

IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DOS PAINÉIS PARA O ESTUDO DE PROPRIEDADES AERODINÂMICAS DE AEROFÓLIOS

João de Sá Brasil Lima

joaobrasil.lima@gmail.com

Resumo. Este artigo trata da implementação computacional do Método dos Painéis, tendo como foco o projeto aerodinâmico de asas. Para tal, é feito um estudo prévio da Teoria da Linha de Sustentação, para em seguida serem feitas considerações teóricas e desenvolvimento das equações que descrevem o Método dos Painéis. Com a fundamentação teórica, elabora-se uma rotina computacional para simular tal método sobre um perfil de asa dado, para obter propriedades da asa tais como distribuição do coeficiente de pressão, circulação e arrasto induzido. No final são apresentados os resultados obtidos, bem como suas respectivas análises para o caso bidimensional.

Palavras chave: Engenharia Mecânica, Aerodinâmica, Método dos Painéis, Escoamento Potencial, Teoria da Asa Finita

1. Introdução

O objetivo do trabalho aqui proposto é o de desenvolver uma rotina de simulação computacional para o Método dos Painéis, visando o projeto aerodinâmico de asas. Sendo o Método dos Painéis de fácil implementação, o software necessário para tal rotina será o MatLab, um software comercial, que pode ser utilizado em máquinas consideradas simples, e os resultados são satisfatórios.

Primeiramente são feitas considerações teóricas sobre a Teoria da Linha de Sustentação, bem como sua modelagem matemática que a torne passível de simulação para serem obtidos alguns resultados preliminares que serão utilizados para fins de comparação ao longo do trabalho. Com esses resultados faz-se as análises convenientes para a validação do código e dos resultados obtidos.

Em seguida parte-se para a modelagem matemática do Método dos Painéis, para o caso bidimensional, incompressível. Inicialmente faz-se uma modelagem genérica, para, com a metodologia de simulação correta, introduzir o dipolo como elemento de singularidade e obter, assim, os resultados desejados. Resultados esses que são propriedades do aerofólio, tais como sustentação, arrasto, velocidade de *downwash*, circulação, distribuição de pressão e diferença de pressão.

Por fim é feita a modelagem matemática para o caso tridimensional utilizando o Vórtice Ferradura como elemento de singularidade. Elaborar-se uma rotina de simulação e valida-se o código analisando e comparando os resultados para uma asa com distribuição elíptica de corda, com os resultados obtidos através da Teoria da Linha de Sustentação. Validando-se o código é possível utilizá-lo a fim de obter resultados para diferentes formas planas de asas.

2. Metodologia

Esta seção trata de todas as etapas de modelagem matemática e das metodologias empregadas nas simulações para a Teoria da Linha de Sustentação e para o Método dos Painéis.

2.1. A Teoria da Linha de Sustentação

Para a implementação do referido método, o escoamento em torno da asa deverá satisfazer as seguintes equações:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1)$$

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad (2)$$

$$\gamma|_{TE} = 0 \quad (3)$$

Como as equações utilizadas na teoria do escoamento potencial são lineares pode-se utilizar o princípio da superposição de escoamentos pra gerar outro escoamento característico. Dessa forma, partindo da superposição do escoamento uniforme caracterizado pela velocidade ao longe com a superposição de vários painéis de fontes, sorvedouros ou vórtices, é possível gerar a superfície da asa desejada por meio de cálculos numéricos. Conhecendo-se a geometria da asa, calculam-se os parâmetros necessários para avaliar as características da asa e comparam-se os resultados obtidos com os mesmos resultados provenientes da Teoria da Linha de Sustentação. Para tal, serão feitas algumas considerações sobre a Teoria da Linha de Sustentação de Asa Finita.

A Teoria de Asa Finita visa incluir no estudo de aerofólios efeitos de velocidades induzidas bem como os efeitos da distribuição vortical ao longo do aerofólio. O principal objetivo dessa teoria é determinar a distribuição de esforços ao longo de um perfil de asa, sob dadas condições do escoamento. Para isso, assume-se que a esteira de vórtices que se forma na direção do aerofólio permanece constante, e que o escoamento pode ser assumido como bidimensional. A existência de vórtices, causará no aerofólio os efeitos de *downwash* e de arrasto induzido. Tão importante quanto quantificá-los, é determinar sua interferência nas forças de arrasto e sustentação, como é possível observar na Fig. (1).

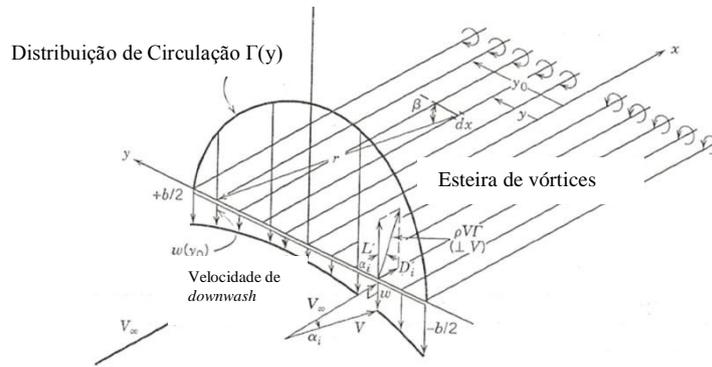


Figura 1. Distribuição de esforços em asa finita. Adaptado de Kuethe (1986)

A velocidade do escoamento em cada ponto da envergadura, e a velocidade do escoamento ao longe determinam um ângulo de ataque induzido α_i , dado por:

$$\alpha_i(y) = \arctg\left(\frac{w}{V_\infty}\right) \quad (4)$$

Sendo w a velocidade de *downwash* e V_∞ a velocidade do escoamento ao longe.

Como a sustentação é normal à velocidade absoluta do escoamento, V , a nova força de sustentação, já incluindo os efeitos de *downwash* é dada por:

$$L = \rho \cdot V \cdot \Gamma \cdot \cos \alpha_i = \rho \cdot V_\infty \cdot \Gamma \quad (5)$$

E o arrasto induzido é dado por:

$$D_i = -\rho \cdot V \cdot \Gamma \cdot \sin \alpha_i = -\rho \cdot w \cdot \Gamma \quad (6)$$

Todos os esforços são calculados por unidade de envergadura da asa, e Γ é a circulação sobre a asa.

Para os estudos, será admitida uma distribuição de circulação arbitrária, que será expressada em termos de uma série infinita. Para tal realiza-se uma expansão em série de senos, representada da seguinte forma:

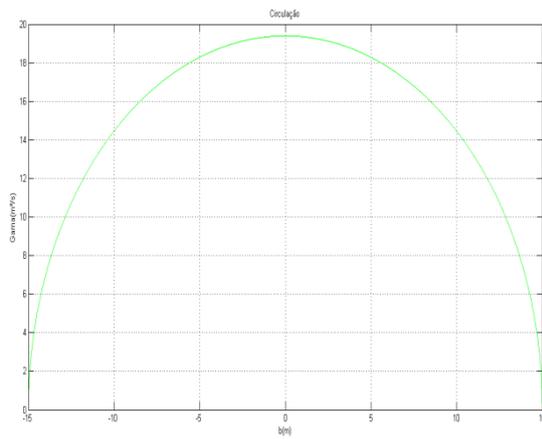
$$\Gamma = \pi \cdot c_s \cdot V_\infty \cdot \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin n\theta \quad (7)$$

Após manipulação algébrica, derivações e integrações, chega-se na expressão para o cálculo do ângulo efetivo de ataque:

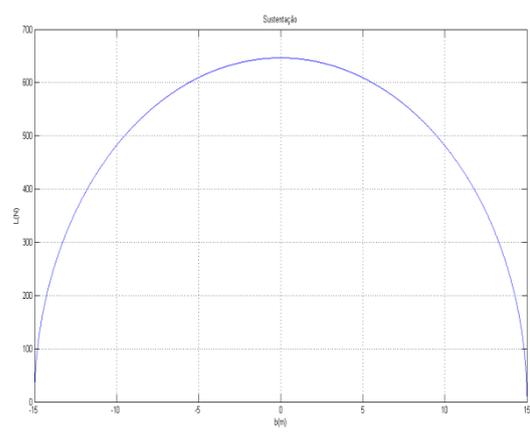
$$\alpha_a(\theta) = \frac{c_s}{c} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin n\theta + \frac{1}{4 \cdot RA} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot A_n \cdot \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \quad (8)$$

Sendo c_s o comprimento de corda no plano de simetria, c o comprimento de corda da asa, RA a razão de aspecto da mesma, θ o ângulo de um determinado ponto na superfície da asa e A_n os coeficientes da série infinita.

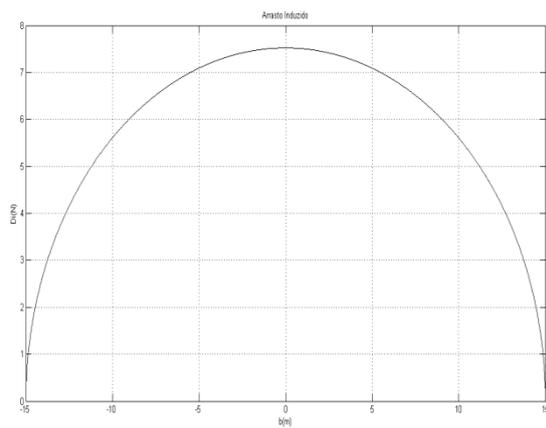
Estruturando-se o problema na forma de um sistema linear como representado abaixo, encontram-se os coeficientes da série que permite chegar a resultados apresentados na Fig. (2), para uma asa elíptica:



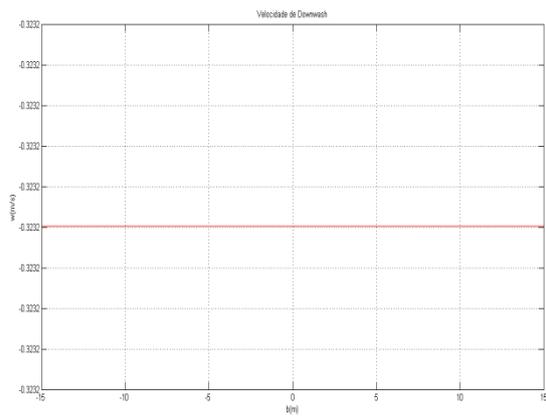
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 2. Gráficos das simulações para a Teoria da Linha de Sustentação com asa de perfil elíptico: (a) Distribuição de circulação sobre a asa; (b) Distribuição de sustentação; (c) Distribuição de arrasto induzido; (d) Distribuição da velocidade de *downwash*.

2.2 Método dos Painéis – Caso Bidimensional

Como dito anteriormente, o método dos painéis se baseia no princípio da superposição, onde busca-se uma solução na qual a soma do escoamento ao longe com os escoamentos induzidos pelos painéis de dipolos obedecem as condições impostas pelas equações (1), (2) e (3).

A implementação do método dos painéis é realizada seguindo uma metodologia que pode ser resumida em seis passos.

2.2.1 Escolha do método de singularidade

Nesta etapa do trabalho, é determinado qual o elemento de singularidade irá ser usado e qual será a sua distribuição ao longo de cada painel. Neste trabalho, foi escolhida uma distribuição de dipolos constantes como elemento de singularidade.

2.2.2 Geração da malha

Após a escolha do elemento de singularidade, deve-se escolher a forma como a geometria em estudo será discretizada. No presente trabalho, definiu-se que a geometria será dividida em painéis planos. Junto com a definição dos painéis, que podem ser definidos pelos seus pontos iniciais e finais, é importante a definição dos pontos de controle, que serão os locais onde serão impostas as condições de contorno a serem verificadas onde, neste método, eles serão posicionados no centro de cada painel.

2.2.3 Cálculo dos coeficientes de influência

Os coeficientes de influência serão calculados impondo a condição de contorno de Neumann, que afirma que o escoamento na direção normal em cada painel deve ser nulo.

Para isso, inicialmente, devemos elaborar uma rotina que calcule a velocidade induzida por um painel de dipolos constantes em todos os outros pontos de controle. Dessa forma, a velocidade induzida em um ponto (x, z) devido a um painel cujas extremidades são (x_1, z_1) e (x_2, z_2) é:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\mu}{2\pi} \left[\frac{z}{(x-x_1)^2+z^2} - \frac{z}{(x-x_2)^2+z^2} \right] \\ w &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{\mu}{2\pi} \left[\frac{x-x_1}{(x-x_1)^2+z^2} - \frac{x-x_2}{(x-x_2)^2+z^2} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

Entretanto, esta velocidade será calculada segundo o sistema de coordenadas do painel, havendo, dessa forma, a necessidade de uma transformação de coordenadas para o sistema global, exibida na Fig (3).

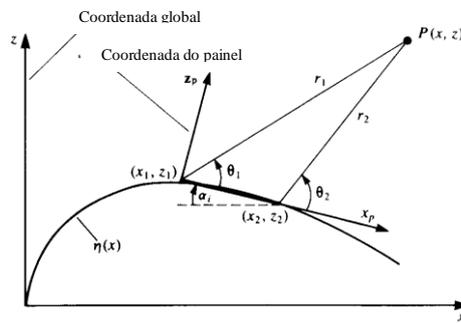


Figura 3. Sistemas de coordenadas utilizados no método dos painéis. Adaptado de Katz (2001)

$$\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_i & \sin \alpha_i \\ -\sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_p \\ w_p \end{pmatrix} \quad (10)$$

Assim, os coeficientes de influência podem ser calculados como sendo a velocidade normal induzida pelo j -ésimo painel no i -ésimo ponto de controle como segue:

$$a_{ij} = (u, w)_{ij} \cdot \mathbf{n}_i \quad (11)$$

2.2.4 Condição de contorno

A condição de contorno de Neumann impõe que a soma de todas as velocidades induzidas em um dado painel seja zero. Assim, para o i -ésimo painel temos:

$$\sum_j (u, w)_{ij} \cdot \mathbf{n}_i + (U_\infty, W_\infty) \cdot \mathbf{n}_i = 0 \quad (12)$$

2.2.5 Montagem e resolução do sistema linear

Após o estabelecimento das condições de contorno em todos os painéis, podemos montar um sistema linear no qual as incógnitas são as intensidades dos dipolos. Dessa forma temos:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} RHS_1 \\ \vdots \\ RHS_N \end{pmatrix} \quad (13)$$

Entretanto, temos que a vorticidade causada por dois dipolos adjacentes pode ser calculada como:

$$\Gamma_{k-1} = \mu_{k-2} - \mu_{k-1} \quad (14)$$

Conseqüentemente, a vorticidade no bordo de fuga do aerofólio será de:

$$-\Gamma = \mu_1 - \mu_N \quad (15)$$

Assim, é necessária a imposição da condição de Kutta o qual determina que a condição de Kutta deva ser nula no bordo de fuga. Isso pode ser feito através da modelagem da esteira como uma distribuição de dipolos constantes, conforme a Fig (4).

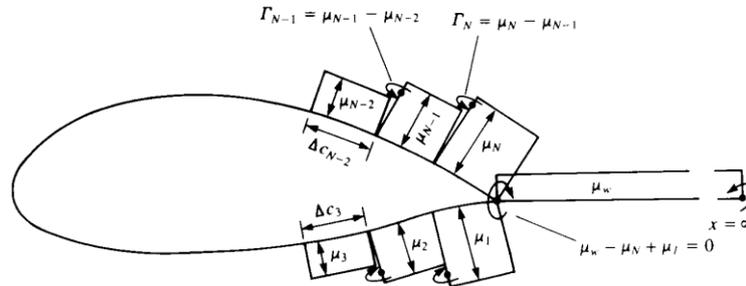


Figura 4. Distribuição de dipolos. Adaptado de Katz (2001)

Assim, deve ser acrescentada mais uma incógnita ao sistema, que é a intensidade do dipolo utilizado para modelar a esteira, e mais uma equação, que é a condição de Kutta.

$$(\mu_1 - \mu_N) + \mu_w = 0 \quad (16)$$

2.2.6 Cálculo das pressões

Uma vez conhecida as intensidades dos dipolos, é possível calcular os coeficientes de pressões nos dorsos superior e inferior conforme as equações:

$$q_{t_i} = \sum_{j=1}^{N+1} (u, w)_{ij} \cdot \tau_j$$

$$C_{p_i} = 1 - \frac{(Q_{t_\infty} + q_{t_i})^2}{Q_\infty^2} \quad (17)$$

2.2.7 Simulações e resultados

Assim, com a metodologia acima, pode-se plotar a seguinte distribuição de pressões para um aerofólio tipo NACA0012, exibida na Fig. (5), e na Fig. (6) a diferença de coeficientes de pressão entre as partes superior e inferior do aerofólio. Para um ângulo de ataque de 4°, o resultado está exibido a seguir:

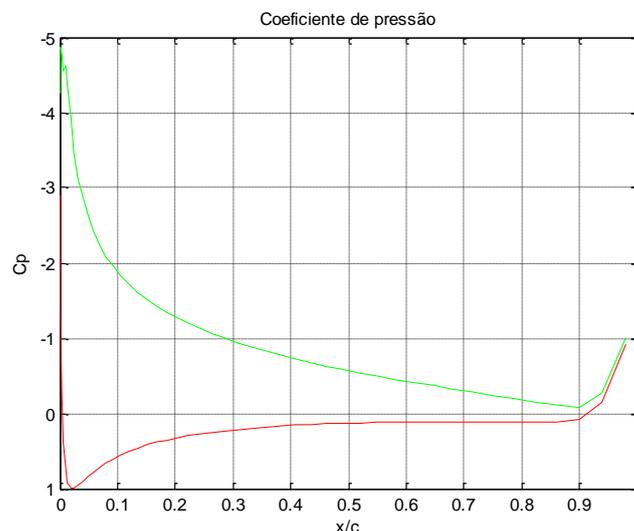


Figura 5. Distribuição dos coeficientes de pressões

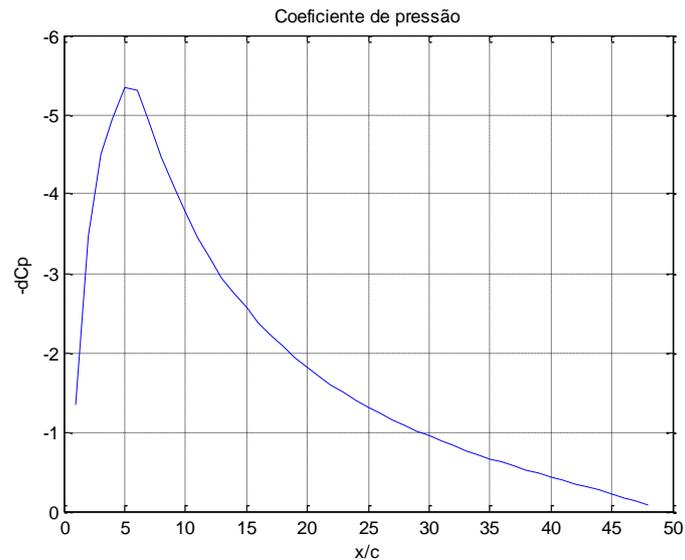


Figura 6. Distribuição da diferença dos coeficientes de pressões

Um argumento que valida os resultados é dado através da observação da tendência do valor da diferença do coeficiente de pressão (Fig. (6)) no bordo de fuga.

Sabemos que, como a vorticidade no bordo de fuga deve ser zero, não deve haver força de sustentação nesta região que, por outro lado, pode ser interpretado como a inexistência de diferença de pressão nesta mesma região. Este resultado pode também ser observado na Fig. (6).

2.3 Método dos Painéis – Caso Tridimensional

Nessa seção é apresentado o Método dos Painéis para o caso Tridimensional. Isso inclui modelagem matemática, equacionamento, simulações, resultados e análises. Para a elaboração do código foi empregada uma solução pelo Método do Vórtice Ferradura (*Horseshoe Vortex*).

2.3.1 Método do Vórtice Ferradura

Esse método utiliza um vórtice ferradura como elemento de singularidade. O vórtice ferradura é composto por um segmento de vórtice para modelar as propriedades de sustentação, e dois vórtices semi-infinitos para modelar a esteira. Nesse caso, deve-se respeitar o Teorema de Helmholtz, que afirma que um segmento de vórtice não possa simplesmente terminar no interior de um fluido, mas deve estender-se até a fronteira do sistema ou ainda se fechar formando um anel. E a intensidade do vórtice deve ser constante por toda a sua extensão. Um modelo de vórtice ferradura está exibido na Fig. (7).

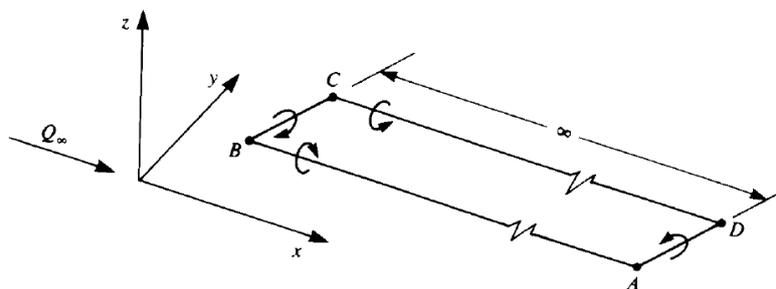


Figura 7. Modelo de vórtice ferradura. Adaptado de Katz (2001)

Nessa situação, a esteira deve ser paralela à velocidade do escoamento ao longe, o que acarreta em algumas dificuldades de modelagem. Posto isso, há duas possibilidades para que isso ocorra, que estão expostas na Fig. (8), onde α é o ângulo de ataque e Q_∞ é a velocidade do escoamento ao longe.

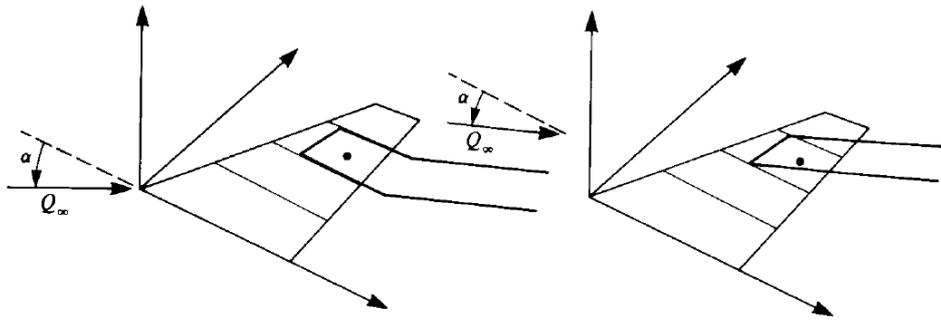


Figura 8. Possibilidades de modelagem utilizando o vórtice ferradura. Adaptado de Katz (2001)

Dessa forma, pode-se estruturar o método para simulação. Na Fig. (9) é possível ver a representação espacial da discretização da superfície. Baseado na teoria para o método bidimensional, já descrita nesse trabalho, coloca-se o segmento de vórtice na linha de quarto de corda e assume-se a intensidade do vórtice como sendo constante.

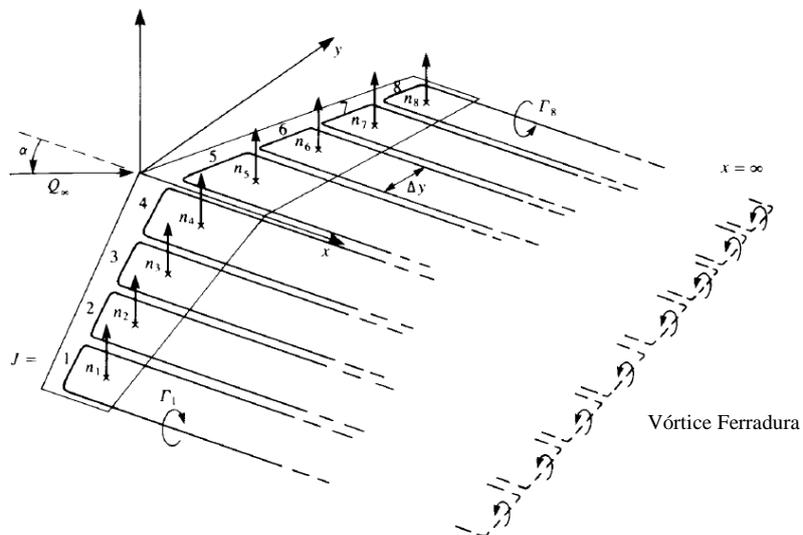


Figura 9. Superfície da asa discretizada com vórtices ferradura. Adaptado de Katz (2001)

Na Fig.(10) tem-se o elemento de vórtice ferradura completo com seus pontos principais.

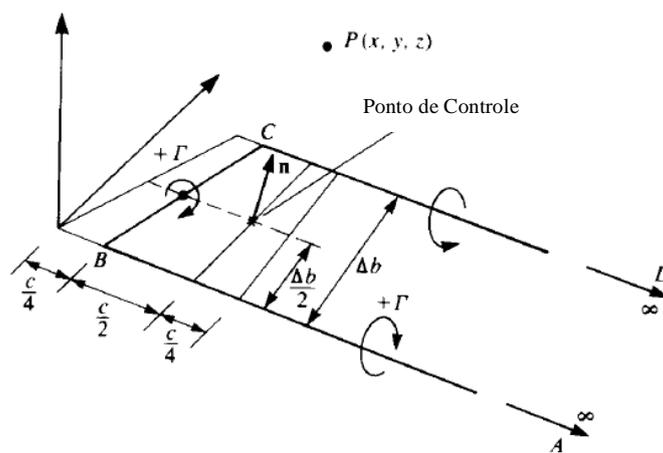


Figura 10. Pontos principais do vórtice ferradura. Adaptado de Katz (2001)

Dessa forma, pode-se calcular a velocidade induzida por cada trecho de vórtice, cujo campo de velocidade V é função de um conjunto de variáveis, representadas a seguir:

$$\begin{aligned}
(u_1, v_1, w_1) &= f(x, y, z, x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B, \Gamma) \\
(u_2, v_2, w_2) &= f(x, y, z, x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C, \Gamma) \\
(u_3, v_3, w_3) &= f(x, y, z, x_C, y_C, z_C, x_D, y_D, z_D, \Gamma)
\end{aligned} \tag{18}$$

Com isso, a velocidade induzida pelos três segmentos de vórtice que compõem o vórtice ferradura é dada por:

$$(u, v, w) = (u_1, v_1, w_1) + (u_2, v_2, w_2) + (u_3, v_3, w_3) \tag{19}$$

Para o cálculo do arrasto induzido utiliza-se apenas a componente de velocidade relativa à esteira. Essa componente é obtida somando-se as contribuições de velocidades dos trechos AB e CD do vórtices ferradura, obtendo-se:

$$(u, v, w)^* \approx (u_1, v_1, w_1) + (u_3, v_3, w_3) \tag{20}$$

Com a asa discretizada em N painéis, como mostrados na Fig. (9), obtém-se os vetores normais para cada painel de índice j, cuja expressão é dada por:

$$\mathbf{n}_j = (\text{sen } \alpha_j, \text{cos } \alpha_j) \tag{21}$$

Aplicando-se a equação abaixo para os pontos de colocação de cada painel, atendem-se todas as condições de contorno:

$$w_b + w_i + Q_\infty \cdot \alpha = 0 \tag{22}$$

Com as expressões para cálculo das velocidades induzidas pelos vórtices ferradura conhecidas, tem-se, aplicando as condições de contorno:

$$[(u, v, w)_{11} \Gamma_1 + (u, v, w)_{12} \Gamma_2 + \dots + (u, v, w)_{1N} \Gamma_N + (U_\infty, V_\infty, W_\infty)] \cdot \mathbf{n}_1 = 0 \tag{23}$$

Na expressão acima, as intensidades da circulação são desconhecidas. Os coeficientes de influência representam a influência do vórtice ferradura de índice i, no vórtice de índice j e são calculados para um intensidade unitária de circulação. Tais coeficientes são dados por:

$$a_{ij} = (u, v, w)_{ij} \cdot \mathbf{n}_i \tag{24}$$

Da equação (22), chega-se em N equações com N termos cada uma:

$$\begin{aligned}
a_{11} \Gamma_1 + a_{12} \Gamma_2 + a_{13} \Gamma_3 + \dots + a_{1N} \Gamma_N &= -(U_\infty, V_\infty, W_\infty) \cdot \mathbf{n}_1 \\
a_{21} \Gamma_1 + a_{22} \Gamma_2 + a_{23} \Gamma_3 + \dots + a_{2N} \Gamma_N &= -(U_\infty, V_\infty, W_\infty) \cdot \mathbf{n}_2 \\
a_{31} \Gamma_1 + a_{32} \Gamma_2 + a_{33} \Gamma_3 + \dots + a_{3N} \Gamma_N &= -(U_\infty, V_\infty, W_\infty) \cdot \mathbf{n}_3 \\
\dots &= \dots \\
a_{N1} \Gamma_1 + a_{N2} \Gamma_2 + a_{N3} \Gamma_3 + \dots + a_{NN} \Gamma_N &= -(U_\infty, V_\infty, W_\infty) \cdot \mathbf{n}_N
\end{aligned} \tag{25}$$

Que pode ser escrito na forma de um sistema linear:

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma_j = RHS_i \tag{26}$$

Onde:

$$RHS_i = -(U_\infty, V_\infty, W_\infty) \cdot \mathbf{n}_i \tag{27}$$

Com as circulações de cada painel obtidas, pode-se calcular os esforços de sustentação e arrasto induzido, dados por:

$$\begin{aligned}
\Delta L_j &= \rho Q_\infty \Gamma_j \Delta y_j \\
\Delta D_j &= -\rho w_{ind,j} \Gamma_j \Delta y_j
\end{aligned} \tag{28}$$

2.3.2 Simulações e resultados

Com a metodologia descrita na seção anterior, elaborou-se um código para o cálculo da circulação, sustentação, arrasto induzido e distribuição de velocidade de *downwash* em asas, empregando o método do vórtice ferradura. Para validação do código, simulou-se para uma asa elíptica e comparou-se o resultado com os obtidos através da Teoria da Linha de Sustentação. Com o código validado, pôde-se simular para diferentes perfis de asa. Na Fig. (11) estão exibidos os resultados para uma asa elíptica, bem como sua forma tridimensional e plana, utilizados na validação do código.

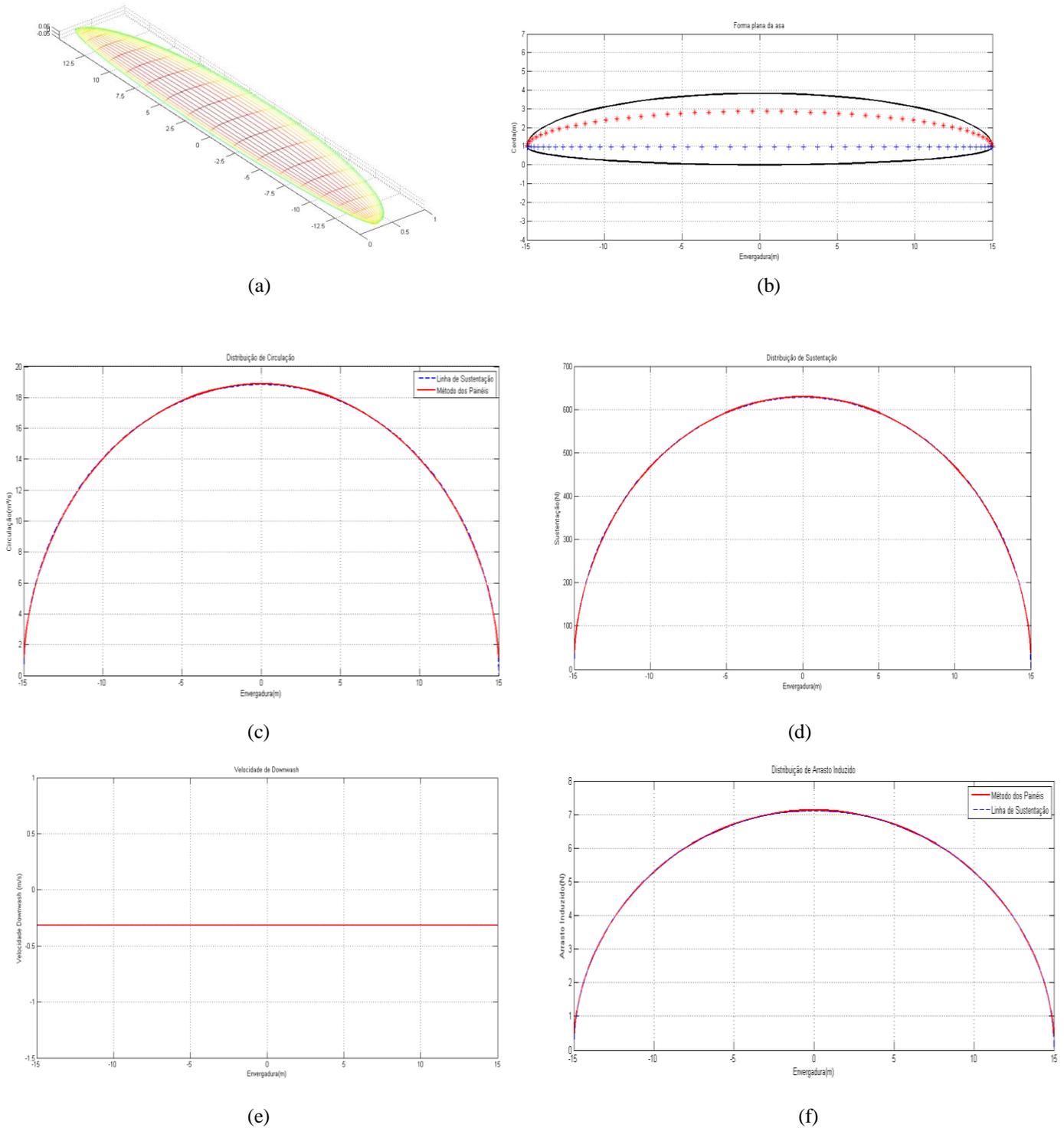


Figura 11. Resultados da simulação para o método do vórtice ferradura. Em vermelho o resultado para o Método dos Painéis e em azul tracejado, para a Teoria da Linha de Sustentação: a) Asa com distribuição elíptica de corda e perfil NACA 0012; b) Forma plana da asa, utilizada na simulação; c) Distribuição de circulação; d) Distribuição de sustentação; e) Distribuição da velocidade de *downwash*; f) Distribuição de arrasto induzido.

Analisando os gráficos acima, é possível notar que o resultado para o método empregado é próximo dos obtidos através da Teoria da Linha de Sustentação, o que torna o código elaborado válido. Com isso, utiliza-se o código para obter resultados para outras formas planas de asa. A seguir serão apresentados resultados para uma asas de forma plana trapezoidal com enflechamento de 30 e 45°. Na Fig. (12) estão exibidas a forma plana da asa e a distribuição de sustentação para a asa com enflechamento de 30° e na Fig. (13), idem para 45°.

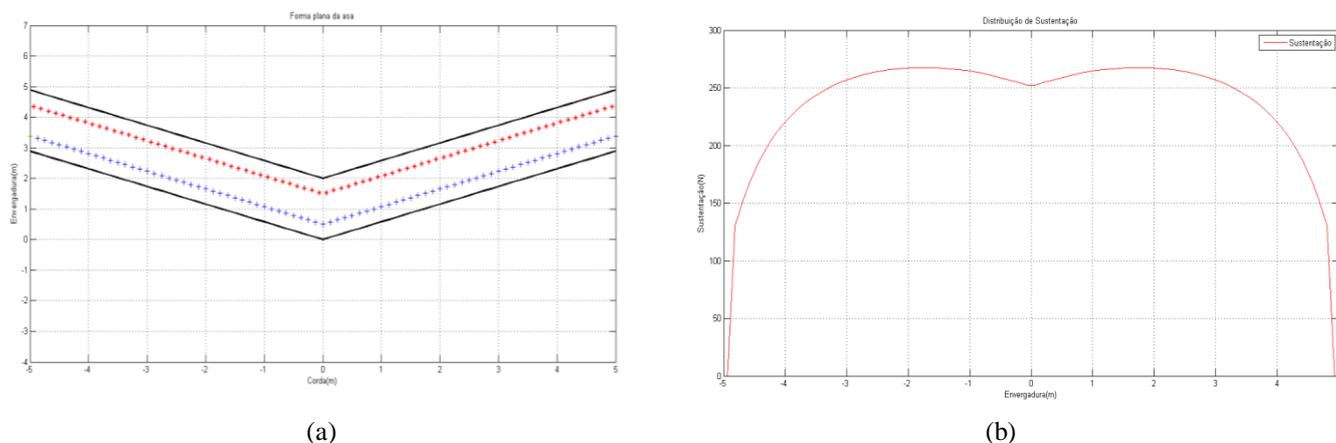


Figura 12. Resultados para asa com enflechamento de 30°; a) Forma plana da asa trapezoidal com enflechamento de 30°; b) Distribuição de sustentação para asa com enflechamento de 30°.

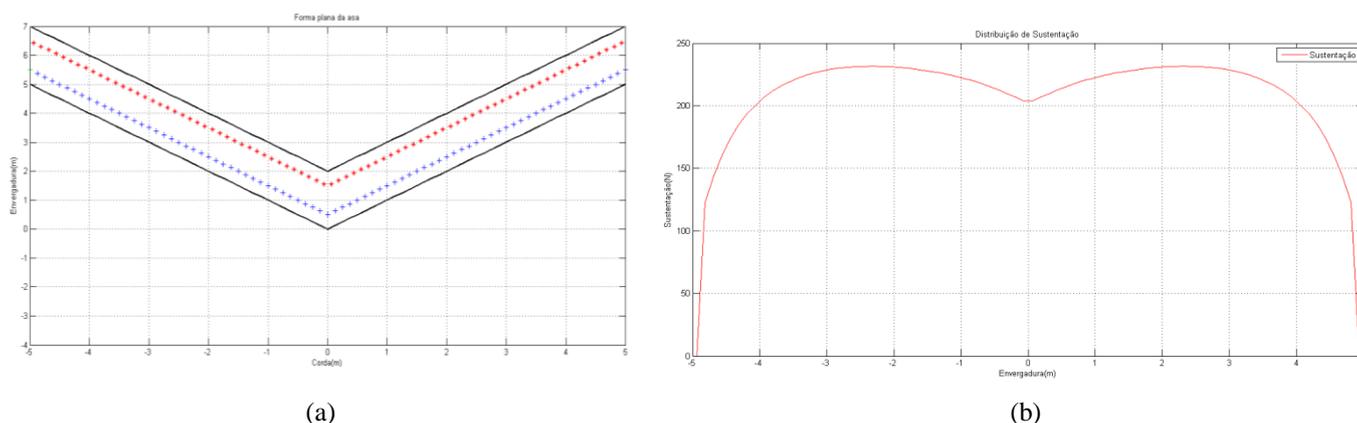


Figura 13. Resultados para asa com enflechamento de 45°; a) Forma plana da asa trapezoidal com enflechamento de 45°; b) Distribuição de sustentação para asa com enflechamento de 45°.

Analisando os gráficos é possível concluir que a sustentação diminui com o aumento do ângulo de enflechamento.

3. Referências

- Anderson, J.D., 1991, “Fundamentals of Aerodynamics” McGraw-Hill
 Katz, J., Plotkin, A., 2001, “Low Speed Aerodynamics”, Cambridge Press
 Kuethe, A.M., Chow, C., 1986, “Foundations of Aerodynamics”, Wiley
 White, F.M., 2002, “Mecânica dos Fluidos”, McGraw-Hill

AN IMPLEMENTATION OF THE PANEL METHOD WING DESIGN

João de Sá Brasil Lima

joabrasil.lima@gmail.com

Abstract.

This article describes the computational implementation of the Panel Methods. It has as its main objective the aerodynamic design of finite wings. To that end, we have considered the Lifting Line Theory as well as the mathematical modeling of Panel Methods, in potential flow. A set of computational routines was developed to implement those methods. Those routines have been validated against known results for elliptical wings of high aspect ratio. Then, the same routines have been used to tackle some additional test cases, for which the results are presented and analyzed below.

Keywords. Mechanical Engineering, Aerodynamic, Panel Methods, Potential Flow, Slender Wing Theory