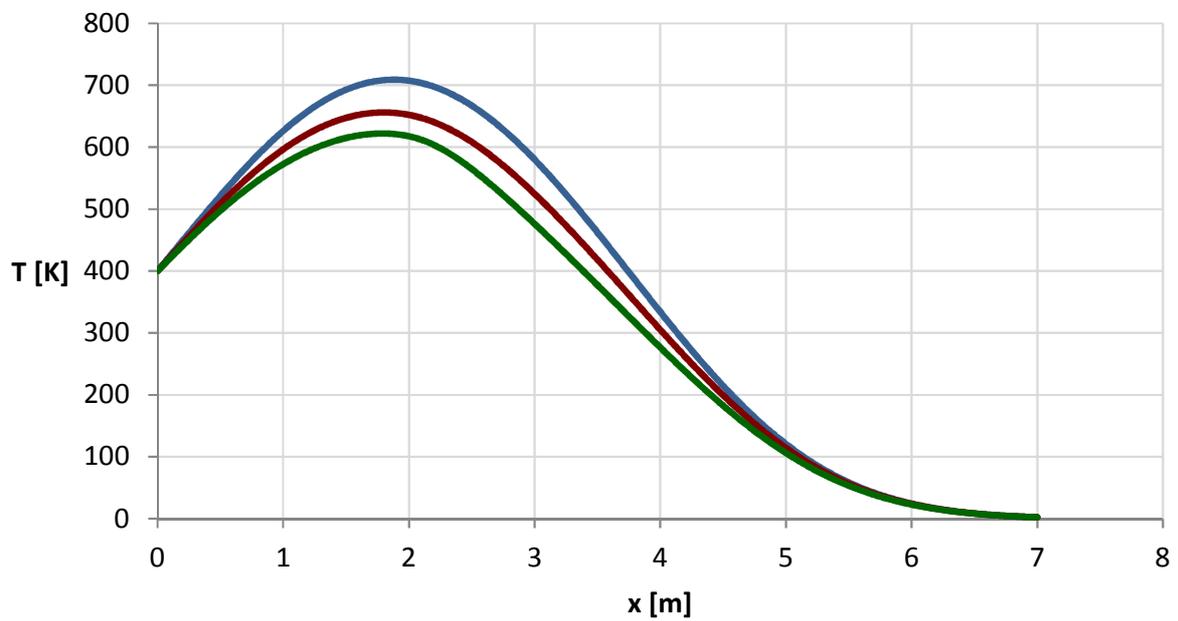


Gráfico 2 – Temperatura Estática em função do comprimento

Pressão Estática

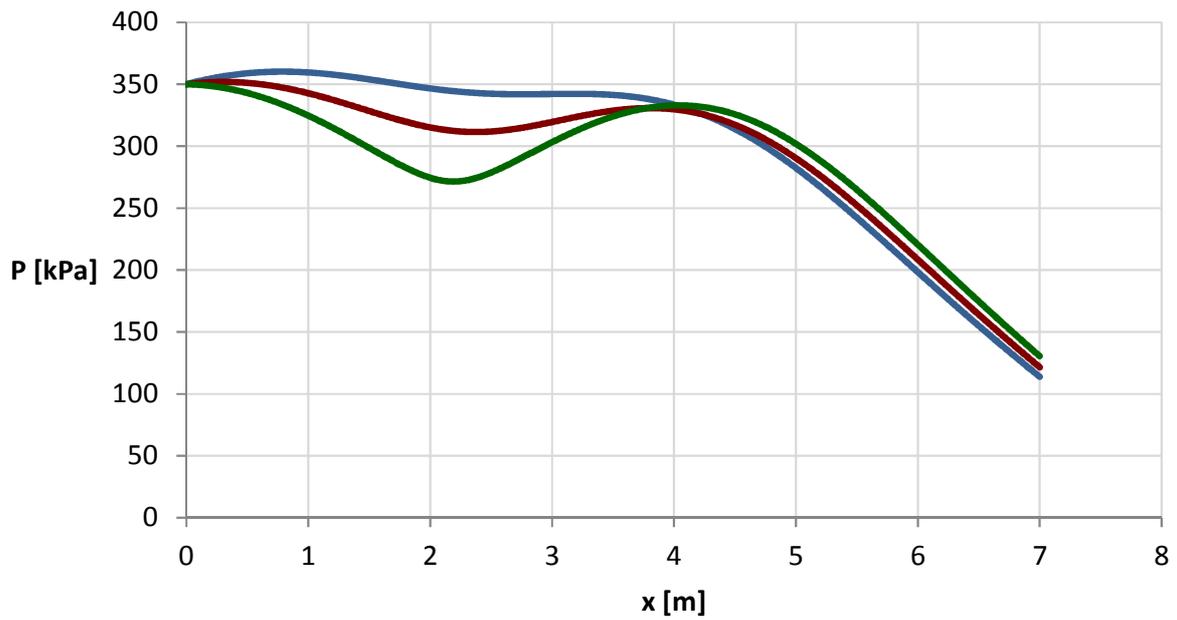


Gráfico 3 – Pressão Estática em função do comprimento

Pressão de Estagnação

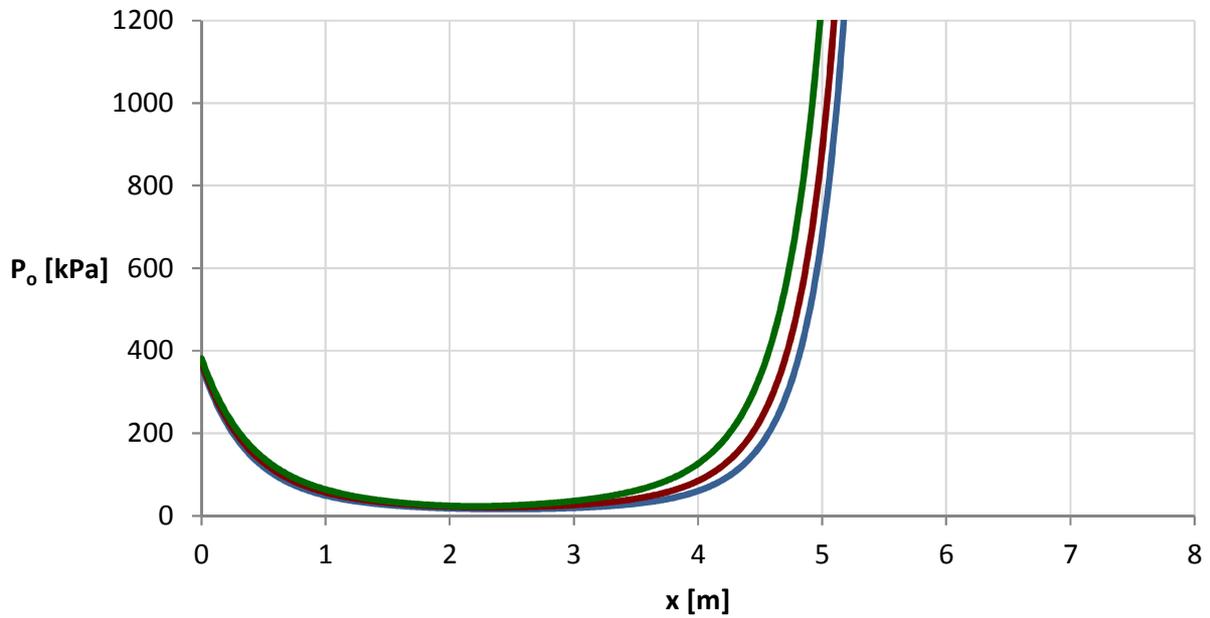


Gráfico 4 – Pressão de Estagnação em função do comprimento

Com isso é possível ao usuário realizar as análises pertinentes a seu interesse, como por exemplo, na Simulação 3, o Número de Mach chega próximo a $M = 1$. Provavelmente para um valor um pouco maior de M_{inicial} , o escoamento alcançaria $M = 1$, atingindo o ponto sônico e bloqueando.

Além disso, como a temperatura estática atinge valores muito baixos, a razão T_1/T_2 fica muito alta, e como a mesma está elevada a $k/(k - 1)$, a pressão de estagnação, dada pela Equação 25.5, tende a valores muito altos com mostrado no Gráfico 4.

É importante ressaltar que a metodologia numérica apresentada não leva em consideração a presença de ponto sônico no escoamento, ou seja, caso o usuário realize uma simulação onde o escoamento alcança o ponto de $M = 1$, os dados obtidos só serão válidos para valores próximos a $M = 1$.

5. Referências

- Hodge, B. K., Koenig, K., 1955, "Compressible Fluid Dynamics", Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall.
Pimenta, M. M. Introdução à dinâmica dos gases. PMC – Termodinâmica do escoamento compressível.
Shapiro, A. H., 1953, "The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow", vol.1, New York, Ronald Press.
Zucrow, M. J., Hoffman, J. D., 1977, "Gas Dynamics", vol. 1, Michigan, Wiley.

ANALYSIS OF FLOW IN NOZZLES WITH HEAT EXCHANGE

Ian Sardinha Perez de Moraes

iansardinha@gmail.com

Abstract. *Many thermal systems used in diverse areas employ a compressible fluid (steam, air, among others) as their working substance. However, the teaching approach used in most cases consists of a simple flow, where only one potential is responsible for changes in fluid properties. The purpose of this paper is to present a practical method of numerical solution to specific problems of compressible flows and their combinations, called generalized flows, so that it can be used to solve different problems. The method for resolving these flows will be the method of generalized coefficients of influence, or influence factors along with the method of numerical solution of differential equations of Runge-Kutta.*

Keywords: *Mechanical Engineering, Thermodynamics of Fluids, Generalized Flows, Fluids Dynamics.*