FELIPE BEZERRA DE LIMA LOPES

IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DOS PAINÉIS PARA ESTUDO AERODINÂMICO DE ASAS UTILIZANDO DISTRIUIÇÃO DE VÓRTICES COMO ELEMENTO DE SINGULARIDADE

SÃO PAULO
2011

FELIPE BEZERRA DE LIMA LOPES

IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DOS PAINÉIS PARA ESTUDO AERODINÂMICO DE ASAS UTILIZANDO DISTRIUIÇÃO DE VÓRTICES COMO ELEMENTO DE SINGULARIDADE

Trabalho de Formatura apresentado ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

Orientador:
Prof. Dr. Ernani Vitillo Volpe

São Paulo

2011

FICHA CATALOGRÁFICA

Lopes, Felipe Bezerra de Lima
Implementação do método dos painéis para estudo aerodinâmico de asas utilizando distribuição de vórtices como elemento de singularidade / F.B. de L. Lopes. – São Paulo, 2011.
p.100

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1.Aerodinâmica de aeronaves 2.Vórtices dos fluídos 3.Estrutura de aeronaves 4.Escoamento potencial I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II.t.

RESUMO

O trabalho consiste em projetar uma rotina Matlab que simule o escoamento ao redor de asas com base na teoria do escoamento potencial utilizando o método dos painéis utilizando uma distribuição de vórtices como elemento de singularidade. Inicialmente, pretende-se estudar e aplicar o método para o caso bidimensional, estudando as propriedades do escoamento ao redor de perfis de asas, calculando a distribuição de circulação e de coeficiente de pressão. Posteriormente, o método será aplicado para o caso tridimensional, comparando-se os resultados do método dos painéis com resultados conhecidos da Teoria da Linha de Sustentação para uma distribuição elíptica de corda com o objetivo de validar o método. Uma vez validado, o código será aplicado para outras forma em planta de asa e, assim, podemos estudar a influência de fatores geométricos como distribuição de corda, enflechamento, etc.

Palavras-chave: Aerodinâmica, Método dos Painéis, Distribuição de Vórtices, Escoamento potencial, Linha de sustentação, Engenharia Mecânica.

Lista de figuras

Sumário

1 Estudo da Teoria da Linha de Sustentação

Para o projeto de asas utilizando o método dos painéis, são utilizados conceitos referentes ao escoamento potencial, onde os efeitos de compressibilidade do escoamento são desprezados. No método dos painéis, são satisfeitas, basicamente, três equações:

$$\nabla^2\phi = 0 \tag{1}$$

$$\nabla^2\psi = 0 \tag{2}$$

$$\gamma(TE) = 0 \tag{3}$$

Onde:

Φ: Função velocidade potencial;

ψ: Função linha de corrente;

$\gamma(TE)$: Circulação no bordo de fuga da seção da asa.

No decorrer deste trabalho, também serão impostas as condições de impenetrabilidade ($\vec{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} = \nabla\phi \cdot \mathbf{n}$, onde **n** é o versor normal) e de escoamento não perturbado no infinito ($\nabla\phi|_\infty = 0$).

Como as equações utilizadas na teoria do escoamento potencial são lineares, podemos utilizar o princípio da superposição para gerar um escoamento resultante. Assim, os escoamentos gerados em cada painel são superpostos ao escoamento ao longe do bordo de ataque. Dessa forma, é possível calcular os esforços presentes na asa como sustentação, arrasto induzido, momento e downwash.

Com objetivo de validar os cálculos acima, podemos compará-los com resultados previamente obtidos de teorias clássicas como a Teoria da Linha de

Sustentação. Dessa forma, será realizado aqui um estudo preliminar desta teoria.

A teoria da linha de sustentação tem como objetivo, adicionar os efeitos presentes na asa finita nos cálculos da asa bidimensional (onde os cálculos partem do princípio que a asa é infinita). Dessa forma, como a circulação e, consequentemente, a sustentação na ponta da asa é nula, aparecem alguns efeitos como arrasto induzido e downwash.

Inicialmente, consideremos uma asa finita de envergadura *b* representada por uma linha de vórtices (bound vortex) como está representado na figura 1. Pela lei de Kutta Joukowski, existe uma força perpendicular à direção do escoamento dada pela relação:

$$L = \rho V_\infty \Gamma \tag{4}$$

Entretanto, pelas leis dos vórtices de Helmholtz, sabemos que uma linha de vórtices não pode terminar nas pontas da asa, mas a mesma deve formar um circuito fechado. Assim, é necessária a presença de um vórtice de início de mesma intensidade e sentido oposto no bordo de ataque representado pelo segmento CD. Os segmentos BD e AC são acrescentados para terminar o circuito fechado. Na figura abaixo, pode-se observar uma representação da linha de sustentação considerando que a intensidade da circulação é constante ao longo da envergadura.

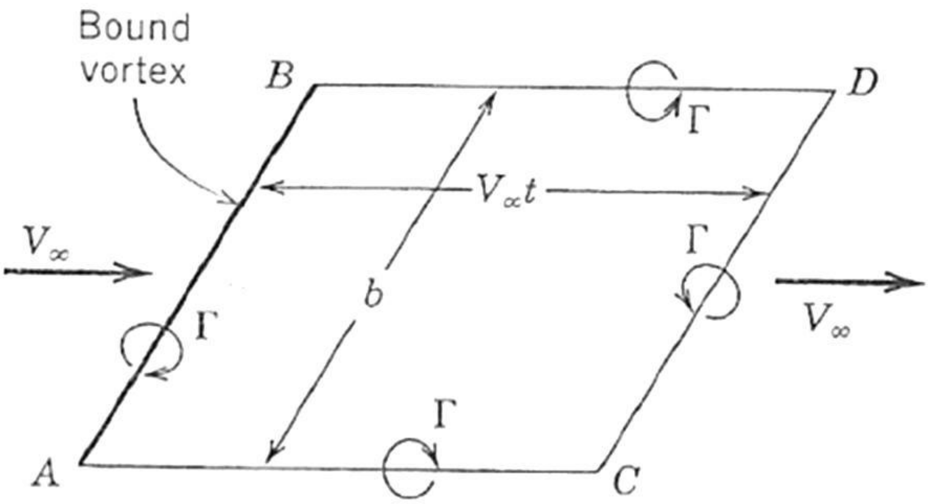

Figura 1: Configuração de vórtices após o início do escoamento ao redor de AB. Reprodução de [3]

Esta configuração se encontra apenas no início do escoamento. Com o tempo, admitindo uma configuração estacionária, a linha de vórtice de início (CD) se encontrará muito distante da linha de vórtice AB. Assim, a asa assume uma configuração na qual cada seção da mesma possui uma intensidade de circulação variando de zero (na ponta da asa) até um valor máximo (no plano de simetria da asa) e com os vórtices se estendendo até o infinito, como representado na figura 2.

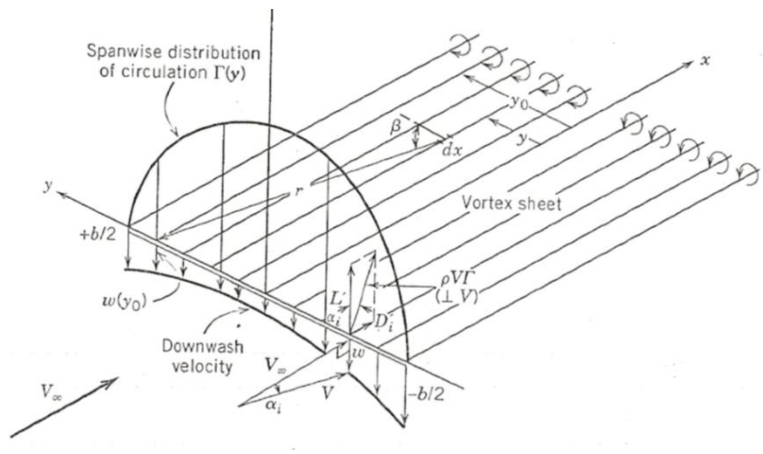

Figura 2: Configuração em um estado estacionário. Reprodução de [3]

Na figura acima, também é possível observar a presença de uma velocidade de "downwash" resultante da diferença de pressões na parte superior e inferior na ponta da asa.

Pela figura, notamos que:

$$\alpha_i(y) = arctg \frac{w}{V_\infty} \quad (5)$$

Pela lei de Kutta-Joukowski, sabemos que a força qeu atua na linha de vórtice tem intensidade $\rho V \Gamma$ e é normal a V. Assim:

$$L' = \rho V \Gamma cos\alpha_i \quad (6)$$

$$D'_i = -\rho V \Gamma sin\alpha_i \quad (7)$$

Como o ângulo de ataque induzido é pequeno temos que:

$$tg\alpha_i \cong sin\alpha_i \cong \alpha_i \quad (8)$$

$$\alpha_i = \frac{w}{V_\infty} \quad (9)$$

$$L'(y) = \rho V_\infty \Gamma \quad (10)$$

$$D'_i = -L'^{\alpha_i} = -\rho w \Gamma \quad (11)$$

A velocidade induzida (downwash) pode ser determinada através da lei de Biot-Savart e a sua expressão está determinada abaixo:

$$w_{y_0 y} = -\frac{d\Gamma}{4\pi}\frac{1}{y_0 - y} \tag{12}$$

Onde $w_{y_0 y}$ é a velocidade induzida na posição y_0 da asa por um elemento infinitesimal na posição y e $d\Gamma$ é a circulação infinitesimal de um filamento de vórtice de largura dy e comprimento infinito. Assim, integrando a equação acima ao longo da asa temos:

$$d\Gamma = \left(\frac{d\Gamma}{dy}\right)_{asa} dy \tag{13}$$

$$\alpha_i(y_0) = -\frac{1}{4\pi V_\infty}\int_{-b/2}^{b/2} \frac{\left(\frac{d\Gamma}{dy}\right)_{asa}}{y_0 - y}\, dy \tag{14}$$

Para encontrarmos a circulação ao longo da envergadura de uma asa, precisamos definir a seguinte relação:

$$\alpha_a = \alpha_0 - \alpha_i = \alpha - \alpha_{L0} \tag{15}$$

Onde α_a é o ângulo de ataque absoluto, α_i é o ângulo de ataque induzido e α_0 é o ângulo de ataque efetivo. A relação acima está representada na figura 3:

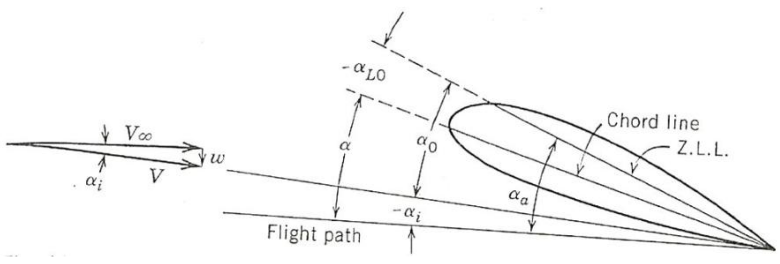

Figura 3: Fundamental diagrama da teoria da asa finita. Reprodução de [3]

Sabendo-se que o ângulo de ataque em uma dada seção da asa de comprimento de corda *c* pode ser dada por:

$$\alpha_o = \frac{2\Gamma}{m_0 V_\infty c} \tag{16}$$

Onde m_0 é a inclinação da curva C_L x α.

Substituindo a equação (16) e (14) na equação (15) temos:

$$\alpha_a(y_0) = \left(\frac{2\Gamma}{m_0 V_\infty c}\right)_{y_0} + \frac{1}{4\pi V_\infty}\int_{-b/2}^{b/2} \frac{(\frac{d\Gamma}{dy})_{asa}}{y_0 - y} dy \qquad (17)$$

Para desenvolver a equação acima iremos propor a seguinte transformação de variáveis: $y = \left(\frac{b}{2}\right) cos\theta$.

Assim, utilizaremos uma distribuição de circulação representada pela série de Fourier abaixo (que obedece ás condições de Kutta):

$$\Gamma = \frac{1}{2} m_0 c_s V_\infty \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \qquad (18)$$

Onde c_s é a corda no plano de simetria da asa e $y = \left(\frac{b}{2}\right) cos\theta$.

Substituindo a equação (18) na equação (17) e após diferenciação e integração chegamos a:

$$\alpha_a(\theta) = \frac{m_{0s} c_s}{m_0} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta + \frac{m_{0s} c_s}{4b} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \qquad (19)$$

Na equação acima, percebemos, através de uma comparação com a equação (15), que a primeira parcela se refere ao ângulo de ataque efetivo e a segunda parcelo se refere ao ângulo de ataque induzido com sinal negativo.

Podemos calcular facilmente os coeficientes de sustentação e arrasto induzido ao longo da asa pela substituição direta das equações (18) e (19). Assim:

$$c_l = \frac{\rho V_\infty \Gamma}{q_\infty c} = \frac{m_{0s} c_s}{c} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \qquad (20)$$

$$c_{d_i} = -c_l \alpha_i = \frac{m_{0s}^2 c_s^2}{4bc} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} k A_k \frac{\sin k\theta}{\sin \theta}\right) \qquad (21)$$

Para encontrarmos as condições do escoamento ao longo de uma asa de geometria qualquer, devemos utilizar a equação (19), estabelecendo os valores de $\alpha_a(\theta)$ e encontrando os coeficientes da série que satisfazem a equação. Assim, precisaremos resolver a seguinte equação matricial:

$$[C]_{nxn}[A]_{nx1} = [\alpha]_{nx1} \tag{22}$$

Onde:

C: matriz correspondente às parcelas em θ;

A: matriz dos coeficientes;

α: matriz dos ângulos;

1.1 Simulação da teoria da linha de sustentação

Dessa forma, elaborou-se uma rotina em Matlab para a obtenção dos coeficientes. Para esta simulação, utilizou-se uma asa elíptica plana (sem torção) com os seguintes parâmetros: $V_\infty = \frac{100km}{h}; b = 30m; RA\ (razão\ de\ aspecto) = 6;\ \alpha = 4°;\ \rho = \frac{1,2kg}{m^3}; n = 30$ (número de coeficientes utilizados). Os resultados obtidos estão demonstrados nas figuras abaixo:

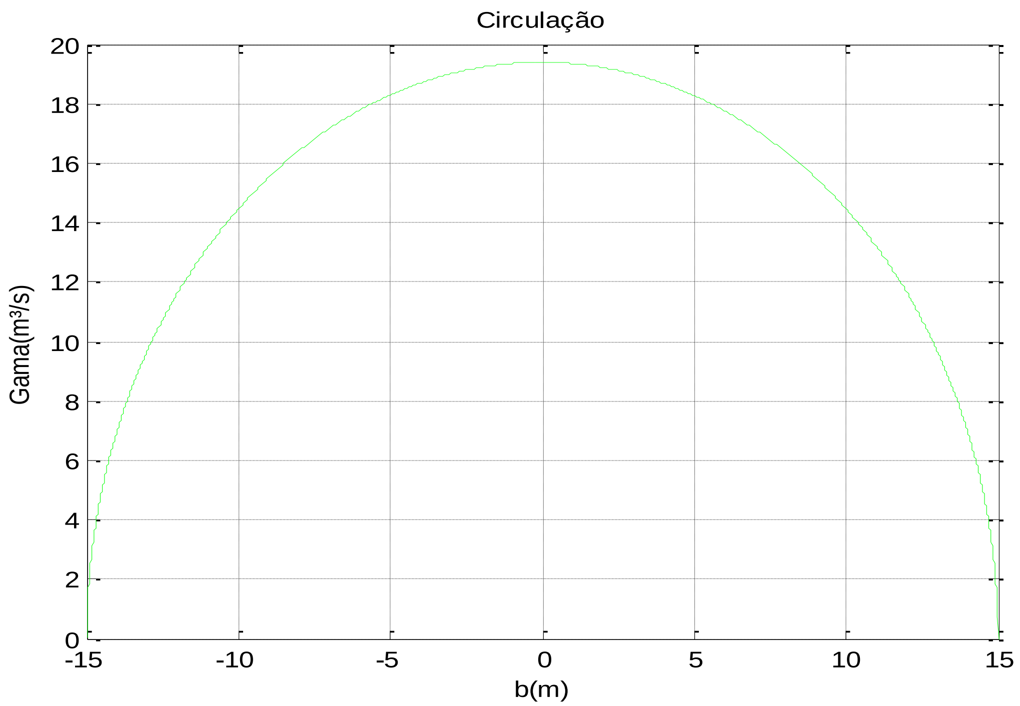

Figura 4: Distribuição de circulação

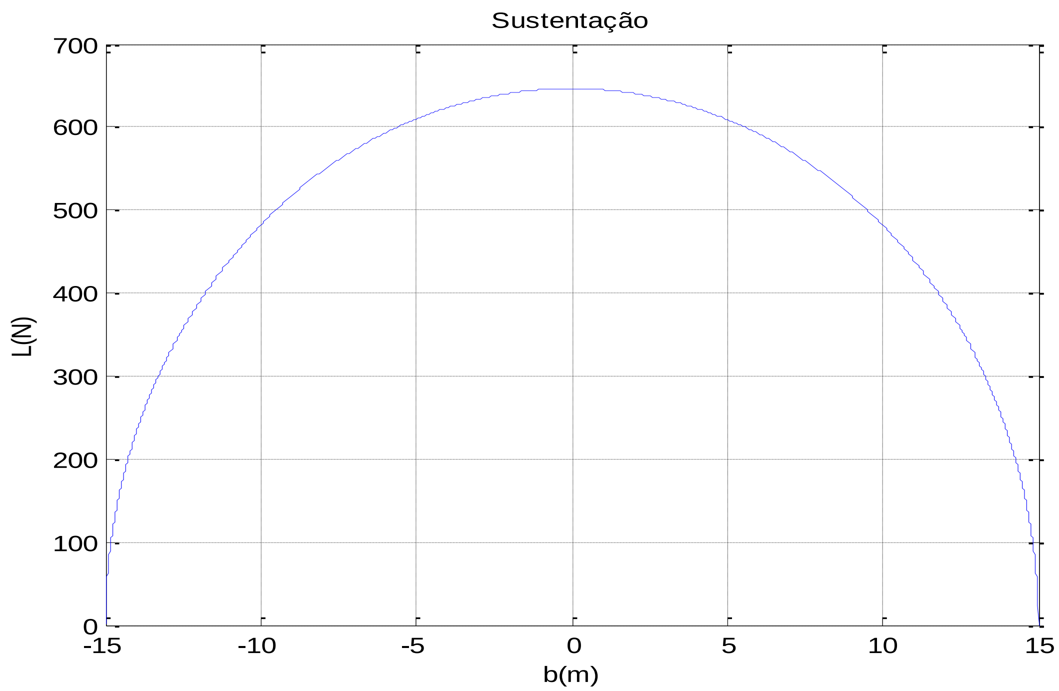

Figura 5: Distribuição de sustentação

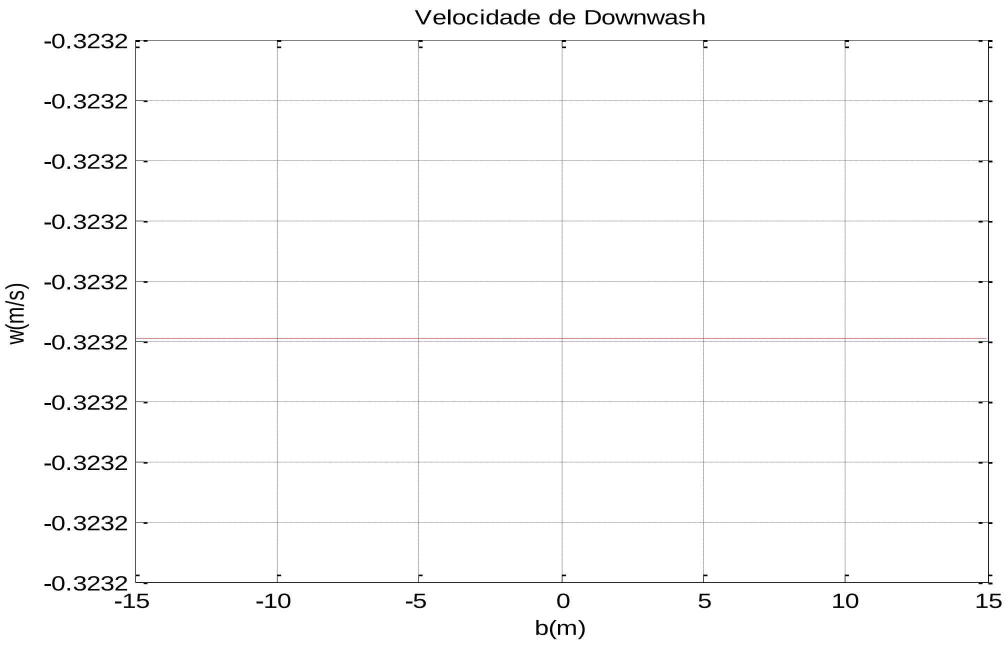

Figura 6: Distribuição de downwash

2 O método dos painéis bidimensional

Neste ponto do trabalho, será apresentada a metodologia utilizada nos conceitos do método dos painéis.

Inicialmente, considere a figura 1, em que um corpo com uma geometria conhecida S_B está imerso em um escoamento potencial. O escoamento de interesse está localizado na região externa V, onde a equação da continuidade afirma que:

$$\nabla^2 \Phi^* = 0 \tag{23}$$

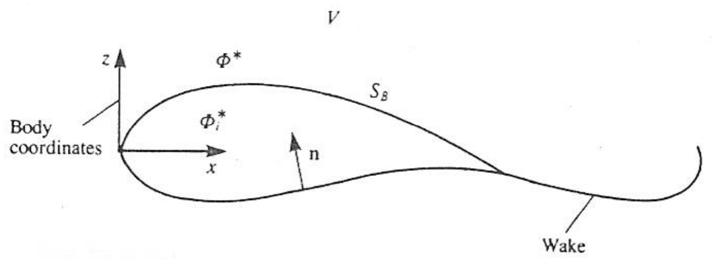

Figura 7: Escoamento potencial ao redor de um corpo fechado. Reprodução de [2]

Pela identidade de Green [2], nós podemos construir uma solução geral para a equação acima através da soma de uma distribuição de fonte (σ) e dipolo (μ) colocados na superfície do corpo emergido no escoamento potencial. Assim, solução geral é:

$$\Phi^*(x,y,z) = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_B} \left[\sigma\left(\frac{1}{r}\right) - \mu \boldsymbol{n} \cdot \nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right] dS + \Phi_\infty \tag{24}$$

Fica claro que a equação acima possui várias soluções. Assim, para obtermos uma solução única para o método dos painéis 2D, devemos selecionar uma escolha adequada de distribuição de fontes e dipolos e aplicar a condição de contorno de não haver escoamento na direção normal (direção do vetor **n**) e a condição de Kuta.

Vale destacar que para o caso 3D (que serão objetos de estudos posteriores neste projeto), outras condições de contorno deverão ser introduzidas para garantir a unicidade da solução. Essas condições tratam do correto modelo do escoamento na esteira no bordo de fuga da asa que, neste projeto, podendo ser modelado como um painel de vórtices ou de dipolos.

Assim, podemos reescrever a equação (24) da seguinte forma:

$$\Phi^*(x,y,z) = \frac{1}{4\pi}\int_{corpo+esteira} \mu \boldsymbol{n}\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right) dS - \frac{1}{4\pi}\int_{corpo} \sigma\left(\frac{1}{r}\right) dS + \Phi_\infty \qquad (25)$$

Para a escolha da condição de contorno, podemos escolher, basicamente, entre a condição de contorno de Neumman e a condição de contorno de Dirichlet.

A condição de contorno de Neumman requer que não haja escoamento na direção normal á superfície apontando para dentro da mesma. Em termos matemáticos, temos $\partial\Phi^*/\partial n = 0$. Aplicando esta condição na equação (25) temos:

$$\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{corpo+esteira} \mu\nabla\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right] dS - \frac{1}{4\pi}\int_{corpo} \sigma\nabla\left(\frac{1}{r}\right) dS + \nabla\Phi_\infty\right\}\cdot\boldsymbol{n} = 0 \qquad (26)$$

A condição de contorno segundo Dirichlet permite obter o escoamento potencial no interior do corpo, estabelecendo a perturbação potencial Φ (soma das duas integrais da equação (23)) ao redor da superfície S_B. Isto pode ser feito através da equação (24), escolhendo uma determinada distribuição dos elementos de singularidade. Assim, obtemos:

$$\Phi_i^*(x,y,z) = \frac{1}{4\pi}\int_{corpo+wake} \mu \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS - \frac{1}{4\pi}\int_{corpo} \sigma \left(\frac{1}{r}\right) dS + \Phi_\infty \quad (27)$$

Nota-se que, para que a condição de que o escoamento na direção normal à superfície seja zero, devemos ter:

$$\Phi_i^* = constante \qquad (28)$$

Assim, podemos igualar a equação (26) a determinados valores constantes e, dessa forma, encontrar a solução para o escoamento ao redor do corpo.

Entretanto, como foi dito anteriormente, é necessária a criação de um modelo para o escoamento no bordo de fuga da asa para tornar a solução única para a análise tridimensional. Para isso, vamos analisar a figura 8 onde, por simplicidade, a sustentação está representada por uma linha de vórtice de intensidade Γ. Segundo o teorema de Helmholtz [2], uma linha de vórtice não pode iniciar em um fluido. Assim, podemos escrever:

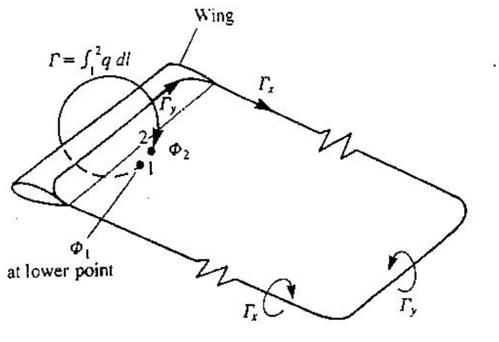

Figura 8: Vórtices criados por uma asa finita em vôo estacionário. Reprodução de [2]

$$\frac{\partial \Gamma_x}{\partial x} = \frac{-\partial \Gamma_y}{\partial y} \qquad (29)$$

No caso particular da figura 8, a equação (29) se reduz a:

$$\Gamma = \int_{1}^{2} \boldsymbol{q} \cdot d\boldsymbol{l} \tag{30}$$

Onde os pontos 1 e 2 estão, respectivamente, abaixo e acima do escoamento no bordo de fuga. No caso de uma asa com circulação constante Γ, a descontinuidade próxima ao bordo de fuga é:

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \Gamma \tag{31}$$

Para modelar a esteira, inicialmente vamos determinar a sua intensidade. O modo mais fácil para contornar este problema é a através da condição de Kutta [2] onde:

$$\gamma_{T.E.} = 0 \tag{32}$$

Para o caso bidimensional, temos que $\partial\mu(x)/\partial x = -\gamma(x)$ [2], onde μ é a intensidade do dipolo. Utilizando esta expressão e a equação (32), concluímos que μ é constante no bordo de fuga e igual ao ser valor no escoamento além do bordo de fuga. Assim:

$$\mu_{T.E.} = constante = \mu_w \tag{33}$$

E

$$\mu_U - \mu_L - \mu_w = 0 \tag{34}$$

Onde μ_U e μ_L são, respectivamente, as intensidades dos dipolos nas superfícies superior e inferior do bordo de fuga (figura 3).

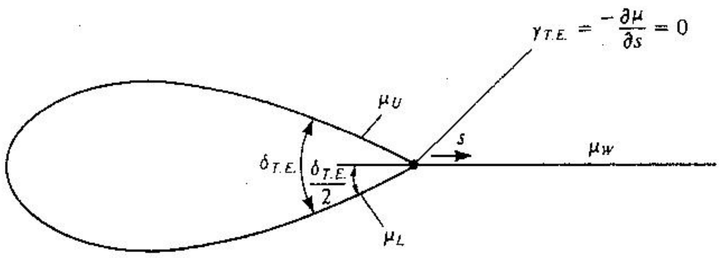

Figura 9: Implementação da condição de Kutta usando uma distribuição de dipolos. Reprodução de [2]

Para modelarmos a forma da esteira, partimos do pressuposto de que o escoamento nesta região não deve promover sustentação. Assim, pelo teorema de Kuta temos:

$$\Delta \mathbf{F} = \rho \mathbf{q} \times \gamma_w = 0 \tag{35}$$

Assim, concluímos que:

$$\gamma_w || \mathbf{q} \tag{36}$$

Dessa forma, quando trabalhamos com o método dos painéis , devemos impor que os elementos de singularidade deixem o bordo de fuga paralelamente ao escoamento ao longe da asa.

2.1 Metodologia para a solução do problema

Para solucionar um problema utilizando o método dos painéis, a superfície do corpo será dividia em N painéis e N_w painéis para o escoamento na parte posterior no bordo de fuga (ver figura 10) e a condição de contorno será especificada para cada painel em um ponto chamado ponto de colocação.

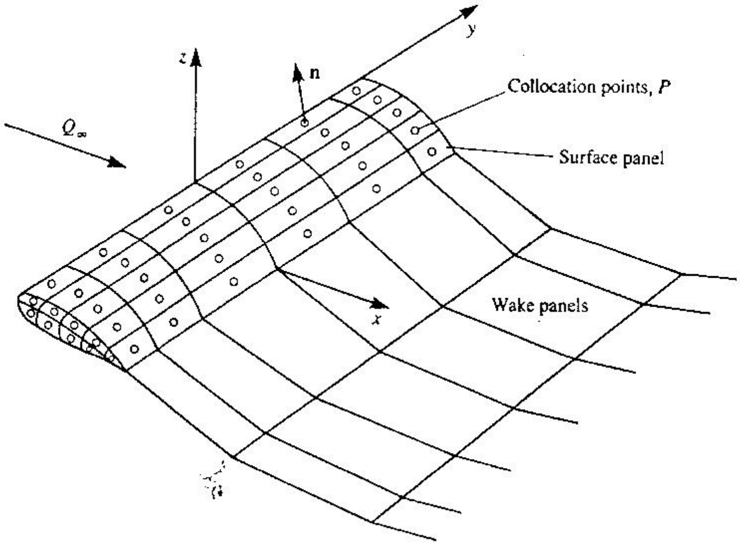

Figura 10: Aproximação da superfície do corpo pelo método dos painéis. Reprodução de [2]

Utilizando a condição de contorno de Dirichlet para cada painel, podemos escrever a equação (26) da seguinte forma (onde foi adotado $\Phi_i^* = \Phi_\infty$).

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{4\pi} \int_{painel\ do\ corpo} \mu \mathbf{n} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r}\right) dS + \sum_{l=1}^{N_w} \frac{1}{4\pi} \int_{painel\ do\ wake} \mu \mathbf{n} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r}\right) dS - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{4\pi} \int_{painel\ do\ corpo} \sigma \left(\frac{1}{r}\right) dS = 0 \quad (37)$$

Segundo a equação acima, calculamos a influencia de cada um dos *k* painéis no painel cujo ponto de colocação é P. Aplicando a equação acima assumindo um elemento de singularidade de intensidade constante μ, a influência de um painel retangular *k* no ponto P é:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{1,2,3,4} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r}\right) dS \equiv C_k \quad (38)$$

E para uma distribuição de fontes com intensidade constante:

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{1,2,3,4}\left(\frac{1}{r}\right)dS \;\equiv\; B_k \tag{39}$$

Onde 1,2,3,4 são os pontos dos cantos do painel retangular *k* e, portanto, a integral acima é calculada sobre a área do painel. Assim, para cada ponto de colocação P, podemos transformar a equação (37) na seguinte expressão:

$$\sum_{k=1}^{N} C_k\mu_k + \sum_{l=1}^{N_w} C_l\mu_l + \sum_{k=1}^{N} B_k\sigma_k = 0 \tag{40}$$

Como foi dito anteriormente, segundo a condição de Kutta, podemos escrever os dipolos que formam a esteira em função dos dipolos que formam o bordo de fuga como $\mu_t = \mu_r - \mu_s$ (onde, os subscritos r e s representam os painéis do dorso superior do bordo de fuga e do dorso inferior do bordo de fuga, respectivamente e o subscrito t representa o painel da esteira). Assim, aplicando os coeficientes de influencia temos:

$$C_t\mu_t = C_t(\mu_r - \mu_s) \tag{41}$$

Podemos substituir a expressão acima em:

$A_k = C_k$ caso o painel não esteja no bordo de fuga

$A_k = C_k \pm C_t$ caso o painel esteja no bordo de fuga

Onde os sinais de $\pm$ dependem se o painel está na superfície superior ou inferior do bordo de fuga.

Adotando-se a condição de contorno de Dirichlet, pode-se escrever que [1]:

$$\sigma = \mathbf{n} \cdot \mathbf{Q}_\infty \tag{42}$$

Assim, podemos passar os termos $B_k \sigma_k$ da equação (40) para o lado direito. Dessa forma:

$$\sum_{k=1}^{N} A_k \mu_k = -\sum_{k=1}^{N} B_k \sigma_k \tag{43}$$

Passando para a forma matricial temos:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{N1} & \cdots & b_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_2 \end{pmatrix} \tag{44}$$

Dessa forma, temos um sistema linear de N equações e N incógnitas μ_k e, com isso, o problema resume-se a resolver esse conjunto de equações, encontrando as intensidades dos dipolos correspondentes a cada painel que fornecem a solução para o escoamento em questão.

Com o que foi exposto acima, os passos para a resolução do problema serão os seguintes:

- *Selecionar os elementos de singularidade:* aqui deverá ser escolhido qual elemento será utilizado para a resolução do problema (fontes, dipolos ou vórtices) e como será a distribuição do mesmo no painel (elementos pontuais, intensidade constante, lineares, parabólicos, etc.);
- *Discretização da superfície estudada:* escolha da geometria do painel, definindo os limites de cada painel bem como os pontos de controle do mesmo (Figura 11);

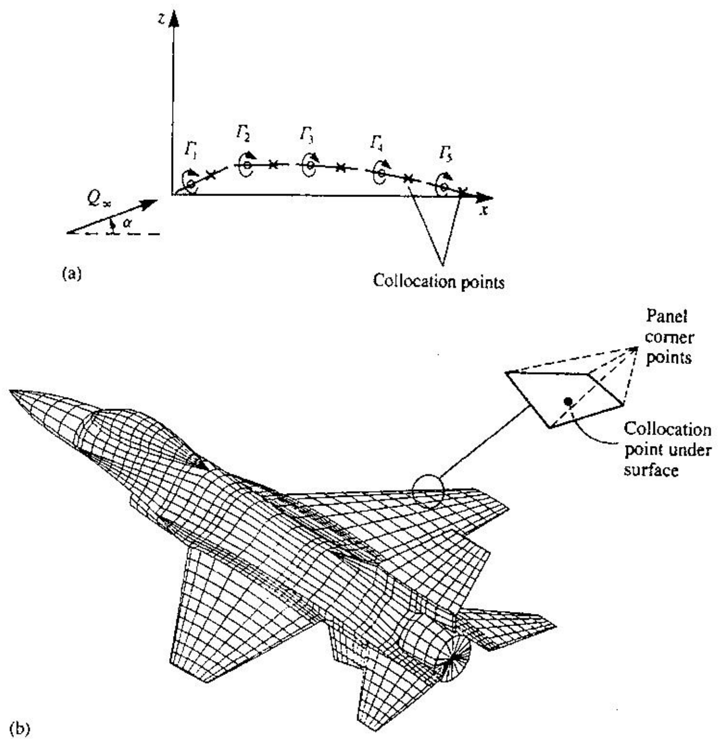

Figura 11: Discretização de (a) geometria de um aerofólio delgado usando vórtice discreto como elemento e de (b) um corpo tridimensional utilizando uma superfície de fontes e dipolos com intensidade constante. Reprodução de [2]

- *Cálculo dos coeficientes de influencia:* aqui será definida uma rotina computacional para calcular os coeficientes de influencia através das equações (38) e (39);
- *Estabelecer o lado direito do sistema linear:* esta etapa será realizada através das equações (43) e (44);
- *Resolução do sistema linear:* será realizada uma rotina computacional para encontrar a intensidade dos elementos de singularidade para cada painel;

- *Cálculo das cargas aerodinâmicas:* uma vez conhecida a intensidade dos elementos de singularidade em cada painel, pode-se calcular as cargas aerodinâmicas em cada painel bem como a carga resultante em toda a superfície.

2.2 Implementação numérica

Para a implementação dos métodos descritos anteriormente, utilizaremos vórtice como elemento de singularidade. Para a primeira simulação, iremos utilizar vórtices discretos.

Para esta configuração, temos as seguintes equações, que calculam as velocidades em um ponto (x,y) induzidas por um vórtice discreto de intensidade Γ_j localizado no ponto (x_j, y_j):

$$\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \frac{\Gamma_j}{2\pi r_j^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_j \\ z - z_j \end{pmatrix} \tag{45}$$

Onde $r_j^2 = (x - x_j)^2 + (z - z_j)^2$.

Inicialmente, o método dos painéis será implementado na linha de arqueamento de um aerofólio. Assim, a discretização será realizada de tal modo que a linha de arqueamento do aerofólio seja dividida em N painéis de comprimento iguais. Logo, os vetores normais serão posicionados nos pontos de controle dados pela seguinte relação (ver Figura 12).

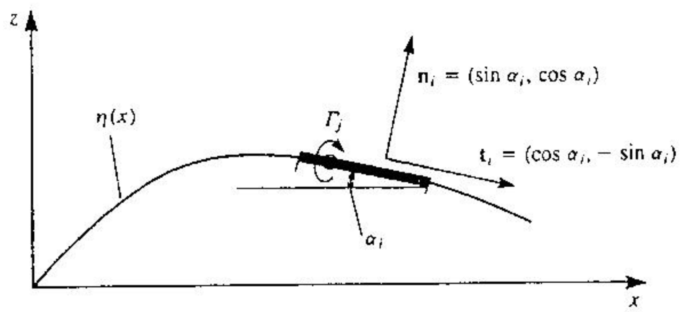

Figura 12: Esquema utilizado na definição das coordenadas dos pontos de controle no painel. Reprodução de [2]

$$\mathbf{n}_i = \frac{(\partial\eta/\partial x, 1)}{\sqrt{(\partial\eta/\partial x)^2 + 1}} = (\sin\alpha_i, \cos\alpha_i) \tag{46}$$

Para o cálculo dos coeficientes de influencia, será imposta a condição de não existir escoamento na direção normal à superfície. Assim:

$$\mathbf{q}\cdot\mathbf{n} = 0$$

Ou

$$(u, w)\cdot\mathbf{n} + \left(U_{\infty,}W_{\infty}\right)\cdot\mathbf{n} = 0 \qquad (47)$$

Onde, o primeiro termo corresponde às velocidades induzidas pelos vórtices discretos de intensidade unitária e, o segundo termo, corresponde ao escoamento ao longe da superfície em estudo.

Os coeficientes de influencia a_{ij} serão calculados como:

$$a_{ij} = (u, w)_{ij}\cdot\mathbf{n}_i \tag{48}$$

Como $U_\infty \, e \, W_\infty$ são conhecidos, o segundo termo da equação (47) será passado para o lado direito. Assim temos:

$$RHS_i = -(U_\infty, W_\infty) \cdot \mathbf{n}_i \tag{49}$$

Dessa forma, basta resolver o seguinte sistema linear:

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} \Gamma_j = RHS_i \tag{50}$$

E, com os valores dos Γ_j conhecidos, podemos calcular as seguintes cargas aerodinâmicas:

$$\Delta L_j = \rho Q_\infty \Gamma_j \tag{51}$$

$$\Delta p_j = \rho Q_\infty \frac{\Gamma_j}{\Delta c} \tag{52}$$

Realizando o procedimento descrito para uma linha de arqueamento de um fólio simétrico, (sem arqueamento) para um ângulo de ataque de 9º temos os seguintes resultados:

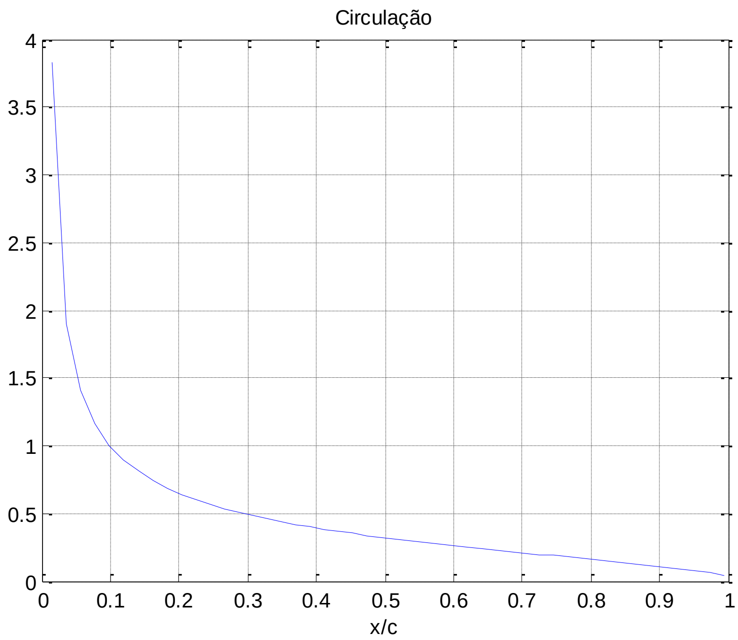

Figura 13: Distribuição de circulação nos painéis

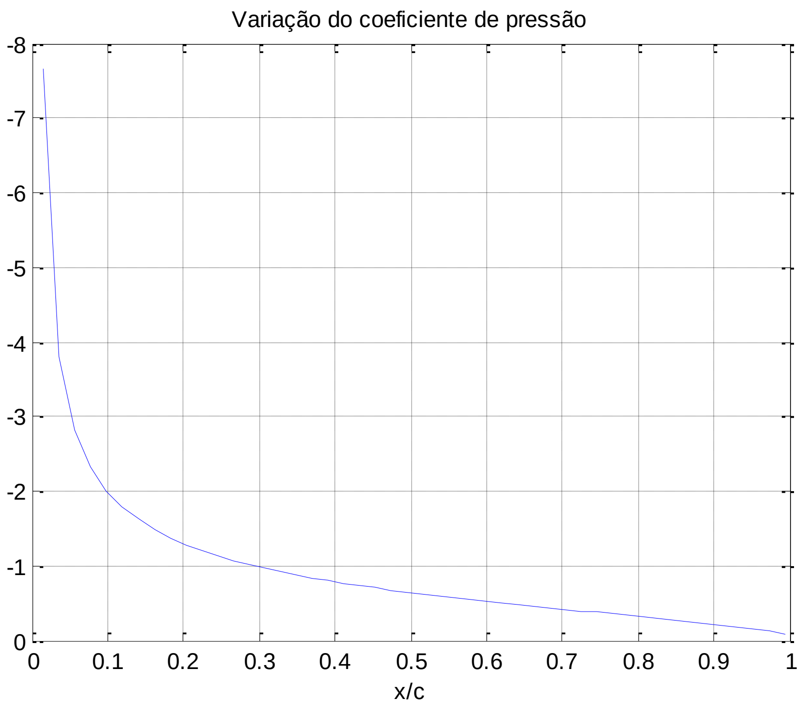

Figura 14: Variação do coeficiente de pressão

Pela equação (52), vemos que a variação de pressão é proporcional à circulação. Assim, conforme apresentado na figura 14, como a variação do coeficiente de pressão no bordo de fuga é zero, temos que a circulação também deve ser zero.

Executando os mesmos procedimentos para uma linha de arqueamento parabólica cuja função é:

$$\eta(x) = 4\epsilon \frac{x}{c}\left[1 - \frac{x}{c}\right] \tag{53}$$

Assim, foi realizada uma simulação utilizando como parâmetros c=1m, ϵ = 0.1 e ângulo de ataque α = 9°. Com estes dados temos os seguintes resultados:

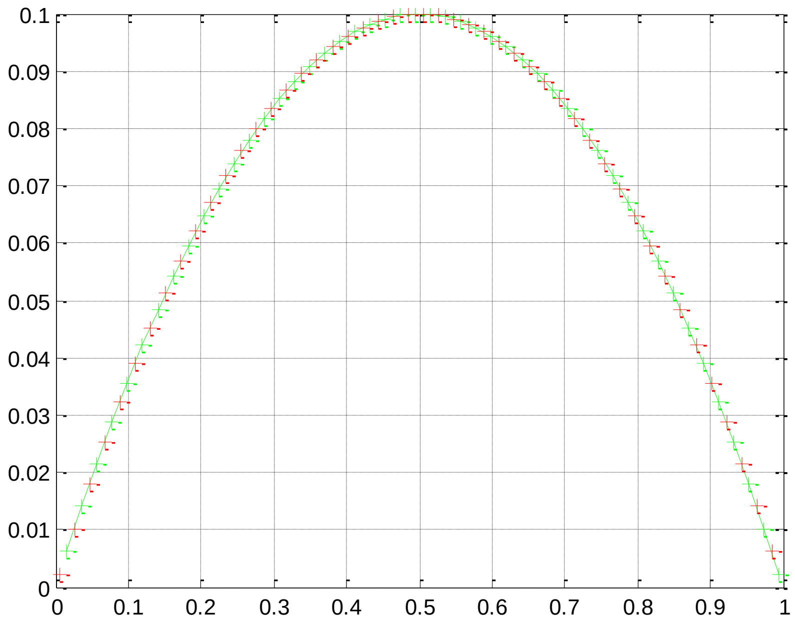

Figura 15: Discretização de uma linha de arqueamento parabólica

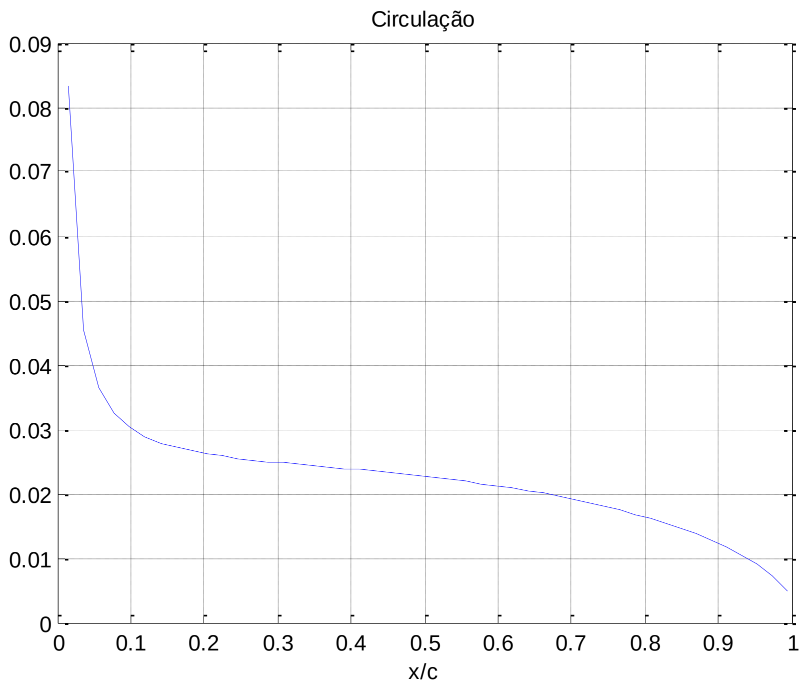

Figura 16: Distribuição de circulação

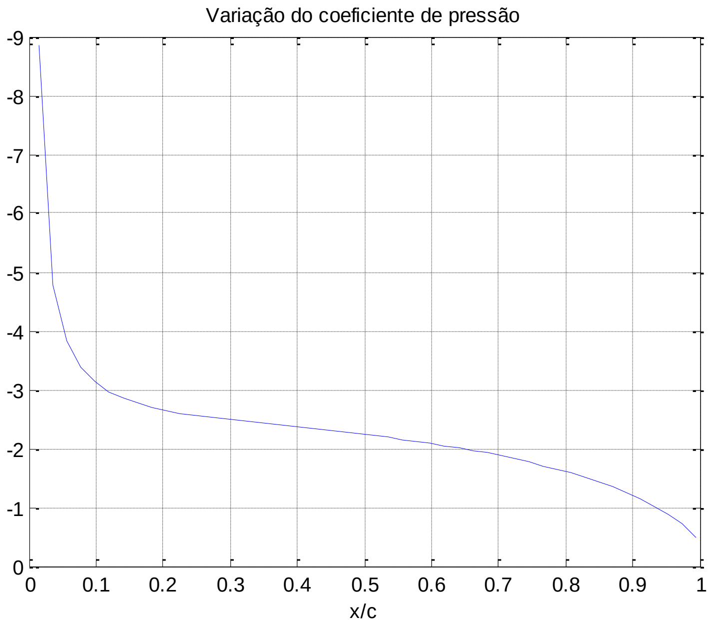

Figura 17: Variação do coeficiente de pressão

2.3 Vórtice como elemento de singularidade

A seguir, o método dos vórtices discreto será aplica para um aerofólio simétrico, NACA0012. Utilizando esta geometria, temos os seguintes resultados aplicando um ângulo de ataque de 9º.

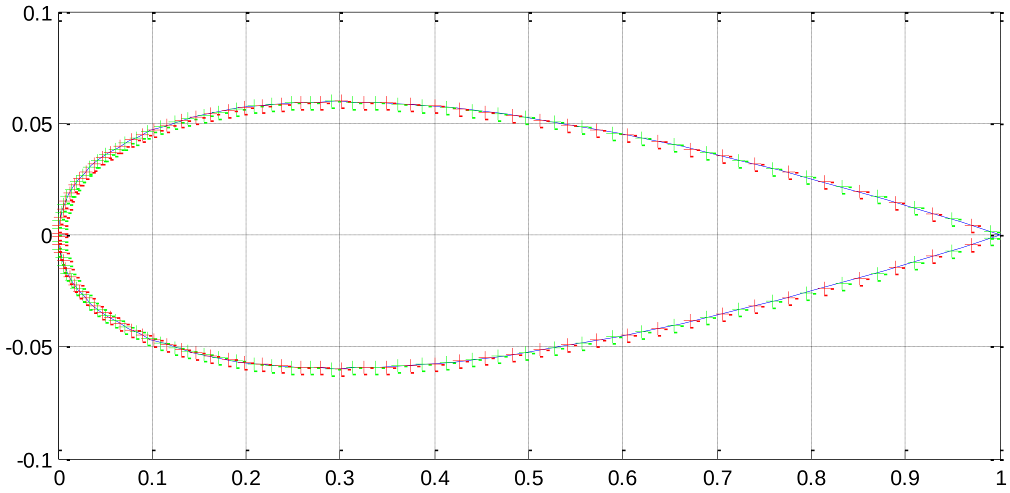

Figura 18: Discretização do aerofólio NACA0012 mostrando os pontos de vórtices (vermelho) e os pontos de controle (verde)

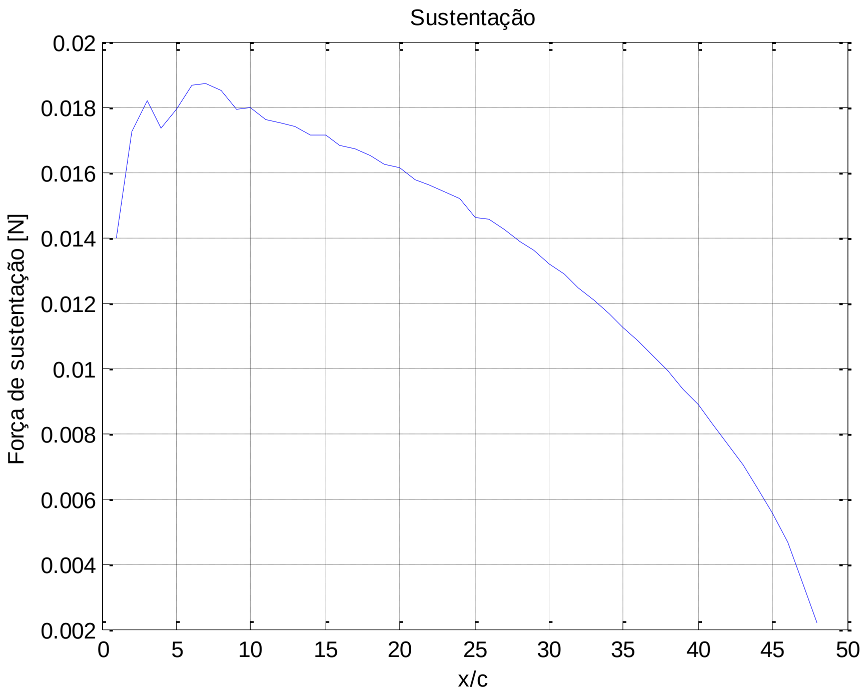

Figura 19: Distribuição da força de sustentação

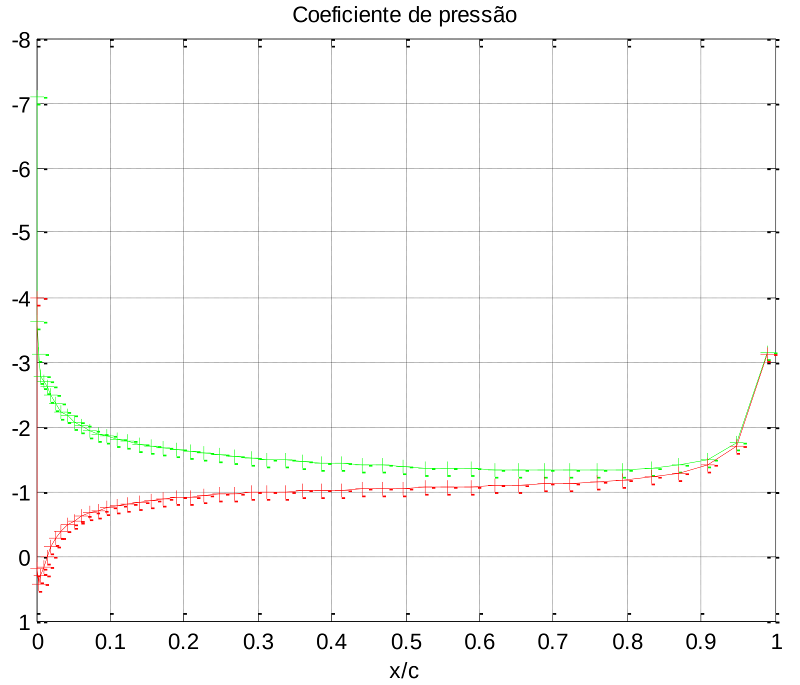

Figura 20: Coeficiente de pressão na superfície superior (verde) e inferior (vermelho)

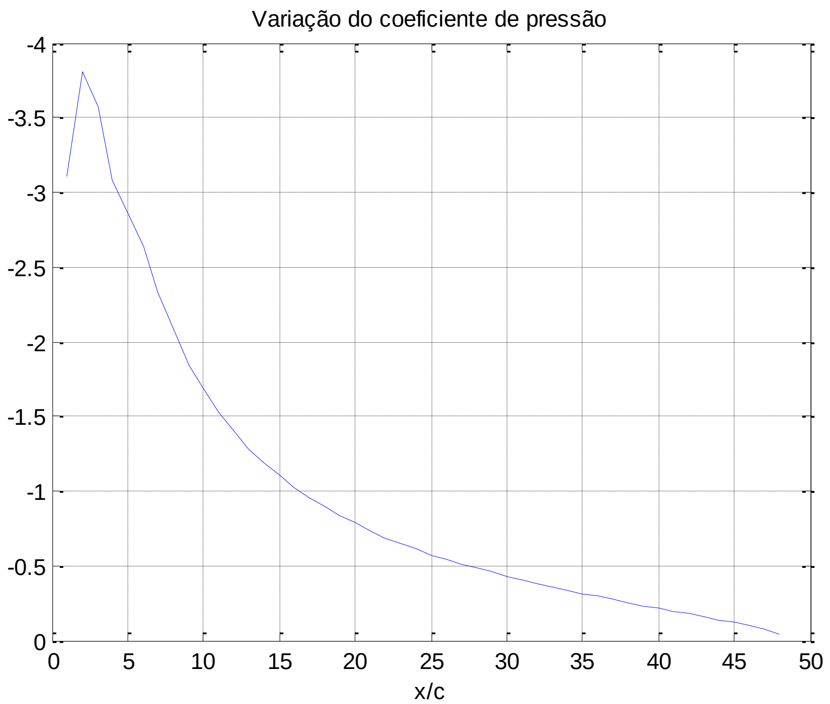

Figura 21: Variação do coeficiente de pressão

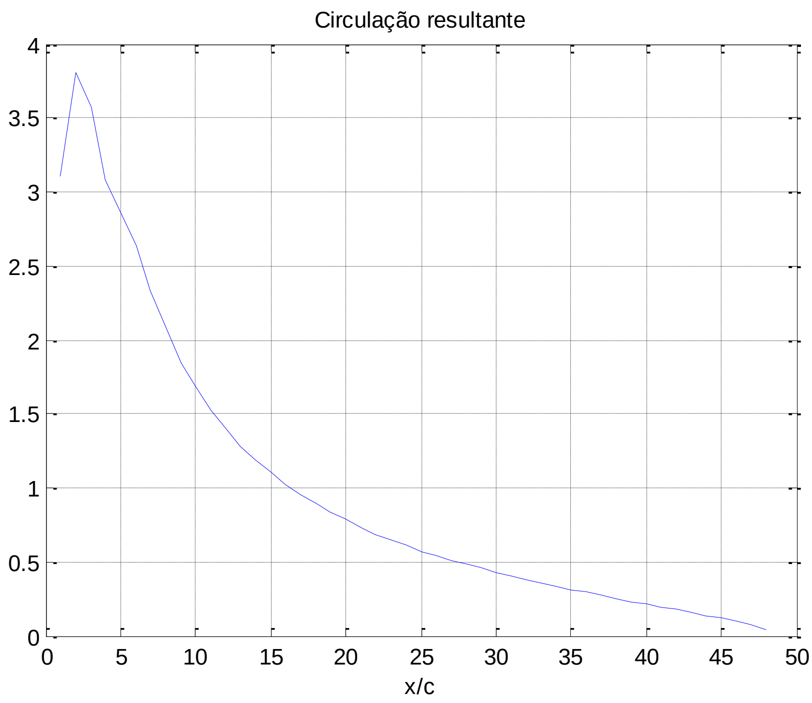

Figura 22: Circulação resultante

Podemos observar pelos resultados acima, que a variação do coeficiente de pressão (figura 21) é semelhante à variação do coeficiente de pressão para uma placa plana (figura 14) a menos no bordo de ataque. Também pode-se observar pela figura 22 a circulação nula no bordo de fuga.

O próximo passo, foi a implementação do método dos painéis utilizando uma distribuição de vórtices contínuos com intensidade constante, como esquematizado na figura abaixo.

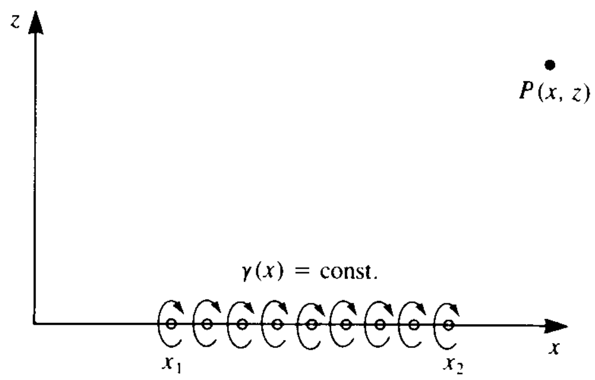

Figura 23: Distribuição constante de vórtices. Reprodução de [2]

Para este tipo de distribuição, as velocidades induzidas são:

$$u_p = \frac{\gamma}{2\pi}\left[\operatorname{atan}\left(\frac{z - z_2}{x - x_2}\right) - \operatorname{atan}\left(\frac{z - z_1}{x - x_1}\right)\right] \tag{54}$$

$$w_p = -\frac{\gamma}{4\pi} ln \frac{(x - x_1)^2 + (z - z_1)^2}{(x - x_2)^2 + (z - z_2)^2} \tag{55}$$

Como os resultados acima estão nas coordenadas no painel, é necessário fazer uma transformação de coordenadas para as coordenadas globais do sistema (figura 24).

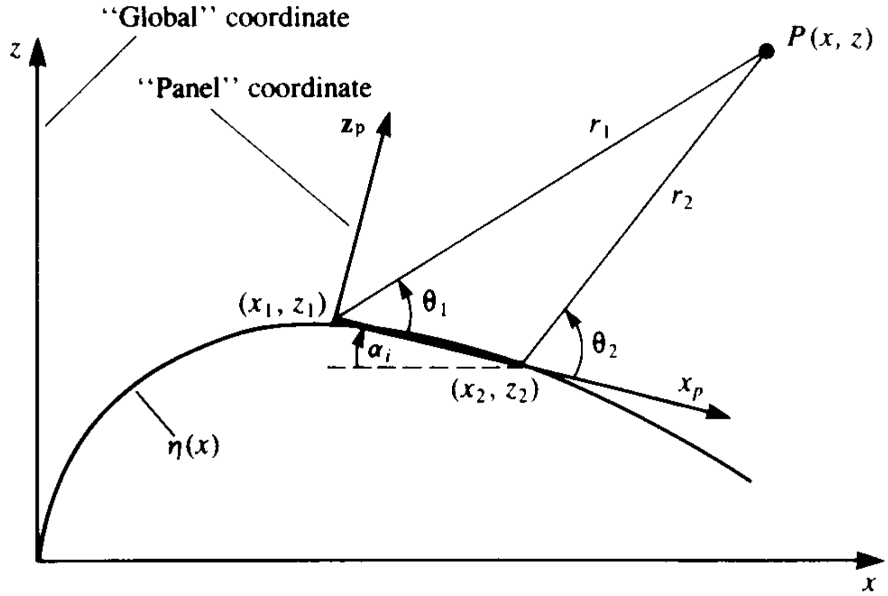

Figura 24: Transformação de coordenadas. Reprodução de [2]

$$\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\alpha_i & sin\alpha_i \\ -sin\alpha_i & cos\alpha_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_p \\ w_p \end{pmatrix} \tag{56}$$

Entretanto, como os pontos de controle para esta discretização são colocados no centro do painel, aparece o efeito indesejado de a velocidade no centro de um painel de vórtices constantes induzida por si mesmo ser nula. Para corrigir este efeito, deve ser feita uma correção das condições de contorno baseada na equação (23) [1].

Segundo esta equação, temos que a variação do potencial de velocidades na região interna ao corpo deve ser nula. Assim, as derivadas parciais tanto na direção normal como na direção tangencial devem ser ambas iguais a zero:

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial n} = \frac{\partial \Phi^*}{\partial l} = 0 \tag{57}$$

Dessa forma, as condições de contorno de velocidade tangencial nula serão especificadas em cada ponto de controle (que estarão no centro do painel e levemente dentro do corpo).

Com esta nova condição de controle temos que, no centro do painel, a velocidade auto-induzida torna-se:

$$u_p(x, 0 \pm) = \pm\frac{\gamma}{2} \tag{58}$$

$$w_p(x, 0 \pm) = 0 \tag{59}$$

Após a construção da matriz dos coeficientes de influência, é necessário acrescentar a condição de Kutta no bordo de fuga que, neste caso, é:

$$\gamma_1 + \gamma_N = 0 \tag{60}$$

Entretanto, ao acrescentar a condição acima, teremos um sistema de N+1 equações e N incógnitas. Sendo assim, uma das equações de impenetrabilidade terá que ser substituída pela condição de Kutta.

Vale ressaltar que não foi necessário explicitar a condição de Kutta no método dos vórtices discretos, já que este método é baseada justamente nesta condição [1].

O cálculo dos termos independentes do sistema fica:

$$RHS_i = -(U_\infty, W_\infty) \cdot (cos\alpha_i, -sin\alpha_i) \tag{61}$$

Assim, podemos calcular o coeficiente de pressão através da expressão:

$$C_p = 1 - \left[\frac{Q_\infty \cos(\alpha + \alpha_i) + \gamma_i/2}{Q_\infty}\right]^2 \tag{62}$$

A formulação acima foi implementada para o aerofólio NACA0012 utilizando um ângulo de ataque de 9º.

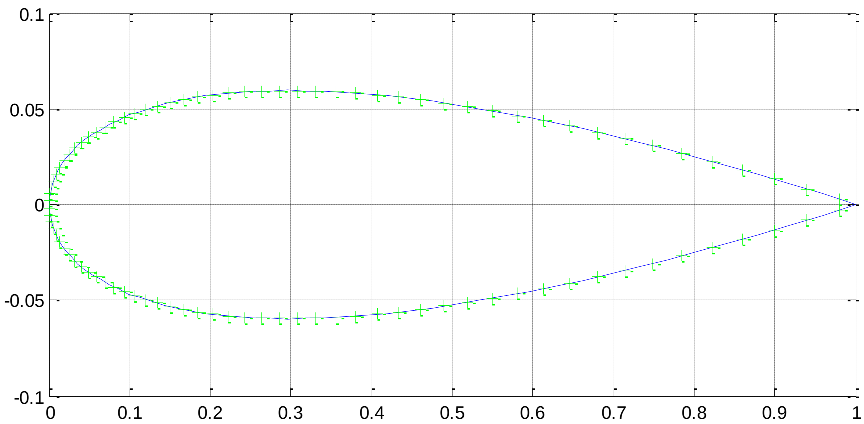

Figura 25: Discretização do fólio com os pontos de controle

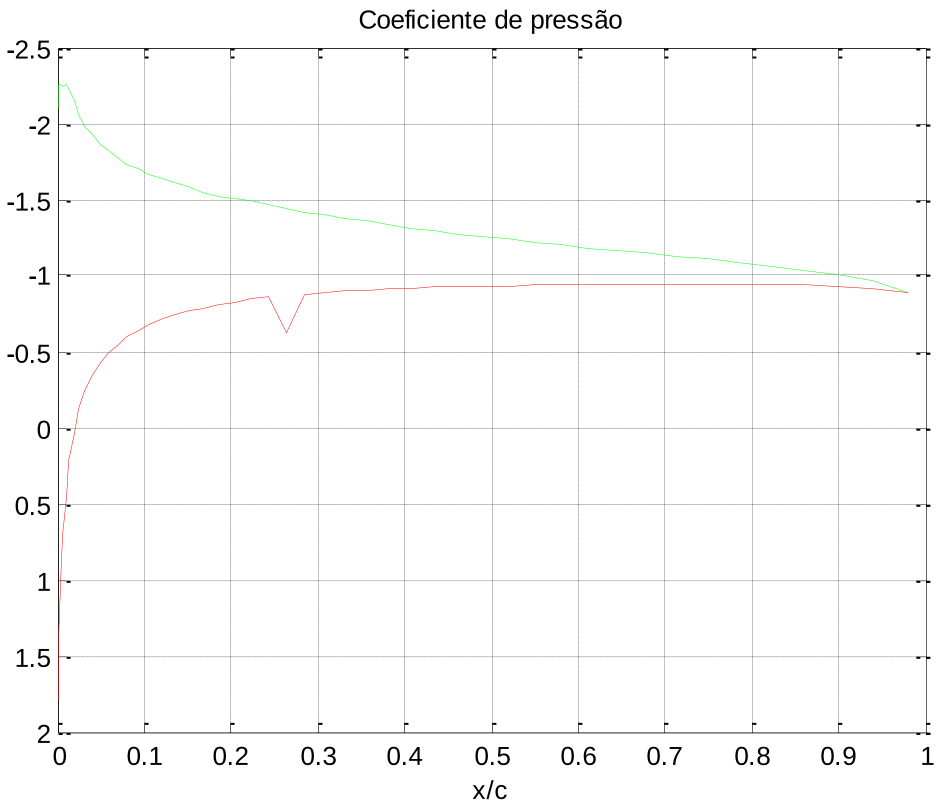

Figura 26: Distribuição dos coeficientes de pressão na superfície superior (verde) e inferior (vermelho)

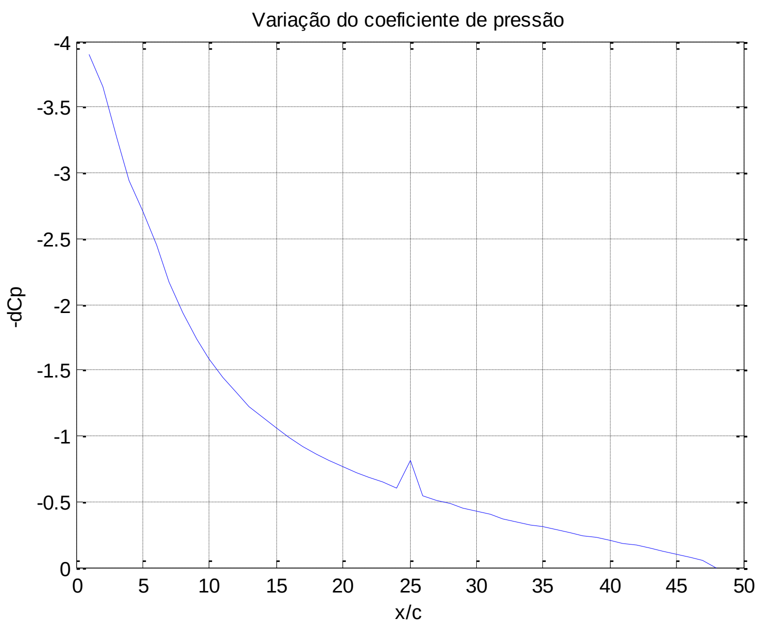

Figura 27: Distribuição da variação do coeficiente de pressão

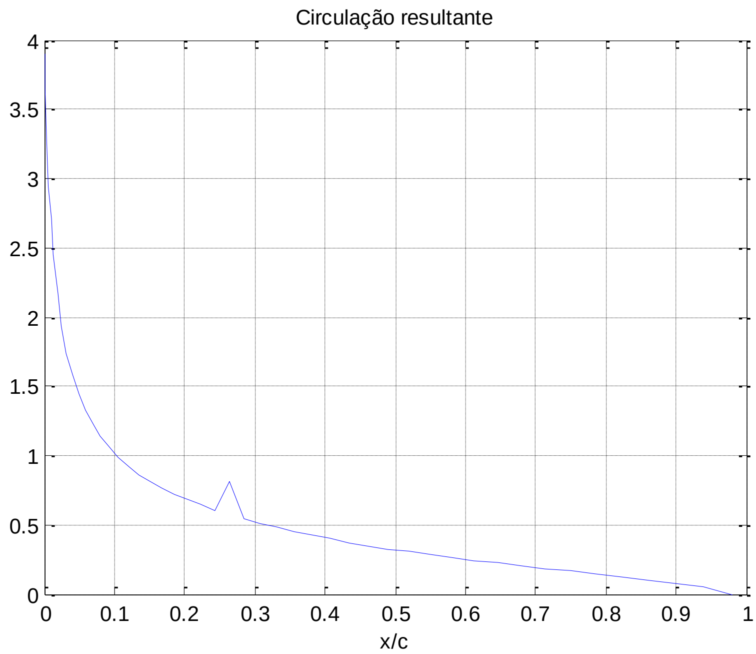

Figura 28: Distribuição da circulação resultante

Podemos observar nos resultados acima a presença de um ponto deslocado. Este ponto corresponde á equação deletada para o acréscimo da condição de Kutta.

A condição de Kutta pode ser observada nos resultados acima através das figuras 27 e 28.

Pode–se observar que os resultados acima demonstram melhores resultados tanto no bordo de fuga como no bordo de ataque do que os apresentados pelo método dos vórtices discretos.

Embora não seja o objeto principal deste estudo, foi implementada uma simulação utilizando uma distribuição de dipolos constantes, mostrada na distribuição de coeficiente de pressões abaixo.

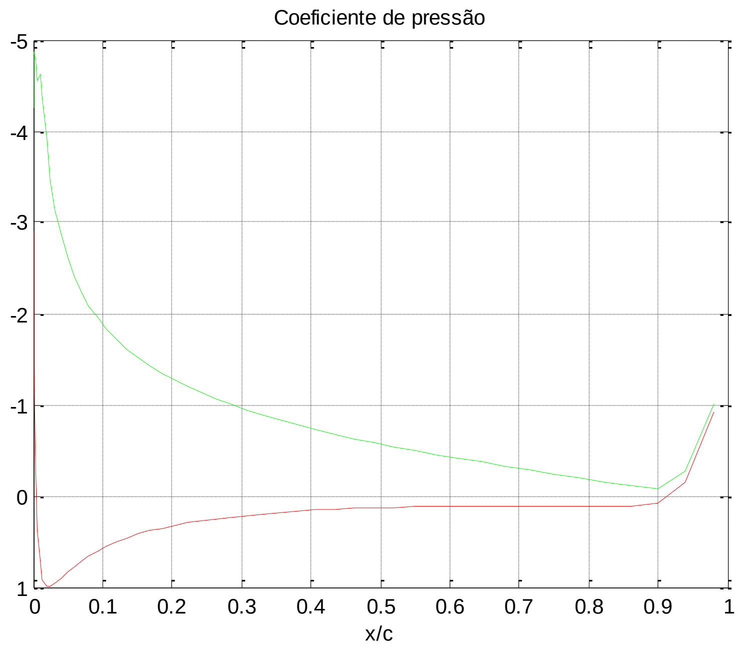

Figura 29: Distribuição dos coeficientes de pressão na superfície superior (verde) e inferior (vermelho)

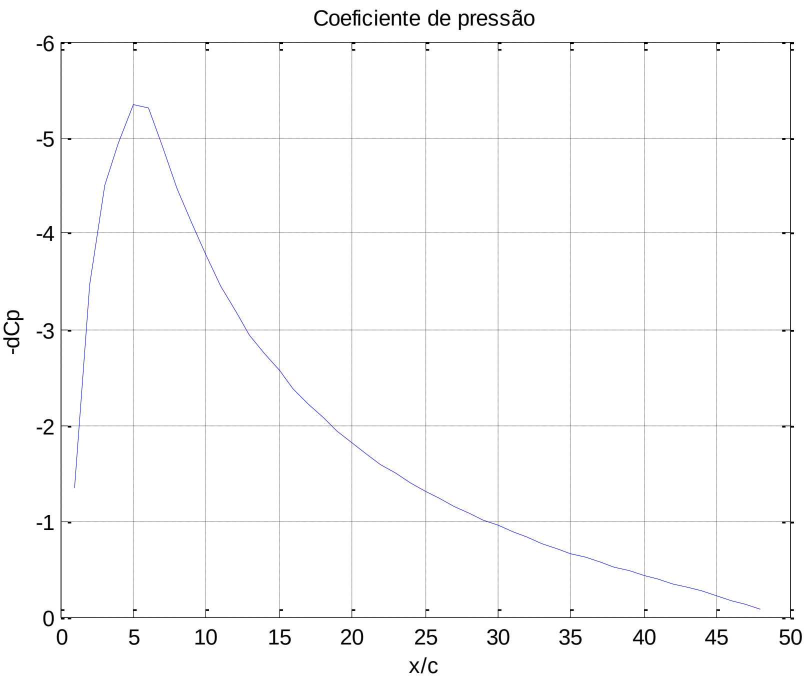

Figura 30: Distribuição da variação do coeficiente de pressão

No anexo 1 encontram-se as simulações utilizadas neste trabalho.

3 Método dos Painéis – Caso Tridimensional

Com o método bidimensional solucionado e com as soluções obtidas, a próxima etapa é implementar o mesmo método para o caso tridimensional. A metodologia é análoga às seções anteriores. No aspecto teórico e na modelagem matemática, apenas as condições de contorno relativas à esteira e ao bordo de fuga (Condição de Kutta tridimensional) necessitarão de um tratamento diferenciado.

Neste caso a etapa mais complicada consiste em modelar a geometria da asa em três dimensões, principalmente quando se deseja utilizar uma geometria pré-determinada.

3.1 Solução pelo Método do Vórtice Ferradura

Essa seção visa apresentar um método para cálculo tridimensional de esforços em asas. Esse método emprega o vórtice ferradura como elemento de singularidade. Esse elemento consiste em um segmento de vórtice para modelar as propriedades de sustentação, e dois vórtices semi-infinitos para modelar a esteira. Nesse caso, deve-se respeitar o Teorema de Helmotz, que afirma que um segmento de vórtice não possa simplesmente terminar no interior de um fluido, mas deve estender-se até a fronteira do sistema ou ainda se fechar formando um anel. E a intensidade do vórtice deve ser constante por toda a sua extensão. Na figura 31 é possível ver um vórtice ferradura:

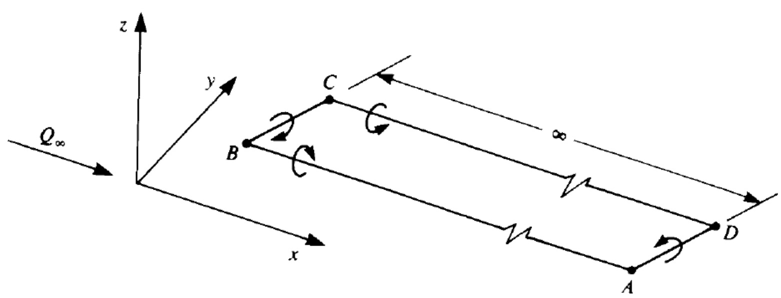

Figura 31: Modelo de vórtice ferradura. Reprodução de [2]

Nessa situação, a esteira deve ser paralela à velocidade do escoamento ao longe, o que acarreta em algumas dificuldades de modelagem. Posto isso, há duas possibilidades para que isso ocorra, que estão expostas na figura 32. Entretanto, uma vez que a linha de sustentação adota como hipótese pequenos ângulos de ataque, os painéis de vórtices podem ser colocados no plano da asa.

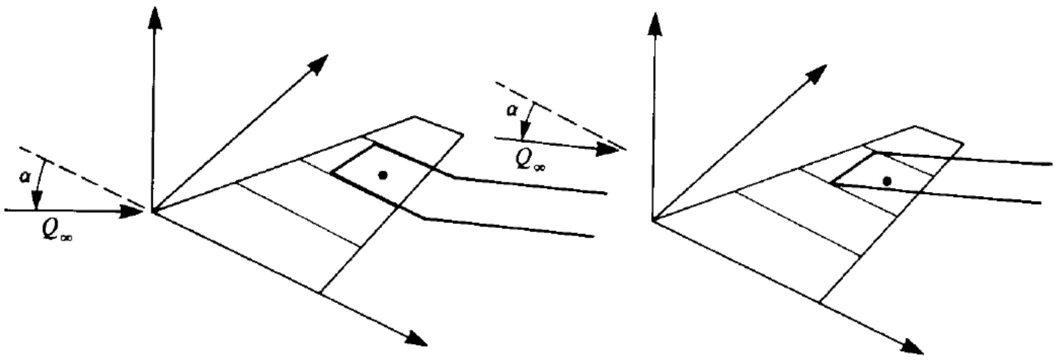

Figura 32: Possibilidades de modelagem utilizando o vórtice ferradura. Reprodução de [2]

Dessa forma, pode-se estruturar o método para simulação. Na figura 33 pode-se ver a representação espacial da discretização da superfície. Baseado na teoria para o método bidimensional, já descrita nesse trabalho, coloca-se o segmento de vórtice na linha de quarto de corda e assume-se a intensidade do vórtice como sendo constante.

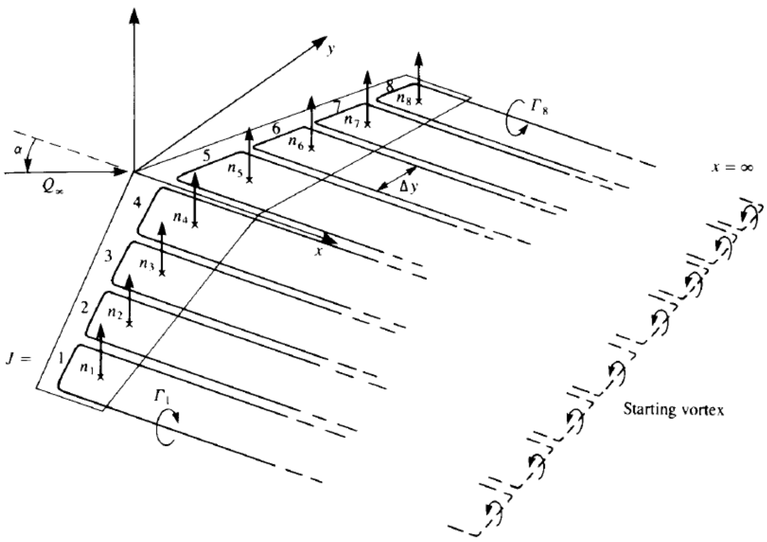

Figura 33: Superfície da asa discretizada com vórtices ferradura. Reprodução de [2]

Na figura 34, tem-se o elemento de vórtice ferradura completo com seus pontos principais.

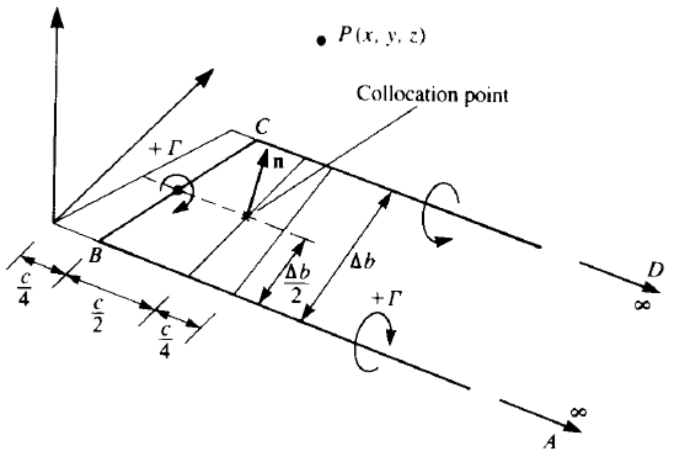

Figura 34: Pontos principais do vórtice ferradura. Reprodução de [2]

Para o cálculo das velocidades induzidas, pode-se excluir o trecho AD por estar localizado em uma região distante da asa.

Dessa forma, pode-se calcular a velocidade induzida por cada trecho de vórtice, cujo campo de velocidade V é dado por:

$$(u_1, v_1, w_1) = f\left(x, y, z, x_A, y_A, z_{A,} x_B, y_B, z_B, \Gamma\right)$$

$$(u_2, v_2, w_2) = f(x, y, z, x_B, y_B, z_{B,} x_C, y_C, z_C, \Gamma) \tag{63}$$

$$(u_3, v_3, w_3) = f\left(x, y, z, x_C, y_C, z_{C,} x_D, y_D, z_D, \Gamma\right)$$

Onde os subscritos 1, 2 e 3 representam, respectivamente, as velocidades induzidas pelos segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}\ e\ \overline{CD}$.

Com isso, a velocidade induzida pelos três segmentos de vórtice que compõem o vórtice ferradura é dada por:

$$(u, v, w) = (u_1, v_1, w_1) + (u_2, v_2, w_2) + (u_3, v_3, w_3) \tag{64}$$

É interessante guardar a velocidade induzida apenas pelos segmentos laterais para o cálculo do arrasto induzido. Assim:

$$(u, v, w)^* \approx (u_1, v_1, w_1) + (u_3, v_3, w_3) \tag{65}$$

Com a asa discretizada em N painéis, como mostrados na figura 33, obtém-se os vetores normais para cada painel de indíce j, cuja expressão é dada por:

$$\boldsymbol{n}_j = (sen\ \alpha_j, \cos \alpha_j) \tag{66}$$

Aplicando-se a equação abaixo para os pontos de colocação de cada painel, atendem-se todas as condições de contorno:

$$w_b + w_i + Q_\infty . \alpha = 0 \tag{67}$$

Com as expressões para cálculo das velocidades induzidas pelos vórtices ferradura conhecidas, tem-se, por exemplo, aplicando as condições de contorno, a soma das componentes normais das velocidades induzidas pelos N paineis no primeiro ponto de controle com a componente normal do escoamento ao longe deve ser nula:

$$[(u, v, w)_{11}\Gamma_1 + (u, v, w)_{12}\Gamma_2 + \cdots + (u, v, w)_{1N}\Gamma_N + (U_\infty, V_\infty, W_\infty)].\boldsymbol{n}_1 = 0 \tag{68}$$

Na expressão acima, as intensidades da circulação são desconhecidas. Sabendo-se que os coeficientes de influência são dados por:

$$a_{ij} = (u, v, w)_{ij}.\boldsymbol{n}_i \tag{69}$$

Onde os índices i e j indicam a velocidade induzida do j-ésimo painel no i-ésimo ponto de controle.

Obtém-se o sesguinte sistema linear:

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\Gamma_j = RHS_i \tag{70}$$

Onde:

$$RHS_i = -(U_\infty, V_\infty, W_\infty).\boldsymbol{n}_i \tag{71}$$

Com as circulações de cada painel obtidas, pode-se calcular os esforços de sustentação e arrasto induzido, dados por:

$$\Delta L_j = \rho Q_\infty \Gamma_j \Delta y_j \tag{72}$$

$$\Delta D_j = -\rho w_{ind_j} \Gamma_j \Delta y_j \tag{73}$$

3.2 Solução por Anéis de Vórtices

O segundo modo de solução para o caso tridimensional utiliza anéis de vórtice como elementos de singularidade. A grande vantagem em relação ao método apresentado na seção anterior é a simplicidade em termos de programação. Aqui as condições de contorno serão satisfeitas também com a presença de arqueamento na asa e com diferentes geometrias.

A condição de contorno a ser satisfeita inicialmente é:

$$\nabla(\Phi + \Phi_\infty).\boldsymbol{n} = 0 \tag{74}$$

Com a formulação linearizada da superfície de sustentação, essa condição de contorno, expressa em termos de uma superfície (η) discretizada por uma distribuição de vórtices é dada por:

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{asa+esteira}\frac{\gamma_y(x-x_0)+\gamma_x(y-y_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}dx_0dy_0 = Q_\infty\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}-\alpha\right) \quad (75)$$

Para a solução utilizando esse método, divide-se a asa em painéis de acordo com a figura 35:

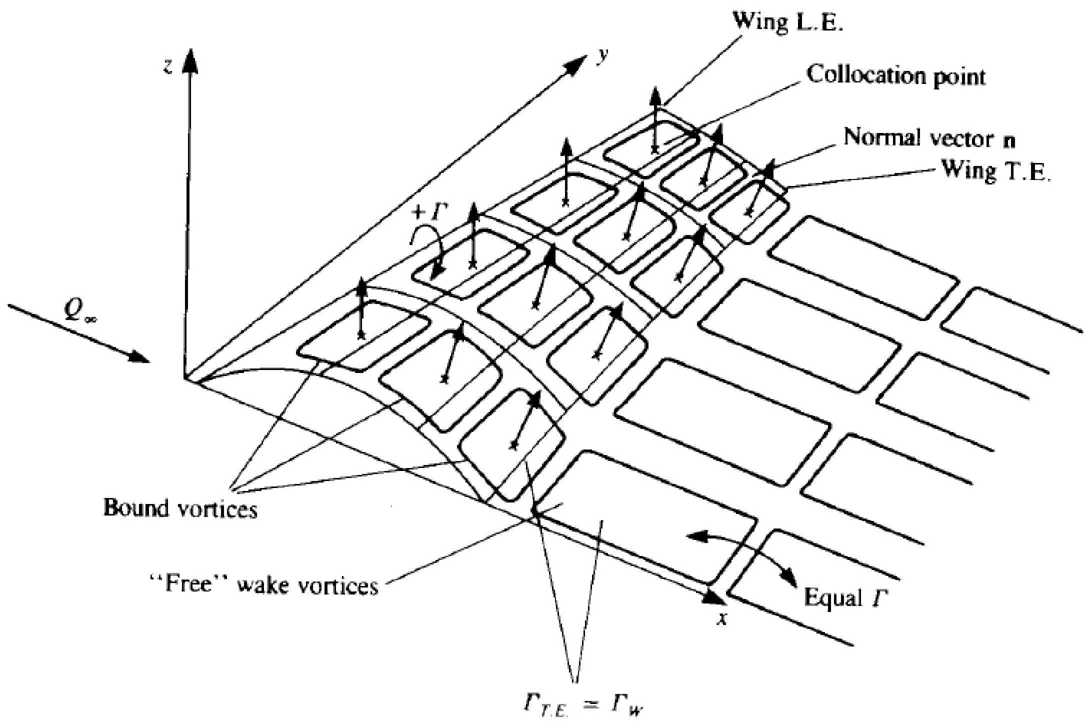

Figura 35: Anéis de vórtice descrevendo a superfície de uma asa. Reprodução de [2]

O segmento principal do vórtice é colocado no ponto de quarto de corda do painel, e os outros três segmentos são agrupados com os dos painéis adjacentes. O vetor normal é posicionado no ponto de três quartos de corda. Do ponto de vista numérico, os anéis de vórtice são agrupados em pacotes indexados e nomeados conforme a figura 36, e arranjados conforme a figura 37.

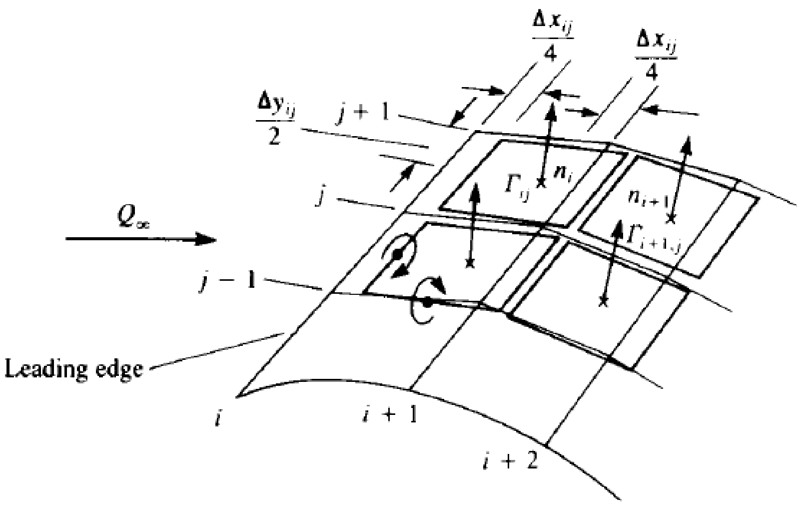

Figura 36: Nomenclatura para os elementos do anel de vórtice. Reprodução de [2]

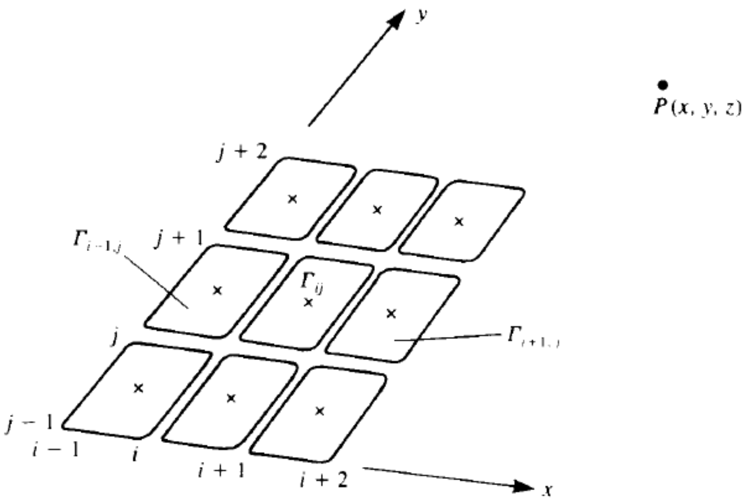

Figura 37: Arranjo dos anéis de vórtice de forma retangular. Reprodução de [2]

Calculando-se as velocidades induzidas para cada segmento do anel de vórtices, obtém-se uma expressão que é função do ponto onde se deseja calcular a velocidade induzida, dos cantos do painel e da intensidade do vórtice no painel, conforme equação 76.

$$(u_1, v_1, w_1) = f\left(x, y, z, x_{i,j}, y_{i,j}, z_{i,j,} x_{i,j+1}, y_{i,j+1}, z_{i,j+1}, \Gamma_{i,j}\right)$$

$$(u_2, v_2, w_2) = f(x, y, z, x_{i,j+1}, y_{i,j+1}, z_{i,j+1,} x_{i+1,j+1}, y_{i+1,j+1}, z_{i+1,j+1}, \Gamma_{i,j})$$

$$(u_3, v_3, w_3) = f\left(x, y, z, x_{i+1,j+1}, y_{i+1,j+1}, z_{i+1,j+1,} x_{i+1,j} y_{i+1,j}, z_{i+1,j}, \Gamma_{i,j}\right) \tag{76}$$

$$(u_4, v_4, w_4) = f\left(x, y, z, x_{i+1,j}, y_{i+1,j}, z_{i+1,j,} x_{i,j} y_{i,j}, z_{i,j}, \Gamma_{i,j}\right)$$

$$(u, v, w) = (u_1, v_1, w_1) + (u_2, v_2, w_2) + (u_3, v_3, w_3) + (u_4, v_4, w_4)$$

Uma circulação positiva é definida segundo a regra da mão direita conforme a figura 36. Para o cálculo da distribuição de pressões, é necessário conhecer a circulação, que para os painéis do início da asa, é igual a circulação inicial, e para os subsequentes é igual a diferença da circulação do referido painel com a do painel anterior.

Ao colocar-se o segmento principal de anéis de vórtice na linha de quarto de corda, a condição de Kutta bidimensional é satisfeita. E no bordo de fuga da asa, cancelam-se os vórtices dessa fileira, para satisfazer a condição de contorno correspondente ao borde de fuga tridimensional

$$\gamma|_{T.E.} = 0 \tag{77}$$

Para a solução do problema, cada painel tem um índice i e j, e um índice k, para efeitos de simulação e formulação matemática. Com isso, toda a superfície está discretizada em painéis e totalmente indexada, como pode ser visto nas figuras 38 e 39. Na figura 39 está representado o vetor normal de cada painel, dado por:

$$n_K = \frac{A_K \wedge B_K}{|A_K \wedge B_K|} \tag{78}$$

Onde os vetores A_K e B_K estão representados na figura 39.

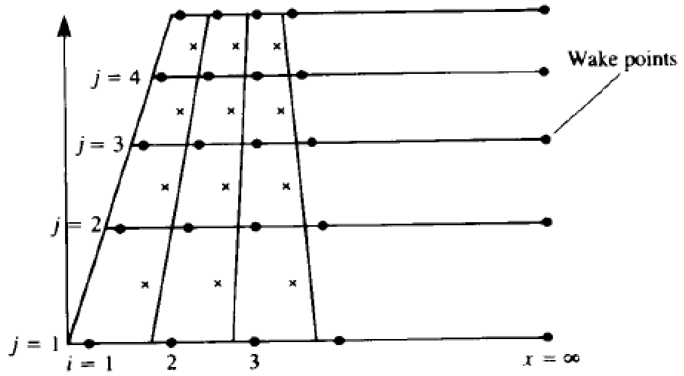

Figura 38: Painéis com seus pontos de colocação (x) e pontos de fronteira (.). Reprodução de [2]

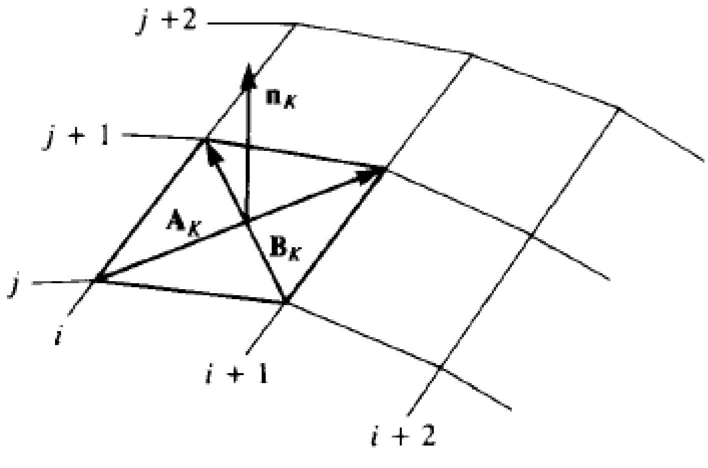

Figura 39: Definição do vetor normal do painel. Reprodução de [2]

Para a determinação dos coeficientes de influência, deve-se estabelecer uma sequência de verificação dos pontos de colocação, mostrada na figura 40.

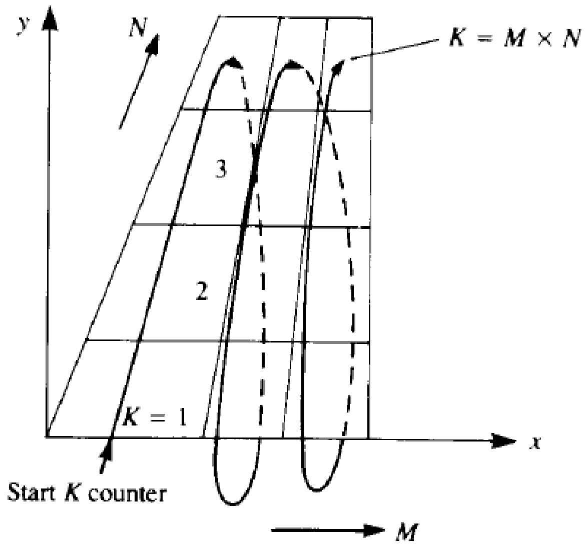

Figura 40: Sequência de verificação dos painéis, utilizando o contador K. Reprodução de [2]

Sabendo-se que a velocidade induzida pelo primeiro anel de vórtice é função de:

$$(u_i, v_i, w_i)_{11} = f(x, y, z, i, j, \Gamma) \tag{79}$$

E , em caso da asa ser simétrica, a da sua imagem, do outro lado da asa:

$$(u_{ii}, v_{ii}, w_{ii})_{11} = f(x, -y, z, i, j, \Gamma) \tag{80}$$

E a velocidade induzida pela circulação Γ_1 e sua imagem, no ponto de colocação 1 é dada por

$$(u, v, w)_{11} = (u_i + u_{ii}, v_i - v_{ii}, w_i + w_{ii}) \tag{81}$$

O índice ( )$_{11}$ representa a influência do primeiro vórtice no primeiro ponto de colocação e ambos os números variam de 1 a M x N. Com isso, o coeficiente de influência é dado por:

$$a_{11} = (u, v, w)_{11}.n_1 \tag{82}$$

Para percorrer todos os anéis de vórtice que influenciam esse ponto, utiliza-se um contador L = 1 -> N x M. Ou seja, enquanto o contador K está no ponto 1, o contador L percorre todos os vórtices sobre a superfície da asa, e todos os coeficientes de influência a1L são computados:

$$a_{1L} = (u, v, w)_{1L}.n_1 \tag{83}$$

Quando um anel de vórtice estiver no bordo de fuga, uma “esteira livre” de anel de vórtice de mesma intensidade é adicionada para cancelar essa linha de vórtices e satisfazer a condição de contorno para o bordo de fuga. Isso pode ser visto na figura 34.

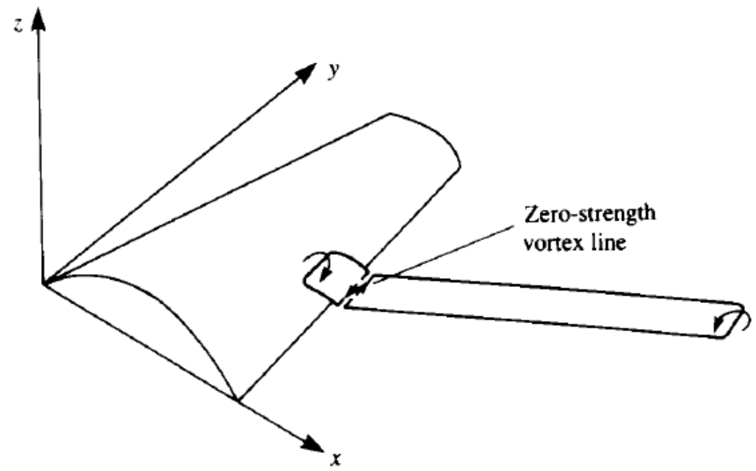

Figura 41: Inserção de um vórtice no bordo de fuga para satisfazer a condição de Kutta. Reprodução de [2]

Com isso, todos os coeficientes a_{KL} são calculados.

Sendo:

$$RHS_i = -Q_\infty.\boldsymbol{n}_k \tag{84}$$

Chega-se no seguinte sistema linear:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{kj}\Gamma_j = RHS_k \tag{85}$$

Onde K é o contador vertical para pontos de colocação e L é o contador horizontal de anéis de vórtice. O sistema tem dimensão m = M x N

Com o sistema resolvido pode-se calcular os esforços para cada painel:

$$\Delta L_{ij} = \rho Q_\infty\left(\Gamma_{ij} - \Gamma_{i-1,j}\right)\Delta y_{ij} \tag{86}$$

$$\Delta D_{ij} = -\rho w_{ind_{ij}}\left(\Gamma_{ij} - \Gamma_{i-1,j}\right)\Delta y_j \tag{87}$$

Onde o cálculo das velocidades induzidas de downwash são dadas por

$$w_{ind_k} = \sum_{j=1}^{m} b_{kj}\Gamma_j \tag{88}$$

Onde

$$b_{1L} = (u, v, w)^*_{1L}.n_1 \tag{89}$$

E são calculados de forma análoga a a_{KL}. E também:

$$(u, v, w)^* = (u_2, v_2, w_2) + (u_4, v_4, w_4) \tag{90}$$

Que corresponde à velocidade induzida somente pelos segmentos de vórtice paralelos ao escoamento.

4 Método de Primeira Ordem – O Dipolo como Elemento

Nessa seção, será descrito o método dos painéis tridimensional de primeira ordem no qual será utilizado o dipolo como elemento de singularidade. A estruturação do método é análoga para o caso bidimensional, apresentando diferenças em algumas formulações matemáticas e no cálculo dos coeficientes de influência, que serão vistos a seguir.

A condição de contorno que será utilizada é a de Dirichlet, que determina:

$$\sum_{k=1}^{N} C_k\mu_k + \sum_{l=1}^{N_w} C_l\mu_l + \sum_{k=1}^{N} B_k\sigma_k = 0 \tag{91}$$

Onde:

$$\frac{1}{4\pi}\int_{1,2,3,4}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS|_k = C_k \tag{92}$$

$$\frac{-1}{4\pi}\int_{1,2,3,4}\left(\frac{1}{r}\right)dS|_k = B_k \tag{93}$$

E os pontos 1,2,3 e 4 se referem aos cantos do painel.

Para a implementação do método, a superfície já está dividida em painéis, como na figura 42 bem como os pontos de colocação, pontos de aplicação do vetor normal. Para efeitos matemáticos e de simulação, será utilizado um contador k para verificar os painéis, como pode ser visto na figura 43.

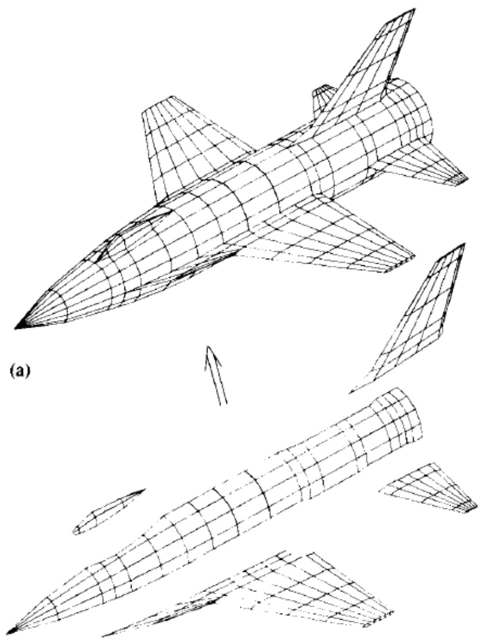

Figura 42: Exemplo de superfície discretizada em painéis. Reprodução de [2]

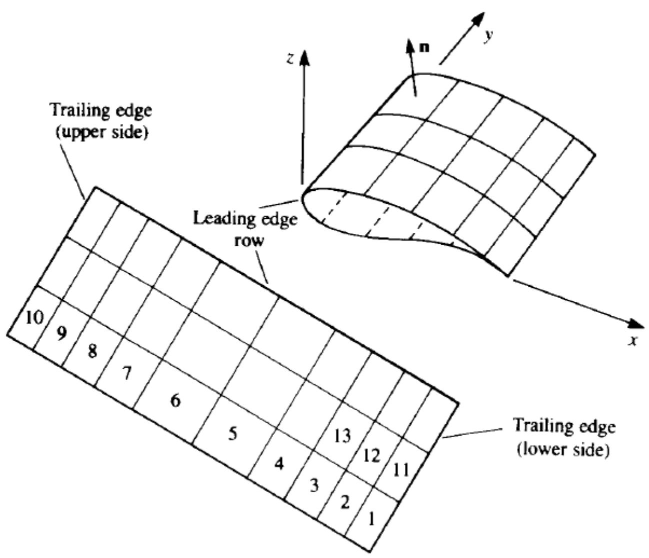

Figura 43: Método de armazenamento de painéis. Reprodução de [2]

Sabe-se que o potencial em cada ponto de colocação é influenciado por todos os outros N painéis e pode-se derivar a equação 91. Considera-se um painel na esteira e dois painéis ao seu lado, um superior com contador l e um inferior com contador m, como mostrados na figura 44.

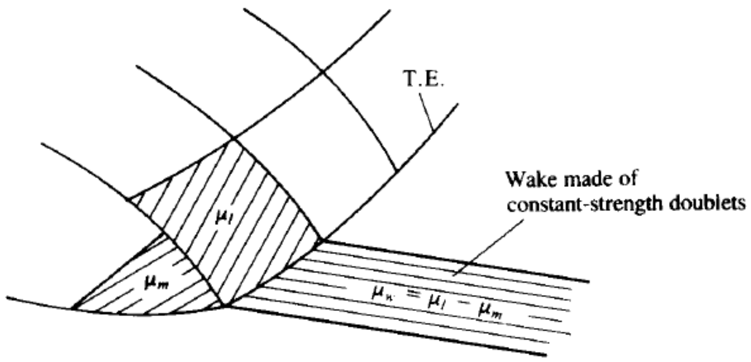

Figura 44: Painéis na fronteira, na parte superior e inferior da asa. Reprodução de [2]

Para o primeiro ponto de colocação tem-se:

$$C_{11}\mu_1 + \cdots + C_{1l}\mu_l + \cdots + C_{1m}\mu_m + \cdots + C_{1N}\mu_N + \sum_{p=1}^{N_w} C_{1p}\mu_p + \sum_{k=1}^{N} B_{1k}\sigma_k = 0 \quad (94)$$

E também:

$$\sum_{p=1}^{N_w} C_{1p}\mu_p = C_{1p}(\mu_l - \mu_m) \quad (95)$$

O contador p, percorre todos os painéis da esteira. Aplicando a condição de Kutta, para o primeiro ponto de colocação, obtém-se:

$$C_{11}\mu_1 + \cdots + (C_{1l} + C_{1p})\mu_l + \cdots + (C_{1m} - C_{1p})\mu_m + \cdots + C_{1N}\mu_N + \sum_{k=1}^{N} B_{1k}\sigma_k = 0 \quad (96)$$

Finalmente, essa equação pode ser simplificada para a forma:

$$\sum_{p=1}^{N} A_{1k}\mu_k = -\sum_{p=1}^{N} B_{1k}\sigma_k \tag{97}$$

A equação fica dada por:

$$\begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1N} \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2N} \\ \dots \\ \dots \\ a_{N1}, a_{N2}, \dots, a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \dots \\ \mu_N \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1N} \\ b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2N} \\ \dots \\ \dots \\ b_{N1}, b_{N2}, \dots, b_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \dots \\ \dots \\ \sigma_N \end{pmatrix} \tag{98}$$

Com isso

$$\begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1N} \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2N} \\ \dots \\ \dots \\ a_{N1}, a_{N2}, \dots, a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \dots \\ \mu_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} RHS_1 \\ RHS_2 \\ \dots \\ \dots \\ RHS_N \end{pmatrix} \tag{99}$$

Resolvendo-se o sistema, encontra-se as intensidades dos dipolos. Com isso, calcula-se as perturbações de velocidades nas direções tangenciais (l e m) e normais (n):

$$q_l = \frac{\partial \mu}{\partial l} \tag{100}$$

$$q_m = \frac{\partial \mu}{\partial m} \tag{101}$$

$$q_n = 0 \tag{102}$$

Baseado na figura 44, pode-se calcular as perturbações da seguinte forma:

$$q_l = \frac{1}{2\Delta l}(\mu_{l+1} - \mu_{l-1}) \tag{103}$$

A velocidade total no ponto de colocação k é dada por:

$$Q_k = (Q_{\infty_l}, Q_{\infty_m}, Q_{\infty_n})_k + (q_l, q_m, q_n)_k \tag{104}$$

Onde lk, mk, nk são as direções das coordenadas de cada painel, vistas na figura 44. Por fim, o coeficiente de pressão é obtido por:

$$C_{p_k} = 1 - \frac{Q_k^2}{Q_\infty^2} \tag{105}$$

5 Resultados – Caso Tridimensional

Após a análise teórica dos métodos estudados, foram implementadas simulações computacionais cujos resultados estão demonstrados nesta seção. Foram utilizadas soluções utilizando os métodos de vórtice ferradura e anéis de vórtices. Entretando, não foi possível validar os resultados para o último caso e, dessa forma, seus resultados não serão exibidos.

5.1 Validação do método

Inicialmente, foi utilizada uma asa com distribuição elíptica de corda com o objetivo de validar o método computacional implementado, comparando-o com os resultados obtidos pela teoria da linha de sustentação. Na figura 45, pode-se visualizar uma asa elíptica com um perfil do tipo NACA0012.

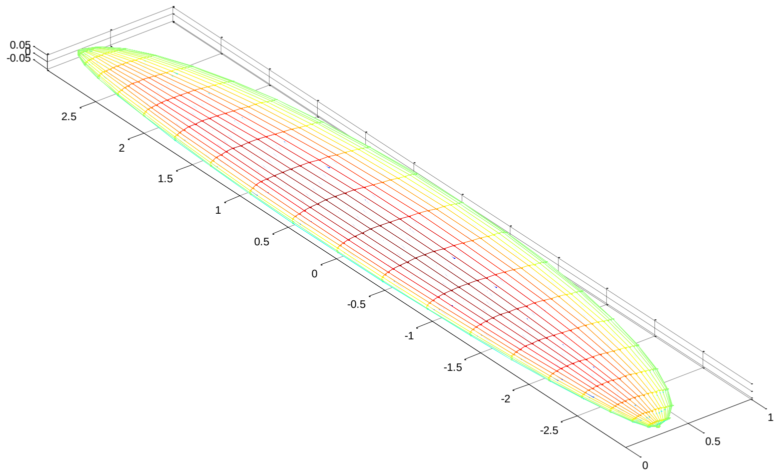

Figura 45: Perfil NACA0012 com distribuição elíptica de corda

Uma vez que o método vórtice ferradura é baseado na teoria da linha de sustentação, a espessura da asa não é levada em conta. Assim, as simulações foram realizadas com base na forma da asa em planta, como visto na figura abaixo, onde os pontos verdes representam os pontos de um quarto de corda e os pontos vermelhos representam os pontos de controle.

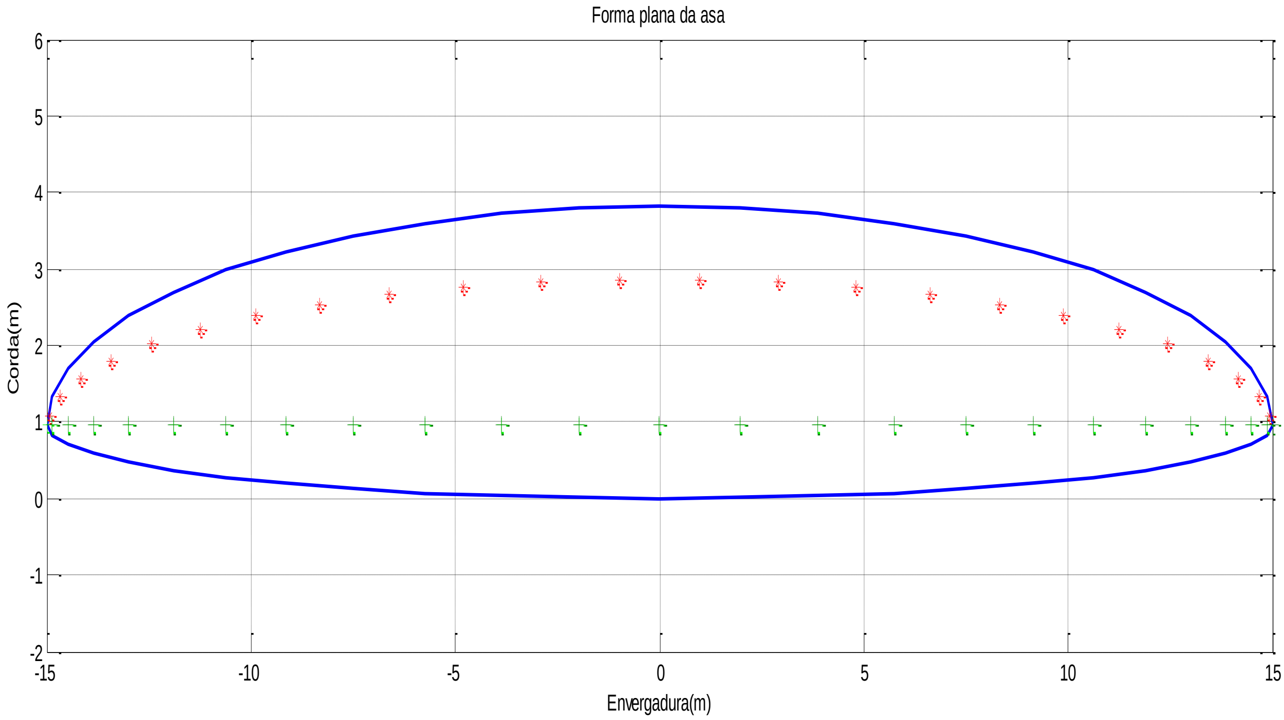

Figura 46: Forma em planta de uma asa com distribuição elíptica de corda.

Utilizando esta distribuição de corda, foi realizada uma simulação utilizando uma asa com 30 metros de envergadura, razão de aspecto igual a 10, velocidade do escoamento de 100km/h, e um ângulo de ataque de 4º. Os resultados podem ser vistos nas figuras abaixo, onde a linha vermelha representa os resultados utilizando o método dos painéis e a linha pontilhada azul representa os resultados utilizando a linha de sustentação.

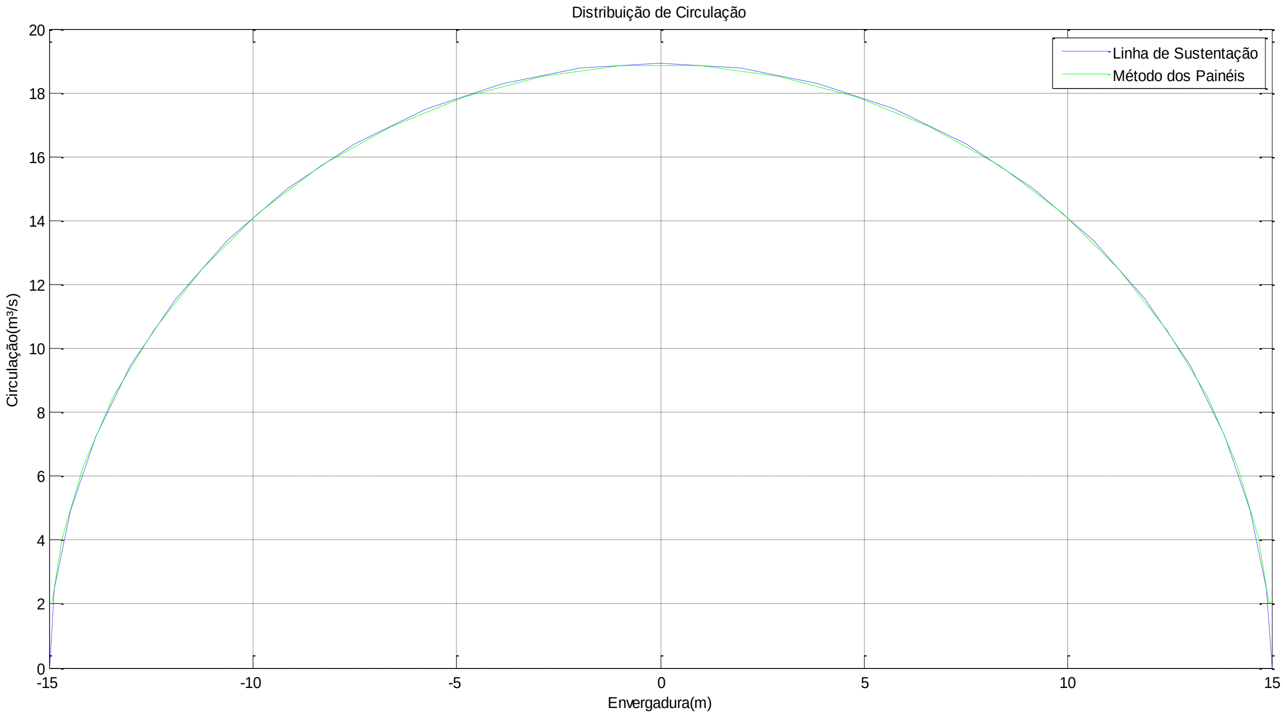

Figura 47: Distribuição de circulação

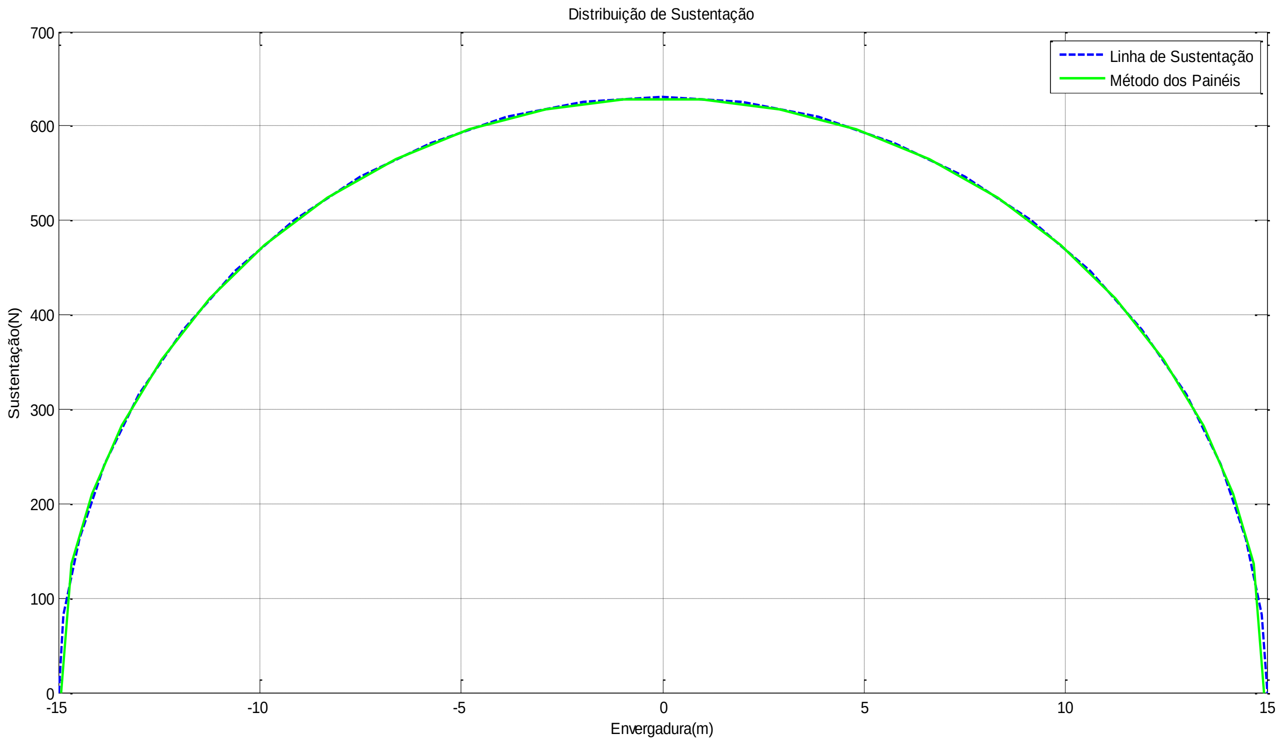

Figura 48: Distribuição de Sustentação

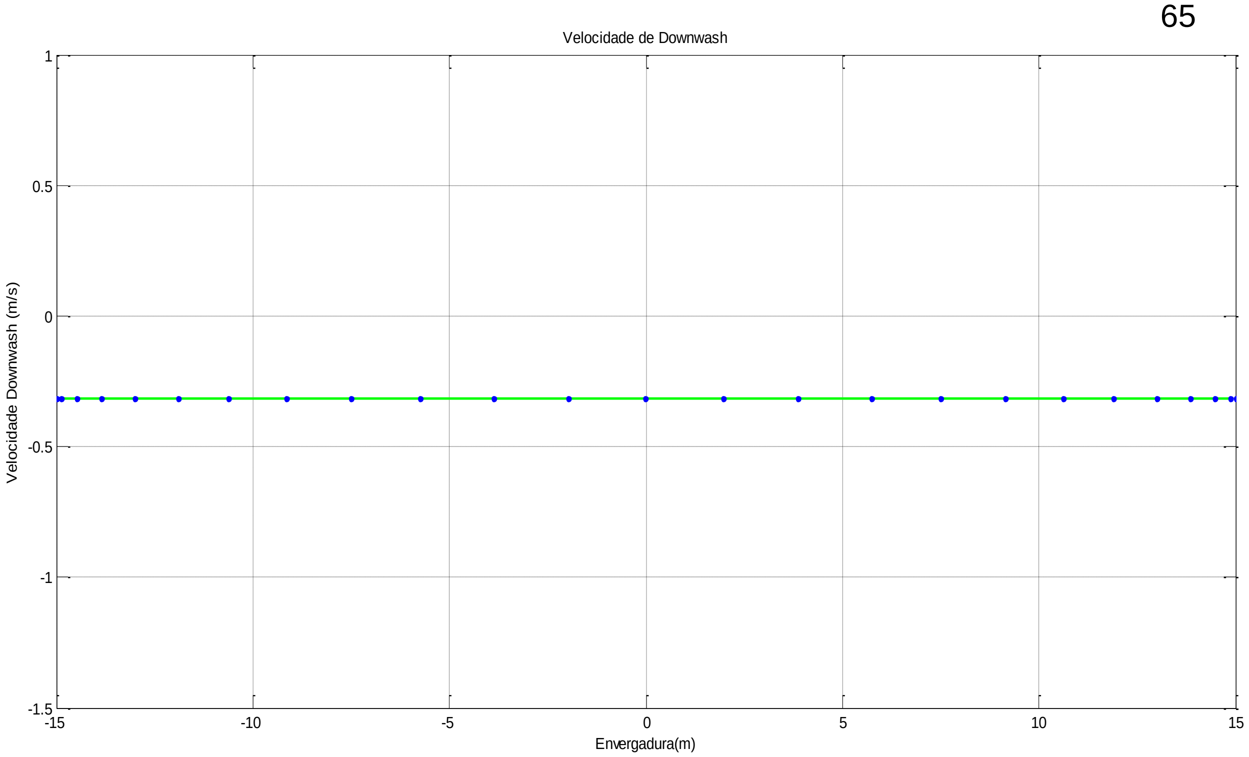

Figura 49: Distribuição de *downwash*

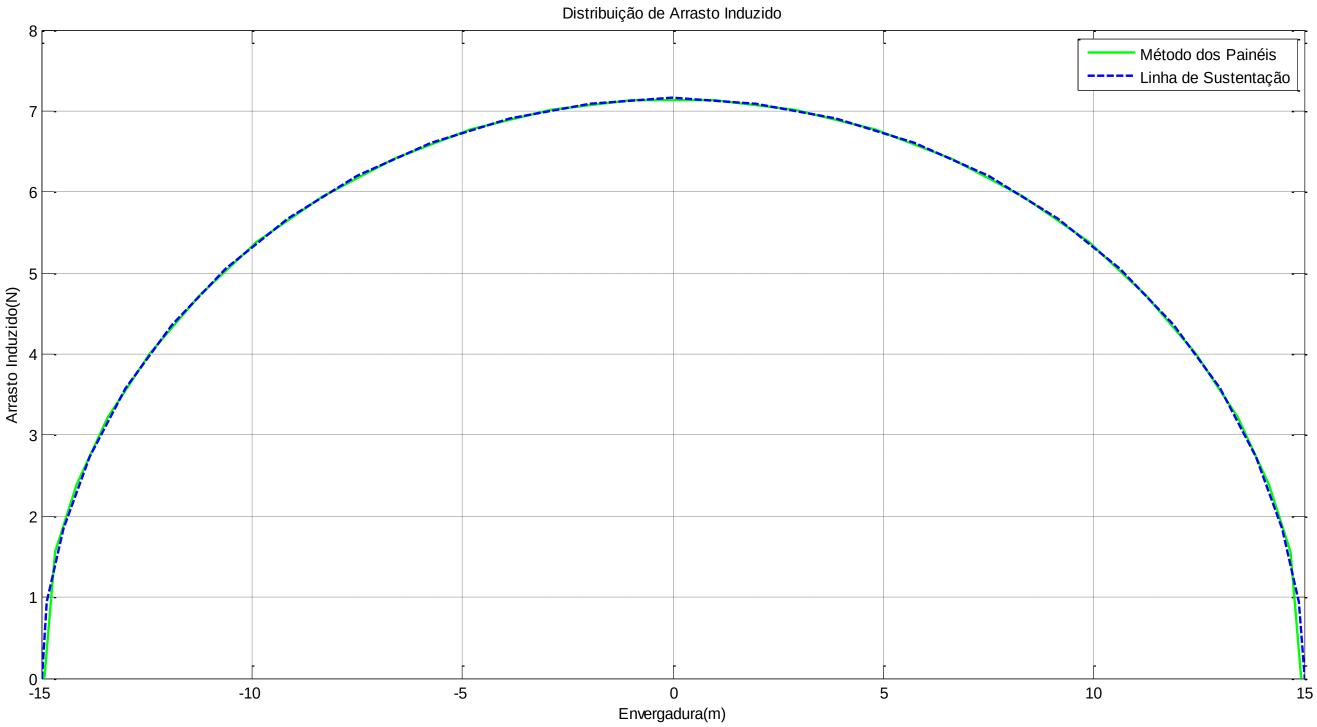

Figura 50: Distribuição de Arrasto Induzido

Através da análise dos resultados acima, verifica-se que o método dos painéis apresenta um erro relativo menor do que 0,5% em relação à solução obtida pela teoria da linha de sustentação. Também se observa a distribuição elíptica de carregamentos obtida pelo método dos painéis, resultado esperado segundo a teoria da linha de sustentação, além a distribuição constante da velocidade de *downwash*.

5.2 Resultados para outros tipos de asa

Após a validação do método dos painéis, podemos realizar a simulação para outros formatos de asas em planta. Assim, o método foi implementado para uma asa tipo trapezoidal com um *kink* no centro, utilizando-se diferentes ângulos de enflechamento. Nas figuras abaixo, pode-se visualizar as distribuições de circulação, sustentação, *downwash* e arrasto induzido para uma asa com enflechamento de 15º.

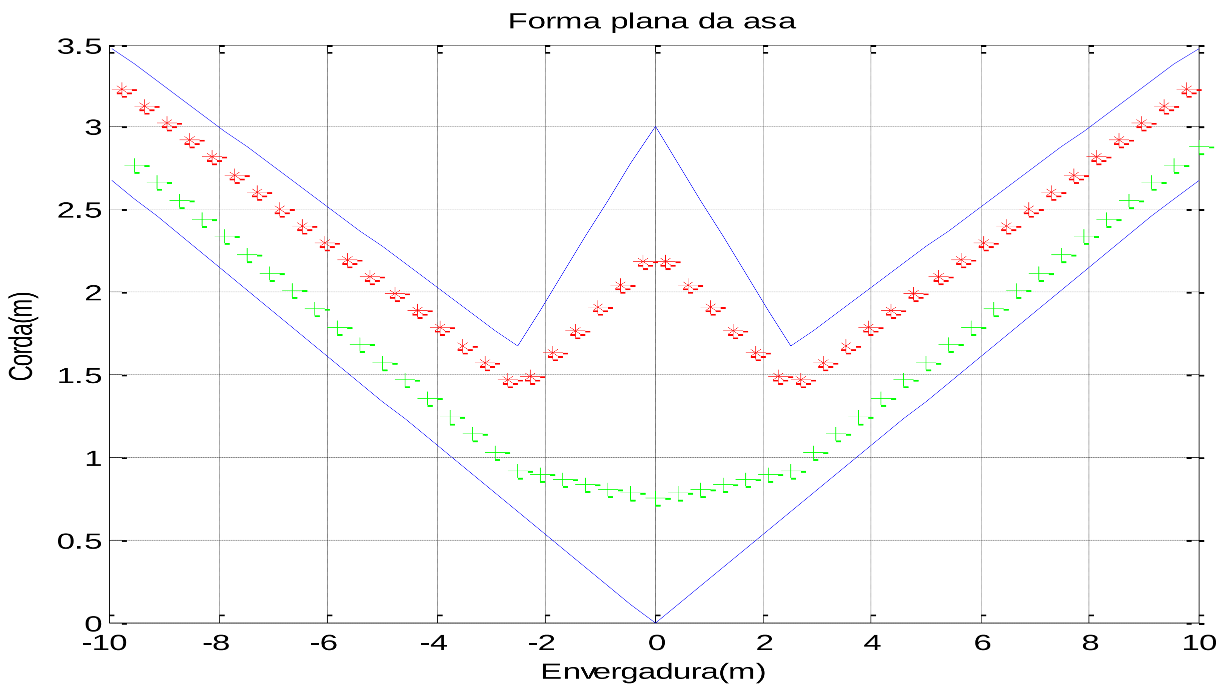

Figura 51: Asa trapezoidal com um *kink* com 15º de enflechamento

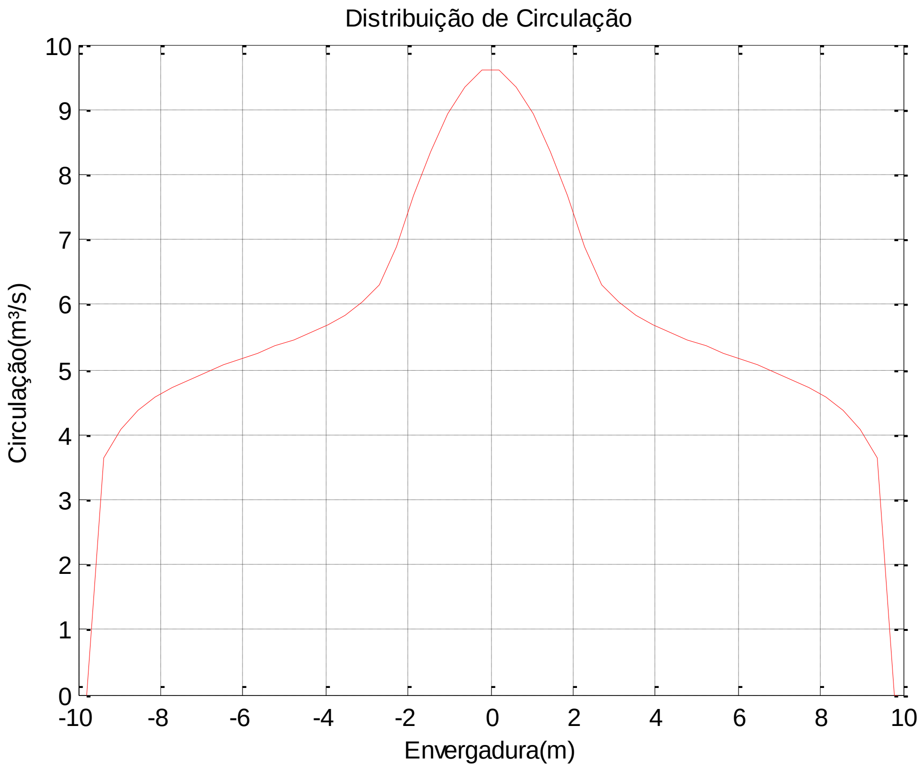

Figura 52: Distribuição de Circulação para um enflechamento de 15º

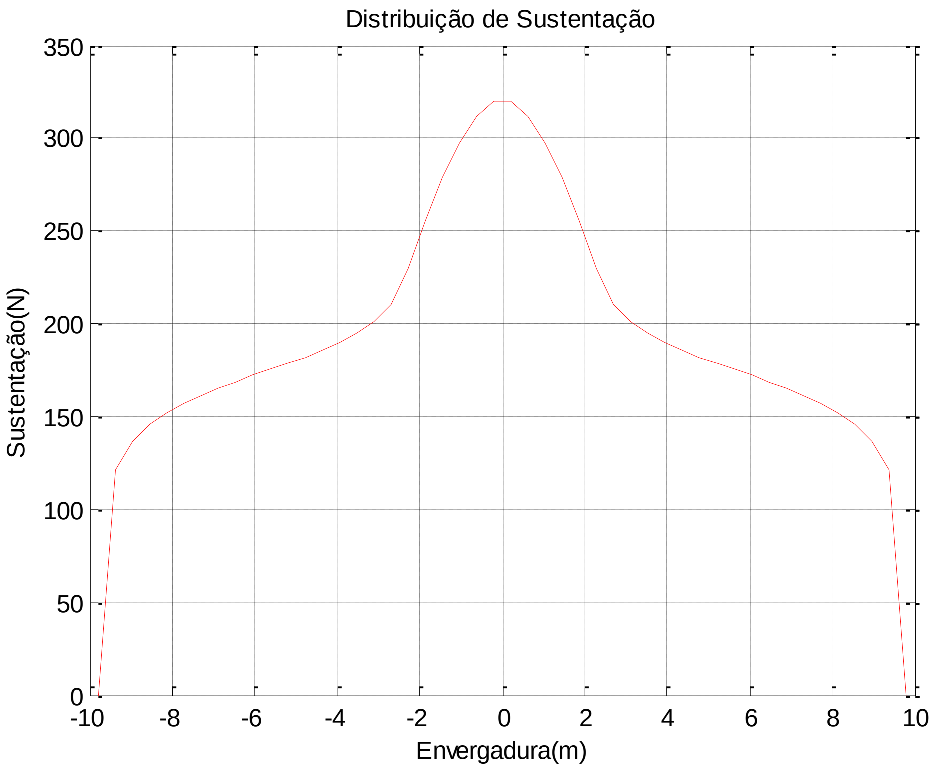

Figura 53: Distribuição de Sustentação para um enflechamento de 15º

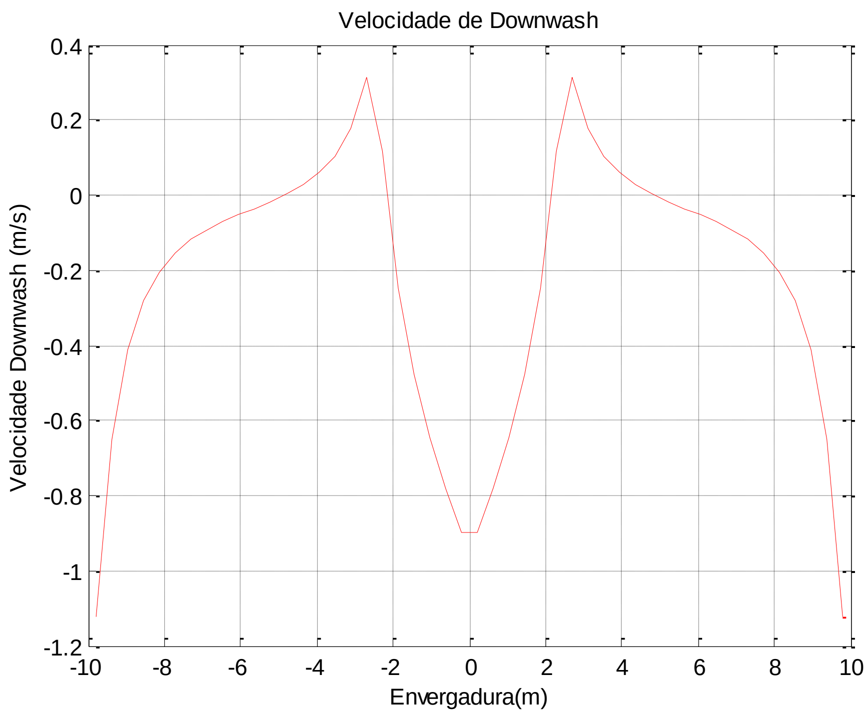

Figura 54: Distribuição de *downwash* para um enflechamento de 15º

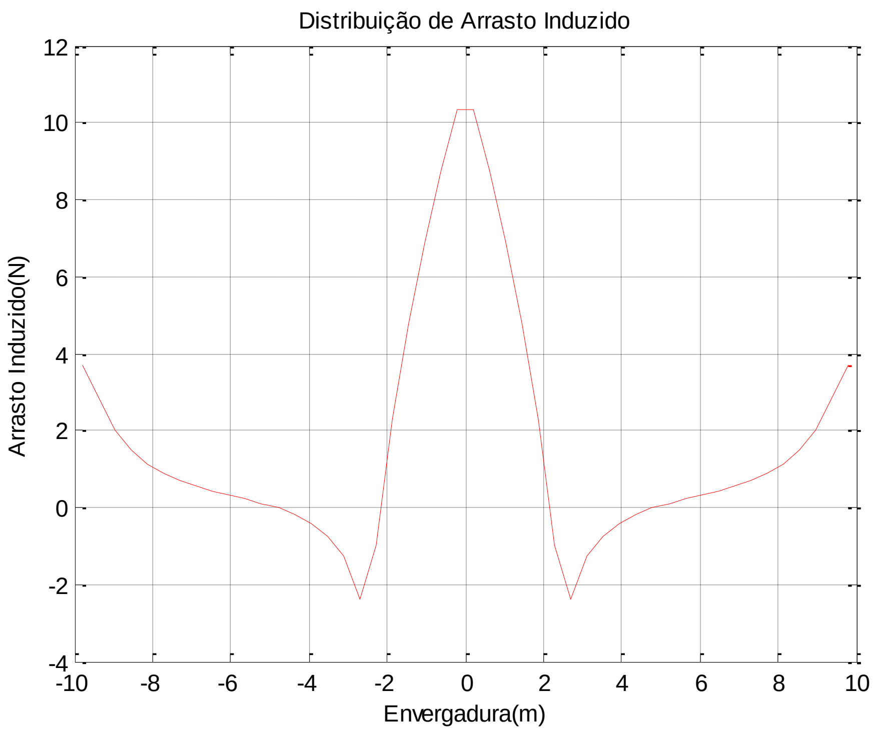

Figura 55: Distribuição de arrasto induzido para um enflechamento de 15º

A seguir serão exibidos os resultados para um ângulo de enflechamento de 30º.

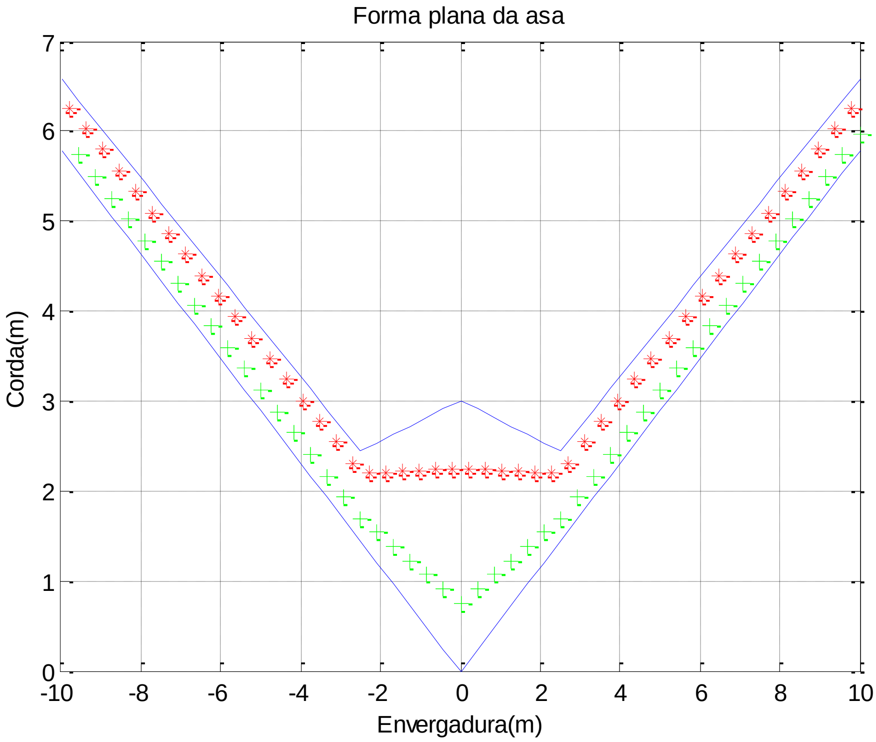

Figura 56: Asa trapezoidal com 30º de enflechamento com *kink*

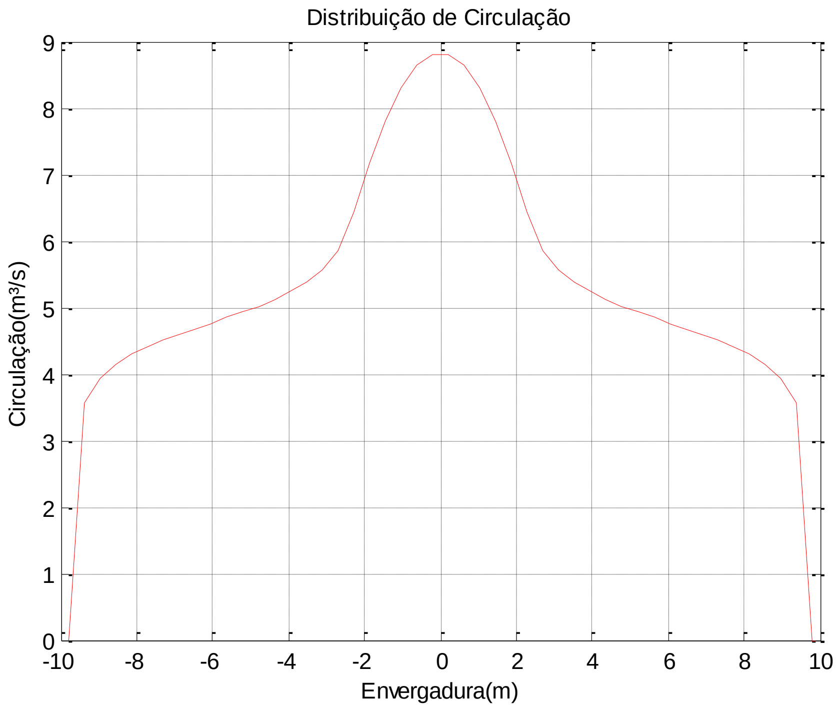

Figura 57: Distribuição de circulação para uma asa com enflechamento de 30º

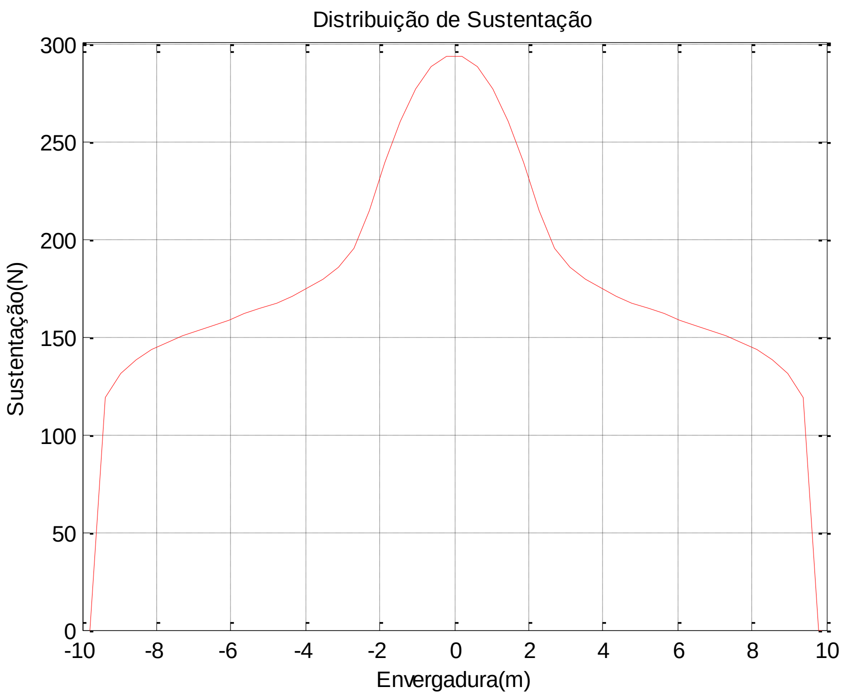

Figura 58: Distribuição de Sustentação para uma asa com enflechamento de 30º

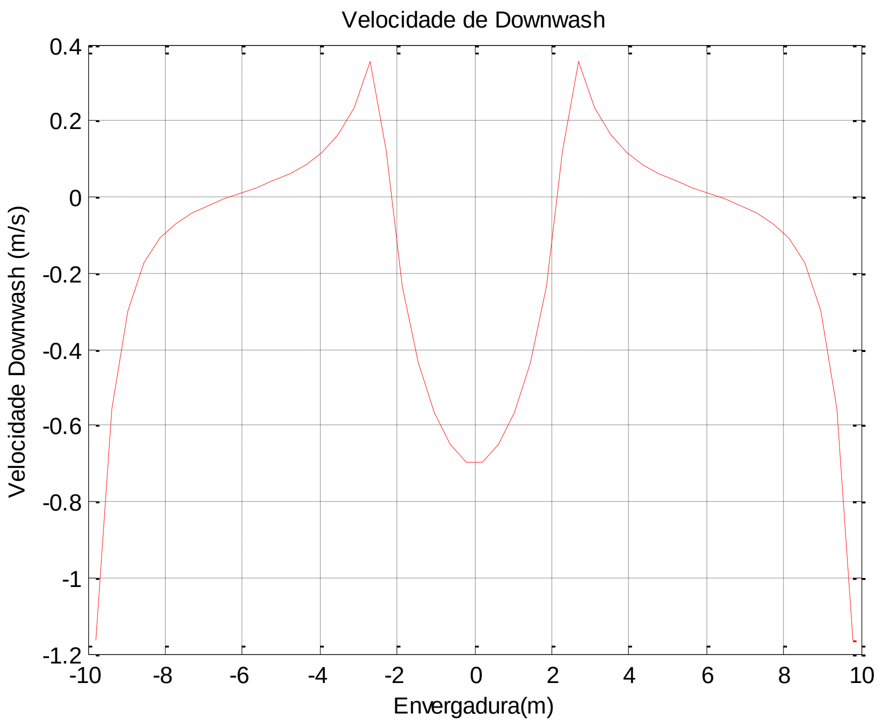

Figura 59: Distribuição de *downwash* com 30º de enflechamento

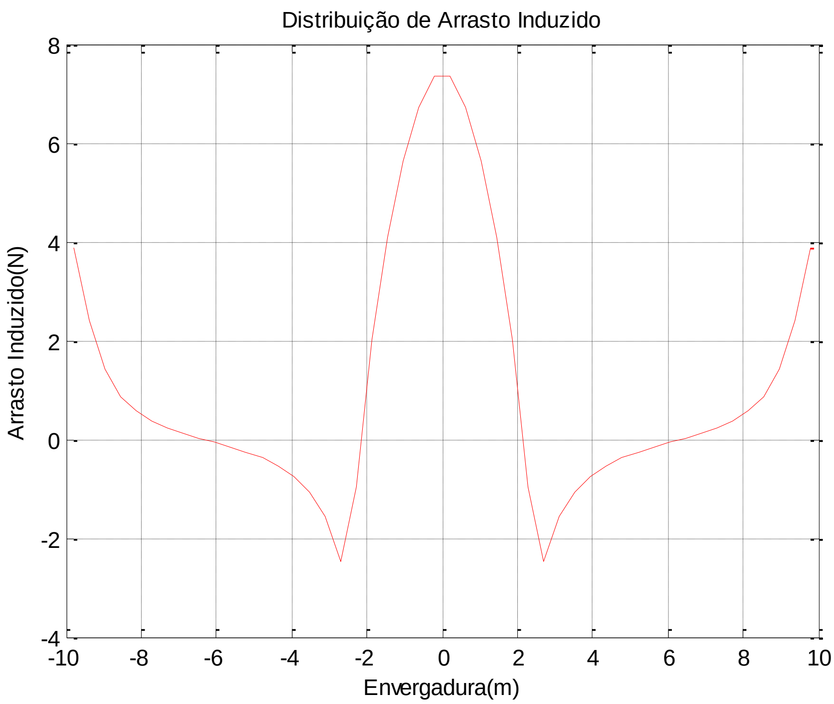

Figura 60: Distribuição de arrasto induzido para um enflechamento de 30º

Em seguida, serão exibidos os resultados obtidos para um ângulo de enflechamento de 45º.

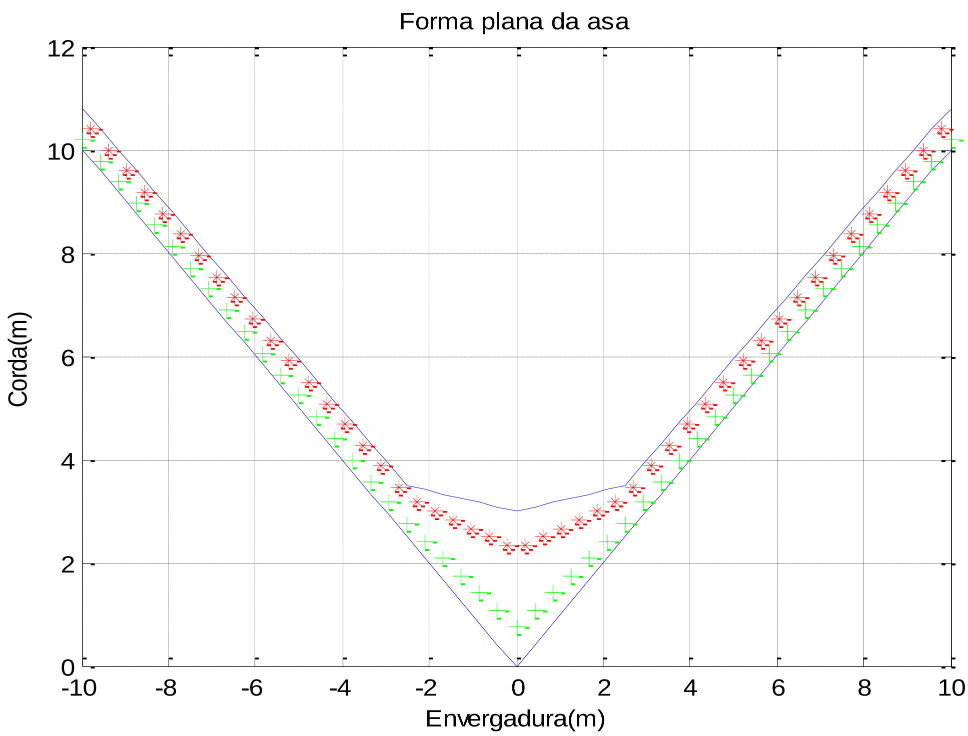

Figura 61: Asa trapezoidal com 45º de enflechamento com *kink*

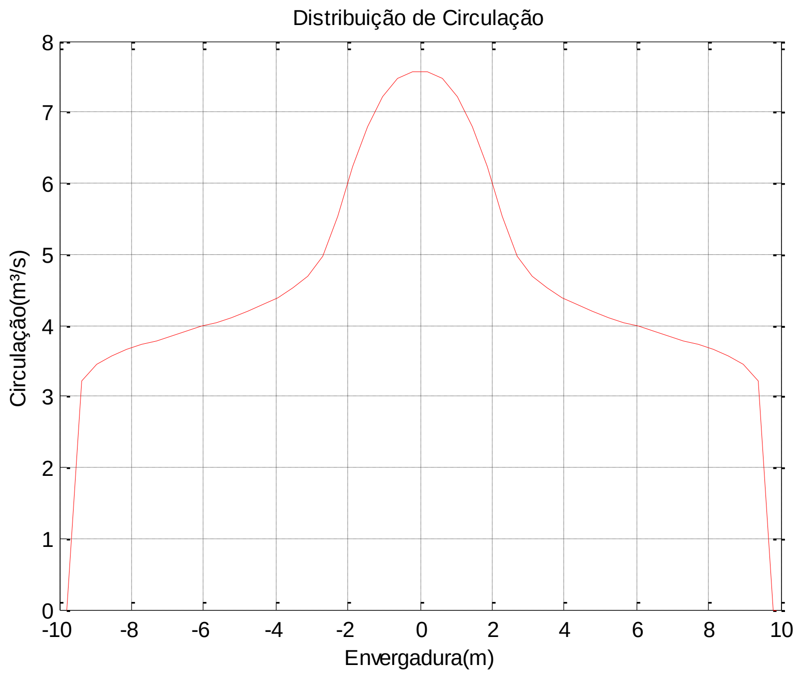

Figura 62: Distribuição de circulação para um enflechamento de 45º

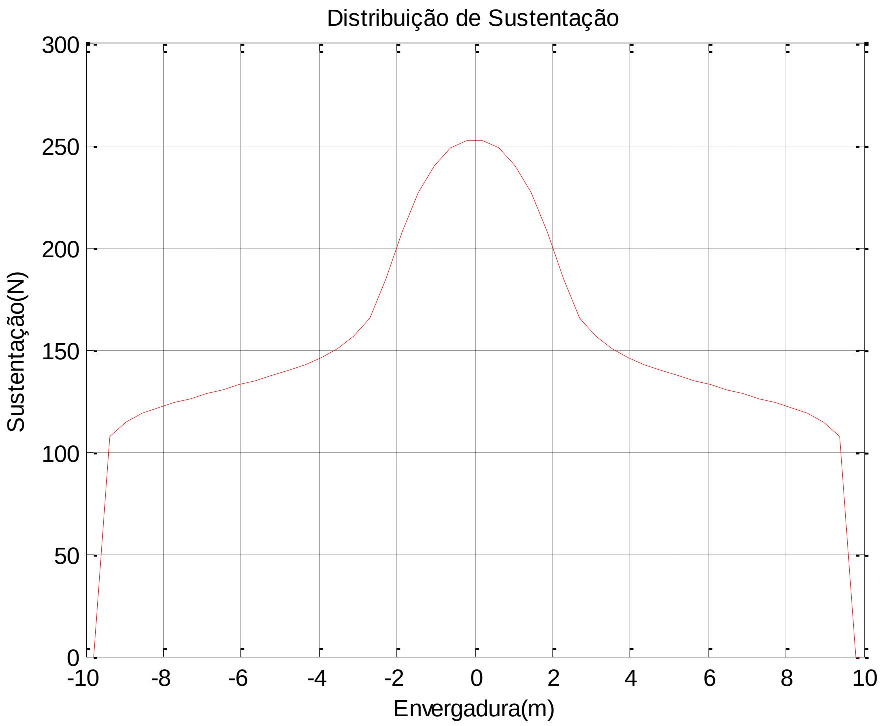

Figura 63: Distribuição de sustentação para um enflechamento de 45º

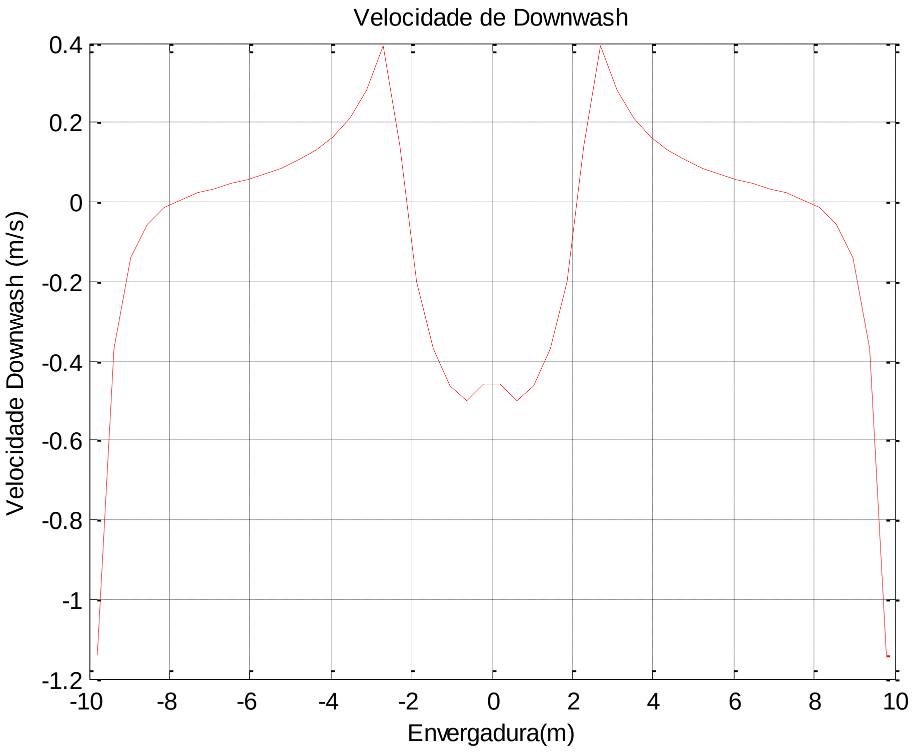

Figura 64: Distribuição de *downwash* para um enflechamento de 45º

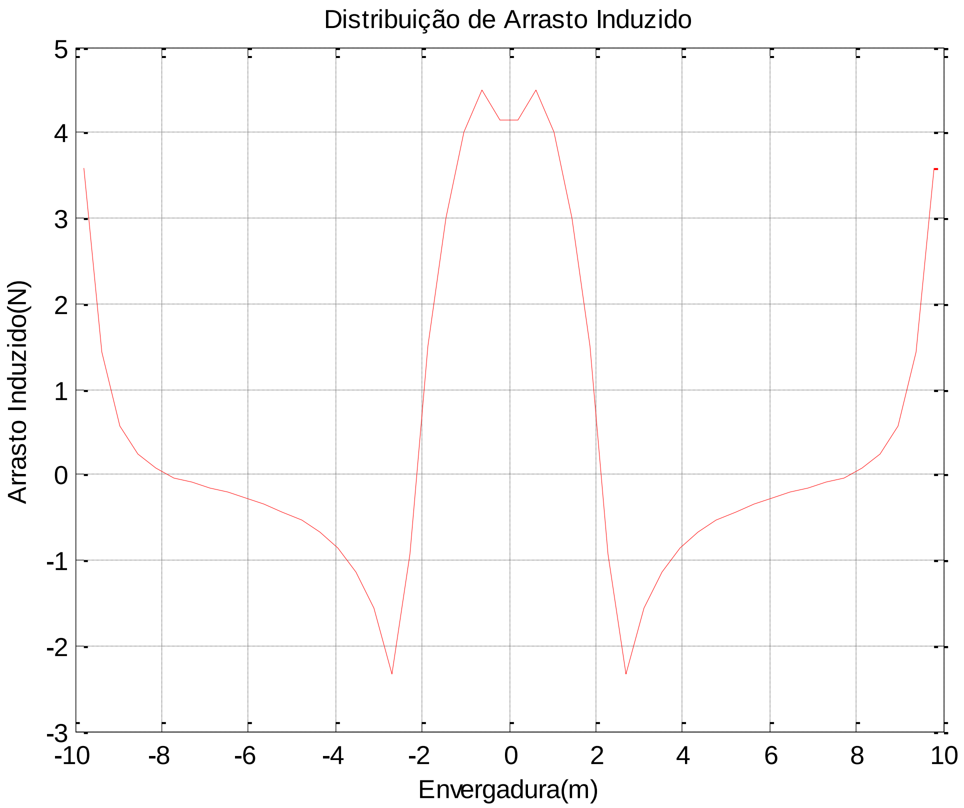

Figura 65: Distribuição de arrasto induzido para um enflechamento de 45º

Observando os resultados acima, podemos observar uma diminuição no valor da circulação e, consequentemente, da sustentação, com o aumento do ângulo de enflechaemento. Além de observarmos também uma queda no valor máximo da velocidade de *downwash*.

6 Conclusões e Comentários

O presente projeto teve como objetivo a implementação de um método computacional utilizando-se o método dos painéis, possibilitando o cálculo de esforços em asas bem como a análise do desempenho aerodinâmico de perfis. Para isso, o método foi simulado e aplicado para os casos bi e tridimensional.

Para o caso bidimensional foi possível verificar a validação do método através da comparação dos resultados obtidos com resultados já conhecidos, bem como a satisfação da condição de Kuta. Já para o caso tridimensional, as comparações foram realizadas através dos resultados obtidos com a Teoria da Linha de Sustentação, utilizando distribuições com resultados já conhecidos como a asa elíptica. Uma vez validade o método, foi possível a implementação do mesmo para asa com diferentes formas planas, sendo utilizada, neste projeto, uma asa trapezoidal com *kink*. Com o método dos painéis, foi possível estudar a influência variação do ângulo de enflechamento da asa no desempenho da mesma. Entretanto, outros parâmetros poderiam ser estudados, como a envergadura, corda na raiz, corda na ponta da asa, etc.

Como sugestão de melhoria, poderia ser introduzido o fator de correção de Prandtl-Glauert, possibilitando o estudo para velocidades cujos efeitos de compressibilidade não podem ser desprezados.

Infelizmente, não foi possível validar os demais códigos para o caso tridimensional. Mas, ao menos, foi realizado um estudo teórico sobre eles ficando, então, como sugestão a implementação e validação destes métodos para trabalhos futuros.

7 Referências Bibliográficas

[1] ANDERSON, J.D., 1991, Fundamentals of Aerodynamics, McGraw-Hill, 2ª edição.

[2] KATZ,J .;PLOTKIN,A. Low Speed Aerodynamics, 2ª edição, Cambridge Press, 2001.

[3] KUETHE, A.M,;CHOW, C.Foundations of Aerodynamics, 4ª edição, Wiley, 1986.

[4] WHITE, F.M. Mecânica dos Fluidos, McGraw-Hill, 2002.

[5] UERJ. Matlab 5.1 – Introdução à Solução de Problemas de Engenharia, 2ª edição.

Apêndice A – Dedução do cálculo da velocidade induzida por um segmento de vórtice

Dado um segmento de vórtice (ver figura 66) podemos calcular o vetor velocidade induzido ($\Delta\mathbf{q}$) no ponto P como segue:

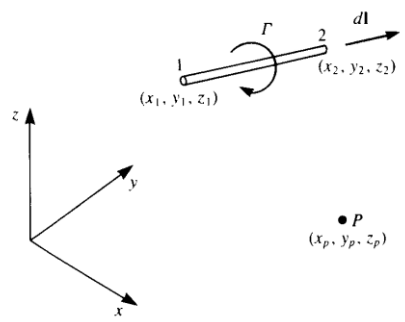

Figura 66: Representação de um segmento de vórtice: Reprodução de [2]

$$\Delta\mathbf{q} = \frac{\Gamma}{4\pi}\frac{d\mathbf{l}\times\mathbf{r}}{r^3} \qquad (106)$$

Se o segmento começa no ponto1 e vai até o ponto2 temos:

$$\mathbf{q}_{1,2} = \frac{\Gamma}{4\pi}\frac{\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2|^2}\mathbf{r}_0\cdot\left(\frac{\mathbf{r}_1}{r_1}-\frac{\mathbf{r}_2}{r_2}\right) \qquad (107)$$

Onde $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ são os vetores $\overrightarrow{1P}$ e $\overrightarrow{2P}$, respectivamente e $\mathbf{r}_0$ é o vetor $\overrightarrow{12}$.

Assim, temos:

$$(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)_x = (y_p-y_1)(z_p-z_2)-(z_p-z_1)(y_p-y_2)$$

$$(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)_y = -(x_p-x_1)(z_p-z_2)+(z_p-z_1)(x_p-x_2) \qquad (108)$$

$$(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)_z = (x_p-x_1)(y_p-y_2)-(y_p-y_1)(x_p-x_2)$$

O módulo do produto vetorial fica então:

$$|\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2|^2 = (\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)_x^2 + (\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)_y^2 + (\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)_z^2 \qquad (109)$$

Calculando os módulos dos vetores $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ temos:

$$r_1 = \sqrt{(x_p - x_1)^2 + (y_p - y_1)^2 + (z_p - z_1)^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x_p - x_2)^2 + (y_p - y_2)^2 + (z_p - z_2)^2} \tag{110}$$

Calculando os produtos escalares:

$$\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_1 = (x_2 - x_1)(x_p - x_1) + (y_2 - y_1)(y_p - y_1) + (z_2 - z_1)(z_p - z_1)$$

$$\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_2 = (x_2 - x_1)(x_p - x_2) + (y_2 - y_1)(y_p - y_2) + (z_2 - z_1)(z_p - z_2) \tag{111}$$

Assim, podemos calcular os componentes da velocidade induzida como:

$$u = K(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)_x$$

$$v = K(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)_y \tag{112}$$

$$w = K(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)_z$$

Onde:

$$K = \frac{\Gamma}{4\pi|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|^2}\left(\frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_1}{r_1} - \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_2}{r_2}\right) \tag{113}$$

Anexo1 – Rotinas Computacionais implementadas em Matlab

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%       TEORIA DA LINHA DE SUSTENTAÇÃO - IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA
%
%    Por:
%
%    Felipe Bezerra de Lima Lopes
%
%    Orientador: Prof.Dr. Ernani V. Volpe                EPUSP/2011
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%    LISTA DE PARÂMETROS     %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% V : Velocidade do escoamento ao longe(m/s)
% RA: Razão de aspecto da asa
% alpha: Ângulo de ataque (°)
% rho: Densidade do fluído (kg/m³)
% b: Envergadura da asa (m)
% n: Tamanho do sistema n x n

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%  PARÂMETROS A SEREM OBTIDOS   %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

L = 0;                      % Sustentação (N)
gama = 0;                   % Circulação
alpha_ind = 0;              % Ângulo de arrasto induzido (°)
downwash=0;                 % Velocidade de downwash (m/s)


%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%  DEFINIÇÃO DOS PARÂMETROS   %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

V=100/3.6;
RA=10;
alpha = 4;
rho = 1.2;
b=30;
n=300;


alpha = alpha*pi/180;       % Passagem do ângulo para radianos
y = [-b/2:0.01:b/2];        % Vetor posição ao longo da envergadura(m)
cs = 4*b/(pi*RA);           % Comprimento de corda no plano de
simetria
teta2 = pi/(2*n);           % Ângulo inicial usado na resolução do
sistema
teta = acos(2*y/b);         % Ângulo que caracteriza a posição na ST
da asa
```

```
x = 0;                          % Auxiliares para somatórios
t=0;

% Montagem da Matriz

for i = 1:n
    c = cs*sin(teta2);
    for j = 1:n
    C(i,j) = (cs*sin(j*teta2))/c +
j*2*pi*cs*sin(j*teta2)/(4*b*sin(teta2));
    end
    teta2 = teta2 + pi/(2*n);
end

% Vetor resultado = ângulo de ataque alpha

for i = 1:n
    B(i,1) = alpha;
end

% Obtenção do vetor dos coeficientes

z = lsqlin(C,B);

% Cálculo da circulação

for i=1:n
    x = z(i)*sin(i*teta);
    gama = gama + x;
end

% Cálculo do ângulo de arrasto induzido

for i=1:n
     t=z(i)*i*sin(i*teta)./sin(teta);
     alpha_ind=alpha_ind-t;
end

%alpha_ind=alpha_ind*(90)/RA; %ANGULO EM GRAUS

% Cálculo da velocidade de downwash
wd=(2*pi*cs/(4*b))*V*alpha_ind;

% Cálculo da circulação
gama = gama*pi*cs*V;

% Cálculo da sustentação
L = rho*V*gama;

% Cálculo do Arrasto Induzido
Di = -rho*wd.*gama;

% Plotagem dos gráficos
figure(1)
plot(y,wd,'r-')
title('Velocidade de Downwash')
```

```
xlabel('b(m)')
ylabel('w(m/s)')
grid

figure(2)
plot(y,gama,'g-')
title('Circulação')
xlabel('b(m)')
ylabel('Gama(m³/s)')
grid

figure(3)
plot(y,L,'b-')
title('Sustentação')
xlabel('b(m)')
ylabel('L(N)')
grid

figure(4)
plot(y,Di,'k-')
title('Arrasto Induzido')
xlabel('b(m)')
ylabel('Di(N)')
grid



%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%           Vórtice Discreto           %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all

%Painel de vórtice constante para uma asa NACA0012
Wingaux=textread('NACA.txt');
b = size(Wingaux);
N = b(1);
n = N-2;
V=1;
c=1;
alpha1=9;
alpha=alpha1*pi/180;
Uinf=cos(alpha)*V;
Winf=sin(alpha)*V;
rho=1.2;

%Ler os pontos da asa no sentido horário
for i=1:(N/2)
    Wing(i,1) = Wingaux(N+1-i,1);
    Wing(i,2) = Wingaux(N+1-i,2);
    Wing(i,3) = Wingaux(N+1-i,3);
end
i=(N/2)+1;
for j=2:(N/2)
    Wing(i,1) = Wingaux(j,1);
    Wing(i,2) = Wingaux(j,2);
    Wing(i,3) = Wingaux(j,3);
    i=i+1;
end
```

```
%Ler os cantos do painel
for i=1:n
    PT1(i,1) = Wing(i,1);
    PT2(i,1) = Wing(i+1,1);
    PT1(i,2) = Wing(i,2);
    PT2(i,2) = Wing(i+1,2);
end

%Ler ângulo dos painéis
for i=1:n
    DZ = PT2(i,2) - PT1(i,2);
    DX = PT2(i,1) - PT1(i,1);
    TETA(i) = atan2(DZ,DX);
end

%Discretização da geometria
for i=1:n
    d = sqrt(((Wing(i+1,1)-Wing(i,1))^2)+((Wing(i+1,2)-Wing(i,2))^2));
    du(i) = d;
    m(i) = (Wing(i+1,2)-Wing(i,2))/(Wing(i+1,1)-Wing(i,1));
    if i >= ((n/2)+1)
        cosseno = (Wing(i+1,1)-Wing(i,1))/d;
        xc(i)=Wing(i,1)+0.75*d*cosseno;
        xv(i)=Wing(i,1)+0.25*d*cosseno;
    else
        cosseno = (Wing(i,1)-Wing(i+1,1))/d;
        xc(i)=Wing(i+1,1)+0.75*d*cosseno;
        xv(i)=Wing(i+1,1)+0.25*d*cosseno;
    end
    yc(i)=Wing(i,2)+m(i)*(xc(i)-Wing(i,1));
    yv(i)=Wing(i,2)+m(i)*(xv(i)-Wing(i,1));
end

%Calcula os coeficientes de influência
%A(i,j)é o componente da velocidade normal no iésimo ponto
%de controle induzida pelo jésimo vórtice
for i=1:n
    for j=1:n
        rq=((xc(i)-xv(j))^2)+((yc(i)-yv(j))^2);
        u = (yc(i)-yv(j))/(2*pi*rq);
        w = -(xc(i)-xv(j))/(2*pi*rq);
        A(i,j) = u*sin(TETA(i)) - w*cos(TETA(i));
    end
end
for i=1:n
    RHS(i,1) = -Uinf*sin(TETA(i))+Winf*cos(TETA(i));
end

%Resolver o sistema linear
Gama = inv(A)*RHS;
for i=1:(n/2)
    GamaU(i) = Gama((n/2)+i);      %circulacao na superficie superior
    GamaL(i) = Gama((n/2)+1-i);   %circulacao na superficie inferior
end

%Calculo da força de sustentação
for i=1:(n/2)
    L(i) = rho*V*GamaU(i) + rho*V*GamaL(i);
end
```

```
%Calculo da velocidade devido ao escoamento ao longe
for i=1:n
    Qtinf(i) = Uinf*cos(TETA(i)) - Winf*sin(TETA(i));
end
%Cálculo dos coeficientes de pressões
for i=1:(n/2)
    cpu(i) = -GamaU(i)/(du((n/2)+i)*V);
    cpl(i) = GamaL(i)/(du((n/2)+1-i)*V);
    cr(i) = xc((n/2)+i)/c;
end


for i=1:(n/2)
    dcp(i) = cpl(i) - cpu(i);
end

%Cálculo da circulação resultante
for i=1:(n/2)
    dgama(i) = GamaU(i)/du((n/2)+i) + GamaL(i)/du((n/2)+1-i);
end

%Plotagem dos gráficos
plot(Wing(:,1),Wing(:,2),xc,yc,'+g',xv,yv,'+r')
grid
figure(2)
plot(L)
title('Sustentação')
ylabel('Força de sustentação [N]')
xlabel('x/c')
grid
figure(3)
plot(cr,cpu,'g+-',cr,cpl,'r+-')
title('Coeficiente de pressão')
xlabel('x/c')
grid
set(gca,'ydir','reverse')
figure(4)
plot(-dcp)
title('Variação do coeficiente de pressão')
xlabel('x/c')
grid
set(gca,'ydir','reverse')
figure(5)
plot(dgama)
title('Circulação resultante')
xlabel('x/c')
grid



%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%            Vórtices constantes         %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all

%Painel de vórtice constante para uma asa NACA0012
Wingaux=textread('NACA.txt');
b = size(Wingaux);
N = b(1);
```

```
n = N-2;
V=1;
c=1;
alpha1=9;
alpha=alpha1*pi/180;
Uinf=cos(alpha)*V;
Winf=sin(alpha)*V;
rho=1.2;

%Ler os pontos da asa no sentido horário
for i=1:(N/2)
    Wing(i,1) = Wingaux(N+1-i,1);
    Wing(i,2) = Wingaux(N+1-i,2);
    Wing(i,3) = Wingaux(N+1-i,3);
end
i=(N/2)+1;
for j=2:(N/2)
    Wing(i,1) = Wingaux(j,1);
    Wing(i,2) = Wingaux(j,2);
    Wing(i,3) = Wingaux(j,3);
    i=i+1;
end

%Cantos dos painéis
for i=1:n
    PT1(i,1) = Wing(i,1);
    PT2(i,1) = Wing(i+1,1);
    PT1(i,2) = Wing(i,2);
    PT2(i,2) = Wing(i+1,2);
end

%Ângulos dos painéis
for i=1:n
    DZ = PT2(i,2) - PT1(i,2);
    DX = PT2(i,1) - PT1(i,1);
    TETA(i) = atan2(DZ,DX);
end

%Pontos de controle
for i=1:n
    CO(i,1) = (PT2(i,1) - PT1(i,1))/2 + PT1(i,1);
    CO(i,2) = (PT2(i,2) - PT1(i,2))/2 + PT1(i,2);
end
for i=1:n
    for j=1:n
        %Cálculo dos cantos do painel e pontos de controle
        %nas coordenadas do painel
        X2T = PT2(j,1) - PT1(j,1);
        Z2T = PT2(j,2) - PT1(j,2);
        XT = CO(i,1) - PT1(j,1);
        ZT = CO(i,2) - PT1(j,2);
        X2 = X2T*cos(TETA(j)) + Z2T*sin(TETA(j));
        Z2 = 0;
        X = XT*cos(TETA(j)) + ZT*sin(TETA(j));
        Z = -XT*sin(TETA(j)) + ZT*cos(TETA(j));
        if i==1
            DL(j) = X2;
        end
        R1 = sqrt((X^2) + (Z^2));
        R2 = sqrt(((X-X2)^2) + (Z^2));
        TH1 = atan2(Z,X);
```

```
        TH2 = atan2(Z,X-X2);
        if i==j
            UL = -0.5;
            WL = 0;
        else
            UL = 0.15916*(TH2-TH1);
            WL = 0.15916*log(R2/R1);
        end
        %Transfomação de coordenadas
        U = UL*cos(-TETA(j)) + WL*sin(-TETA(j));
        W = -UL*sin(-TETA(j)) + WL*cos(-TETA(j));
        %Matriz dos coeficientes de influencia
        %será utilizada a matriz B (componente tangencial das
        %velocidades induzidas
        A(i,j) = -U*sin(TETA(i)) + W*cos(TETA(i));
        B(i,j) = U*cos(TETA(i)) + W*sin(TETA(i));
    end
    RHS(i,1) = -V*cos(alpha)*cos(TETA(i)) - V*sin(alpha)*sin(TETA(i));
end

%Implementação da condição de Kutta no bordo de fuga
for j=1:n
    B((n/4),j) = 0;
end
B(n/4,1) = 1;
B(n/4,n) = 1;
RHS(n/4,1) = 0;
G = inv(B)*RHS;

%Cálculo das velocidades tangenciais
for i=1:n
    TEMP = 0;
    for j=1:n
        TEMP = TEMP + B(i,j)*G(j);
    end
    VEL(i) = TEMP + cos(alpha)*cos(TETA(i)) + sin(alpha)*sin(TETA(i));
end

for i=1:(n/2)
    GamaU(i) = G((n/2)+i);      %circulacao na superficie superior
    GamaL(i) = G((n/2)+1-i);   %circulacao na superficie inferior
    cr(i) = CO((n/2)+i,1)/c;
end

%Cálculo dos coeficientes de pressões
for i=1:n/2
    cpu(i) = -GamaU(i)/V;
    cpl(i) = GamaL(i)/V;
end

%Cálculo da variação do coeficiente de pressão
for i=1:(n/2)
    dcp(i) = cpl(i) - cpu(i);
end

%Cálculo da circulação resultante
for i=1:(n/2)
    gama(i) = GamaU(i) + GamaL(i);
end
```

```
%Plotagem dos gráficos
plot(Wing(:,1),Wing(:,2),CO(:,1),CO(:,2),'+g')
grid
figure(2)
plot(cr,cpu,'g',cr,cpl,'r')
title('Coeficiente de pressão')
xlabel('x/c')
grid
set(gca,'ydir','reverse')
figure(3)
plot(-dcp)
title('Variação do coeficiente de pressão')
xlabel('x/c')
ylabel('-dCp')
grid
set(gca,'ydir','reverse')
figure(4)
plot(cr,gama)
title('Circulação resultante')
xlabel('x/c')
grid



%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DOS PAINÉIS - TRIDIMENSIONAL               %
% Por:                                                               %
% Felipe Bezerra de Lima Lopes                                       %
% Orientador: Prof.Dr. Ernani V. Volpe                EPUSP/2011     %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%    LISTA DE PARÂMETROS     %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

WP = 3;
if WP==1
    S= 10;
    CR = 2;
    CT = CR;
    LAMB = CT/CR;
    SW = (CR+CT)*S/2;
    SA = 30;
    BG = SA*pi/180;
    RA = (S^2)/SW;
elseif WP==2
    S = 20;
    CR = 3;
    CK = CR/3;
    CT = 0.8*CK;
    SK = S/4;
    LAMB1 = CK/CR;
    LAMB2 = CK/CT;
    SW = ((CR+CK)*SK+(CK+CT)*(S-SK))/2;
    SA = 30;
    BG = SA*pi/180;
    RA = (S^2)/SW;
elseif WP==3
    S = 30;
```

```
    RA=10;
    CS = 4*S/(pi*RA);
    SW = (S^2)/RA;
else
    error('unknown form of planform');
end

N = 48;   %Número de painéis
alfa = 4;  %Ângulo de ataque
RHO = 1.2;  %Densidade do ar
QINF = 100/3.6;   %Velocidade do escoamento

ALFA = alfa*pi/180;
EPS=0.0000005; %Erro de Truncamento
UINF = QINF*cos(ALFA); %Componentes da velocidade do escoamento
WINF = QINF*sin(ALFA);

%Pontos de controle
TETA=0:pi/N:pi;
Y=-S/2:S/N:S/2;

if WP==1
    for I=1:N+1
        if Y(I)<0
            X(I,1) = -Y(I)*tan(BG);
            X(I,2) = CR - ((S/2)*tan(BG)+CT-CR)*Y(I)/(S/2);
        else
            X(I,1) = Y(I)*tan(BG);
            X(I,2) = CR + ((S/2)*tan(BG)+CT-CR)*Y(I)/(S/2);
        end
        C(I) = X(I,2)-X(I,1);
    end
elseif WP==2
    for I=1:N+1
        if Y(I)<0
            X(I,1) = -Y(I)*tan(BG);
            if Y(I)<-SK/2
                X(I,2) = (S/2)*tan(BG)+CT - (((S/2)*tan(BG)+CT-
(SK/2)*tan(BG)-CK)/((S-SK)/2))*(Y(I)+(S/2));
            else
                X(I,2) = CR + (CR-(SK/2)*tan(BG)-CK)*Y(I)/(SK/2);
            end
        else
            X(I,1) = Y(I)*tan(BG);
            if Y(I)<SK/2
                X(I,2) = CR - (CR-(SK/2)*tan(BG)-CK)*Y(I)/(SK/2);
            else
                X(I,2) = (S/2)*tan(BG) + CT + (((S/2)*tan(BG)+CT-
(SK/2)*tan(BG)-CK)/((S-SK)/2))*(Y(I)-(S/2));
            end
        end
        C(I) = X(I,2)-X(I,1);
    end
else
    for I=1:N+1
        X(I,1)=-(CS/4)*sin(TETA(I)) + CS/4;
        X(I,2)=X(I,1) + CS*sin(TETA(I));
        C(I) = X(I,2) - X(I,1);
    end
    Y = -(S/2)*cos(TETA);
end
```

```
%Pontos do painel
for I=1:N
    XA(I) = X(1,2) + 20*S;
    YA(I) = Y(I);
    ZA(I) = XA(I)*sin(ALFA);
    XB(I) = X(I,1) + 0.25*C(I);
    YB(I) = YA(I);
    ZB(I) = 0;
    XC(I) = X(I+1,1) + 0.25*C(I+1);
    YC(I) = Y(I+1);
    ZC(I) = 0;
    XD(I) = XA(I);
    YD(I) = YC(I);
    ZD(I) = ZA(I);
end

% Vetor Posição

for I=1:N
    yc(I) = YA(I)+((YC(I)-YB(I))/2);
    X1 = X(I,1) + 0.75*C(I);
    X2 = X(I+1,1) + 0.75*C(I+1);
    xc(I) = (X1+X2)/2;
    zc(I)=0;
end

% Cálculo das velocidades dos segmentos de vórtice

for I=1:N
    for J=1:N
        %Segmento AB
        CROSSPRODX = (yc(I)-YA(J))*(zc(I)-ZB(J))-(zc(I)-ZA(J))*(yc(I)-
YB(J));
        CROSSPRODY = -(xc(I)-XA(J))*(zc(I)-ZB(J))+(zc(I)-
ZA(J))*(xc(I)-XB(J));
        CROSSPRODZ = (xc(I)-XA(J))*(yc(I)-YB(J))-(yc(I)-YA(J))*(xc(I)-
XB(J));
        ABSVALUE = (CROSSPRODX^2)+(CROSSPRODY^2)+(CROSSPRODZ^2);
        R1 = sqrt(((xc(I)-XA(J))^2)+((yc(I)-YA(J))^2)+((zc(I)-
ZA(J))^2));
        R2 = sqrt(((xc(I)-XB(J))^2)+((yc(I)-YB(J))^2)+((zc(I)-
ZB(J))^2));
        DOTPROD1 = (XB(J)-XA(J))*(xc(I)-XA(J))+(YB(J)-YA(J))*(yc(I)-
YA(J))+(ZB(J)-ZA(J))*(zc(I)-ZA(J));
        DOTPROD2 = (XB(J)-XA(J))*(xc(I)-XB(J))+(YB(J)-YA(J))*(yc(I)-
YB(J))+(ZB(J)-ZA(J))*(zc(I)-ZB(J));
        K = (1/(4*pi*ABSVALUE))*((DOTPROD1/R1)-(DOTPROD2/R2));
        if R1 < EPS || R2 < EPS || ABSVALUE < EPS
            U1 = 0;
            V1 = 0;
            W1 = 0;
        else
            U1 = K*CROSSPRODX;
            V1 = K*CROSSPRODY;
            W1 = K*CROSSPRODZ;
        end

        %Segmento BC
        CROSSPRODX = (yc(I)-YB(J))*(zc(I)-ZC(J))-(zc(I)-ZB(J))*(yc(I)-
YC(J));
```

```
        CROSSPRODY = -(xc(I)-XB(J))*(zc(I)-ZC(J))+(zc(I)-
ZB(J))*(xc(I)-XC(J));
        CROSSPRODZ = (xc(I)-XB(J))*(yc(I)-YC(J))-(yc(I)-YB(J))*(xc(I)-
XC(J));
        ABSVALUE = (CROSSPRODX^2)+(CROSSPRODY^2)+(CROSSPRODZ^2);
        R1 = sqrt(((xc(I)-XB(J))^2)+((yc(I)-YB(J))^2)+((zc(I)-
ZB(J))^2));
        R2 = sqrt(((xc(I)-XC(J))^2)+((yc(I)-YC(J))^2)+((zc(I)-
ZC(J))^2));
        DOTPROD1 = (XC(J)-XB(J))*(xc(I)-XB(J))+(YC(J)-YB(J))*(yc(I)-
YB(J))+(ZC(J)-ZB(J))*(zc(I)-ZB(J));
        DOTPROD2 = (XC(J)-XB(J))*(xc(I)-XC(J))+(YC(J)-YB(J))*(yc(I)-
YC(J))+(ZC(J)-ZB(J))*(zc(I)-ZC(J));
        K = (1/(4*pi*ABSVALUE))*((DOTPROD1/R1)-(DOTPROD2/R2));
        if R1 < EPS || R2 < EPS || ABSVALUE < EPS
            U2 = 0;
            V2 = 0;
            W2 = 0;
        else
            U2 = K*CROSSPRODX;
            V2 = K*CROSSPRODY;
            W2 = K*CROSSPRODZ;
        end

        %Segmento CD
        CROSSPRODX = (yc(I)-YC(J))*(zc(I)-ZD(J))-(zc(I)-ZC(J))*(yc(I)-
YD(J));
        CROSSPRODY = -(xc(I)-XC(J))*(zc(I)-ZD(J))+(zc(I)-
ZC(J))*(xc(I)-XD(J));
        CROSSPRODZ = (xc(I)-XC(J))*(yc(I)-YD(J))-(yc(I)-YC(J))*(xc(I)-
XD(J));
        ABSVALUE = (CROSSPRODX^2)+(CROSSPRODY^2)+(CROSSPRODZ^2);
        R1 = sqrt(((xc(I)-XC(J))^2)+((yc(I)-YC(J))^2)+((zc(I)-
ZC(J))^2));
        R2 = sqrt(((xc(I)-XD(J))^2)+((yc(I)-YD(J))^2)+((zc(I)-
ZD(J))^2));
        DOTPROD1 = (XD(J)-XC(J))*(xc(I)-XC(J))+(YD(J)-YC(J))*(yc(I)-
YC(J))+(ZD(J)-ZC(J))*(zc(I)-ZC(J));
        DOTPROD2 = (XD(J)-XC(J))*(xc(I)-XD(J))+(YD(J)-YC(J))*(yc(I)-
YD(J))+(ZD(J)-ZC(J))*(zc(I)-ZD(J));
        K = (1/(4*pi*ABSVALUE))*((DOTPROD1/R1)-(DOTPROD2/R2));
        if R1 < EPS || R2 < EPS || ABSVALUE < EPS
            U3 = 0;
            V3 = 0;
            W3 = 0;
        else
            U3 = K*CROSSPRODX;
            V3 = K*CROSSPRODY;
            W3 = K*CROSSPRODZ;
        end

        U(I,J) = U1 + U2 + U3;
        V(I,J) = V1 + V2 + V3;
        W(I,J) = W1 + W2 + W3;
        Uast(I,J) = U1 + U3;
        Vast(I,J) = V1 + V3;
        Wast(I,J) = W1 + W3;
    end
end
```

```
%Componentes dos vetores normais
for I=1:N
    NX(I) = 0;
    NZ(I) = 1;
    NY(I) = 0;
end


%Coeficientes de influência
for I=1:N
    for J=1:N
        VEL = [U(I,J) V(I,J) W(I,J)];
        VEL_ind = [Uast(I,J) Vast(I,J) Wast(I,J)];
        NORM = [NX(I) NY(I) NZ(I)];
        A(I,J) = dot(VEL,NORM);
        B(I,J) = dot(VEL_ind,NORM);
    end
end

% Vetor Solução do Sistema Linear
for I=1:N
    RHS(I,1) = -(UINF*NX(I) + WINF*NZ(I));
end

% Circulação
GAMA = A\RHS;

%Velocidades induzidas
w=B*GAMA;

%Cálculo da força de sustentação
l = 0;
for I=1:N
    L(I) = RHO*QINF*GAMA(I);
    l = l+L(I)*(YC(I)-YB(I));
end

% Cálculo das forças para a Teoria da Linha de Sustentação
CL = l/(0.5*RHO*(QINF^2)*SW);
gama0 = 2*S*QINF*CL/(pi*RA);
DOWN=-gama0/(2*S);

% Cálculo do Arrasto Induzido
d=0;
for I=1:N
    D(I)= -RHO*w(I)*GAMA(I);
    d = d +D(I)*(YC(I)-YB(I));
end

for I=1:N+1
    CIRC(I) = gama0*sqrt(1-((2*Y(I)/S)^2));
end

LIFT=RHO*QINF*CIRC;
DRAG=-RHO*DOWN*CIRC;

% Variação da Razão de Aspecto

RA_var=0.1:0.1:2;
```

```
Ar_var=(S^2)./(RA_var);
CL_var = 1./(0.5*RHO*(QINF^2)*Ar_var);
gama0_var = (2*S*(QINF.*CL_var))./(pi*RA_var);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%     PLOTAGEM DE GRÁFICOS   %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% CIRCULAÇÃO
figure(1)
plot(yc,GAMA,'g',Y,CIRC,'--b','LineWidth',1)
title('Distribuição de Circulação')
xlabel('Envergadura(m)')
ylabel('Circulação(m³/s)')
hold on
grid on

% SUSTENTAÇÃO
figure(2)
plot(yc,L,'g',Y,LIFT,'--b','LineWidth',1)
title('Distribuição de Sustentação')
xlabel('Envergadura(m)')
ylabel('Sustentação(N)')
hold on
grid on

% DOWNWASH
figure(3)
plot(yc,w,'r','LineWidth',1)
title('Velocidade de Downwash')
xlabel('Envergadura(m)')
ylabel('Velocidade Downwash (m/s)')
hold on
grid on

% ASA
figure(4)
plot(Y,X,'b',yc,xc,'*r',YB,XB,'+g',YC,XC,'+g')
%axis([-15 15 -4 7])
title('Forma plana da asa')
xlabel('Envergadura(m)')
ylabel('Corda(m)')
hold on
grid on

% ARRASTO INDUZIDO
figure(5)
plot(yc,D,'r','LineWidth',1)
title('Distribuição de Arrasto Induzido')
xlabel('Envergadura(m)')
ylabel('Arrasto Induzido(N)')
hold on
grid on

% VARIAÇÃO DE CL COM RA
figure(6)
plot(RA_var,CL_var)
title('Variação do Coeficiente de Sustentação')
xlabel('RA')
ylabel('Cl')
```

```
hold on
grid on


%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%    IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DOS PAINÉIS - TRIDIMENSIONAL           %
% Por:                                                               %
% Felipe Bezerra de Lima Lopes                                       %
% Orientador: Prof.Dr. Ernani V. Volpe                 EPUSP/2011   %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all

%Painel de vórtice constante para uma asa NACA0012
n = 20;
V = 100/3.6;
S = 30;
RA=10;
CS = 4*S/(pi*RA);
N = 45;
T=0.12;
alpha = 4;
ALPHA = alpha*pi/180;
UINF = cos(ALPHA)*V;
WINF = sin(ALPHA)*V;
RHO = 1.2;
EPS=0.00005;

TETA = (179*pi/180):-(178*pi/(180*N)):pi/180;
C = CS*sin(TETA);
YP = (S/2)*cos(TETA);

for J=1:N+1
    for I=1:2*n
        y(I,J)=(S/2)*cos(TETA(J));
    end
end
teta=0:pi/n:pi;
for I=1:(n+1)
    for J=1:N+1
        XP=(C(J)/2)*(1-cos(teta));
        X(I,J)=XP(I)-(C(J)/4)+(CS/4);
        X(n+1+I,J)=X(I,J);
        Z(I,J)=(T*C(J)/0.2)*(0.2969*sqrt(XP(I)/C(J))-
0.1260*(XP(I)/C(J))-0.3516*((XP(I)/C(J))^2)+0.2843*((XP(I)/C(J))^3)-
0.1036*((XP(I)/C(J))^4));
        if I==n+1
            Z(I,J)=0;
        end
        Z(n+1+I,J)=-Z(I,J);
    end
end
%Ler os pontos do perfil da asa no sentido horário
D=size(X);
R=D(1);
P=R-2;
for I=1:(R/2)
    for J=1:N+1
        WINGX(I,J) = X(R/2+1-I,J);
```

```
        WINGZ(I,J) = Z(R/2+1-I,J);
    end
end
I=(R/2)+1;
for J=2:(R/2)
    for M=1:N+1
        WINGX(I,M) = X(J,M);
        WINGZ(I,M) = Z(R/2+J,M);
    end
    I=I+1;
end

%Discretização da geometria
%Calcular coordenadas dos painéis no plano x-z

for I=1:(2*n)
    for J=1:N
        XPT1(I,J) = WINGX(I,J);
        YPT1(I,J) = YP(J);
        ZPT1(I,J) = WINGZ(I,J);
        XPT2(I,J) = WINGX(I+1,J);
        YPT2(I,J) = YPT1(I,J);
        ZPT2(I,J) = WINGZ(I+1,J);
        XPT3(I,J) = WINGX(I+1,J+1);
        YPT3(I,J) = YP(J+1);
        ZPT3(I,J) = WINGZ(I+1,J+1);
        XPT4(I,J) = WINGX(I,J+1);
        YPT4(I,J) = YPT3(I,J);
        ZPT4(I,J) = WINGZ(I,J+1);
    end
end

for I=1:(2*n)
    for J=1:N
        if I < (R/2)
            DIST1 = sqrt(((XPT2(I,J)-XPT1(I,J))^2)+((ZPT2(I,J)-
ZPT1(I,J))^2));
            DIST2 = sqrt(((XPT3(I,J)-XPT4(I,J))^2)+((ZPT3(I,J)-
ZPT4(I,J))^2));
            TAN1 = (ZPT2(I,J)-ZPT1(I,J))/(XPT2(I,J)-XPT1(I,J));
            TAN2 = (ZPT3(I,J)-ZPT4(I,J))/(XPT3(I,J)-XPT4(I,J));
            COS1 = (XPT1(I,J)-XPT2(I,J))/DIST1;
            COS2 = (XPT4(I,J)-XPT3(I,J))/DIST2;
            XC1(I,J) = XPT1(I,J)-0.25*DIST1*COS1;
            XC2(I,J) = XPT4(I,J)-0.25*DIST2*COS2;
            XC(I,J) = (XC1(I,J)+XC2(I,J))/2;
            ZC1(I,J) = ZPT1(I,J)+TAN1*(XC1(I,J)-XPT1(I,J));
            ZC2(I,J) = ZPT4(I,J)+TAN2*(XC2(I,J)-XPT4(I,J));
            ZC(I,J) = (ZC1(I,J)+ZC2(I,J))/2;
            if I == 1
                XV1(I,J) = XPT1(I,J);
                XV4(I,J) = XPT4(I,J);
                ZV1(I,J) = ZPT1(I,J);
                ZV4(I,J) = ZPT4(I,J);
            else
                XV1(I,J) = XV2(I-1,J);
                XV4(I,J) = XV3(I-1,J);
                ZV1(I,J) = ZV2(I-1,J);
                ZV4(I,J) = ZV3(I-1,J);
            end
            XV2(I,J) = XPT1(I,J)-0.75*DIST1*COS1;
```

```
            XV3(I,J) = XPT4(I,J)-0.75*DIST2*COS2;
            ZV2(I,J) = ZPT1(I,J) + TAN1*(XV2(I,J)-XPT1(I,J));
            ZV3(I,J) = ZPT3(I,J) + TAN2*(XV3(I,J)-XPT3(I,J));
        else
            DIST1 = sqrt(((XPT2(3*n+1-I,J)-XPT1(3*n+1-
I,J))^2)+((ZPT2(3*n+1-I,J)-ZPT1(3*n+1-I,J))^2));
            DIST2 = sqrt(((XPT3(3*n+1-I,J)-XPT4(3*n+1-
I,J))^2)+((ZPT3(3*n+1-I,J)-ZPT4(3*n+1-I,J))^2));
            TAN1 = (ZPT2(3*n+1-I,J)-ZPT1(3*n+1-I,J))/(XPT2(3*n+1-I,J)-
XPT1(3*n+1-I,J));
            TAN2 = (ZPT3(3*n+1-I,J)-ZPT4(3*n+1-I,J))/(XPT3(3*n+1-I,J)-
XPT4(3*n+1-I,J));
            COS1 = (XPT2(3*n+1-I,J)-XPT1(3*n+1-I,J))/DIST1;
            COS2 = (XPT3(3*n+1-I,J)-XPT4(3*n+1-I,J))/DIST2;
            XC1(3*n+1-I,J) = XPT1(3*n+1-I,J)+0.75*DIST1*COS1;
            XC2(3*n+1-I,J) = XPT4(3*n+1-I,J)+0.75*DIST2*COS2;
            XC(3*n+1-I,J) = (XC1(3*n+1-I,J)+XC2(3*n+1-I,J))/2;
            ZC1(3*n+1-I,J) = ZPT1(3*n+1-I,J)+TAN1*(XC1(3*n+1-I,J)-
XPT1(3*n+1-I,J));
            ZC2(3*n+1-I,J) = ZPT4(3*n+1-I,J)+TAN2*(XC2(3*n+1-I,J)-
XPT4(3*n+1-I,J));
            ZC(3*n+1-I,J) = (ZC1(3*n+1-I,J)+ZC2(3*n+1-I,J))/2;
            if I == n+1
                XV1(3*n+1-I,J) = XPT2(3*n+1-I,J);
                XV4(3*n+1-I,J) = XPT3(3*n+1-I,J);
                ZV1(3*n+1-I,J) = ZPT2(3*n+1-I,J);
                ZV4(3*n+1-I,J) = ZPT3(3*n+1-I,J);
            else
                XV1(3*n+1-I,J) = XV2(3*n+2-I,J);
                XV4(3*n+1-I,J) = XV3(3*n+2-I,J);
                ZV1(3*n+1-I,J) = ZV2(3*n+2-I,J);
                ZV4(3*n+1-I,J) = ZV3(3*n+2-I,J);
            end
            XV2(3*n+1-I,J) = XPT2(3*n+1-I,J)-0.75*DIST1*COS1;
            XV3(3*n+1-I,J) = XPT3(3*n+1-I,J)-0.75*DIST2*COS2;
            ZV2(3*n+1-I,J) = ZPT1(3*n+1-I,J) + TAN1*(XV2(3*n+1-I,J)-
XPT1(3*n+1-I,J));
            ZV3(3*n+1-I,J) = ZPT3(3*n+1-I,J) + TAN2*(XV3(3*n+1-I,J)-
XPT3(3*n+1-I,J));
        end
        YC(I,J) = YPT1(I,J) + (YPT4(I,J)-YPT1(I,J))/2;
        YV1(I,J) = YPT1(I,J);
        YV2(I,J) = YV1(I,J);
        YV3(I,J) = YPT3(I,J);
        YV4(I,J) = YV3(I,J);
    end
end

CONTA_PONTO = 1;

for F=1:(2*n)
    for H=1:N
        CONTA_PAINEL = 1;
        for I=1:(2*n)
            for J=1:N
                % Segmento 1-2
                CROSSPRODX = (YC(F,H)-YV1(I,J))*(ZC(F,H)-ZV2(I,J))-
(ZC(F,H)-ZV1(I,J))*(YC(F,H)-YV2(I,J));
                CROSSPRODY = -(XC(F,H)-XV1(I,J))*(ZC(F,H)-
ZV2(I,J))+(ZC(F,H)-ZV1(I,J))*(XC(F,H)-XV2(I,J));
```

```
                CROSSPRODZ = (XC(F,H)-XV1(I,J))*(YC(F,H)-YV2(I,J))-
(YC(F,H)-YV1(I,J))*(XC(F,H)-XV2(I,J));
                ABSVALUE =
(CROSSPRODX^2)+(CROSSPRODY^2)+(CROSSPRODZ^2);
                R1 = sqrt(((XC(F,H)-XV1(I,J))^2)+((YC(F,H)-
YV1(I,J))^2)+((ZC(F,H)-ZV1(I,J))^2));
                R2 = sqrt(((XC(F,H)-XV2(I,J))^2)+((YC(F,H)-
YV2(I,J))^2)+((ZC(F,H)-ZV2(I,J))^2));
                DOTPROD1 = (XV2(I,J)-XV1(I,J))*(XC(F,H)-
XV1(I,J))+(YV2(I,J)-YV1(I,J))*(YC(F,H)-YV1(I,J))+(ZV2(I,J)-
ZV1(I,J))*(ZC(F,H)-ZV1(I,J));
                DOTPROD2 = (XV2(I,J)-XV1(I,J))*(XC(F,H)-
XV2(I,J))+(YV2(I,J)-YV1(I,J))*(YC(F,H)-YV2(I,J))+(ZV2(I,J)-
ZV1(I,J))*(ZC(F,H)-ZV2(I,J));
                K = (1/(4*pi*ABSVALUE))*((DOTPROD1/R1)-(DOTPROD2/R2));
                 if R1 < EPS || R2 < EPS || ABSVALUE < EPS
                     U1 = 0;
                     V1 = 0;
                     W1 = 0;
                 else
                    U1 = K*CROSSPRODX;
                    V1 = K*CROSSPRODY;
                    W1 = K*CROSSPRODZ;
                 end

                % Segmento 2-3
                CROSSPRODX = (YC(F,H)-YV2(I,J))*(ZC(F,H)-ZV3(I,J))-
(ZC(F,H)-ZV2(I,J))*(YC(F,H)-YV3(I,J));
                CROSSPRODY = -(XC(F,H)-XV2(I,J))*(ZC(F,H)-
ZV3(I,J))+(ZC(F,H)-ZV2(I,J))*(XC(F,H)-XV3(I,J));
                CROSSPRODZ = (XC(F,H)-XV2(I,J))*(YC(F,H)-YV3(I,J))-
(YC(F,H)-YV2(I,J))*(XC(F,H)-XV3(I,J));
                ABSVALUE =
(CROSSPRODX^2)+(CROSSPRODY^2)+(CROSSPRODZ^2);
                R1 = sqrt(((XC(F,H)-XV2(I,J))^2)+((YC(F,H)-
YV2(I,J))^2)+((ZC(F,H)-ZV2(I,J))^2));
                R2 = sqrt(((XC(F,H)-XV3(I,J))^2)+((YC(F,H)-
YV3(I,J))^2)+((ZC(F,H)-ZV3(I,J))^2));
                DOTPROD1 = (XV3(I,J)-XV2(I,J))*(XC(F,H)-
XV2(I,J))+(YV3(I,J)-YV2(I,J))*(YC(F,H)-YV2(I,J))+(ZV3(I,J)-
ZV2(I,J))*(ZC(F,H)-ZV2(I,J));
                DOTPROD2 = (XV3(I,J)-XV2(I,J))*(XC(F,H)-
XV3(I,J))+(YV3(I,J)-YV2(I,J))*(YC(F,H)-YV3(I,J))+(ZV3(I,J)-
ZV2(I,J))*(ZC(F,H)-ZV3(I,J));
                K = (1/(4*pi*ABSVALUE))*((DOTPROD1/R1)-(DOTPROD2/R2));
                 if R1 < EPS || R2 < EPS || ABSVALUE < EPS
                     U2 = 0;
                     V2 = 0;
                     W2 = 0;
                 else
                    U2 = K*CROSSPRODX;
                    V2 = K*CROSSPRODY;
                    W2 = K*CROSSPRODZ;
                 end

                % Segmento 3-4
                CROSSPRODX = (YC(F,H)-YV3(I,J))*(ZC(F,H)-ZV4(I,J))-
(ZC(F,H)-ZV3(I,J))*(YC(F,H)-YV4(I,J));
                CROSSPRODY = -(XC(F,H)-XV3(I,J))*(ZC(F,H)-
ZV4(I,J))+(ZC(F,H)-ZV3(I,J))*(XC(F,H)-XV4(I,J));
```

```
                CROSSPRODZ = (XC(F,H)-XV3(I,J))*(YC(F,H)-YV4(I,J))-
(YC(F,H)-YV3(I,J))*(XC(F,H)-XV4(I,J));
                ABSVALUE =
(CROSSPRODX^2)+(CROSSPRODY^2)+(CROSSPRODZ^2);
                R1 = sqrt(((XC(F,H)-XV3(I,J))^2)+((YC(F,H)-
YV3(I,J))^2)+((ZC(F,H)-ZV3(I,J))^2));
                R2 = sqrt(((XC(F,H)-XV4(I,J))^2)+((YC(F,H)-
YV4(I,J))^2)+((ZC(F,H)-ZV4(I,J))^2));
                DOTPROD1 = (XV4(I,J)-XV3(I,J))*(XC(F,H)-
XV3(I,J))+(YV4(I,J)-YV3(I,J))*(YC(F,H)-YV3(I,J))+(ZV4(I,J)-
ZV3(I,J))*(ZC(F,H)-ZV3(I,J));
                DOTPROD2 = (XV4(I,J)-XV3(I,J))*(XC(F,H)-
XV4(I,J))+(YV4(I,J)-YV3(I,J))*(YC(F,H)-YV4(I,J))+(ZV4(I,J)-
ZV3(I,J))*(ZC(F,H)-ZV4(I,J));
                K = (1/(4*pi*ABSVALUE))*((DOTPROD1/R1)-(DOTPROD2/R2));
                 if R1 < EPS || R2 < EPS || ABSVALUE < EPS
                     U3 = 0;
                     V3 = 0;
                     W3 = 0;
                 else
                    U3 = K*CROSSPRODX;
                    V3 = K*CROSSPRODY;
                    W3 = K*CROSSPRODZ;
                 end

                % Segmento 4-1
                CROSSPRODX = (YC(F,H)-YV4(I,J))*(ZC(F,H)-ZV1(I,J))-
(ZC(F,H)-ZV4(I,J))*(YC(F,H)-YV1(I,J));
                CROSSPRODY = -(XC(F,H)-XV4(I,J))*(ZC(F,H)-
ZV1(I,J))+(ZC(F,H)-ZV4(I,J))*(XC(F,H)-XV1(I,J));
                CROSSPRODZ = (XC(F,H)-XV4(I,J))*(YC(F,H)-YV1(I,J))-
(YC(F,H)-YV4(I,J))*(XC(F,H)-XV1(I,J));
                ABSVALUE =
(CROSSPRODX^2)+(CROSSPRODY^2)+(CROSSPRODZ^2);
                R1 = sqrt(((XC(F,H)-XV4(I,J))^2)+((YC(F,H)-
YV4(I,J))^2)+((ZC(F,H)-ZV4(I,J))^2));
                R2 = sqrt(((XC(F,H)-XV1(I,J))^2)+((YC(F,H)-
YV1(I,J))^2)+((ZC(F,H)-ZV1(I,J))^2));
                DOTPROD1 = (XV1(I,J)-XV4(I,J))*(XC(F,H)-
XV4(I,J))+(YV1(I,J)-YV4(I,J))*(YC(F,H)-YV4(I,J))+(ZV1(I,J)-
ZV4(I,J))*(ZC(F,H)-ZV4(I,J));
                DOTPROD2 = (XV1(I,J)-XV4(I,J))*(XC(F,H)-
XV1(I,J))+(YV1(I,J)-YV4(I,J))*(YC(F,H)-YV1(I,J))+(ZV1(I,J)-
ZV4(I,J))*(ZC(F,H)-ZV1(I,J));
                K = (1/(4*pi*ABSVALUE))*((DOTPROD1/R1)-(DOTPROD2/R2));
                 if R1 < EPS || R2 < EPS || ABSVALUE < EPS
                     U4 = 0;
                     V4 = 0;
                     W4 = 0;
                 else
                    U4 = K*CROSSPRODX;
                    V4 = K*CROSSPRODY;
                    W4 = K*CROSSPRODZ;
                 end

                if I==1 || I==(n*2)
                    XWV1 = WINGX(I,J);
                    YWV1 = YP(J);
                    ZWV1 = WINGZ(I,J);
                    XWV2 = WINGX(I,J+1);
                    YWV2 = YP(J+1);
```

```
                    ZWV2 = WINGZ(I,J+1);
                    XWV3 = CS + 30*S;
                    YWV3 = YWV2;
                    ZWV3 = 0;
                    XWV4 = XWV3;
                    YWV4 = YWV1;
                    ZWV4 = 0;

                    %Segmento 1-2 do painel da esteira
                    CROSSPRODX = (YC(F,H)-YWV1)*(ZC(F,H)-ZWV2)-
(ZC(F,H)-ZWV1)*(YC(F,H)-YWV2);
                    CROSSPRODY = -(XC(F,H)-XWV1)*(ZC(F,H)-
ZWV2)+(ZC(F,H)-ZWV1)*(XC(F,H)-XWV2);
                    CROSSPRODZ = (XC(F,H)-XWV1)*(YC(F,H)-YWV2)-
(YC(F,H)-YWV1)*(XC(F,H)-XWV2);
                    ABSVALUE =
(CROSSPRODX^2)+(CROSSPRODY^2)+(CROSSPRODZ^2);
                    R1 = sqrt(((XC(F,H)-XWV1)^2)+((YC(F,H)-
YWV1)^2)+((ZC(F,H)-ZWV1)^2));
                    R2 = sqrt(((XC(F,H)-XWV2)^2)+((YC(F,H)-
YWV2)^2)+((ZC(F,H)-ZWV2)^2));
                    DOTPROD1 = (XWV2-XWV1)*(XC(F,H)-XWV1)+(YWV2-
YWV1)*(YC(F,H)-YWV1)+(ZWV2-ZWV1)*(ZC(F,H)-ZWV1);
                    DOTPROD2 = (XWV2-XWV1)*(XC(F,H)-XWV2)+(YWV2-
YWV1)*(YC(F,H)-YWV2)+(ZWV2-ZWV1)*(ZC(F,H)-ZWV2);
                    K = (1/(4*pi*ABSVALUE))*((DOTPROD1/R1)-
(DOTPROD2/R2));
                     if R1 < EPS || R2 < EPS || ABSVALUE < EPS
                         UW1 = 0;
                         VW1 = 0;
                         WW1 = 0;
                     else
                        UW1 = K*CROSSPRODX;
                        VW1 = K*CROSSPRODY;
                        WW1 = K*CROSSPRODZ;
                     end

                    %Segmento 2-3 do painel da esteira
                    CROSSPRODX = (YC(F,H)-YWV2)*(ZC(F,H)-ZWV3)-
(ZC(F,H)-ZWV2)*(YC(F,H)-YWV3);
                    CROSSPRODY = -(XC(F,H)-XWV2)*(ZC(F,H)-
ZWV3)+(ZC(F,H)-ZWV2)*(XC(F,H)-XWV3);
                    CROSSPRODZ = (XC(F,H)-XWV2)*(YC(F,H)-YWV3)-
(YC(F,H)-YWV2)*(XC(F,H)-XWV3);
                    ABSVALUE =
(CROSSPRODX^2)+(CROSSPRODY^2)+(CROSSPRODZ^2);
                    R1 = sqrt(((XC(F,H)-XWV2)^2)+((YC(F,H)-
YWV2)^2)+((ZC(F,H)-ZWV2)^2));
                    R2 = sqrt(((XC(F,H)-XWV3)^2)+((YC(F,H)-
YWV3)^2)+((ZC(F,H)-ZWV3)^2));
                    DOTPROD1 = (XWV3-XWV2)*(XC(F,H)-XWV2)+(YWV3-
YWV2)*(YC(F,H)-YWV2)+(ZWV3-ZWV2)*(ZC(F,H)-ZWV2);
                    DOTPROD2 = (XWV3-XWV2)*(XC(F,H)-XWV3)+(YWV3-
YWV2)*(YC(F,H)-YWV3)+(ZWV3-ZWV2)*(ZC(F,H)-ZWV3);
                    K = (1/(4*pi*ABSVALUE))*((DOTPROD1/R1)-
(DOTPROD2/R2));
                     if R1 < EPS || R2 < EPS || ABSVALUE < EPS
                         UW2 = 0;
                         VW2 = 0;
                         WW2 = 0;
                     else
```

```
                        UW2 = K*CROSSPRODX;
                        VW2 = K*CROSSPRODY;
                        WW2 = K*CROSSPRODZ;
                     end

                    %Segmento 4-1 do painel da esteira
                    CROSSPRODX = (YC(F,H)-YWV4)*(ZC(F,H)-ZWV1)-
(ZC(F,H)-ZWV4)*(YC(F,H)-YWV1);
                    CROSSPRODY = -(XC(F,H)-XWV4)*(ZC(F,H)-
ZWV1)+(ZC(F,H)-ZWV4)*(XC(F,H)-XWV1);
                    CROSSPRODZ = (XC(F,H)-XWV4)*(YC(F,H)-YWV1)-
(YC(F,H)-YWV4)*(XC(F,H)-XWV1);
                    ABSVALUE =
(CROSSPRODX^2)+(CROSSPRODY^2)+(CROSSPRODZ^2);
                    R1 = sqrt(((XC(F,H)-XWV4)^2)+((YC(F,H)-
YWV4)^2)+((ZC(F,H)-ZWV4)^2));
                    R2 = sqrt(((XC(F,H)-XWV1)^2)+((YC(F,H)-
YWV1)^2)+((ZC(F,H)-ZWV1)^2));
                    DOTPROD1 = (XWV1-XWV4)*(XC(F,H)-XWV4)+(YWV1-
YWV4)*(YC(F,H)-YWV4)+(ZWV1-ZWV4)*(ZC(F,H)-ZWV4);
                    DOTPROD2 = (XWV1-XWV4)*(XC(F,H)-XWV1)+(YWV1-
YWV4)*(YC(F,H)-YWV1)+(ZWV1-ZWV4)*(ZC(F,H)-ZWV1);
                    K = (1/(4*pi*ABSVALUE))*((DOTPROD1/R1)-
(DOTPROD2/R2));
                     if R1 < EPS || R2 < EPS || ABSVALUE < EPS
                         UW3 = 0;
                         VW3 = 0;
                         WW3 = 0;
                     else
                        UW3 = K*CROSSPRODX;
                        VW3 = K*CROSSPRODY;
                        WW3 = K*CROSSPRODZ;
                     end

                end

                U(CONTA_PONTO,CONTA_PAINEL) = U1 + U2 + U3 + U4;
                V(CONTA_PONTO,CONTA_PAINEL) = V1 + V2 + V3 + V4;
                W(CONTA_PONTO,CONTA_PAINEL) = W1 + W2 + W3 + W4;

                U_IND(CONTA_PONTO,CONTA_PAINEL) = U1 + U3;
                V_IND(CONTA_PONTO,CONTA_PAINEL) = V1 + V3;
                W_IND(CONTA_PONTO,CONTA_PAINEL) = W1 + W3;

                if I==1 || I==(n*2)
                    U(CONTA_PONTO,CONTA_PAINEL) =
U(CONTA_PONTO,CONTA_PAINEL) + UW1 + UW2 + UW3;
                    V(CONTA_PONTO,CONTA_PAINEL) =
V(CONTA_PONTO,CONTA_PAINEL) + VW1 + VW2 + VW3;
                    W(CONTA_PONTO,CONTA_PAINEL) =
U(CONTA_PONTO,CONTA_PAINEL) + WW1 + WW2 + WW3;

                    U_IND(CONTA_PONTO,CONTA_PAINEL) =
U_IND(CONTA_PONTO,CONTA_PAINEL) + UW2 + UW3;
                    V_IND(CONTA_PONTO,CONTA_PAINEL) =
V_IND(CONTA_PONTO,CONTA_PAINEL) + VW2 + VW3;
                    W_IND(CONTA_PONTO,CONTA_PAINEL) =
U_IND(CONTA_PONTO,CONTA_PAINEL) + WW2 + WW3;
                end
```

```
                CONTA_PAINEL = CONTA_PAINEL+1;
            end
        end
        CONTA_PONTO = CONTA_PONTO+1;
    end
end

%Calcula vetores normais
CONTA_VETOR=1;
for I=1:2*n
    for J=1:N
        VETX1=XPT3(I,J)-XPT1(I,J);
        VETY1=YPT3(I,J)-YPT1(I,J);
        VETZ1=ZPT3(I,J)-ZPT1(I,J);
        VETX2=XPT4(I,J)-XPT2(I,J);
        VETY2=YPT4(I,J)-YPT2(I,J);
        VETZ2=ZPT4(I,J)-ZPT2(I,J);
        VET1 = [VETX1 VETY1 VETZ1];
        VET2 = [VETX2 VETY2 VETZ2];
        PERP = cross(VET2,VET1);
        NORMAL = PERP/norm(PERP);
        NX(CONTA_VETOR)=NORMAL(1);
        NY(CONTA_VETOR)=NORMAL(2);
        NZ(CONTA_VETOR)=NORMAL(3);
        CONTA_VETOR=CONTA_VETOR+1;
    end
end
PONTO=1;
for F=1:(2*n)
    for H=1:N
        PAINEL=1;
        for I=1:(2*n)
            for J=1:N

A(PONTO,PAINEL)=U(PONTO,PAINEL)*NX(PONTO)+V(PONTO,PAINEL)*NY(PONTO)+W(
PONTO,PAINEL)*NZ(PONTO);

B(PONTO,PAINEL)=U_IND(PONTO,PAINEL)*NX(PONTO)+V_IND(PONTO,PAINEL)*NY(P
ONTO)+W_IND(PONTO,PAINEL)*NZ(PONTO);
                PAINEL=PAINEL+1;
            end
        end
        RHS(PONTO,1) = -(UINF*NX(PONTO)+WINF*NZ(PONTO));
        PONTO=PONTO+1;
    end
end
GAMA=A\RHS;
CONTA_CIRC=1;
for I=1:(2*n)
    for J=1:N
        circ(I,J)=GAMA(CONTA_CIRC);
        CONTA_CIRC=CONTA_CIRC+1;
    end
end
for I=1:N
    CIRC_TOTAL(I) = 0;
end
for I=1:n
    for J=1:N
        CIRC(I,J)=circ(I,J)+circ(2*n+1-I,J);
        CIRC_TOTAL(J) = CIRC_TOTAL(J)+CIRC(I,J);
```

```
    end
end
figure(1)
plot(YC,CIRC_TOTAL)
grid
```