

ALGORITMO PARA DETERMINAR A POSIÇÃO ÓTIMA DE ELETRODOS EM TOMOGRAFIA POR IMPEDÂNCIA ELÉTRICA

Luís Eduardo Sartori Pivatto
luisedu21@gmail.com

Resumo. Atualmente a tomografia é um importante recurso médico para a detecção e prevenção de doenças. A tomografia por impedância elétrica (TIE) utiliza eletrodos para obter os sinais que geram imagens da distribuição de potencial elétrico e resistividade do órgão estudado. Até o presente momento tais eletrodos são dispostos no paciente de maneira equiespaçada. O objetivo desse trabalho é obter as posições ótimas de eletrodos que fornecem a melhor imagem na tomografia. A distribuição de potenciais elétricos da região em estudo pode ser obtida através da solução do problema direto de finitos da equação generalizada de Laplace. Para a determinação da posição ótima dos eletrodos realiza-se o problema inverso de finitos pela variação do ângulo de cada um dos eletrodos na fronteira do domínio através do algoritmo caixa-preta. A partir dos resultados do algoritmo, aplica-se um coeficiente de observabilidade baseado na decomposição USV da matriz que correlaciona variações angulares e potenciais. Por fim, o método simplex de Nelder e Mead é utilizado para obter a configuração de ângulos que otimiza esse índice.

Palavras chave: tomografia por impedância elétrica, elementos finitos, problema direto, problema inverso, black-box algorithm

1. Introdução

A Tomografia por Impedância Elétrica (em inglês, *Electrical Impedance Tomography – EIT*) é uma técnica de obtenção da distribuição de condutividade elétrica internas do corpo mediante os valores de potenciais elétricos medidos em sua superfície por meio de eletrodos. A aplicação desta técnica é bem abrangente, podendo envolver a localização de reservas e minerais subterrâneas, visualização de escoamentos bifásicos em plantas nucleares, trocadores de calor, sistemas de bombeamento de gás e óleo, dentre outras. (MELLO, 2010) Na área biomédica, a EIT pode ser utilizada na realização de mamografias, monitoração de escoamento vascular, detecção de acidentes vasculares cerebrais e tumores no tecido pulmonar, dentre outras aplicações.

A prática na medicina tem sido o uso de eletrodos dispostos horizontalmente no corpo humano. Embora esse método possa ser prático em sentido operacional, ele não produz a melhor imagem. Essa poderia ser obtida caso a disposição dos eletrodos fosse ótima. Neste artigo se apresentará um método de obtenção da posição ótima de eletrodos através de um algoritmo de elementos finitos.

2. Metodologia

O principal conjunto de dados de interesse ao se realizar uma tomografia por impedância elétrica é a distribuição de resistividade da região do corpo humano em estudo. As resistividades podem indicar alguma anomalia presente. Por exemplo, verificou-se que tumores do pulmão têm distribuição de resistividade diferentes de outras áreas. Assim, esse método pode ajudar a identificar tumores sem a utilização de métodos não invasivos. A distribuição de resistividade está relacionada com a distribuição de potenciais elétricos na região analisada. Essa distribuição de potenciais elétricos pode ser obtida através de se impor alguns potenciais conhecidos a um problema de elementos finitos que discretiza a equação generalizada de Laplace. Por sua vez, a distribuição de resistividade pode ser associada à distribuição de potenciais, através de uma matriz $\mathbf{B}$ a ser determinada. A determinação dessa matriz é feita através do problema inverso. O método escolhido para realizar o problema inverso foi o *Black-Box algorithm*, proposto por MOURA (2010).

3. Teoria

3.1. Problema direto

O problema direto na EIT computa os potenciais nos eletrodos. O modelo elétrico, usando FEM no domínio, leva à seguinte equação:

$$\mathbf{Y}(\rho) \cdot \mathbf{V} = \mathbf{C} \quad (1)$$

onde $\mathbf{Y}(\rho)$ é a matriz de condutividade, $\mathbf{V} = [v_1, \dots, v_e]$ é a matriz de potenciais, cujas colunas são compostas pelos potenciais elétricos nodais a cada padrão de corrente, $\mathbf{C} = [c_1, \dots, c_e]$ é a matriz de padrões de corrente, cujas colunas representam os padrões de corrente. Tanto c_j como v_j denotam vetores com e elementos. Não faz parte do escopo deste artigo fornecer algum algoritmo novo para o problema direto. Uma teoria completa do problema direto pode ser encontrada em VAUKOHNEN (2004). Referências quanto a métodos gerais do problema direto de elementos finitos podem ser encontradas em LOGAN (1997).

3.2. Problema indireto

O problema inverso constitui na obtenção de uma matriz de sensibilidade B que correlaciona a distribuição de potenciais obtida pelo problema direto de elementos finitos com a variação da posição dos eletrodos. Uma possível abordagem é proposta por Barber (BARBER; BROWN, 1984) na qual adota-se um método isopotencial chamado de método de retroprojeção (*backprojection method*). O problema direto permite obter a distribuição de potencial elétrico V , dada a distribuição de condutividade na região estudada e condições de contorno apropriadas. Na EIT, porém, deseja-se saber a distribuição de condutividade dado que conhece-se V (ou o gradiente de V). Assim é necessário um método de reconstrução. Se $\mathbf{b}$ é um vetor das medições da fronteira e $\mathbf{f}$ é um vetor representando a distribuição da condutividade, então eles estão relacionados através de uma transformação direta T .

$$\mathbf{b} = T(\mathbf{f}) \quad (2)$$

Admitindo-se que exista tal relação, o problema de reconstrução envolve determinar a transformação inversa, tal que:

$$\mathbf{f} = T^{-1}(\mathbf{b}) \quad (3)$$

Pelo algoritmo de retroprojeção, pode ser descrito da seguinte forma: dois conjuntos de dados são necessários. Uma primeira série de medidas das voltagens V_0 constitui a série referência de medidas e relaciona-se a uma resistividade ρ_0 . A segunda série de medidas está relacionada à distribuição modificada de distribuição de resistividade ρ_i . Desta maneira, nas equações acima, o vetor $\mathbf{b}$ constitui a diferença de potenciais medida e $\mathbf{f}$ a variação da impedância (expressa em termos de resistividade). Nomeando-se a transformação T inversa de B , pode-se rescrever as equações da seguinte maneira:

$$\Delta V = T \Delta \rho \quad (4a)$$

Onde,

$$\Delta \rho = \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_0} \quad (4b)$$

$$\Delta V = \frac{V_1 - V_0}{V_0} \quad (4c)$$

Então, o problema inverso é dado por:

$$\Delta \rho = B \Delta V \quad (5)$$

Dessa forma, o problema inverso de EFM na tomografia por impedância elétrica traduz-se em obter a matriz B (a inversa da matriz de sensibilidade). Porém, a matriz B varia conforme as posições dos eletrodos e sua reconstrução pode não ser a melhor possível. Desta maneira, propõe-se realizar o problema inverso levando-se em conta a posição dos eletrodos. Para isso, utiliza-se o algoritmo caixa-preta (*black-box algorithm*)

3.2.1 Black-box algorithm

A ideia principal por de trás do método da “caixa-preta” (*black-box*) é o pressuposto de que, se boas imagens e medições existem, então uma matriz que os relacione pode ser estimada. O método toma um conjunto de diferentes imagens e calcula suas respectivas variações dos potenciais nos eletrodos. Desses dois conjuntos de dados estima-se a matriz B . (MOURA, 2006)

O algoritmo *black box* estima diretamente a matriz B , dada a variação de potenciais elétricos na fronteira do domínio quando a posição de cada eletrodo é alterada uma a uma. Uma hipótese fundamental no método é a variação linear dos potenciais elétricos nos eletrodos.

Em linhas gerais, primeiramente admite-se uma posição inicial dos eletrodos que será usada como referencial. Através de FEM e utilizando-se a referência adotada, os potenciais elétricos são calculados para cada padrão de injeção de corrente. Uma perturbação é imposta em cada eletrodo por vez. Os potenciais elétricos nos eletrodos são computados e normalizados em relação aos potenciais correspondentes a posição original dos eletrodos. A matriz de potenciais elétricos perturbados é construída de tal forma que cada coluna da matriz é um vetor de potencial elétrico perturbado. Através da matriz de potencial elétrico perturbado e da matriz de posições perturbada, é possível determinar a matriz B .

Assim, pode-se definir o seguinte procedimento para encontrar a matriz $\mathbf{B}$:

- Admite-se uma distribuição angular inicial dos eletrodos;
- Denota-se cada padrão de injeção de corrente por $\{c_j\}_{qx1}$ para $j = 1, 2, \dots, e$;
- Atribui-se uma posição inicial dos eletrodos que constitui um vetor $\{\psi^0\}_{ex1}$, sendo que i -ésima posição de $\{\psi^0\}_{ex1}$ corresponde à posição do i -ésimo eletrodo.
- Os potenciais elétricos nos eletrodos v_j^0 são determinados através do problema direto por se utilizar apenas os potenciais elétricos nos nós que representam eletrodos para um determinado padrão de corrente:

$$Y|_{\rho^0} v_j^0 = c_j \quad , \quad j = 1, 2, \dots, e \quad (6)$$

- Uma perturbação conhecida na posição do i -ésimo eletrodo, é denotada por $\delta\psi_i$, $i = 1, 2, \dots, e$;
- Para cada um dos e conjuntos perturbados de posições dos eletrodos calcula-se a distribuição de potenciais pelo problema direto em cada um dos $c = 2e$ padrões de corrente;
- Vetores $\{\delta\psi^i\}_{ex1}$ são construídos tal que todos os elementos são nulos com exceção do i -ésimo eletrodo que contém $\delta\psi_i$, isto é, $\delta\psi_j^i = \delta\psi_i$;
- Para cada padrão de corrente c_j , os potenciais elétricos nos eletrodos v_j^i relacionados à perturbação de posição $\delta\psi^i$ são determinados pelo problema direto, utilizando-se apenas os potenciais elétricos nos eletrodos:

$$Y|_{(\rho^0 + \delta\rho^i)} v_j^i = c_j \quad , \quad j = 1, 2, \dots, e, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

- Seja $\{v^i\}_{e^2x1}$ um vetor aumentado formado por todos v_j^i , tal que:

$$v^0 = \begin{bmatrix} v_1^i \\ v_2^i \\ \dots \\ v_e^i \end{bmatrix} \quad (8)$$

- Cria-se um vetor normalizado $\{\psi^i\}_{nx1}$ tal que cada elemento seja

$$\psi_j^i = v_j^i - v_j^0 \quad (9)$$

- Cria-se um vetor normalizado $\{\theta^i\}_{e^2x1}$ tal que cada elemento seja

$$\theta^i = v^i - v^0 \quad (10)$$

- Define-se uma matriz $\mathbf{\Psi}_{nxn}$ tal que

$$\mathbf{\Psi} = [\psi^1 \dots \psi^i \dots \psi^n] \quad (11)$$

Note-se que, como por definição $\psi_j^i = 0$ para $i \neq j$, então $\mathbf{\Psi}$ é diagonal.

- Define-se uma matriz $\mathbf{\Theta}$ tal que

$$\mathbf{\Theta} = [\theta^1 \dots \theta^i \dots \theta^n] \quad (12)$$

- Como cada coluna de $\mathbf{\Psi}$ é uma imagem e pode ser relacionada a uma coluna de $\mathbf{\Theta}$ por uma matriz $\mathbf{B}$, pode-se dizer

$$\Psi_{n \times n} = \mathbf{B}_{n \times e^2} \Theta_{(e^2 \times n)} \quad (13)$$

o) Por fim, determina-se a matriz $\mathbf{B}$.

Como a matriz $\mathbf{B}$ não é quadrada, o problema é mal condicionado. Existem diversos métodos para o cálculo da matriz. Aqui mostrar-se-á o método pela Regularização de Tikhonov (MOURA *et al*, 2006; TIKHONOV, 1977). A matriz $\mathbf{B}$ correlaciona as matrizes $\Psi_{e \times e}$ e $\Theta_{e^2 \times e}$ pela expressão:

$$\Psi_{e \times e} = \mathbf{B}_{e \times e^2} \Theta_{e^2 \times e} \quad (14)$$

Pós multiplicando essa expressão por $\Theta_{e \times e^2}^T$, tem-se:

$$\Psi_{e \times e} \Theta_{e \times e^2}^T = \mathbf{B}_{e \times e^2} \Theta_{e^2 \times e} \Theta_{e \times e^2}^T \quad (15)$$

Logo, pode-se escrever $\mathbf{B}$ como:

$$\mathbf{B}_{e \times e^2} = \Psi_{e \times e} \Theta_{e \times e^2}^T (\Theta_{e^2 \times e} \Theta_{e \times e^2}^T)^{-1} \quad (16)$$

Como a matriz $\Theta_{e^2 \times e} \Theta_{e \times e^2}^T$ é singular, é necessário regularizá-la por se somar um termo identidade multiplicado por um fator λ muito pequeno (de ordem inferior a 10^{-6} ., resultando:

$$\mathbf{B}_{e \times e^2} = \Psi_{e \times e} \Theta_{e \times e^2}^T (\Theta_{e^2 \times e} \Theta_{e \times e^2}^T + \lambda I_{e^2 \times e^2})^{-1} \quad (17)$$

3.3. Índice de observabilidade

Qualquer matriz pode ser decomposta através da decomposição USV – *singular value decomposition*. (PRESS, 2007) Seja uma matriz B qualquer. Sua decomposição USV é:

$$B = U \Sigma V \quad (18)$$

onde as matrizes U e V são as matrizes dos vetores geradores dos espaços das linhas e colunas de B , respectivamente, e Σ é uma matriz diagonal, cujos valores correspondem aos valores singulares de B , i.e., seus autovalores. Esta decomposição é muito útil quando se deseja obter os autovalores e autovetores de uma matriz não quadrada, como no caso da matriz B do problema indireto.

Uma vez obtida a matriz de Σ , é possível definir um índice de observabilidade pela soma dos seus primeiros autovalores:

$$I(B) = \sum_{i=1}^n \sigma_i \quad (19)$$

Esse índice corresponde à soma dos n primeiros termos da diagonal principal da matriz Σ da decomposição USV. Maximizar esse índice significa maximizar a observabilidade. Porém, I é uma função composta:

$$I = I(B(p_1, p_2, \dots, p_e)) \quad (20)$$

onde p_i são as posições dos eletrodos. Assim, ao maximizar o índice, a posição de eletrodos que maximiza a observabilidade é definida. Isso pode ser feito através do algoritmo *simplex*.

4. Algoritmo de maximização

O método de minimização desenvolvido por Nelder e Mead tem por objetivo achar o mínimo local de uma função multivariável. No caso deste trabalho, a função multivariável é o índice de observabilidade, o qual tem o número de eletrodos como sendo o número de variáveis. O método é descrito em *Numerical Recipes* (PRESS, 2007).

A abordagem do simplex é geometricamente intuitiva. Constrói-se numa figura geométrica de dimensão N e $N + 1$ vértices e todas as suas arestas e faces (e.g, em duas dimensões o *simplex* é um triângulo, em três um tetraedro).

No algoritmo inicia-se com uma tentativa (i.e., um vetor de N variáveis independentes no ponto de início). O algoritmo então deve conduzir esse vetor “montanha abaixo” (“downhill”) através da topologia até encontrar um mínimo.

O método *simplex* precisa iniciar com $N + 1$ pontos, os quais definem um *simplex* inicial. Se esse ponto inicial for P_0 , então os outros N pontos podem ser:

$$P_i = P_0 + \Delta e_i \quad (21)$$

onde e_i 's são versores de ordem N e Δ é uma constante característica arbitrada como sendo o comprimento característico do problema.

Então o método passa a realizar uma série de passos, a maioria deles simplesmente se movendo o ponto do *simplex* onde a função é maior até a face oposta do *simplex* para um ponto mais baixo. Esses passos são denominados reflexões e conservam o volume do simplex. Depois, o método expande o *simplex* em uma direção para dar um passo maior. Ao encontrar um vale, o método contrai-se numa direção transversal e tenta seguir para o fundo do vale.

O algoritmo escrito em sua totalidade pode ser encontrado em *GSL gnu Manual Reference* (GALASSI *et al.*, 2009), em linguagem C e em *Numerical Recipes* (PRESS, 2007), linguagem C++. A implementação foi feita para o problema inverso de finito, o qual tem por variáveis as posições dos eletrodos, ou seja, é um problema de 32 variáveis.

5. Resultados

O rotina de minimização do índice gerado pelo algoritmo caixa-preta foi rodado para uma malha de 1206 elementos e 337 nós, mostrada abaixo conforme gerada pelo programa *Gmsh*.

Atribuiu-se uma precisão 10^{-3} . A rotina rodou 59 vezes antes de convergir para o valor mínimo. O valor do índice encontrado no ponto de convergência foi $I = 1,29745 \cdot 10^8$. Os valores iniciais e de convergência dos ângulos dos eletrodos (em radianos) são dispostos na tabela a seguir.

Tabela 1 - Tabela com resultados das posições do algoritmo

Equiespaçados (°)	Simplex (°)	Δ (°)	L (mm) (para C=90 cm)
0	-0.02099	0.020987	0.052467607
11.25	11.7261	0.476097	1.190242348
22.5	22.49111	0.008886	0.022213817
33.75	33.7754	0.025404	0.063509142
45	45.02537	0.025373	0.063431671
56.25	56.2754	0.025399	0.063497439
67.5	67.02518	0.474824	1.18706042
78.75	78.77539	0.025394	0.063485737
90	90.02542	0.025421	0.063551505
101.25	102.7755	1.52545	3.813626043
112.5	112.5255	0.025473	0.063683042
123.75	123.7755	0.0255	0.063748811
135	135.0255	0.025526	0.063814579
146.25	146.7752	0.525171	1.312928341
157.5	157.5256	0.025578	0.063946116
168.75	168.7756	0.025605	0.064011885
180	180.9888	0.988773	2.471932787
191.25	191.2757	0.025657	0.064143422
202.5	202.5251	0.025111	0.062776796
213.75	214.7343	0.984268	2.460670937
225	225.0252	0.025163	0.062908333
236.25	236.2752	0.02519	0.062974101
247.5	247.4868	0.013172	0.032930561
258.75	259.2754	0.525434	1.313586026
270	270.0253	0.025269	0.063171407
281.25	281.2753	0.025295	0.063237175
292.5	292.2595	0.240531	0.601328099

Equiespaçados (°)	Simplex (°)	Δ (°)	L (mm) (para C=90 cm)
303.75	303.7753	0.025347	0.063368712
315	314.5252	0.474818	1.187045907
326.25	326.2754	0.0254	0.063500249
337.5	337.7752	0.275236	0.688090014
348.75	349.243	0.492986	1.232465688

A figura a seguir ilustra a diferença na posição dos eletrodos.

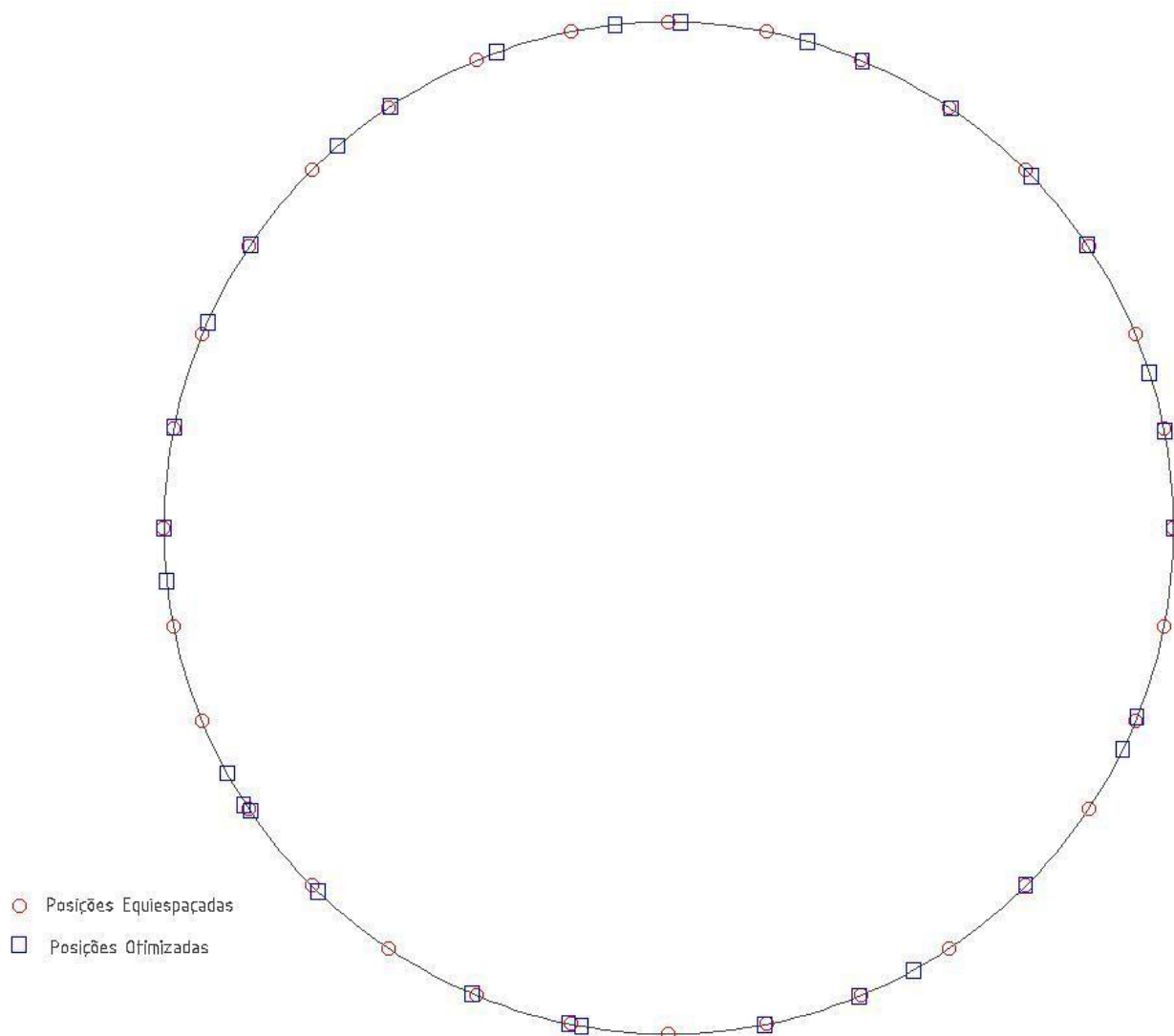


Figure 1 - Comparação entre posições equiespaçadas e otimizadas. A diferença foi exagerada em 10 vezes para permitir melhor visualização na escala da figura.

Vê-se pela tabela 1 que houve variações significativas na posição dos eletrodos (de até 3°) mostrando que o algoritmo é eficaz e que a posição convencional de disposição dos eletrodos utilizada atualmente como prática (equiespaçada) não possui a melhor observabilidade numa TIE.

6. Agradecimentos

Agradeço ao professor Raul Gonzalez Lima pela paciência e atenção prestados durante a execução deste projeto.

7. Referências

- ADLER, Andy; LABERGE, Camille; SOLEIMANI, Manuchehr. Imaging of conductivity changes and electrode movement in EIT. *Physiological Measurement*, N°27, 2006.
- BARBER, D. C.; BROWN, B. H. Applied Potential Tomography. *Journal of Physics E: Scientific Instruments*, vol. 17, N° 9, 1984.
- HERRERA, Claudia Natalia Lara. **Algoritmo de Tomografia por Impedância Elétrica baseado em *Simulated Annealing***. 2007. 59 p. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 2007.
- LOGAN, Daryl L. **A First Course in the Finite Element Method**. PWS Publishing Company: Boston, 1997. 908p.
- MELLO, Luís Augusto Motta. **Estudo de aumento de desempenho de um sistema de tomografia de impedância elétrica através de método de otimização topológica**. Tese- USP. São Paulo, 2010, 247p.
- MOURA, Fernando Silva de. et al. Regularizations for a Black Box EIT algorithm. *ABCM Symposium Series in Mechatronics*, 2006.
- PRESS, William H. *et al.* **Numerical Recipes – The art of Scientific Computing – Third Edition**. New York: Cambridge University Press, 2007. 1235p.
- VAUHKONEN, Päivi J. **Image Reconstruction in Three-Dimensional Electrical Impedance Tomography**. Tese – University of Kuopio. Kuopio, Finlândia, 2004. 199p.

8. Direitos autorais

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

ALGORITHM FOR DETERMINING THE OPTIMAL POSITION OF ELECTRODES IN ELECTRICAL IMPEDANCE TOMOGRAPHY

Luís Eduardo Sartori Pivatto

luisedu21@gmail.com

Abstract. *Tomography is an important medical resource for detection and prevention of diseases. The electrical impedance tomography (EIT) makes use of electrodes in order to obtain signals which create images of electrical potential and resistivity of the human organ in study. The current practice is to dispose the electrodes equally spaced on the patient. The aim of this project is to identify the optimal positions, which allow the production of the best image in the tomography. The electrical potentials distribution can be obtained via the direct finite problem solution of the generalized Laplace Equation. As for the optimal position of electrodes, the inverse problem is worked out by varying the angle of each one of the electrodes in the boundary domain via the black-box algorithm. From the algorithm results, a observability index is defined based on the USV decomposition of the matrix that correlates potential distribution with electrodes position variations. At least, the Nelder and Mead simplex method of minimization is applied in order to discover the electrodes positions which optimize this index.*

Keywords. *electrical impedance tomography, finite elements, direct problem, inverse problem, black-box algorithm*