

OTIMIZAÇÃO DO COMPORTAMENTO VIBRATÓRIO DE UMA ESTRUTURA DE TRELIÇAS VISCO-ELÁSTICAS ATRAVÉS DO MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

Iury Bruno Taricano Marcatto

iurybtm@gmail.com

Resumo. Este trabalho tem por finalidade realizar a otimização da resposta dinâmica de oscilação de uma estrutura após ser submetida à aplicação de um determinado carregamento. Esta estrutura é construída com elementos de treliça visco-elásticos, de modo a favorecer a absorção de vibrações, através da dissipação de energia. A análise estrutural e otimização do sistema analisado será realizada através de softwares comerciais (Matlab, Ansys e ModeFrontier) utilizando-se como ferramenta, o método de otimização topológica.

Palavras chave: Otimização topológica, treliça visco-elástica, treliça, otimização.

1. Introdução

O amortecimento estrutural se caracteriza por um processo de dissipação de energia, que proporciona uma eficiente redução das amplitudes de vibrações de estruturas. Com esta finalidade, sistemas de amortecimento passivos são largamente utilizados em aplicações de engenharia. Em especial, a aplicação de materiais visco-elásticos torna-se interessante, pois produz na prática uma deformação estrutural dependente do tempo, se traduzindo numa decorrente perda de energia (região em vermelho na Fig. 1a).

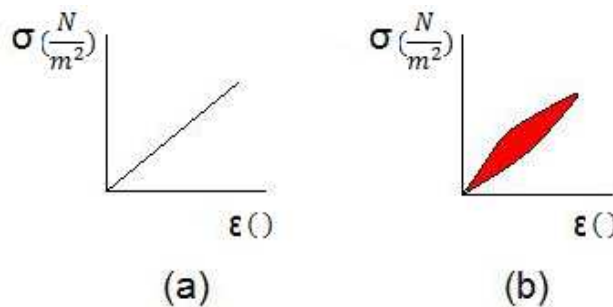


Figura 1. (a) Material elástico linear (b) Material visco-elástico.

Adicionalmente, técnicas de otimização podem ser aplicadas, para que se obtenham estruturas relativamente eficientes, demandando poucos recursos e que satisfaçam condições pré-determinadas de projeto. Especialmente importante neste trabalho, será o Método de Otimização Topológica (MOT). A introdução do MOT no projeto de estruturas, como pode ser visto na Fig. (2), busca a adequação do sistema projetado a restrições construtivas, de segurança, entre outras, de modo que o emprego de material na construção do sistema seja realizado da forma mais eficiente possível, reduzindo custos.

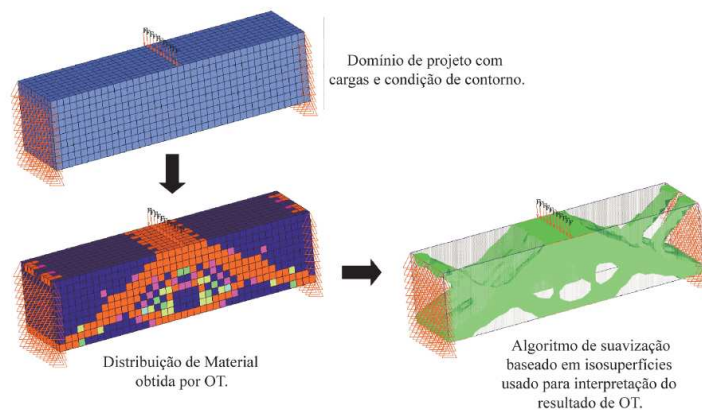


Figura 2. Aplicação do Método de Otimização Topológica para domínio tridimensional.

2. Objetivos

O objetivo deste trabalho é otimizar o comportamento vibratório de uma estrutura de treliças através do uso do método de otimização topológica. Pretende-se desta forma, otimizar o tempo de resposta da estrutura em questão, quando esta é submetida a ação de um determinado carregamento. Com este intuito, serão usados elementos de treliça com comportamento visco-elástico de modo a intensificar a absorção de vibrações pela estrutura.

3. Formulação Teórica

3.1. Modelos de Kelvin-Voigt e Maxwell para viscoelasticidade

Para materiais visco-elásticos, a curva tensão-deformação apresenta uma diminuição de sua inclinação à medida que o material é carregado. Quando o material é descarregado, o comportamento entre as variáveis tensão e deformação percorre um caminho diferente do que quando ele foi carregado. Isto significa que o carregamento e descarregamento do material não é instantâneo, como é admitido para materiais linear-elásticos, e sim, que os materiais visco-elásticos apresentam uma relação entre tensão e deformação dependente do tempo (Fig.1b).

Para a modelagem dos materiais visco-elásticos são normalmente usados modelos que reúnem elementos elásticos (representados por molas) e elementos viscosos (representados por amortecedores). Os modelos mais comuns são (ver Fig. 3):

- modelo de *Kelvin-Voigt* - no qual um elemento de mola é ligado em paralelo com um amortecedor;
- modelo de *Maxwell* – no qual um elemento de mola é ligado em série com um amortecedor.

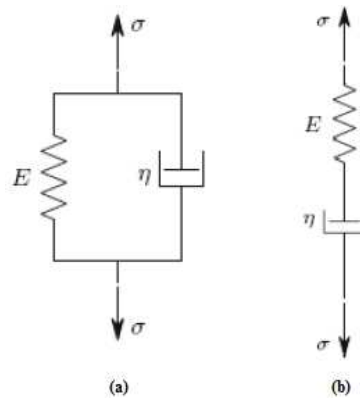


Figura 3. Modelos básicos para descrição de materiais visco-elásticos : (a) Modelo de Kelvin-Voigt (b) Modelo de Maxwell.

O comportamento elástico de um modelo pode se facilmente entendido imaginando-se a ação de uma mola presa por uma extremidade. Quando esta é submetida à ação de uma força F na outra extremidade, produz um deslocamento δ. Como já dito anteriormente, este deslocamento δ aparece instantaneamente à aplicação da força F, ou seja, o carregamento do material devido à força F não depende do tempo. Adicionalmente, a relação entre a força F e o deslocamento δ igual seja durante o carregamento ou descarregamento do material, ou seja, durante o carregamento ou descarregamento de um material elástico linear, a linha reta da Fig. 1(a) é sempre percorrida, seja no sentido ascendente (carregamento) como no descendente (descarregamento). Estes conceitos podem ser igualmente expandidos para diagramas que relacionam as variáveis tensão e deformação.

Em contrapartida, o comportamento viscoso é modelado esquematicamente através de um pistão, que contém um fluido em sua cavidade e que será pressionado pelo êmbolo. O êmbolo apresenta um pequeno orifício que permite a passagem do líquido, à medida que a força P produz um deslocamento do êmbolo para baixo. Desta maneira, pode-se dizer que a força P é proporcional não ao deslocamento do embolo δ e sim à sua taxa de variação $\frac{d\delta}{dt}$. Em termos de tensão e deformação, a seguinte lei constitutiva (Eq. 1) pode ser escrita:

$$\sigma = \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (1)$$

Quando se lida com os efeitos elásticos e viscosos lineares, as leis constitutivas dos modelos de Kelvin-Voigt e de Maxwell podem ser obtidas através da superposição de esforços. Para o modelo de Kelvin-Voigt, que utilizado neste trabalho, pode-se escrever que a tensão total é soma da tensão devida a componente elástica com a tensão devida a componente viscosa (Eq. 2):

$$\sigma = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (2)$$

3.2. Formulação do elemento de treliça visco-elástico

A treliça caracteriza-se por um elemento estrutural que suporta somente esforços normais, sejam eles de tração ou de compressão. Analisando-se um elemento infinitesimal de treliça, a Eq. 4 pode ser obtida através do equilíbrio das forças na direção da barra:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4)$$

onde N descreve a força normal na barra, ρ sua densidade, A sua área transversal e u a coordenada que descreve o deslocamento de cada ponto na direção da barra. Durante todo o presente estudo, foi utilizado para as grandezas, unidades no SI.

Para materiais linear elásticos, a relação entre tensão e deformação é linear e pode ser substituída na Eq.4, sob a hipótese de que a força normal é igualmente distribuída na seção transversal da treliça. Desta forma, obtém-se a equação diferencial (Eq. 5) que descreve o comportamento da coordenada u para o elemento de treliça.

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (5)$$

Utilizando-se o Método de Galerkin na Eq. 5, é possível obter a formulação do elemento de treliça, através da forma fraca da equação diferencial.

$$\int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) N_j dx - \int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} N_j dx = 0 \quad (6)$$

onde N_j são funções de forma. Para elementos de treliça com 2 nós, tem-se $j = 1$ e 2 . Integrando a Eq. 6 por partes, obtém-se:

$$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} N_j dx + \int_0^L EA \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} dx = \left[EA \frac{\partial u}{\partial x} N_j \right]_0^L \quad (7)$$

Pelo método dos elementos finitos, o deslocamento u pode ser reescrito na Eq. 7, utilizando as funções de forma N_i e os deslocamentos nodais u_i (aproximação de Ritz):

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^2 N_i u_i \quad (8)$$

,o que resulta na Eq. 9, onde já é possível a identificação das matrizes de massa e rigidez:

$$\left(\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_0^L \rho A N_i N_j dx \right) \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_0^L EA \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} dx \right) u_i = \left[EA \frac{\partial u}{\partial x} N_j \right]_0^L \quad (9)$$

De forma compacta, a Eq. 9 pode ser escrita como:

$$[M] \{\ddot{u}\} + [K] \{u\} = \{F\} \quad (10)$$

onde $[M]$ é a matriz de massa, $[K]$ a matriz de rigidez e $\{F\}$ o vetor de carregamentos nodais do elemento de treliça. Explicitamente as matrizes de massa e rigidez do elemento de treliça (Eq. 11 e 12) podem ser escritas como:

$$[M] = \rho A \begin{bmatrix} \int_0^L N_1 N_1 dx & \int_0^L N_1 N_2 dx \\ \int_0^L N_2 N_1 dx & \int_0^L N_2 N_2 dx \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$[K] = EA \begin{bmatrix} \int_0^L \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} dx & \int_0^L \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} dx \\ \int_0^L \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} dx & \int_0^L \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} dx \end{bmatrix} \quad (12)$$

Para materiais visco-elásticos, a dedução das matrizes de massa e rigidez pode ser feita de maneira análoga. A única diferença é a presença de um termo adicional de amortecimento, resultante do fato da tensão não ser mais diretamente proporcional à deformação. Neste caso, a relação de dependência entre tensão e deformação pode ser escrita por:

$$\sigma = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (13)$$

onde η descreve a viscosidade dinâmica do material da treliça. Expressão esta, que através da substituição na Eq. 4 e aplicação do método de Galerkin na equação diferencial resultante, permite de maneira análoga, a obtenção da formulação das matrizes de massa, amortecimento e rigidez para o elemento de treliça visco-elástico.

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F\} \quad (14)$$

Explicitamente, as matrizes de massa e rigidez são numericamente iguais às matrizes apresentadas para o caso anterior, enquanto que a matriz de amortecimento pode ser escrita como:

$$[C] = \eta A \begin{bmatrix} \int_0^L \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} dx & \int_0^L \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} dx \\ \int_0^L \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} dx & \int_0^L \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} dx \end{bmatrix} \quad (15)$$

Como visto no item 3, a solução de um problema estrutural pelo método dos elementos finitos fornece somente os deslocamentos dos nós da estrutura. Para se descobrir o deslocamento da estrutura em pontos fora dos nós, são utilizadas as funções interpoladoras. Para o exemplo do elemento visco-elástico de treliça apresentado, pode-se escrever o deslocamento u como descrito pela Eq. 8, sendo:

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad (16)$$

e

$$N_2 = \frac{x}{L} \quad (17)$$

,que substituídas nas Eqs. 11, 12 e 15, permite ao cálculo das seguintes matrizes de massa, amortecimento e rigidez:

$$[M] = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$[C] = \frac{\eta A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$[K] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

3.3. Método de Otimização Topológica

De modo a classificar e tornar o estudo mais fácil, os métodos de otimização podem ser divididos em:

- Otimização Paramétrica;
- Otimização de Forma;
- Otimização Topológica.

A otimização paramétrica procura otimizar a estrutura através da utilização das variáveis de projeto como variáveis do problema de otimização (Fig. 7). Busca-se então os valores para o conjunto de variáveis de projeto que conduza a estrutura a apresentar um valor máximo ou mínimo de uma certa propriedade.

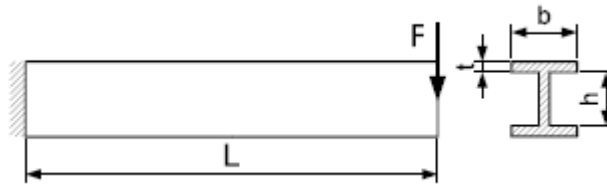


Figura 7. Exemplo de otimização paramétrica

De maneira um pouco mais geral do que a otimização paramétrica, a otimização de forma procura otimizar a estrutura utilizando os parâmetros de curvas “splines” como variáveis do problema de otimização (Fig. 8). Estas curvas “splines” serão as curvas geradoras dos perfis da estrutura. Embora mais geral que o tipo anterior, métodos de otimização de forma são extremamente dependentes da experiência do construtor, considerando que uma forma próxima da otimização deve ser conhecida, para que possa ser aplicado com sucesso.

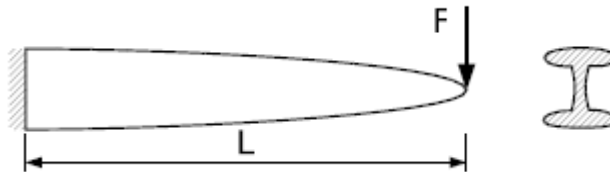


Figura 8. Exemplo de otimização de forma

A otimização topológica se caracteriza como um método de otimização, no qual é possível controlar a disposição de material de uma estrutura limitada por um determinado domínio e sujeita a condições de contorno e carregamentos variados (Fig. 9). De grande generalidade, a otimização topológica permite, portanto a introdução de buracos no domínio.



Figura 9. Exemplo de otimização topológica

Através da Fig. 10 é possível visualizar as etapas de aplicação do método de otimização topológica. Primeiramente deve ser definido o domínio inicial, no qual a estrutura analisada pode existir. Este domínio é chamado de domínio fixo estendido, que tecnicamente deve ser limitado pelos carregamentos e restrições estruturais.

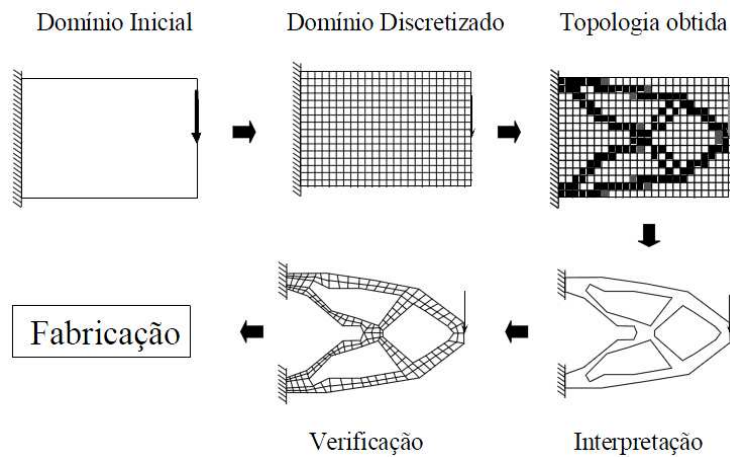


Figura 10. Etapas de um projeto de aplicação do método de otimização topológica para domínio contínuo

A seguir, este domínio é discretizado para que o método de otimização topológica possa ser aplicado. Assim, é possível descobrir, para uma configuração de carregamentos e restrições do domínio, a distribuição de material ótima para uma determinada formulação do problema de otimização. A etapa seguinte consiste na interpretação do resultado obtido, através da construção de um modelo, que exclui os elementos, que foram considerados desnecessários na estrutura. Com a topologia da estrutura já determinada, é realizada uma nova análise, de modo a verificar que as propriedades foram de fato otimizadas de forma correta, o que permite que a estrutura possa ser fabricada.

Para estruturas discretas, como a estrutura de treliças analisada neste trabalho, a aplicação do método de otimização topológica alocará as treliças nas regiões do domínio somente onde for necessário, de modo a maximizar ou minimizar a função objetivo, de acordo com a formulação do problema de otimização escolhido (Figura 11).

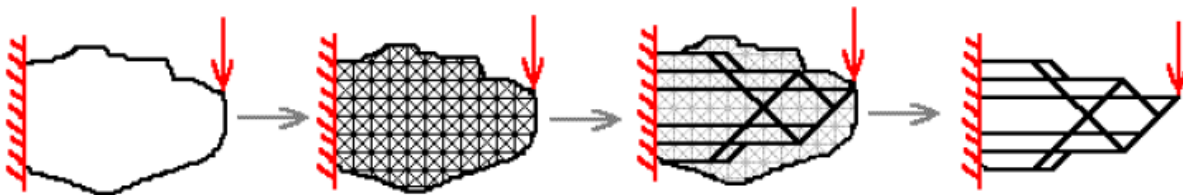


Figura 11. Exemplo de aplicação do método de otimização topológica para domínio discreto [Lima]

4. Implementação Numérica

A etapa de implementação numérica consistiu na integração do solver de elementos finitos (desenvolvido em Matlab) e responsável pela modelagem do comportamento estrutural do sistema, com o software responsável pela otimização da estrutura. Para a função de otimização foi empregado o software comercial ModeFrontier, que permite a comunicação e integração de vários programas de desenvolvimento de produtos (Matlab, Catia, Ansys, Abaqus, etc) através da construção de um “Workflow”, que descreve passo a passo o caminho das informações durante o processo de cálculo.

5. Formulação do Problema de Otimização

A formulação do problema de otimização é a etapa mais importante do processo de se otimizar o comportamento de uma estrutura. Definir o que se quer otimizar e como isso pode ser eficientemente descrito matematicamente através de uma função (função objetivo), assim como qual será o domínio de busca da solução ótima e quais restrições que estão presentes no problema analisado, são características que devem ser observadas.

Como pode ser visto na Figura 12, a estrutura analisada neste estudo é um conjunto de treliças visco-elásticas. Para a modelagem da viscoelasticidade das treliças, foi utilizado o modelo simplificado de Kelvin-Voigt (ver 3.1), onde se o fenômeno da viscoelasticidade é modelado através da colocação de elementos de treliças em paralelo com elementos dissipativos (amortecedores).

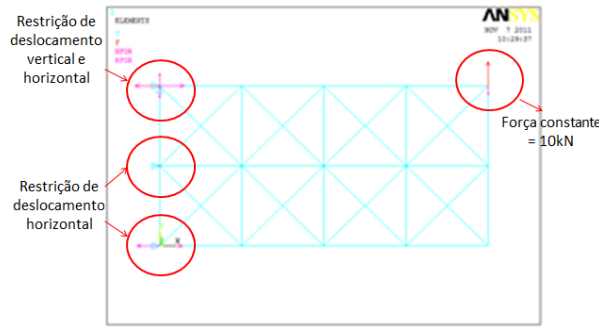


Figura 12. Estrutura de treliças analisada

Visto que se deseja otimizar o comportamento dinâmico que a estrutura da Figura 12 apresenta, ou seja, deseja-se com a utilização do fenômeno da viscoelasticidade, reduzir não somente o aparecimento de elevados deslocamentos como também um eficiente amortecimento destes, a medida que a estrutura é submetida a cargas dinâmicas. Por este motivo, escolheu-se, como um medidor deste comportamento e consequentemente como função objetivo do problema, a integral da curva de deslocamento do nó onde foi aplicada a força constante (até o instante de tempo $t = 0.2s$).

Como variáveis de projeto foram utilizadas os valores das áreas das seções transversais das barras de treliça. De modo a isolar os efeitos elástico e dissipativo (ação de amortecedores) na estrutura, foram consideradas 2 variáveis de projeto (áreas) diferentes para um mesmo elemento. Uma responsável pela porção do elemento que proporciona à estrutura o efeito elástico e a outra responsável pelo efeito dissipativo. Ao final, a área total do elemento será dada pela soma destas duas áreas.

Para que a análise da estrutura fique enriquecida e para que, com a aplicação do método de otimização, a busca pela solução ótima não se direcione para os extremos do domínio, foi considerado também uma restrição associada ao volume total de treliças presentes em cada configuração em comparação com um volume total máximo de referência.

$$f = \frac{\sum_{i=0}^N V_i}{\sum_{i=0}^N V_{i_{max}}} \quad (21)$$

Este volume total máximo foi definido a partir das áreas máximas das seções, presentes no extremo do domínio considerado. Desta forma é possível, criar um parâmetro f ($0 < f < 1$), que medirá uma diminuição de volume de uma configuração, com relação a uma configuração de referência (que possui volume máximo, de acordo como domínio escolhido para resolução do problema). Em (21), o índice N, representa o número de barras de treliça da estrutura.

Desta forma é possível resumir o problema de otimização como:

$$\begin{aligned} \min \int_0^{0.2} u(t) dt \\ \text{tal que} \\ f < f^* \end{aligned} \quad (22)$$

$$10^{-6} m^2 < (A_k)_i < 4.10^{-4} m^2$$

$$10^{-6} m^2 < (A_c)_i < 4.10^{-4} m^2$$

onde $u(t)$ representa o deslocamento em função do tempo do nó onde a força constante é aplicada, f é a fração relativa de volume como definida em (21), f^* é uma fração de volume de referência para a otimização. A segunda e terceira restrição consideradas representam respectivamente a definição do domínio de busca das áreas das barras relacionadas ao efeito elástico e viscoso da estrutura.

6. Resultados

Para observação dos resultados, foram analisados três casos:

1. $f^* = 0.7$ (solução ótima: $f = 0.6975$);
2. $f^* = 0.5$ (solução ótima: $f = 0.4513$);
3. $f^* = 0.20$ (solução ótima: $f = 0.1975$).

Em cada um deles, foi verificado como se variava o comportamento da solução ótima a medida que a quantidade de material permitida na estrutura era alterada. (alteração da fração de volume de referência - f^*).

Os seguintes parâmetros referentes aos algoritmos genéticos foram utilizados:

Tabela 1.1 - Parâmetros dos algoritmos genéticos

População N=160	Probabilidade Crossover Pcr = 0.5
	Probabilidade Seleção Psel = 0.05
	Probabilidade de Mutação Pmut = 0.1
Número de gerações g=10	

Nas figuras a seguir, foi plotado, para os três casos analisados, o deslocamento (estrutura otimizada em cor vermelha) do nó onde a força constante de 100N foi aplicada em comparação com o deslocamento do nó de uma estrutura de referência (plotado em cor preta), a qual possui áreas das barras igual a $2 \cdot 10^{-4} m^2$ (correspondente a área média dos valores extremos do domínio de busca: $1 \cdot 10^{-6} m^2$ e $4 \cdot 10^{-4} m^2$).

É plotado em seguida o valor da energia associada ao deslocamento do nó para a estrutura de referência e estrutura otimizada, explicitando que houve uma redução de valor.

Finalmente é plotada para cada caso, a contribuição de área dos elementos elásticos, dissipativos, como também a soma de ambas, que resulta na estrutura final otimizada.

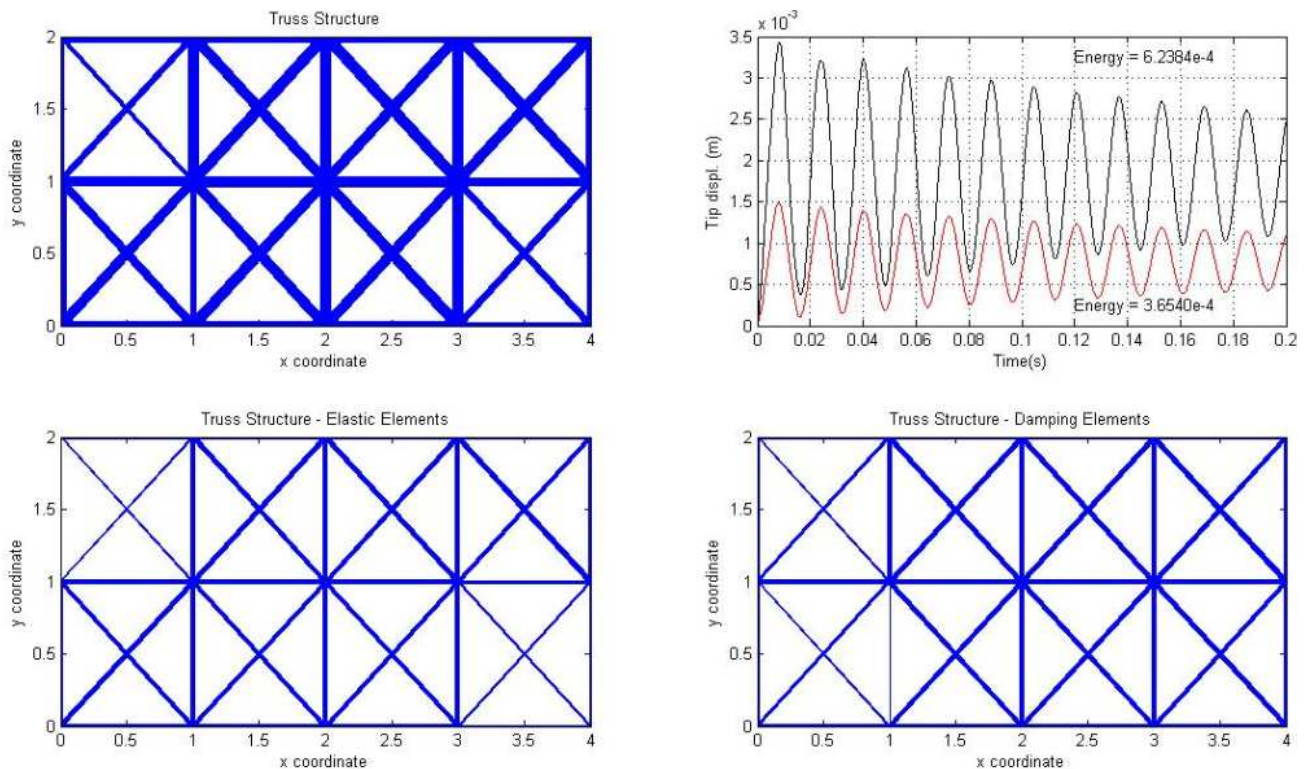


Figura 13. Resultados – Caso $f = 0.7$

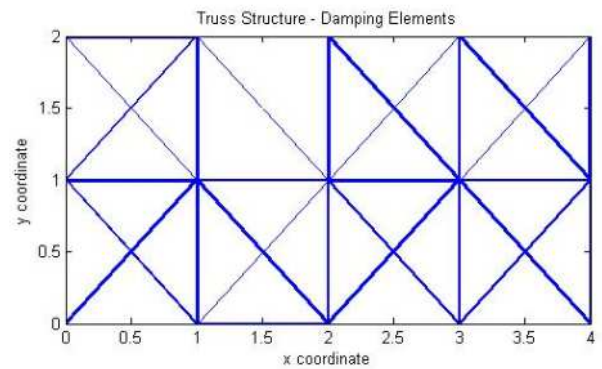
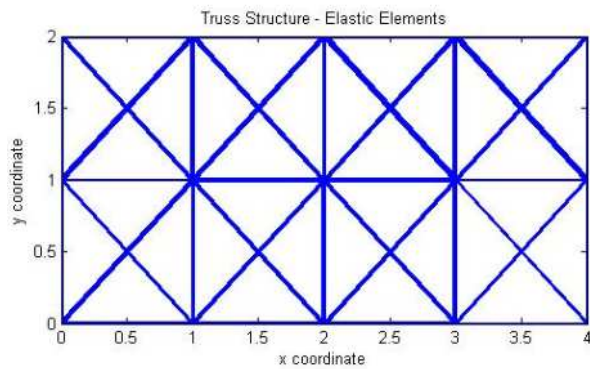
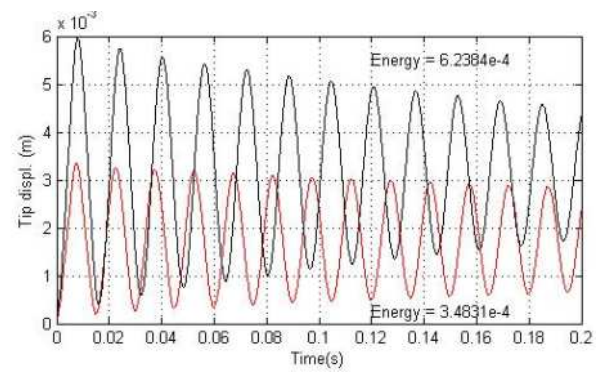
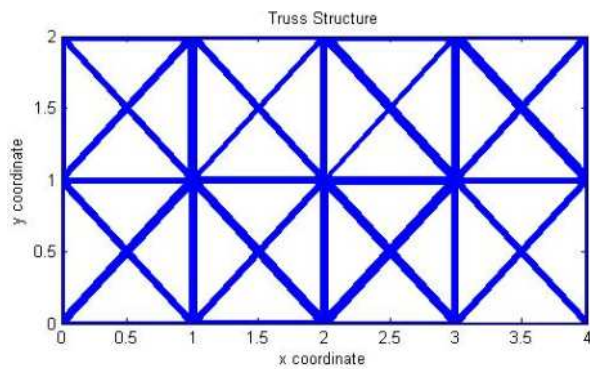


Figura 14. Resultados – Caso $f = 0.5$

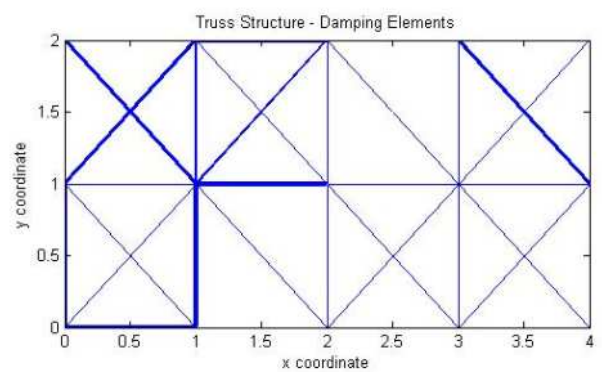
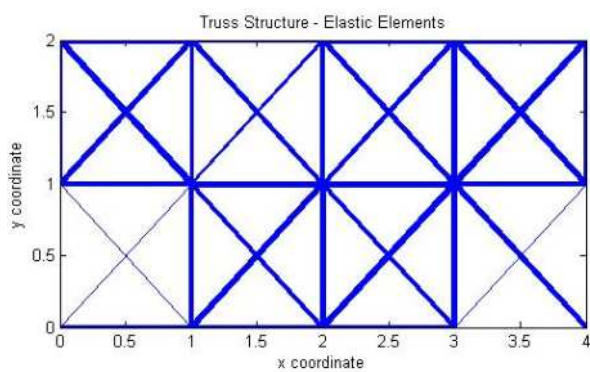
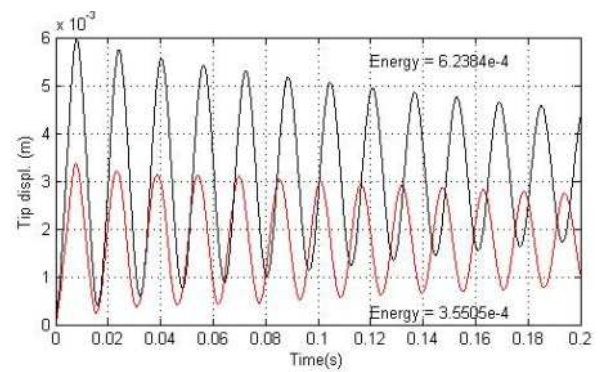
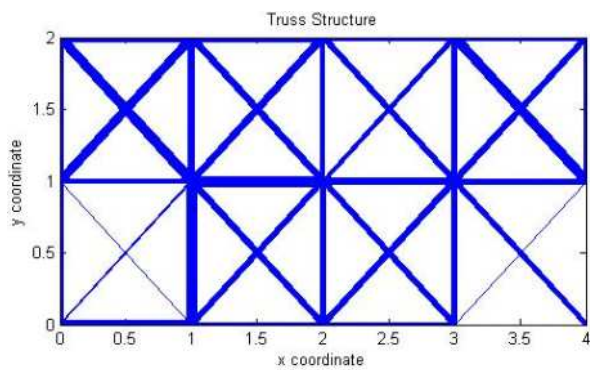


Figura 15. Resultados – Caso $f = 0.20$

A partir das figuras apresentadas é possível identificar, para o caso $f^* = 0.7$, uma tendência da solução ótima de diminuir as áreas dos elementos elásticos nas extremidades inferior direita e superior esquerda (Figura 13). É possível também ver uma tendência da solução ótima alocar maior área dos amortecedores nas regiões afastadas das condições de contorno (com maiores deslocamentos) aumentando assim a dissipação de energia nesta região (Figura 13).

No entanto para os casos $f^* = 0.5$ e $f^* = 0.20$, a tendência de alocação das áreas não é direta e de fácil interpretação. Mesmo assim, pode-se observar em ambos os casos, uma redução da energia associada ao deslocamento do nó analisado em comparação com a estrutura de referência (Figuras 14 e 15).

Uma possibilidade futura de análise deste problema é ampliar o número de treliças empregadas, utilizando o mesmo domínio onde a estrutura de treliças se encontra. Desta forma, seria provavelmente possível enxergar com mais nitidez, a tendência de distribuição de áreas das barras, de modo que ela otimize a função objetivo (como pode ser visto na figura 11).

7. Referências

- Bendoe, M. P. and Sigmund, O., 2002, "Topology optimization: Theory, methods and applications". Berlin: Springer, 2002
- Lima, C. R., 2002, "Projeto de Mecanismos Flexíveis usando o Método de Otimização Topológica". São Paulo, pp. 1-6
- Lippi, T. N., 2008, "Restrições de Manufatura aplicadas ao Método de Otimização Topológica". São Paulo: ed. rev., pp. 5-7
- Silva, M. C. D., 2007, "Aplicação do Método de Otimização Topológica para o Projeto de Mecanismos Flexíveis menos suscetíveis a ocorrência de dobradiças". São Paulo: ed. rev., pp. 33-34
- Silva, V., 2005, "Mechanics and Strength of Materials". Berlin: Springer, pp. 69-74

OPTIMIZATION OF VIBRATORY BEHAVIOUR OF VISCOELASTIC TRUSS STRUCTURES THROUGH TOPOLOGY OPTIMIZATION

Iury Bruno Taricano Marcatto

iurybtm@gmail.com

Abstract. This study aims to accomplish the optimization of the dynamic response of a structure after being subjected to the application of a given load. This structure is constructed with truss elements of viscoelastic material in order to facilitate the absorption of vibration by energy dissipation. Structural and system optimization analysis will be realized through commercial softwares (Matlab, Ansys and ModeFrontier) using as a tool, the topology optimization.

Keywords. Topology optimization, viscoelastic truss, truss, optimization.