MARCELO ITO

ANÁLISE DE ESFORÇOS EM CORREIAS NA REGIÃO DO *TURNOVER*

SÃO PAULO

2011

MARCELO ITO N° USP 5950851

ANÁLISE DE ESFORÇOS EM CORREIAS NA REGIÃO DO *TURNOVER*

Trabalho de Formatura apresentado à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo como requisito para conclusão da graduação em Engenharia Mecânica.

Área de Concentração:

Mecânica dos Sólidos

Orientador:

Prof. Dr. Roberto Ramos Júnior

São Paulo

2011

FICHA CATALOGRÁFICA

Ito, Marcelo
Análise de esforços em correias na região do turnover / M. Ito. – São Paulo, 2011.
159 p.

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1.Viradores de correias I.Universidade de São Paulo. Escola

Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II.t.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Doutor Roberto Ramos Júnior, pela orientação e pelo constante estímulo transmitido durante todo o trabalho.

Ao Professor Mestre Leandro Vieira da Silva Macedo, pela orientação transmitida durante a confecção do modelo em elementos finitos. Sem a ajuda do Mestre, o modelo em elementos finitos não seria possível.

Aos Professores Doutores Alexandre Kawano e Alberto Hernandez Neto, pela participação na banca examinadora.

Em especial aos engenheiros Rui Câmara e David Wen Fa, pela transmissão de conhecimento e pela colaboração nas minhas atividades.

A toda equipe da empresa em que trabalho, pela oportunidade de aprendizado, pela colaboração nas atividades realizadas e a todos que ajudaram direta ou indiretamente na execução deste trabalho.

É melhor lançar-se à luta em busca do triunfo mesmo expondo-se ao insucesso, que formar fila com os pobres de espírito, que nem gozam muito nem sofrem muito; E vivem nessa penumbra cinzenta sem conhecer nem vitória nem derrota.

(Franklin Roosevelt)

RESUMO

Transportadores de correia são usados para transportar uma gama enorme de materiais a granel. O transportador possui o lado de carga, onde o material é carregado e transportado, e o lado de retorno, que se inicia após o descarregamento de material. Viradores de correia são usados para girar a correia em 180° no lado de retorno logo após o ponto de descarga, e depois, novamente em 180° na região próxima ao carregamento, ainda no retorno. O giro faz com que o lado limpo da correia esteja em contato com os roletes de retorno, eliminando problemas causados pelo contato da sujeira com estes roletes. Os viradores contribuem para a limpeza sob o transportador porque o material é desprendido da correia em uma região especifica. O presente trabalho objetiva encontrar um método analítico para determinar os esforços na correia na região do virador, discutindo algumas equações encontradas na bibliografia, e ainda, apresenta um modelo em elementos finitos para a correia na região do virador.

Palavras-chave: Transportadores de Correia, Viradores de Correia, Mineração, *Turnover*, Análise Estrutural, Elementos Finitos.

ABSTRACT

Belt conveyors are used to carry a large variety of bulk materials. The conveyor has the carry side, where the material is loaded, and the return side, which starts after discharging the material. Turnovers are used to twist the belt 180 degrees near the discharge point in the return side, and then, 180 degrees again near the loading region. The imposed twisting allows the clean side of the belt to be in contact with the return idlers, and thus avoiding problems caused by the contact of the dirty side of the belt with the idlers. Turnovers also contribute to the cleaning under the conveyor because the material is detached from the belt in a particular region. This work aims to find an analytical method to determine belt stresses in the turnover region discussing some equations found in the technical literature, and also, presents a finite element model for the belt in the turnover region.

Keywords: Belt Conveyors, Turnover, Mining, Structural Analysis, FEA.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SÍMBOLOS

a_2, a_1 e a_0	Coeficientes dos polinômios da solução particular do modelo bi-apoiado
b_2, b_1 e b_0	Coeficientes dos polinômios da solução particular do modelo bi-engastado
bw	Largura da correia
bw_u	Largura útil da correia
d_c	Diâmetro dos cabos de aço
h	Camada de material incrustado antes da raspagem
k	Constante dependente de P, I e E
q	Carregamento constante vertical para baixo
r	Distância entre a linha de centro da correia até a borda
t_{belt}	Espessura equivalente da correia
v	Velocidade da correia
wb	Peso linear da correia
y	Deslocamento da linha elástica da viga
y_H	Solução homogênea da equação diferencial
y_P	Solução particular da equação diferencial
A, B	Constantes a determinar através das condições de contorno e simetria - modelo bi-apoiado
C, D	Constantes a determinar através das condições de contorno e simetria - modelo bi-apoiado
E	Módulo de elasticidade da correia
F_H	Força horizontal aplicado nos suportes intermediários

F_v	Força vertical aplicada nos suportes intermediários
H_A	Reação horizontal no ponto A
I	Momento de inércia da viga
I_{YY}	Momento de inércia em relação ao eixo y
I_{ZZ}	Momento de inércia em relação a eixo z
L	Comprimento do turnover
L_{HBC}	Local em que o deslocamento no plano horizontal é forçado a ser zero
M	Momento fletor no engaste
M_A	Momento fletor na posição A
M_B	Momento fletor na posição B
M_H	Momento fletor na posição x= L_{HBC}
M_Y	Momento fletor em relação ao eixo y
M_V	Momento fletor na posição x=0
M_z	Momento fletor em relação ao eixo z
$M(x)$	Momento fletor em função da coordenada x
NC	Número de cabos de aço
P	Esforço de tração na barra
Q	Capacidade do transportador
Q_i	Capacidade de material incrustado
Q_r	Capacidade de material residual incrustado
R_H	Força aplicada nos suportes da extremidade do turnover

SAG_1	Flecha modelo bi-apoiado
SAG_2	Flecha modelo bi-engastado
T_r	Tensão nominal da correia
T_t	Tensão da correia na região próxima ao turnover
V_A	Reação vertical no ponto A
V_B	Reação vertical no ponto B
V_t	Volume de material desprendido na região do turnover
γ	Densidade do material transportado
δ	SAG adimensionalizado – modelo bi-apoiado
δ_2	SAG adimensionalizado – modelo bi-engastado
η_g	Percentual de material desprendido da correia no turnover
η_r	Eficiência de raspagem
θ_A	Rotação da linha elástica no ponto A
θ_B	Rotação da linha elástica no ponto B
σ_{TO}	Tensão devido a torção
$\sigma_{TO,r=0}$	Tensão devido a torção na linha de centro da correia
$\sigma_{TO,r=\frac{bw}{2}}$	Tensão na borda da correia
ΔT_t	Diferença entre as tensões de borda e a tensão no centro da correia na região do turnover
$\sum F_H$	Somatória das forças horizontais

$\sum F_v$ Somatória das forças verticais

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O manuseio de materiais na forma de granéis é de interesse para um vasto número e variedade de indústrias pelo mundo, como as ligadas à mineração, processos químicos, agricultura e processos alimentícios. Em vista dos substanciais custos envolvidos, estas operações devem ser realizadas da forma mais econômica, confiável e eficiente. Os transportadores contínuos, principalmente os de correia, tem-se mostrado uma alternativa eficiente para a solução desse problema da engenharia.

Para um projeto de transportador de correia são necessários alguns parâmetros importantes, como a largura da correia, velocidade da correia e a capacidade.

O comprimento, a capacidade e a velocidade dos transportadores de correia estão crescendo a cada dia. Nos anos oitenta do século passado pensava-se ser impossível construir transportadores operando com velocidade superior a 800 pés por minuto, aproximadamente 4,0 m/s. Atualmente, são conhecidos muitos projetos que operam com velocidade superior a 1300 pés por minuto, aproximadamente 6,5 m/s. A capacidade tem ultrapassado facilmente o valor de 20000 toneladas por hora. São comuns os transportadores com mais de 1 km de comprimento. Os transportadores com mais de 700 metros de comprimento são considerados como "longa distância", como mostrado na Figura 1.1:

Figura 1.1 - Transportador de longa distância

No passado, o projeto de transportadores contínuos era conduzido de uma maneira empírica, sem considerar grandezas que hoje são conhecidas e muito relevantes para um bom desempenho do equipamento.

Por não levarem estas grandezas em consideração, os métodos utilizavam altos coeficientes de segurança, acarretando grandes custos ao projeto, principalmente quando os sistemas modelados eram transportadores de longa distância e alta capacidade. Recentemente, grandes avanços têm sido obtidos de teorias associadas a transportadores de longa distância.

Implementações nas técnicas de manufatura dos componentes do transportador têm possibilitado conceber projetos com maiores capacidades, comprimentos e velocidades. Os rolos e a correia eram componentes limitadores dos parâmetros de projeto, mas melhorias na qualidade de fabricação (por exemplo, melhor concentricidade e balanceamento dos elementos) permitiram que alguns esforços dinâmicos pudessem ser minimizados, aumentando o desempenho dos elementos. Melhorias nos processos de fabricação das correias, principalmente aquelas que possuem cabos de aço, permitiram conceber transportadores maiores, mais resistentes e confiáveis.

Este desenvolvimento nas técnicas construtivas fez surgir a necessidade de considerar as interações, antes sem muita relevância, entre os componentes flexíveis, elementos motrizes e componentes tensionadores, bem como as vibrações longitudinais introduzidas no transportador durante os estados transientes.

Turnover, traduzido para o português como “Virador”, é utilizado para eliminar problemas causados pelo contato do lado sujo da correia com rolos de retorno; assim, para eliminar este problema, a correia deve ser girada em 180° em torno do vetor normal à seção transversal depois da região de descarga, de maneira que o lado limpo da correia fique em contato com os rolos de retorno. Próximo à região de carregamento a correia deve novamente sofrer giro de 180° para que o lado limpo da correia esteja em contato com os rolos na região de carga.

O contato do lado sujo da correia com os rolos de retorno causa desgaste na superfície dos rolos, pois sempre restam partículas do material transportado na correia, mesmo depois do processo de raspagem existente na região de descarga do transportador. Na maioria das vezes, o material transportado possui uma abrasividade alta que contribui tanto para o desgaste da correia quanto dos rolos.

Contudo, a implantação do virador somente se faz necessária para transportadores de longa distância, pois, dependendo do comprimento, pode não haver distância suficiente para virar e desvirar a correia, e ainda, o ganho na vida útil da correia e dos rolos não é tão significativo para absorver os custos gerados devido a implantação do virador.

O *turnover* traz, além de ganhos na vida de componentes, ganhos ambientais, pois os restos do material que não são eliminados na raspagem podem se desprender da correia ao longo do transportador quando o lado sujo está voltado para baixo, sujando toda a área sob o transportador. Quando a correia é virada, o lado sujo fica voltado para cima de maneira que o material não se desprende da correia. No ANEXO A são apresentados cálculos que justificam a importância ambiental do virador. No ANEXO B são apresentados cálculos que justificam a importância econômica do virador.

Figura 1.2 - Região do *Turnover*

Na região do *turnover* são induzidos esforços na carcaça da correia que podem fazer com que os cabos de aço mais próximos à borda atinjam a tensão de ruptura e ao mesmo tempo, os cabos que estão próximos a linha de centro da correia podem estar sob compressão. Assim, calcular os esforços na correia se faz necessário para alcançar um bom desempenho do transportador.

Este trabalho objetiva analisar os esforços na correia especificamente na região de *turnover* mediante modelos matemáticos existentes na literatura ou através de novos modelos.

No Capítulo 2 é apresentada uma revisão bibliográfica contendo os modelos encontrados na literatura para determinação dos esforços no *turnover*, comprimento ótimo, ou mesmo, as diferentes configurações de *turnover* encontrados ao redor do mundo.

No Capítulo 3 é apresentada uma discussão dos modelos analítico-numéricos encontrados na literatura. Nos modelos discutidos são apresentadas algumas hipóteses de geometria e esforços que não necessariamente foram apresentadas na fonte original.

No Capítulo 4 é apresentado um modelo analítico-numérico para flexo-tração da correia, para o qual foram devidamente apresentadas algumas hipóteses de geometria e esforços. Neste modelo são demonstradas equações para cálculo do SAG, que vem a ser o deslocamento máximo da linha elástica da correia entre os pontos de apoio.

No Capítulo 5 é apresentado um modelo analítico-numérico para torção-tração da correia. Neste modelo a correia é formada por cabos de aço e borracha, separadamente, ao contrário do modelo apresentado no Capítulo 4 que considera a correia como elemento composto pelas propriedades dos cabos e da borracha.

No Capítulo 6 é apresentado um modelo para o cálculo das propriedades equivalentes da correia. Para tal modelo foi utilizada como referência a obra de Mendonça, 2005. As propriedades calculadas através do modelo do Capítulo 6 foram utilizadas no Capítulo 4.

No Capítulo 7 é apresentado um estudo de caso, utilizando as equações apresentadas nos modelos dos capítulos anteriores.

No Capítulo 8 são apresentadas as considerações finais do presente texto, contendo alguns comentários, conclusões e sugestões de atividades que podem ser realizadas a fim de completarem, ou mesmo, darem continuidade ao presente texto.

Por fim, são apresentadas as referências bibliográficas utilizadas ao longo do texto e os anexos que podem ajudar a compreender as deduções, hipóteses e cálculos apresentados nesta monografia.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

No presente capítulo será feito um levantamento do estado-da-arte referente à análise estrutural da correia de um transportador, com destaque à região do turnover.

2.1 Modelo CEMA

A principal referência para cálculo de transportadores de correia é um livro chamado BELT CONVEYORS FOR BULK MATERIALS, que está em sua sexta edição, preparado por uma conferência de engenharia para a CEMA (Conveyor Equipment Manufacturers Association).

Contudo, como pode ser visto na citação abaixo, tal referência não traz nenhuma fórmula ou modelo para cálculo dos esforços na correia ou mesmo uma fórmula para o comprimento do *turnover*.

“As this twisting of the belt induces abnormal tensions in the carcass of the belt, a CEMA member should be consulted for the proper location of the snub pulleys that turn the belt. The distance required to accomplish the 180° turnover of the belt is approximately 12 times the belt width at each end of the belt”. (CEMA, 2005).

Nesta bibliografia somente recomenda-se que um membro da CEMA deveria ser consultado para determinar a localização dos tambores do *turnover*, e ainda, recomenda-se que a distância requerida para completar o giro de 180° na correia seja de aproximadamente 12 vezes a largura da correia, sem nenhum embasamento teórico.

2.2 Modelo Goodyear

Outro método pode ser encontrado em GOODYEAR, 1975. A Goodyear é uma tradicional fabricante de correias, sendo a primeira a apresentar equações que permitem dimensionar o comprimento do *turnover*, entretanto não é possível estimar as tensões sofridas pela correia.

É possível perceber pela simplicidade das equações apresentadas pela Goodyear que elas foram formuladas a partir de resultados empíricos, baseados nos resultados de aplicações ao longo da história.

2.3 Modelo Mercúrio

No manual de transportadores da Mercúrio, fabricante de correias transportadoras, é possível encontrar a respeito de viradores:

"Este é um dos melhores processos para evitar que o material aderido à superfície da correia atue sobre os componentes do lado de retorno, provocando seu desgaste.

Deve ser aplicado quando os sistemas de limpeza convencionais são ineficientes para uma limpeza completa do material retornado, bem como o transportador deve ter comprimento suficientemente grande para que a correia possa ser virada.

Consiste, através de tambores verticais, em girar a correia a 180° logo após saída do tambor da cabeça e retorná-la à posição original antes do tambor de retorno, fazendo com que o lado transportador sujo não tenha contato direto com os componentes de retorno, Figura 2.1.

A distância necessária para efetuar o giro da correia a 180° deve ser bem considerada, para evitar uma distorção de tensões entre o centro e as bordas da correia. Essa distância, dependendo da tensão a que é submetida a correia, não deve ser menos que 12 vezes sua largura".

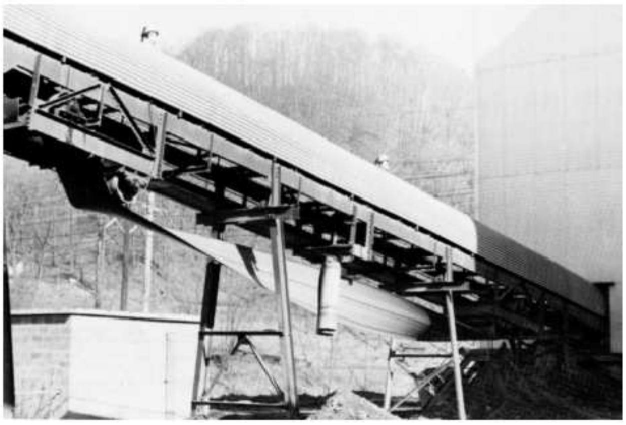


Figura 2.1 – Visão de uma correia em giro de 180°. (Mercúrio)

2.4 Modelo Phoenix

Segundo a Phoenix, outro importante fabricante de correias transportadoras, apresenta em PHOENIX, 2004, seu modelo para viradores:

"Belt cleaning and maintaining the cleanliness of belt conveyor systems along the conveying path are major operating aspects. Depending on the properties of the material handled, residues can still adhere to the top side of a conveyor belt despite the use of scraper systems. As time passes, these residues settle on the idlers in the return run, causing wear, and can affect the straight tracking of the belt and spoil the system. Under this aspect the possibility of turning over the conveyor belt in the return run, where conventional belt cleaning does not produce the effect as desired, is important.

Generally a differentiation is made between:

– Unguided turnover:

With this type of belt turnover, no support is given to the belt within the turnover length which is possible only with a maximum belt width of 1200 mm and relatively transversely rigid belts.

– Guided turnover:

The belt is turned over by using a vertical pulley guide (reversing lock) in the middle of the turnover length (for belt widths up to about 1600 mm).

– Supported turnover:

In the event of wide conveyor belts (belt widths up to about 2400 mm), the belt is turned over by means of support idlers in the turnover length.

Length and type of the selected belt turnover depends upon the following parameters of the conveyor belt:

• Sag,

• Width,

• Mass,

• Transverse rigidity,

• Elastic properties.

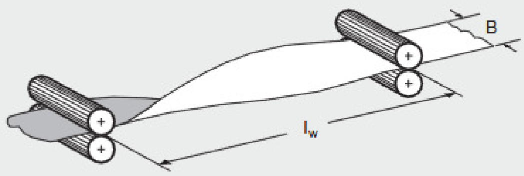
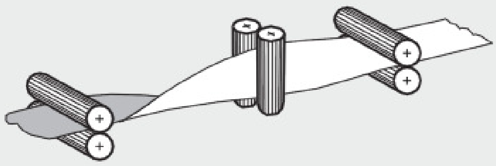
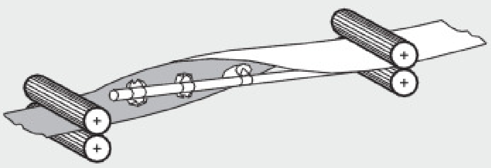
The turnover length of a conveyor belt should be several times the belt width so as to prevent non admissible stresses and strains with regard to positive and negative elongations in the belt”.

O virador tipo *Guided turnover* é ilustrado pela Figura 2.2.

Figura 2.2 – Turnover. (Phoenix, 2004).

A Phoenix também apresenta uma tabela, Tabela 2.1, para mínimos valores para o comprimento do virador em função da largura e do tipo da carcaça da correia.

Tabela 2.1 – Guia para o comprimento mínimo requerido para viradores em correias têxteis ou com cabos de aço. (Phoenix, 2004).

Method of turnover	Max. Belt width B in mm	Belt turnover length l_w	
		Textile carcass belts	Steel cord belts
Unguided turnover 	1200	10 · B	–
Guided turnover 	1600	12.5 · B	22 · B
Supported turnover 	2400	10 · B	15 · B

2.5 Produto Sandvik

A Sandvik, tradicional fabricante de equipamentos para mineração, apresenta um produto que auxilia a correia girar em 180°. O produto Sandvik pode ser utilizado apenas em transportadores de pequena capacidade e correia de carcaça têxtil.

“Belt turning is a solution where the lower belt is turned dirty side up as soon as possible after the drive pulley so that the return rollers will carry the belt touching the clean side, unlike in standard belt conveyor applications. At the end of the lower belt, before the tail pulley, the belt is then turned back to its original position without getting the ends of the tail pulley dirty. Thus, loading the material always takes place on the same side of the belt.

Thanks to belt turning, areas where spillage occurs can be limited to the start and the end of the conveyor. Hazardous cleaning of spillage under the conveyor is history, belt centralizing improves and there is less wear on the return rollers. Belt turning is the only way to deal with spillage of old belts, where worn belt surface cannot be cleaned effectively with standard belt cleaners”.

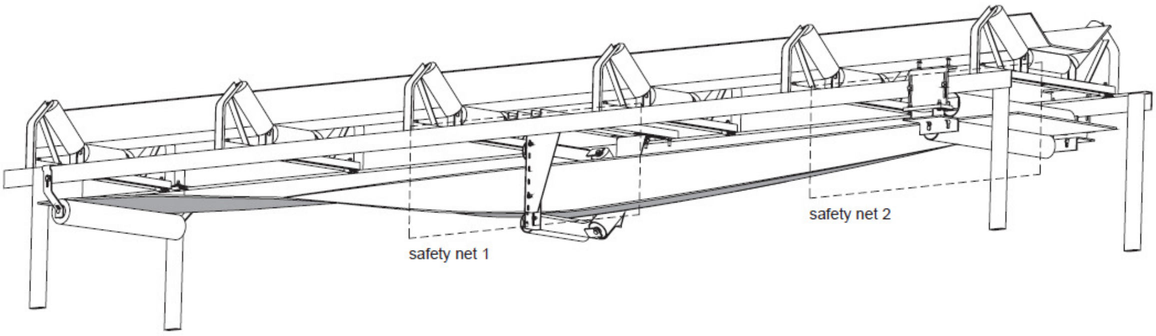


Figura 2.3 – Aplicação do produto Sandvik.

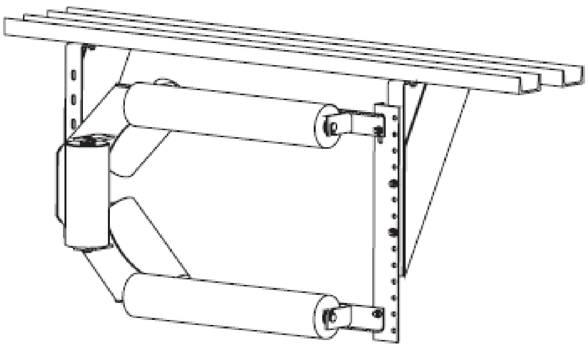


Figura 2.4 – Belt Turning Sandvik.

2.6 Modelo apresentado por Ryan Lemmon

Segundo LEMMON, 2002, o *turnover* deve ser dimensionado levando-se em conta as tensões de tração devidas ao esticamento da correia, as tensões de flexão devidas ao peso próprio, e ainda as tensões devidas à torção da correia.

O modelo apresentado por Lemmon considera que o *turnover* apresenta três apoios intermediários, de maneira que o primeiro está posicionado a 45°, o segundo a 90° e o terceiro a 135°, conforme Figura 2.5.

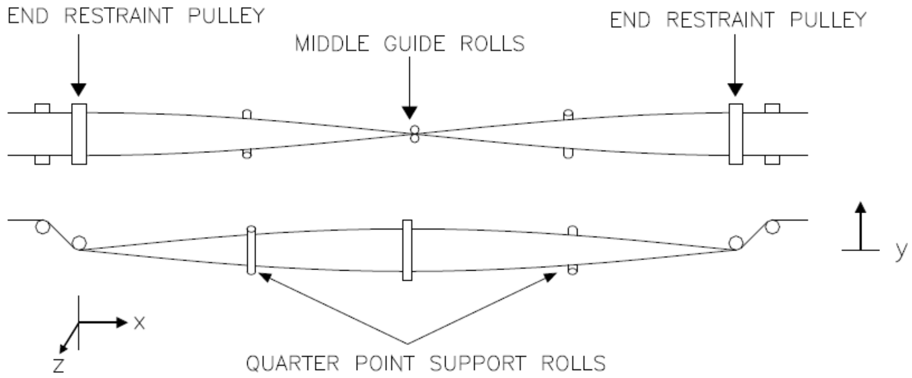


Figura 2.5 - Posição dos pontos intermediários. LEMMON, 2002

2.7 Norma DIN 22101

A norma DIN 22101 divide os viradores em três tipos: virador não-guiado, virador guiado e virador suportado, conforme ilustrado na Figura 2.6.

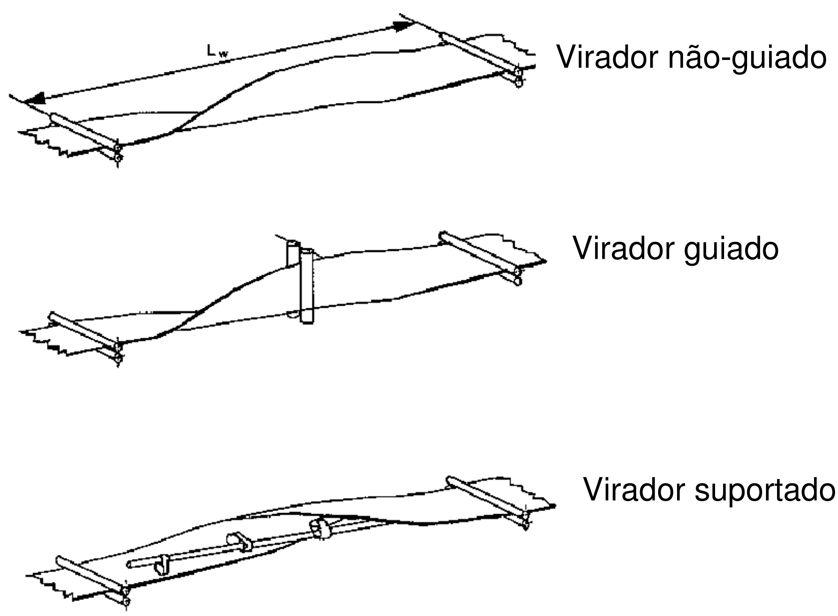


Figura 2.6 – Variedade construtiva de viradores. (DIN 22101).

A norma DIN 22101 apresenta uma tabela, Tabela 2.2, para mínimos valores para o comprimento do virador em função da largura e do tipo da carcaça da correia.

Tabela 2.2 - Diretrizes para o dimensionamento do comprimento do virador

Tipo de virador	Largura máxima da correia (mm)	Comprimento mínimo do virador		
		Tipo de carcaça		
		Têxtil	Polyester-Nylon	Cabo de Aço
Não-guiado	1200	8.bw	10. bw	-
Guiado	1600	10. bw	12,5. bw	22. bw
Suportado	2400	-	10. bw	15. bw

3. MODELOS ANALÍTICO-NUMÉRICOS

O presente capítulo apresenta os modelos encontrados na bibliografia, e também, modelos que foram desenvolvidos no presente trabalho, apresentando algumas hipóteses e equações utilizadas para dimensionamento do virador.

3.1 Modelo Goodyear

Na revisão bibliográfica foi mencionado o modelo apresentado por GOODYEAR, 1975, o qual é exposto a seguir:

- Deve-se calcular T_t. Em que T_t é a tensão da correia na região próxima ao turnover.
- Determinar T_r. Em que T_r é a tensão nominal da correia.
- Encontrar E, módulo de elasticidade da correia, dado pelo fabricante.
- Determinar ΔT_t. Em que ΔT_t é a diferença entre as tensões de borda e a tensão no centro da correia, na região do turnover.

Quando, $T_t \leq 0{,}5.T_r$, então, $\Delta T_t = 1{,}8.T_t$. Eq. 3.1

Ou quando, $T_t > 0{,}5.T_r$, então $\Delta T_t = 1{,}8.(T_r - T_t)$. Eq. 3.2

Adimensionalizando as equações 3.1 e 3.2 por T_r, é possível exibir o seguinte gráfico:

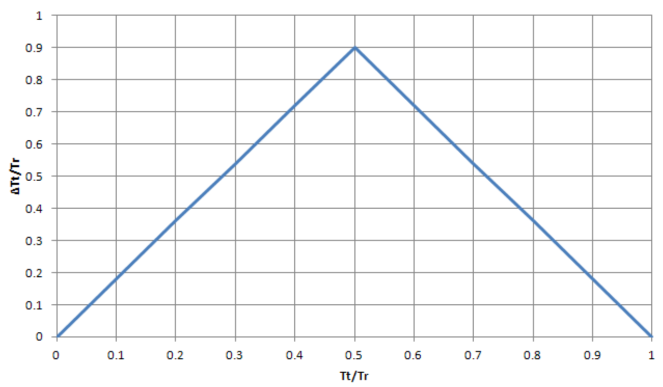


Gráfico 3.1 – ΔTt/Tr x Tt/Tr

- Calcular $\frac{\Delta T_t}{E}$.

Após calcular $\frac{\Delta T_t}{E}$ é possível determinar o comprimento do turnover a partir do gráfico apresentado na Figura 3.1:

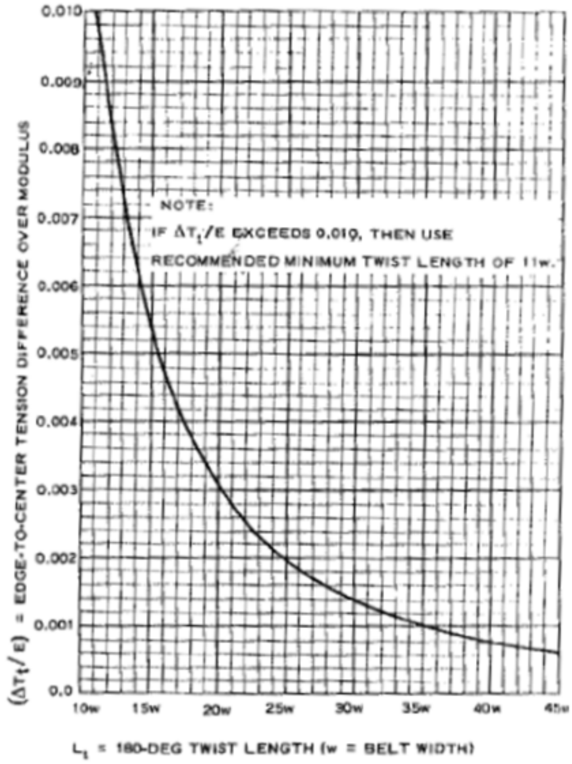


Figura 3.1 - Figura apresentada para determinar o comprimento do turnover. (Goodyear, 1975)

Conforme dito anteriormente, percebe-se pela simplicidade das equações que o método apresentado pela Goodyear é empírico, baseado nos resultados de aplicações ao longo da história.

O manual Goodyear também apresenta uma fórmula para calcular o SAG, onde este é o deslocamento vertical da linha elástica da correia. A fórmula encontrada no manual é apresentada a seguir:

$$SAG = \frac{q.L^2}{8.P} \qquad \text{Eq. 3.3}$$

No capítulo 4 será apresentada a dedução da fórmula do SAG, Equação 3.3.. Esta mesma fórmula é encontrada em outras referências, e ainda, é aplicável para o cálculo do deslocamento vertical da correia entre os roletes do transportador, conforme ilustrado na Figura 3.2.

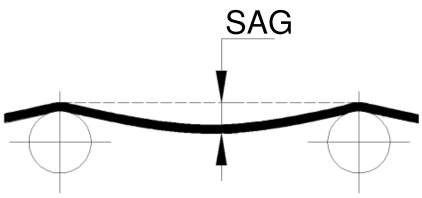


Figura 3.2 - SAG entre roletes do transportador.

3.2 Modelo proposto por Ryan Lemmon

Outro modelo exibido na Revisão Bibliográfica foi apresentado por LEMMON, 2002. Lemmon apresentou fórmulas para as tensões na correia causadas pela torção, desconsiderando o peso próprio da correia. Depois, fórmulas para a flexão causada pelo peso próprio da correia. A flexão foi dividida por Lemmon em dois planos, plano vertical e plano horizontal. Lemmon apresentou também fórmulas para o cálculo do momento de inércia e para a espessura equivalente da correia.

As tensões devidas à tração-torção, segundo Lemmon, podem ser calculadas a partir da fórmula:

$$\sigma_{TO} = \frac{T_n}{bw} + E.\left[\sqrt{\left(\frac{r.\pi}{L}\right)^2 + 1} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{bw.\pi}{2.L}\right)^2 + 1} - \frac{L}{\pi.bw}\ln\left(\frac{bw.\pi}{2.L} + \sqrt{\left(\frac{bw.\pi}{2.L}\right)^2 + 1}\right)\right]$$

Eq. 3.4

Em que,

E é o modulo de elasticidade da correia, o qual deve ser informado pelo fabricante

T_n é o esforço de tração aplicado a correia

bw é a largura da correia

L é o comprimento do Turnover

r é a distância relativa a linha de centro da correia

Assim, a tensão na linha de centro da correia é aproximadamente:

$$\sigma_{TO,r=0} = \frac{T_n}{bw} - \frac{E}{3}.\left[\sqrt{\left(\frac{bw.\pi}{2.L}\right)^2 + 1} - 1\right] \qquad \text{Eq. 3.5}$$

A tensão na borda da correia é aproximadamente:

$$\sigma_{TO,r=\frac{bw}{2}} = \frac{T_n}{bw} + \frac{2.E}{3} \cdot \left[\sqrt{\left(\frac{bw.\pi}{2.L}\right)^2 + 1} - 1 \right] \quad \text{Eq. 3.6}$$

As equações 3.5 e 3.6 calculam a tensão na linha de centro e na borda da correia serão retomadas na seção 12.3.

As tensões devidas a flexão são calculadas nos planos vertical e horizontal, respectivamente y e z, orientados conforme Figura 3.3:

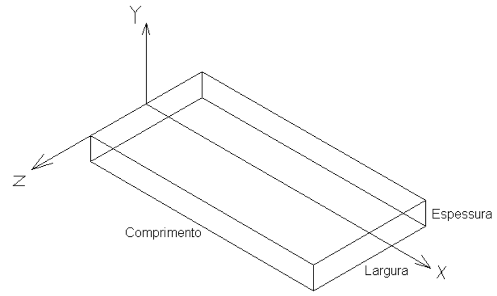


Figura 3.3 - Eixos globais x, y e z

Esforços no plano vertical:

De x = 0 até $L/4$: $$M_z = -M_V + \left(\frac{wb.L}{2} - F_v\right).x - \frac{wb.x^2}{2} - T_n.y \quad \text{Eq. 3.7}$$

De x = $L/4$ até $L/2$: $$M_z = -M_V - \frac{F_v.L}{4} + \frac{wb.L.x}{2} - \frac{wb.x^2}{2} - T_n.y \quad \text{Eq. 3.8}$$

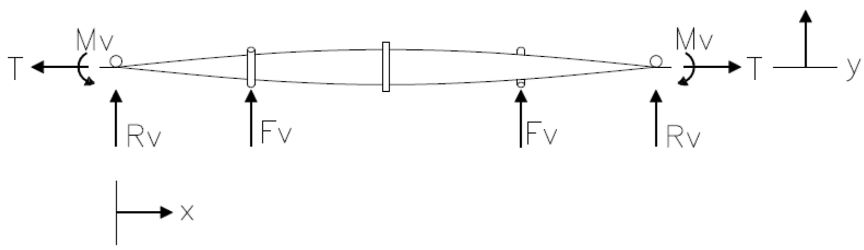


Figura 3.4 - Diagrama de esforços - Plano Vertical. (LEMMON, 2002)

Os esforços M_V e F_V, que não são conhecidos, podem ser encontrados através da equação diferencial:

$$y'' = -\frac{M_z}{E.I_{ZZ}} \quad \text{Eq. 3.9}$$

As condições de contorno do plano vertical são:

Em $x = 0$, tem-se: $y = 0$ e $y' = 0$

Em $x = L/2$, tem-se: $y' = 0$ e $y'' = 0$

Esforços no plano horizontal:

De x = $-L_{HBC}$ até $L/4$: $$M_Y = -M_H + R_H.(L_{HBC} + x) - T_n.z$$ Eq. 3.10

De x = $L/4$ até $L/2$: $$M_Y = -M_H + R_H.(L_{HBC} + x) - F_H.(x - \frac{L}{4}) - T_n.z$$ Eq. 3.11

Em que, $$M_H = R_H.(L_{HBC} + \frac{L}{2}) - F_H.\frac{L}{4}$$ Eq. 3.12

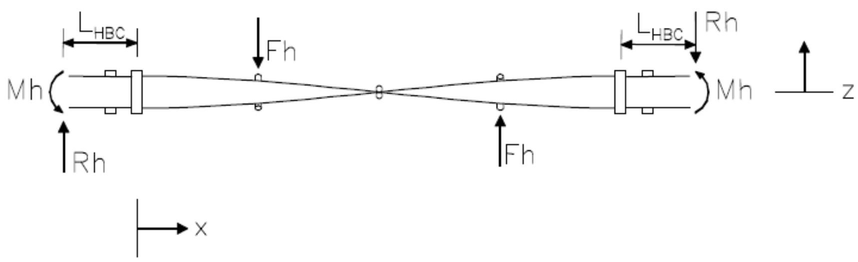


Figura 3.5 - Diagrama de esforços - Plano Horizontal. (LEMMON, 2002)

Os esforços R_H e F_H, que não são conhecidos, podem ser encontrados através da equação diferencial:

$$z'' = -\frac{M_Y}{E.I_{YY}}$$ Eq. 3.13

As condições de contorno do plano vertical são:

Em $x = -L_{HBC}$, tem-se: $z = 0$ e $z' = 0$

Em $x = L/2$, tem-se: $z' = 0$ e $z'' = 0$ e $M_y = 0$

Segundo LEMMON, 2002, o comprimento L_{HBC} é o local em que o deslocamento no plano horizontal é forçado a ser zero. Esta condição de contorno é incluída na análise para melhor simular a fronteira real do turnover. Este comprimento deve ser zero ou maior. Aumentar o comprimento L_{HBC} diminuirá as tensões horizontais de flexão.

É importante observar que as equações diferenciais que LEMMON, 2002 apresenta para o cálculo da flexão na correia são válidas para a flexão em torno de um eixo principal (seção simétrica) sem torção, sendo assim, válidas apenas para eixos locais de flexo-torção, não para eixos globais. Como Lemmon não faz menção para quais eixos estas equações diferenciais foram escritas, a equações não foram utilizadas para o desenvolvimento do presente texto, sendo apresentadas somente como referência.

Os momentos de inércia podem ser calculados através das seguintes fórmulas:

$$I_{ZZ} = \frac{bw.t_{belt}.\left(t_{belt}^2 + bw^2\right)}{24} + \frac{bw.t_{belt}.\left(t_{belt}^2 - bw^2\right)}{24}.\cos\left(\frac{2.\pi.x}{L}\right) \qquad \text{Eq. 3.14}$$

$$I_{YY} = \frac{bw.t_{belt}.\left(t_{belt}^2 + bw^2\right)}{24} + \frac{bw.t_{belt}.\left(bw^2 - t_{belt}^2\right)}{24}.\cos\left(\frac{2.\pi.x}{L}\right) \qquad \text{Eq. 3.15}$$

Em que t_{belt} é espessura equivalente da correia, encontrada pela seguinte expressão:

$$t_{belt} < 0{,}521.\sqrt[3]{\frac{NC.d_c}{bw}} \qquad \text{Eq. 3.16}$$

Sendo NC o número de cabos de aço e d_c o diâmetro dos mesmos.

É importante observar que t_{belt} na equação 3.16 é um adimensional.

As equações apresentadas por LEMMON, 2002 são discutidas no ANEXO C.

Comparação entre Goodyear, 1975 e Lemmon, 2002

É possível estabelecer uma correlação entre o modelo apresentado para tração-torção de Lemmon, 2002 e o modelo apresentado por Goodyear, 1975, através da Figura 3.1.

Lembrando as equações apresentadas por Lemmon para a tensão no centro da correia e na borda, respectivamente, $\sigma_{TO,r=0}$ e $\sigma_{TO,r=\frac{bw}{2}}$, Eq. 3.5 e Eq. 3.6:

$$\sigma_{TO,r=0} = \frac{T_n}{bw} - \frac{E}{3}.\left[\sqrt{\left(\frac{bw.\pi}{2.L}\right)^2 + 1} - 1\right] \qquad \text{Eq. 3.5}$$

$$\sigma_{TO,r=\frac{bw}{2}} = \frac{T_n}{bw} + \frac{2.E}{3}.\left[\sqrt{\left(\frac{bw.\pi}{2.L}\right)^2 + 1} - 1\right] \qquad \text{Eq. 3.6}$$

Fazendo $\sigma_{TO,r=\frac{bw}{2}} - \sigma_{TO,r=0}$, tem-se:

$$\sigma_{TO,r=\frac{bw}{2}} - \sigma_{TO,r=0} = \frac{T_n}{bw} + \frac{2.E}{3}.\left[\sqrt{\left(\frac{bw.\pi}{2.L}\right)^2 + 1} - 1\right] - \frac{T_n}{bw} + \frac{E}{3}.\left[\sqrt{\left(\frac{bw.\pi}{2.L}\right)^2 + 1} - 1\right]$$

Simplificando,

$$\sigma_{TO,r=\frac{bw}{2}} - \sigma_{TO,r=0} = E.\left[\sqrt{\left(\frac{bw.\pi}{2.L}\right)^2 + 1} - 1\right]$$

Assim,

$$\frac{\sigma_{TO,r=\frac{bw}{2}} - \sigma_{TO,r=0}}{E} = \left[\sqrt{\left(\frac{bw.\pi}{2.L}\right)^2 + 1} - 1\right] \qquad \text{Eq. 3.17}$$

Plotando o gráfico de $\dfrac{\sigma_{TO,r=\frac{bw}{2}} - \sigma_{TO,r=0}}{E}$ em função de $\dfrac{bw}{L}$, tem-se:

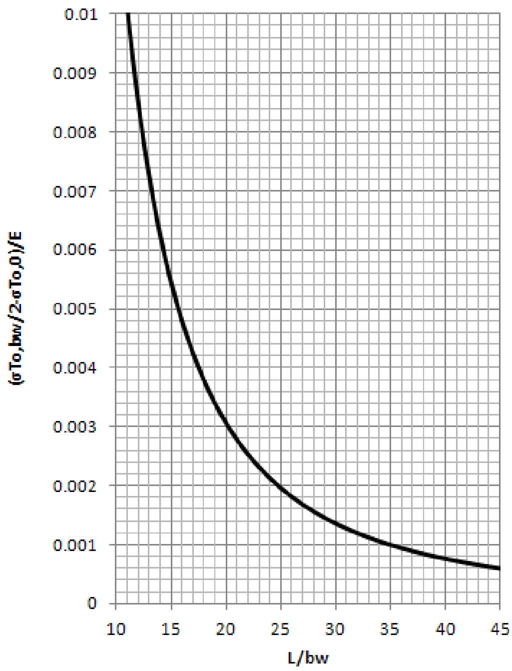


Gráfico 3.2 - Subtração da tensão de borda e tensão de centro em função do comprimento do virador adimensionalizado

Através do Gráfico 3.2, é possível observar que a curva obtida tem correlação muito forte com a curva apresentada na Figura 3.1. Apesar de LEMMON, 2002 ter utilizado Goodyear, 1975 como referência não é possível saber como Lemmon deduziu as equações para σ_{TO}.

4. MODELO ANALÍTICO-NUMÉRICO PARA FLEXO-TRAÇÃO

Este modelo, denominado Modelo 1, calcula os deslocamentos transversais ao longo da correia sob ação de peso próprio, esforço de tração nas extremidades, considerando a correia um material composto, cujas propriedades mecânicas podem ser calculadas pela metodologia apresentada no capítulo 6.

O Modelo 1 é apresentado, em primeira instância, utilizando conceitos da Resistência dos Materiais, sobre os quais são aplicadas as hipóteses de pequenas deformações e pequenos deslocamentos. Em segunda instância, é apresentado um modelo hierarquicamente superior ao apresentado em primeira instância, pois, agora são aplicadas as equações de equilíbrio demonstradas por Clebsh-Kirchhoff-Love. Um breve resumo da demonstração de Clebsh-Kirchhoff-Love é apresentado no ANEXO G. Em terceira instância, apresenta-se o modelo computacional em elementos finitos, considerando o mesmo carregamento e condições de contorno.

4.1 Resistência dos Materiais

Para o modelo 1, primeira instância, aplicam-se dois subcasos. A diferença entre os subcasos são as condições de contorno, pois o subcaso 1 considera uma viga bi-apoiada e o subcaso 2 considera uma viga bi-engastada. Ao final, é apresentada uma comparação entre os dois subcasos.

4.1.1 Subcaso 1 - Bi-apoiado

A seguir será adotado um modelo de barra bi-apoiada com carregamento constante vertical para baixo, o qual será denominado de q, um esforço de tração na barra denominado P e o espaçamento entre os pontos de apoio igual a L.

É válido ressaltar que para todo o desenvolvimento a seguir o eixo Y está orientado para baixo.

Modelo Adotado

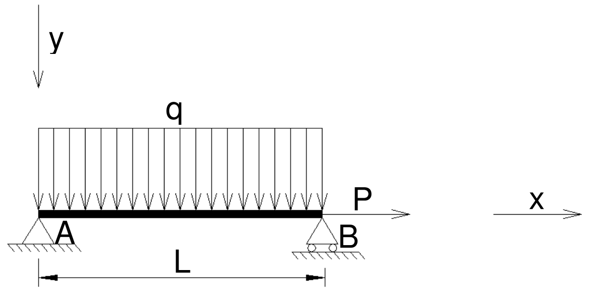


Figura 4.1 - Modelo adotado

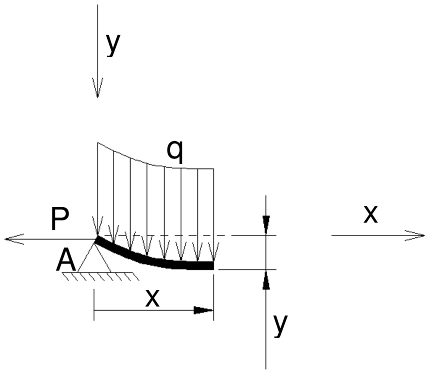


Figura 4.2- Configuração deformada

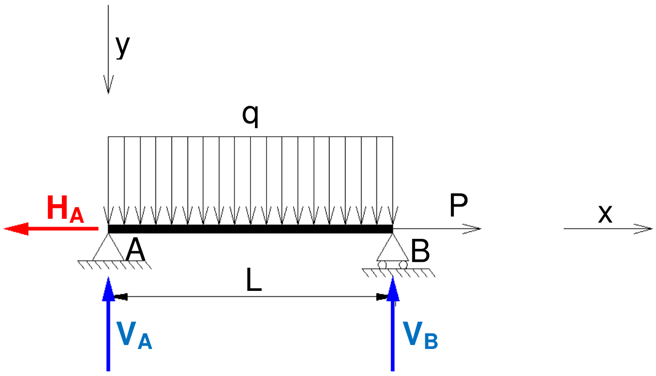


Figura 4.3 - Reações de apoio

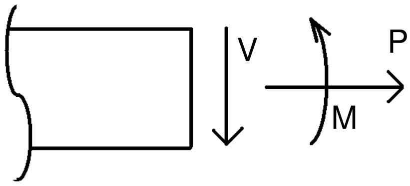


Figura 4.4 - Esforços na seção de corte

Pelas equações da estática,

$$\sum F_v = 0 \qquad \text{Eq. 4.1}$$

$$V_A + V_B = q.L \qquad \text{Eq. 4.2}$$

Por simetria,

$$V_A = V_B$$

$$2.V_A = q.L \quad \Rightarrow \quad V_A = \frac{q.L}{2}$$

$$\sum F_H = 0$$

$$H_A = P \qquad \text{Eq. 4.3}$$

Equação do momento fletor,

$$M(x) = -P.y - \frac{q.x^2}{2} + \frac{q.L.x}{2} \qquad \text{Eq. 4.4}$$

Da relação momento fletor x curvatura linearizada:

$$M(x) = -E.I.\frac{d^2y}{dx^2} \qquad \text{Eq. 4.5}$$

Assim,

$$-E.I.\frac{d^2y}{dx^2} = -P.y - \frac{q.x^2}{2} + \frac{q.L.x}{2} \qquad \text{Eq. 4.6}$$

Reorganizando,

$$E.I.\frac{d^2y}{dx^2} - P.y = \frac{q.x^2}{2} - \frac{q.L.x}{2} \qquad \text{Eq. 4.7}$$

A equação diferencial acima possui solução da forma:

$$y = y_H + y_P \qquad \text{Eq. 4.8}$$

Em que,

y_H é a solução homogênea

y_P é a solução particular

Solução da equação homogênea

$$E.I.\frac{d^2y}{dx^2} - P.y = 0 \qquad \text{Eq. 4.9}$$

Dividindo a equação homogênea por $E.I$, tem-se:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{P}{E.I}.y = 0 \qquad \text{Eq. 4.10}$$

Define-se: $k^2 = \dfrac{P}{E.I}$ Eq. 4.11

Assim,

$$\frac{d^2y}{dx^2} - k^2.y = 0 \qquad \text{Eq. 4.12}$$

Para a equação anterior mostra-se que a solução é do tipo:

$$y_H(x) = A.e^{-k.x} + B.e^{k.x} \qquad \text{Eq. 4.13}$$

Em que A e B são constantes a determinar através das condições de contorno (ou simetria).

Solução particular da equação

Define-se um polinômio de segunda ordem para a solução particular.

$$y_P(x) = a_2.x^2 + a_1.x + a_0 \qquad \text{Eq. 4.14}$$

Calculando a primeira e segunda derivadas, tem-se:

$$\frac{dy_P}{dx} = 2.a_2.x + a_1 \qquad \text{Eq. 4.15}$$

$$\frac{d^2y_P}{dx^2} = 2.a_2 \qquad \text{Eq. 4.16}$$

Substituindo as derivadas na equação diferencial, tem-se:

$$E.I.\frac{d^2y_P}{dx^2} - P.y_P = \frac{q.x^2}{2} - \frac{q.L.x}{2} \qquad \text{Eq. 4.17}$$

$$E.I.(2.a_2) - P.(a_2.x^2 + a_1.x + a_0) = \frac{q.x^2}{2} - \frac{q.L.x}{2} \qquad \text{Eq. 4.18}$$

Agrupando os termos,

$$-P.a_2.x^2 - P.a_1.x - Pa_0 + 2.E.I.a_2 = \frac{q.x^2}{2} - \frac{q.L.x}{2} \qquad \text{Eq. 4.19}$$

Igualando os coeficientes de mesma ordem:

$$-P.a_2 = \frac{q}{2} \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{-q}{2.P}$$

$$-P.a_1 = -\frac{q.L}{2} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{q.L}{2.P}$$

$$-Pa_0 + 2.E.I.a_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -Pa_0 + 2.E.I.\left(\frac{-q}{2.P}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{-q.E.I}{P^2}$$

$$y_P(x) = -\frac{q}{2.P}.x^2 + \frac{q.L}{2.P}.x - \frac{q.E.I}{P^2} \qquad \text{Eq. 4.20}$$

Assim,

$$y(x) = A.e^{-k.x} + B.e^{k.x} - \frac{q}{2.P}.x^2 + \frac{q.L}{2.P}.x - \frac{q.E.I}{P^2} \qquad \text{Eq. 4.21}$$

Aplicando a condição de contorno: $y(0) = 0$

Aplicando a condição de simetria: $\frac{dy(L/2)}{dx} = 0$

Substituindo,

$$y(0) = A + B - \frac{q.E.I}{P^2} = 0$$

$$\frac{dy(L/2)}{dx} = A.(-k).e^{-k.L/2} + B.k.e^{k.L/2} - \frac{q}{P}.(L/2) + \frac{q.L}{2.P} = 0$$

Simplificando,

$$A.(-k).e^{-k.L/2} + B.k.e^{k.L/2} = 0$$

$$A.k.e^{-k.L/2} = B.k.e^{k.L/2}$$

Para $k \neq 0$, $A = B.e^{k.L}$

Resolvendo,

$$B.e^{k.L} + B - \frac{q.E.I}{P^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad B.(e^{k.L} + 1) = \frac{q.E.I}{P^2} \quad \Rightarrow B = \frac{q.E.I}{P^2.(e^{k.L} + 1)}$$

$$A = \frac{q.E.I.e^{k.L}}{P^2.(e^{k.L} + 1)}$$

Assim chega-se à solução da equação diferencial:

$$y(x) = \frac{q.E.I.e^{k.L}}{P^2.(e^{k.L} + 1)}.e^{-k.x} + \frac{q.E.I}{P^2.(e^{k.L} + 1)}.e^{k.x} - \frac{q}{2.P}.x^2 + \frac{q.L}{2.P}.x - \frac{q.E.I}{P^2} \qquad \text{Eq. 4.22}$$

Para $x = L/2$, tem-se:

$$y(L/2) = \frac{q.E.I.e^{k.L}}{P^2.(e^{k.L} + 1)}.e^{-k.L/2} + \frac{q.E.I}{P^2.(e^{k.L} + 1)}.e^{k.L/2} - \frac{q}{2.P}.\left(L/2\right)^2 + \frac{q.L}{2.P}.\left(L/2\right) - \frac{q.E.I}{P^2} \qquad \text{Eq. 4.23}$$

Simplificando,

$$y(L/2) = \frac{2.q.E.I.e^{k.L/2}}{P^2.(e^{k.L} + 1)} + \frac{q.L^2}{8.P} - \frac{q.E.I}{P^2}$$

Por fim,

$$y(L/2) = \frac{q.E.I}{P^2}\left(\frac{2.e^{k.L/2}}{e^{k.L} + 1} - 1\right) + \frac{q.L^2}{8.P}$$

Portanto, a fórmula do SAG, para o Sub-caso 1 é encontrada a seguir:

$$\delta_1 = \frac{q.E.I}{P^2}.\left(\frac{2.e^{k.L/2}}{e^{k.L} + 1} - 1\right) + \frac{q.L^2}{8.P} \qquad \text{Eq. 4.24}$$

Chegando o fim da dedução da fórmula de cálculo do SAG é possível perceber que a equação encontrada difere da equação encontrada na literatura (Goodyear, 1975), a qual se pretendia encontrar, uma vez que o resultado encontrado possui a parcela almejada e outra parcela que depende da rigidez flexional da correia.

O deslocamento máximo de uma viga bi-apoiada, sujeita a um carregamento distribuído e constante de intensidade q, na Mecânica dos Sólidos é calculado pela seguinte fórmula, conforme pode ser visto em GERE, 2003:

$$y_1 = \frac{5.q.L^4}{384.E.I} \qquad \text{Eq. 4.25}$$

Define-se o adimensional ϵ_1,

$$\epsilon_1 = \delta_1 . y_1^{-1} \qquad \text{Eq. 4.26}$$

Assim,

$$\epsilon_1 = \frac{384.E.I}{5.q.L^4} . \frac{q.E.I}{P^2} . \left(\frac{2.e^{k.L/2}}{e^{k.L}+1} - 1 \right) + \frac{384.E.I}{5.q.L^4} . \frac{q.L^2}{8.P}$$

Simplificando,

$$\epsilon_1 = \frac{384.(E.I)^2}{5.L^4.P^2} . \left(\frac{2.e^{k.L/2}}{e^{k.L}+1} - 1 \right) + \frac{48.E.I}{5.P.L^2} \qquad \text{Eq. 4.27}$$

Lembrando que,

$$k^2 = \frac{P}{E.I} \qquad \text{Eq. 4.11}$$

Substituindo,

$$\epsilon_1 = \frac{384}{5.(k.L)^4} . \left(\frac{2.e^{k.L/2}}{e^{k.L}+1} - 1 \right) + \frac{48}{5.(k.L)^2} \qquad \text{Eq. 4.28}$$

O adimensional ϵ_1 indica, portanto, a relação entre as flechas (deslocamentos transversais máximos) de uma viga bi-apoiada, submetida a um carregamento uniformemente distribuído, com ou sem esforço de tração ($k \neq 0$ e $k = 0$, respectivamente).

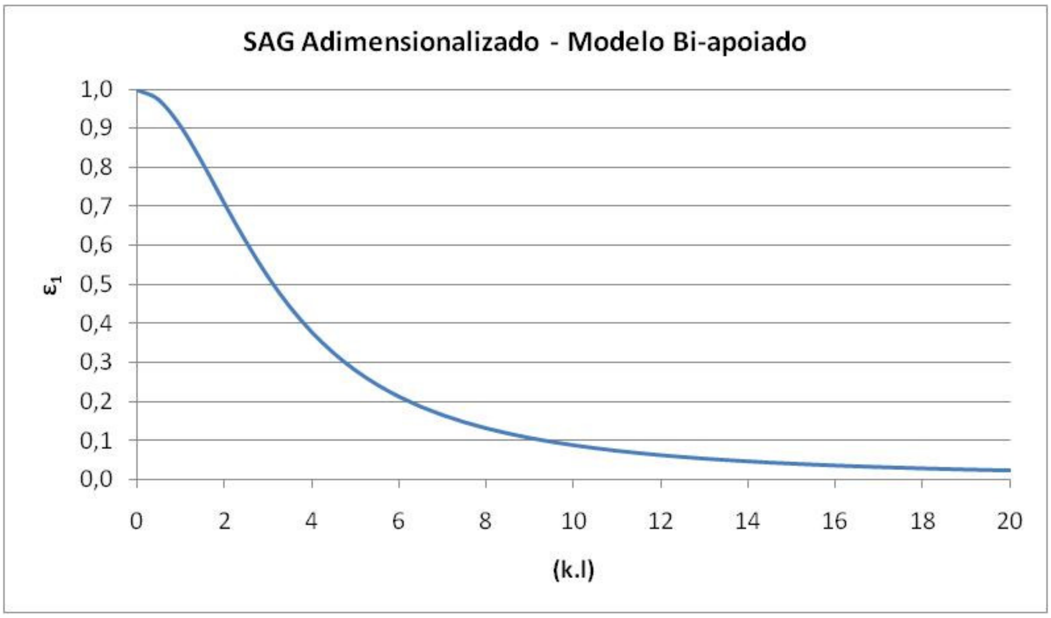


Figura 4.5 - SAG Adimensionalizado - Modelo bi-apoiado

A Figura 4.5 mostra que a medida que o produto $k.L$ tende a zero , ou seja $P \rightarrow 0$, o adimensional ϵ_1 tende a 1. Assim, conclui-se que δ_1 tende aos valores calculados pela equação da resistência dos materiais y_1. No ANEXO D é demonstrado analiticamente que $\epsilon_1$tende a y_1, quando $P \rightarrow 0$, considerando as demais propriedades constantes.

É possível observar que a medida que $k.L$ aumenta, mais δ_1 se distancia de y_1, o que se deve ao efeito de segunda ordem do momento fletor.

4.1.2 Subcaso 2 - Bi-engastado

A seguir será apresentado o subcaso 2 (Bi-engastado) para o cálculo do SAG. Este modelo se faz necessário porque a correia é um elemento contínuo, com vários pontos de apoio (contato entre correia e os roletes). Quando se observa uma seção de correia entre dois roletes percebe-se que sobre os pontos de apoio não ocorre rotação da correia, como pode ser visto na Figura 4.6, assim, esta configuração pode ser modelada como um caso bi-engastado.

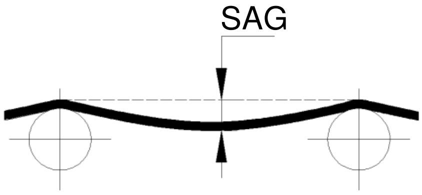


Figura 4.6 - SAG entre roletes do transportador

Será adotado a seguir um modelo de barra com um carregamento constante vertical para baixo, o qual será denominado de q, e ainda, um esforço de tração na barra denominado P.

É válido ressaltar que para todo o desenvolvimento a seguir o eixo Y está orientado para baixo.

Modelo Adotado

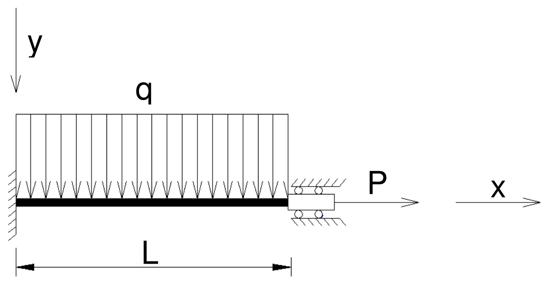


Figura 4.7 - Modelo adotado

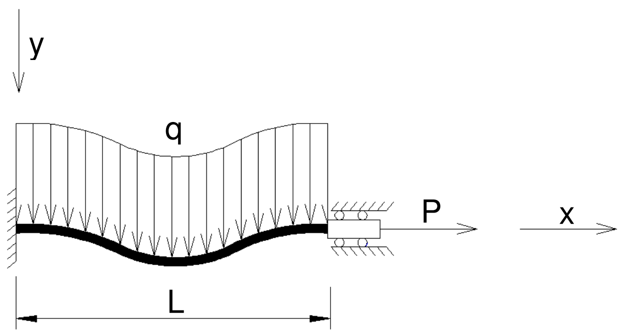


Figura 4.8 - Configuração deformada

O modelo adotado é hiperestático, assim tentou-se encontrar um modelo equivalente a fim de determinar as reações de apoio.

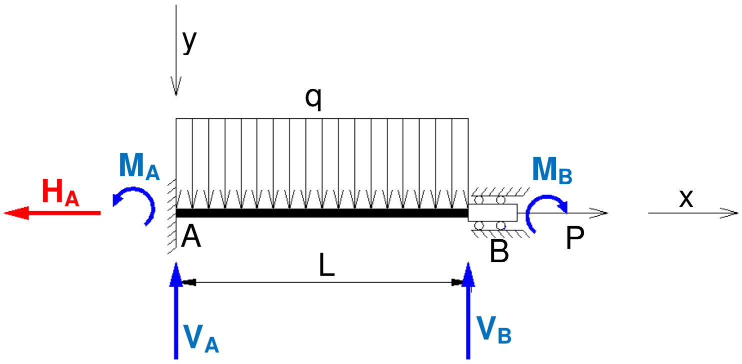


Figura 4.9 - Reações de apoio

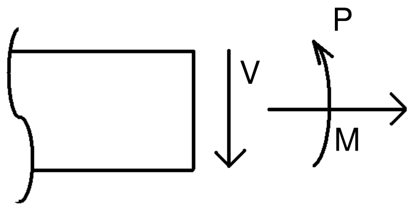


Figura 4.10 - Esforços na seção de corte

A Figura 4.10 mostra o modelo hiperestático decomposto em modelos isostáticos fundamentais.

Nesta seção não serão apresentados as deduções dos modelos isostáticos, as quais estas podem ser encontradas em GERE, 2003 tabela G.2.

Como foi dito nos parágrafos anteriores, o modelo hiperestático será decomposto em três parcelas isostáticas fundamentais e depois será aplicada a condição de compatibilidade de deslocamentos e rotações, uma vez que é sabido que a rotação no engaste é igual a zero.

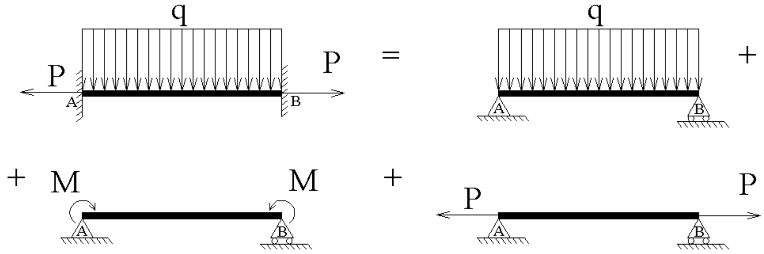


Figura 4.11 - Decomposição do modelo hiperestático em modelos isostáticos fundamentais

Pelas equações da estática,

$$\sum F_v = 0$$ Eq. 4.29

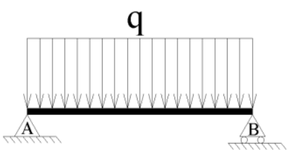
$$V_A + V_B = q.L$$ Eq. 4.30

Por simetria,

$$V_A = V_B$$

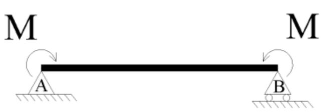
$$2.V_A = q.L \quad \Rightarrow \quad V_A = \frac{q.L}{2}$$ Eq. 4.31

Parcela 1:



$$\theta_A = \theta_B = \frac{q.L^3}{24.E.I}$$ Eq. 4.32

Parcela 2:



$$\theta_A = \theta_B = \frac{M.L}{2.E.I}$$ Eq. 4.33

Parcela 3:

$$\theta_A = \theta_B = 0$$ Eq. 4.34

Sabe-se que a rotação no engaste é nula. Assim, somando a rotação das três parcelas e igualando a zero é possível determinar o momento no engaste.

$$\frac{q.L^3}{24.E.I} + \frac{M.L}{2.E.I} + 0 = 0$$ Eq. 4.35

Isolando o valor de M, tem-se:

$$M = -\frac{q.L^2}{12}$$

Os momentos nos vínculos foram definidos no sentido oposto ao de M e por simetria $M_A = M_B$, assim:

$$M = -M_A = -M_B$$

Então,

$$M_A = M_B = \frac{q.L^2}{12} \qquad \text{Eq. 4.36}$$

Equação do momento fletor,

$$M(x) = -P.y - \frac{q.x^2}{2} + \frac{q.L.x}{2} - \frac{q.L^2}{12} \qquad \text{Eq. 4.37}$$

Da relação momento fletor x curvatura linearizada:

$$M(x) = -E.I.\frac{d^2y}{dx^2} \qquad \text{Eq. 4.38}$$

Assim,

$$-E.I.\frac{d^2y}{dx^2} = -P.y - \frac{q.x^2}{2} + \frac{q.L.x}{2} - \frac{q.L^2}{12} \qquad \text{Eq. 4.39}$$

Reorganizando,

$$E.I.\frac{d^2y}{dx^2} - P.y = \frac{q.x^2}{2} - \frac{q.L.x}{2} + \frac{q.L^2}{12} \qquad \text{Eq. 4.40}$$

A equação diferencial acima possui solução da forma:

$$y = y_H + y_P$$

Em que,

y_H é a solução homogênea

y_P é a solução particular

Solução da equação homogênea

$$E.I.\frac{d^2y}{dx^2} - P.y = 0$$

Como visto anteriormente, a solução da equação homogênea é:

$$y_H(x) = C.e^{-k.x} + D.e^{k.x}$$

Em que C e D são constantes a determinar através das condições de contorno e simetria.

Solução particular da equação

Define-se um polinômio de segunda ordem para a solução particular.

$$y_P(x) = b_2.x^2 + b_1.x + b_0$$

Calculando a primeira e segunda derivadas, tem-se:

$$\frac{dy}{dx} = 2.b_2.x + b_1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2.b_2$$

Substituindo as derivadas na equação diferencial, tem-se:

$$E.I.\frac{d^2y}{dx^2} - P.y = \frac{q.x^2}{2} - \frac{q.L.x}{2} + \frac{q.L^2}{12}$$

$$E.I.(2.b_2) - P.(b_2.x^2 + b_1.x + b_0) = \frac{q.x^2}{2} - \frac{q.L.x}{2} + \frac{q.L^2}{12} \qquad \text{Eq. 4.41}$$

Agrupando os termos,

$$-P.b_2.x^2 - P.b_1.x - P.b_0 + 2.E.I.b_2 = \frac{q.x^2}{2} - \frac{q.L.x}{2} + \frac{q.L^2}{12} \qquad \text{Eq. 4.42}$$

Igualando os coeficientes de mesma ordem:

$$-P.b_2 = \frac{q}{2} \qquad \Rightarrow \qquad b_2 = \frac{-q}{2.P}$$

$$-P.b_1 = -\frac{q.L}{2} \qquad \Rightarrow \qquad b_1 = \frac{q.L}{2.P}$$

$$-Pb_0 + 2.E.I.b_2 = \frac{q.L^2}{12} \qquad \Rightarrow \qquad -P.b_0 + 2.E.I.\left(\frac{-q}{2.P}\right) = +\frac{q.L^2}{12} \qquad \Rightarrow$$

$$b_0 = -\frac{q.E.I}{P^2} - \frac{q.L^2}{12.P}$$

$$y_P(x) = -\frac{q}{2.P}x^2 + \frac{q.L}{2.P}x - \frac{q.E.I}{P^2} - \frac{q.L^2}{12.P}$$

Assim,

$$y(x) = C.e^{-k.x} + D.e^{k.x} - \frac{q}{2.P}x^2 + \frac{q.L}{2.P}x - \frac{q.E.I}{P^2} - \frac{q.L^2}{12.P} \qquad \text{Eq. 4.43}$$

Aplicando a condição de contorno: $y(0) = 0$

Aplicando a condição de simetria: $\frac{dy(L/2)}{dx} = 0$

Assim,

$$y(x) = C.e^{-k.x} + D.e^{k.x} - \frac{q}{2.P}x^2 + \frac{q.L}{2.P}x - \frac{q.E.I}{P^2} - \frac{q.L^2}{12.P}$$

$$\frac{dy(x)}{dx} = C.(-k).e^{-k.x} + D.k.e^{k.x} - \frac{q}{P}.x + \frac{q.L}{2.P}$$

$$y(0) = 0 = C + D - \frac{q.E.I}{P^2} - \frac{q.L^2}{12.P}$$

$$C + D = \frac{q.E.I}{P^2} + \frac{q.L^2}{12.P}$$

$$\frac{dy(L/2)}{dx} = 0 = C.(-k).e^{-k.L/2} + D.k.e^{k.L/2} - \frac{q}{P}.L/2 + \frac{q.L}{2.P}$$

Simplificando,

$$C.(-k).e^{-k.L/2}+D.k.e^{k.L/2}=0$$

$$C.k.e^{-k.L/2}=D.k.e^{k.L/2}$$

Para $k\neq 0,\qquad C=D.e^{k.L}$

Substituindo,

$$D.e^{k.L}+D=\frac{q.E.I}{P^2}+\frac{q.L^2}{12.P}$$

$$D.(e^{k.L}+1)=\frac{q.E.I}{P^2}+\frac{q.L^2}{12.P}\quad\Rightarrow\quad D=\frac{q.E.I}{P^2.(e^{k.L}+1)}+\frac{q.L^2}{12.P.(e^{k.L}+1)}$$

$$C=\frac{q.E.I.e^{k.L}}{P^2.(e^{k.L}+1)}+\frac{q.L^2.e^{k.L}}{12.P.(e^{k.L}+1)}$$

Assim chega-se a solução da equação diferencial:

$$y(x)=\left(\frac{q.E.I.e^{k.L}}{P^2.(e^{k.L}+1)}+\frac{q.L^2.e^{k.L}}{12.P.(e^{k.L}+1)}\right).e^{-k.x}+\left(\frac{q.E.I}{P^2.(e^{k.L}+1)}+\frac{q.L^2}{12.P.(e^{k.L}+1)}\right).e^{k.x}-\frac{q}{2.P}.x^2+$$

$$+\frac{q.L}{2.P}.x-\frac{q.E.I}{P^2}-\frac{q.L^2}{12.P}\qquad\text{Eq. 4.44}$$

Simplificando,

$$y(x)=\left(\frac{q.E.I}{P^2.(e^{k.L}+1)}+\frac{q.L^2}{12.P.(e^{k.L}+1)}\right).\left(\frac{e^{k.L}}{e^{k.x}}+e^{k.x}\right)-\frac{q}{2.P}.x^2+\frac{q.L}{2.P}.x-\frac{q.E.I}{P^2}-\frac{q.L^2}{12.P}$$

Para $x=L/2$, tem-se:

$$y(L/2)=\left(\frac{q.E.I}{P^2.(e^{k.L}+1)}+\frac{q.L^2}{12.P.(e^{k.L}+1)}\right).\left(\frac{e^{k.L}}{e^{k.L/2}}+e^{k.L/2}\right)-\frac{q}{2.P}.\left(L/2\right)^2+\frac{q.L}{2.P}.L/2-\frac{q.E.I}{P^2}-\frac{q.L^2}{12.P}$$

Simplificando,

$$y(L/2)=2.e^{k.L/2}.\left(\frac{q.E.I}{P^2.(e^{k.L}+1)}+\frac{q.L^2}{12.P.(e^{k.L}+1)}\right)-\frac{q.L^2}{8.P}+\frac{q.L^2}{4.P}-\frac{q.E.I}{P^2}-\frac{q.L^2}{12.P}$$

Portanto, a fórmula do SAG, para o Sub-caso 2 é encontrada a seguir:

$$\delta_2 = \frac{q.E.I}{P^2}.\left(\frac{2.e^{k.L/2}}{(e^{k.L}+1)} - 1\right) + \frac{q.L^2}{6.P}.\left(\frac{e^{k.L/2}}{(e^{k.L}+1)} + \frac{1}{4}\right) \quad \text{Eq. 4.45}$$

O deslocamento no ponto médio de uma viga bi-engastada de acordo com as equações da Resistência dos Materiais pode ser calculada a partir da seguinte fórmula, conforme pode ser visto em GERE, 2003:

$$y_2 = \frac{q.L^4}{384.E.I} \quad \text{Eq. 4.46}$$

Define-se o adimensional ϵ_2,

$$\epsilon_2 = \delta_2.y_2^{-1} \quad \text{Eq. 4.47}$$

Assim,

$$\epsilon_2 = \frac{384.E.I}{q.L^4}.\frac{q.E.I}{P^2}.\left(\frac{2.e^{k.L/2}}{e^{k.L}+1} - 1\right) + \frac{384.E.I}{q.L^4}.\frac{q.L^2}{6.P}.\left(\frac{e^{k.L/2}}{e^{k.L}+1} + \frac{1}{4}\right) \quad \text{Eq. 4.48}$$

Simplificando,

$$\epsilon_2 = \frac{384.(E.I)^2}{P^2.L^4}.\left(\frac{2.e^{k.L/2}}{e^{k.L}+1} - 1\right) + \frac{64.E.I}{P.L^2}.\left(\frac{e^{k.L/2}}{e^{k.L}+1} + \frac{1}{4}\right)$$

Lembrando que,

$$k^2 = \frac{P}{E.I} \quad \text{Eq. 4.11}$$

Substituindo,

$$\epsilon_2 = \frac{384}{(k.L)^4}.\left(\frac{2.e^{k.L/2}}{e^{k.L}+1} - 1\right) + \frac{64}{(k.L)^2}.\left(\frac{e^{k.L/2}}{e^{k.L}+1} + \frac{1}{4}\right) \quad \text{Eq. 4.49}$$

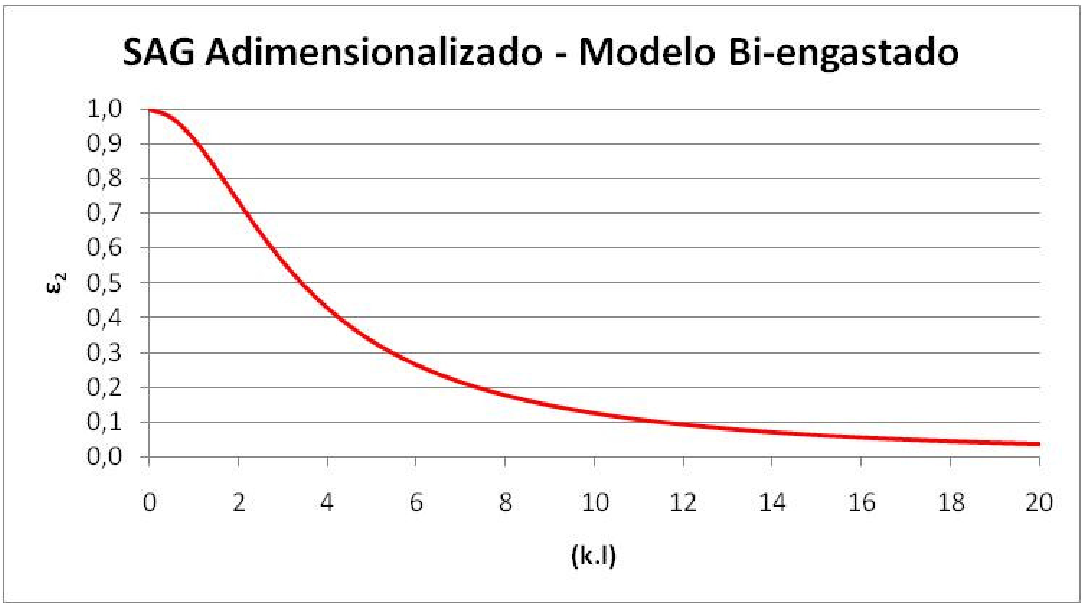


Figura 4.12 - SAG Adimensionalizado - Modelo Bi-engastado

A Figura 4.12 mostra que a medida que o produto $k.L$ tende a zero , ou seja $P \rightarrow 0$, o adimensional ϵ_2 tende a 1. Assim, conclui-se que δ_2 tende ao valor calculado pela equação da resistência dos materiais y_2. No ANEXO D é demonstrado analiticamente que ϵ_2 tende a y_2, quando $P \rightarrow 0$, considerando as demais propriedades constantes.

É possível observar que a medida que $k.L$ aumenta, mais δ_2 se distancia de y_2, o que se deve ao efeito de segunda ordem do momento fletor.

Comparação entre o modelo bi-apoiado e o modelo bi-engastado

Quando os modelos bi-apoiado e bi-engastado são adimensionalizados por suas respectivas expressões da Resistência dos Materiais, y_1 e y_2, é possível observar através da Figura 4.13 que a curva adimensionalizada para o caso bi-apoiado está sempre abaixo da curva do modelo bi-engastado para qualquer valor de $k.L$ diferente de zero.

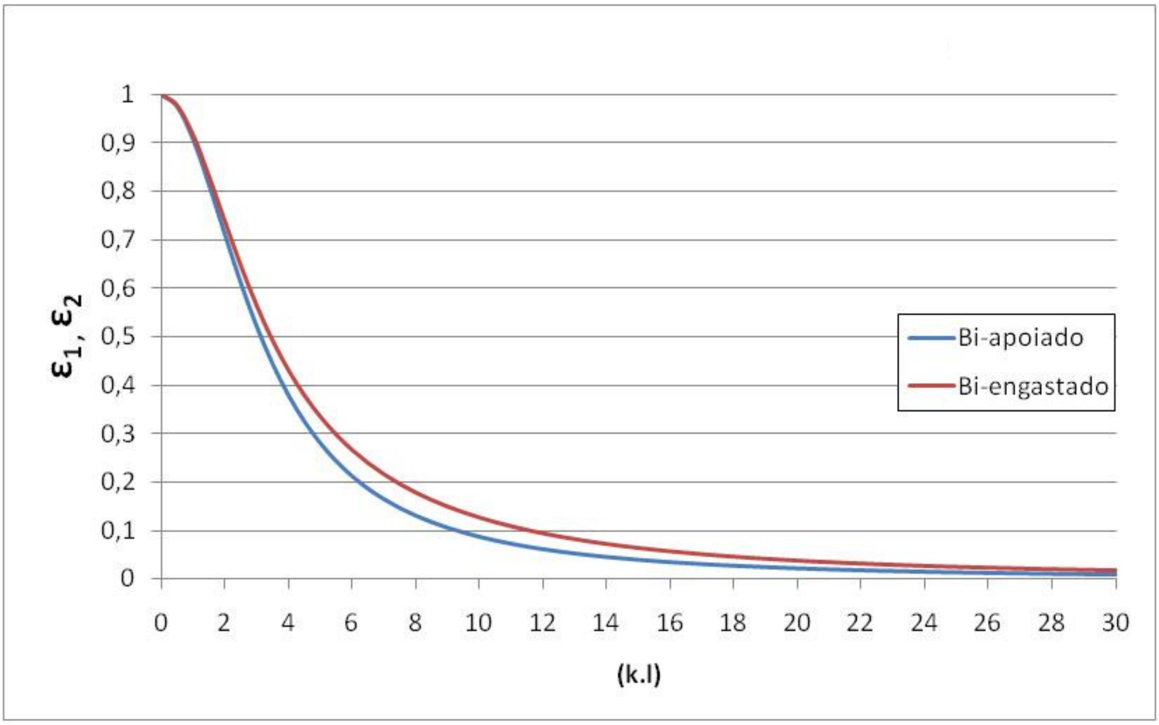


Figura 4.13 - Comparação entre modelos bi-apoiado e bi-engastado

O leitor do presente texto não deve ficar iludido com a proximidade entre as curvas e pensar que o deslocamento transversal do modelo bi-engastado é realmente próximo do modelo bi-engastado, pois é preciso lembrar que as curvas foram adimensionalizadas por equações diferentes entre si em um fator igual a 5 ($y_1 = 5.y_2$).

Pontos importantes a serem ressaltados:

- $(k.L) \rightarrow 0 \qquad \Rightarrow \epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 1$
- $(k.L) \rightarrow \infty \qquad \Rightarrow \epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0$

Além da proximidade entre as curvas $\epsilon_1 = \epsilon_1(k.L)$ e $\epsilon_2 = \epsilon_2(k.L)$, observa-se que a curva de ϵ_1 está sempre abaixo da curva de ϵ_2 para um mesmo $k.L$. Isto significa que a relação percentual dada por $\epsilon_1 = \delta_1/y_1$ aponta para uma maior diferença entre os valores de δ_1 e y_1, quando comparada à relação percentual dada por $\epsilon_2 = \delta_2/y_2$, que aponta para uma menor diferença entre os valores de δ_2 e y_2 (apesar do fato de estas diferenças serem significativas para $k.L > 2$).

4.1.3 Comparação entre fórmula deduzida e a fórmula do SAG para o modelo bi-apoiado

A fórmula encontrada na bibliografia para o cálculo do SAG (Eq. 3.3) não faz menção alguma para qual modelo ela foi deduzida. A fórmula deduzida para o modelo bi-apoiado (Eq. 4.24) traz uma parcela idêntica a fórmula do SAG (Eq. 3.3) encontrada, por exemplo, em GOODYEAR, 1975. Entretanto, a fórmula deduzida apresenta uma parcela que depende da rigidez flexional da correia e a fórmula do SAG não apresenta tal parcela.

Então, será apresentado um estudo da fórmula do SAG (Eq. 3.3) adimensionalizada pela equação de deslocamento vertical máximo de uma viga bi-apoiada (Eq. 4.25), e ainda, será retomada a fórmula deduzida adimensionalizada (Eq. 4.28) pela mesma equação (Eq. 4.25) conforme já foi apresentado neste capítulo.

A adimensionalização da fórmula do SAG pela equação de deslocamento máximo de uma viga bi-apoiada pode ser dada da seguinte forma:

A fórmula do SAG:

$$SAG = \frac{q.L^2}{8.P} \qquad \text{Eq. 3.3}$$

Deslocamento máximo de uma viga bi-apoiada, submetida apenas a um carregamento uniformemente distribuído de intensidade q:

$$y_1 = \frac{5.q.L^4}{384.E.I} \qquad \text{Eq. 4.25}$$

Define-se o adimensional α_1,

$$\alpha_1 = SAG.y_1^{-1}$$

Assim,

$$\alpha_1 = \frac{q.L^2}{8.P}.\frac{384.E.I}{5.q.L^4}$$

Simplificando e lembrando que:

$$k^2 = \frac{P}{E.I} \qquad \text{Eq. 4.11}$$

Assim,

$$\alpha_1 = \frac{48}{5.(k.L)^2} \qquad \text{Eq. 4.50}$$

Retomando a expressão de ϵ_1:

$$\epsilon_1 = \frac{384}{5.(k.L)^4}.\left(\frac{2.e^{k.L/2}}{e^{k.L}+1} - 1\right) + \frac{48}{5.(k.L)^2} \qquad \text{Eq. 4.28}$$

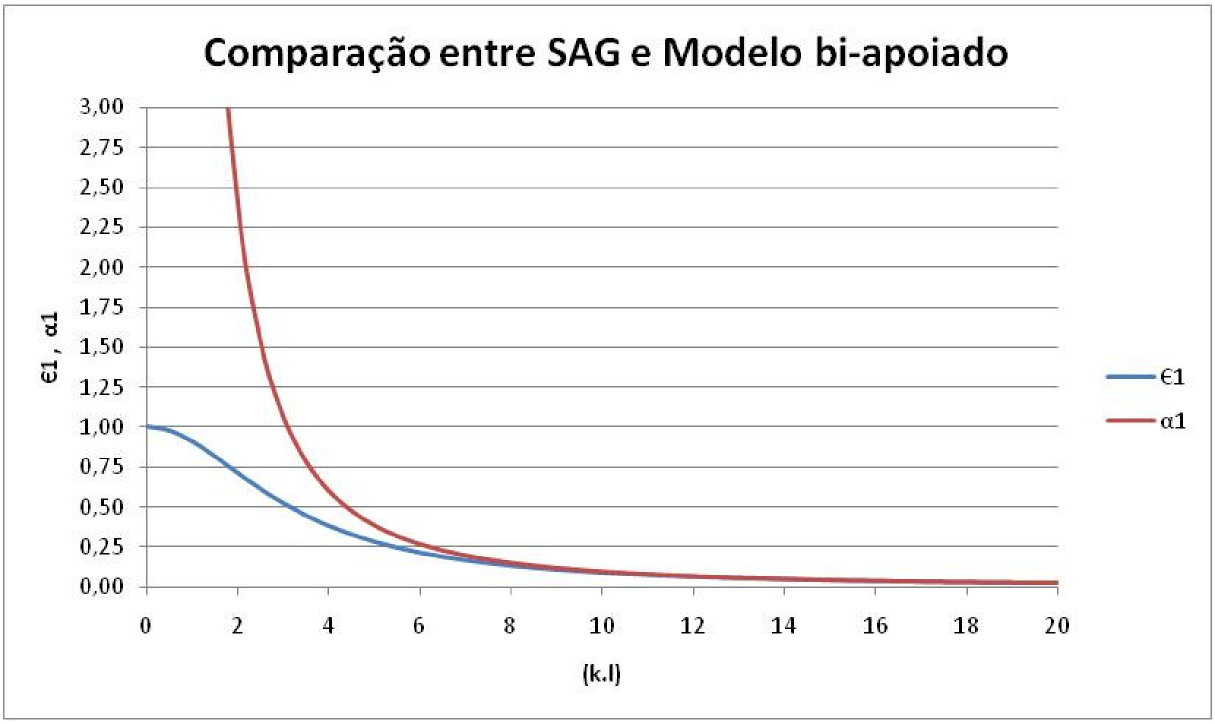


Gráfico 4.1 - Comparação entre SAG e Modelo bi-apoiado. Para 0 ≤ k.l ≤ 20.

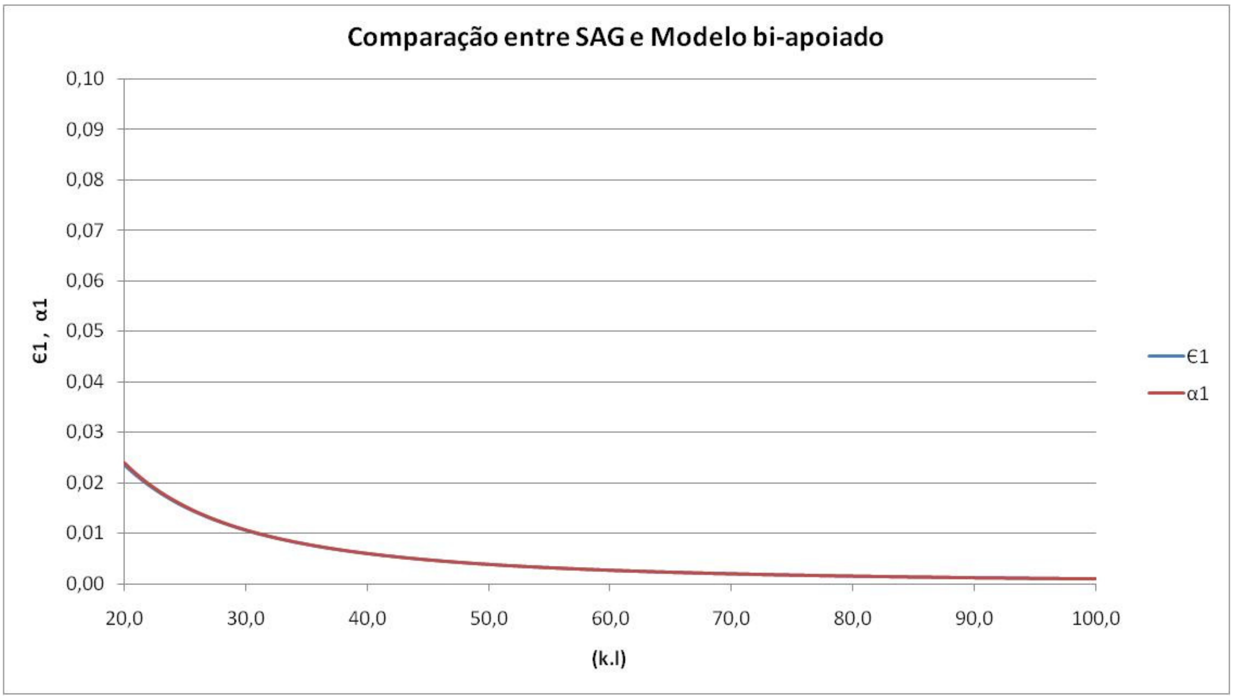


Gráfico 4.2 - Comparação entre SAG e Modelo bi-apoiado. Para 20 ≤ k.l ≤ 100.

Vê-se, que a partir de $k.L = 10$, praticamente não há diferença entre as curvas ϵ_1 e α_1. Assim, a rigidez é importante somente quando $k.L < 10$. Ver-se-á que o mesmo pode ser concluído para o modelo a seguir, porém para $k.L < 20$.

4.1.4 Comparação entre fórmula deduzida e a fórmula do SAG para o modelo bi-engastado

Da mesma forma que foi feito para o modelo bi-apoiado, a presente seção apresenta a comparação entre a fórmula do SAG, a qual não faz menção alguma para qual modelo ela foi deduzida, e a fórmula deduzida para o modelo bi-engastado.

Então, será apresentado um estudo da fórmula do SAG adimensionalizada pela equação de deslocamento vertical máximo de uma viga bi-engastada, e ainda, será retomada a fórmula deduzida adimensionalizada pela mesma equação, conforme já foi apresentado neste capítulo.

A fórmula do SAG:

$$SAG = \frac{q.L^2}{8.P} \qquad \text{Eq. 3.3}$$

Deslocamento máximo de uma viga bi-engastada (Eq. 4.46):

$$y_2 = \frac{q.L^4}{384.E.I}$$

Define-se o adimensional α_2,

$$\alpha_2 = SAG.\, y_2^{-1}$$

$$\alpha_2 = \frac{48}{(k.l)^2} \qquad \text{Eq. 4.51}$$

Retomando a expressão de ϵ_2:

$$\epsilon_2 = \frac{384}{(k.L)^4} . \left(\frac{2.e^{k.L/2}}{e^{k.L}+1} - 1 \right) + \frac{64}{(k.L)^2} . \left(\frac{e^{k.L/2}}{e^{k.L}+1} + \frac{1}{4} \right) \qquad \text{Eq. 4.49}$$

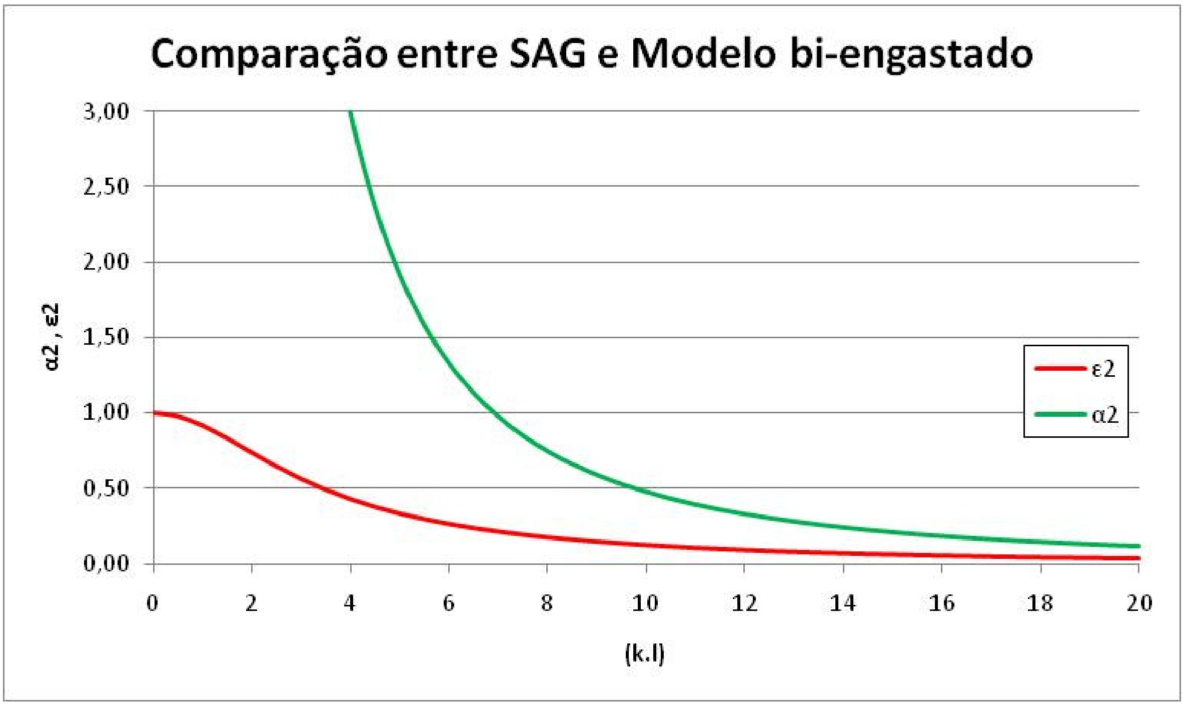


Gráfico 4.3 - Comparação entre SAG e Modelo bi-engastado. Para 0 ≤ k.l ≤ 20.

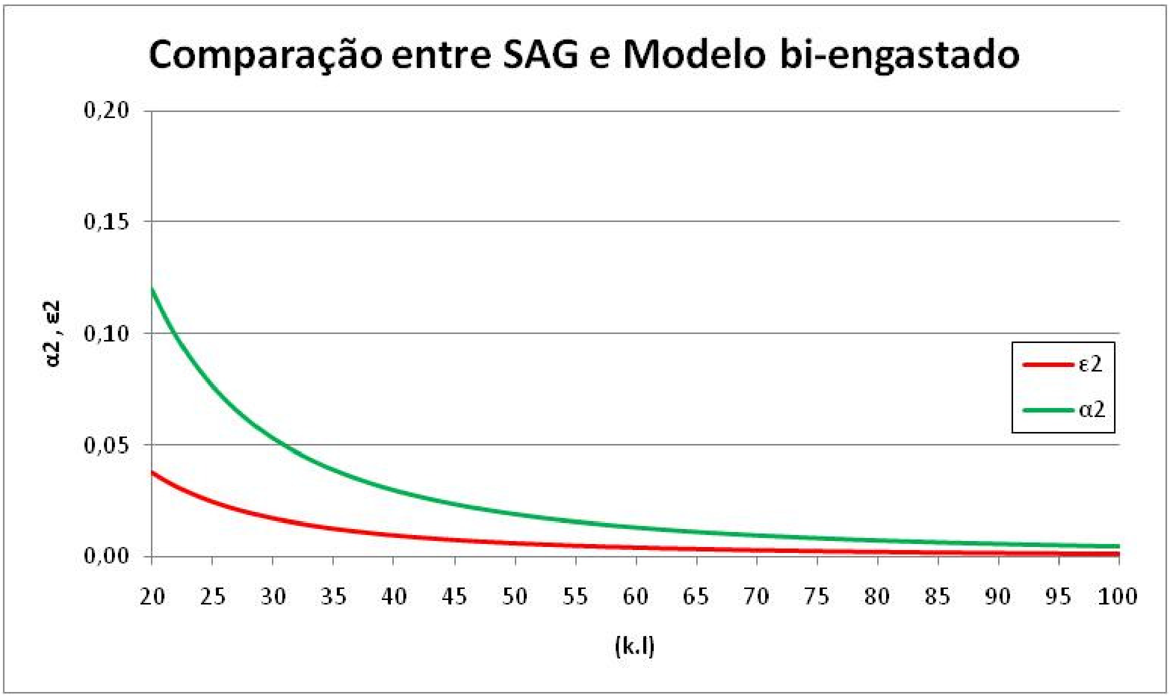


Gráfico 4.4 - Comparação entre SAG e Modelo bi-engastado. Para 20 ≤ k.l ≤ 100.

O uso das expressões que levam em conta o $E.I$ da correia são importantes somente quando $k.L < 20$. Do ponto de vista prático, o valor do produto $k.L$ para as correias em operação é maior que 100. Logo, a aproximação apresentada na literatura (Goodyear, 1975) é uma aproximação razoável.

4.2 Equações de Equilíbrio de Clebsh-Kirchhoff-Love

Nesta seção apresenta-se um modo hierarquicamente superior ao apresentado na seção 4.1, considerando as mesmas condições de carregamento, porém, agora, a hipótese de pequenos deslocamentos é dispensada.

A configuração não-deformada é apresentada na Figura 4.14.

Um breve resumo a respeito das equações de Clebsh-Kirchhoff-Love é apresentado no ANEXO G.

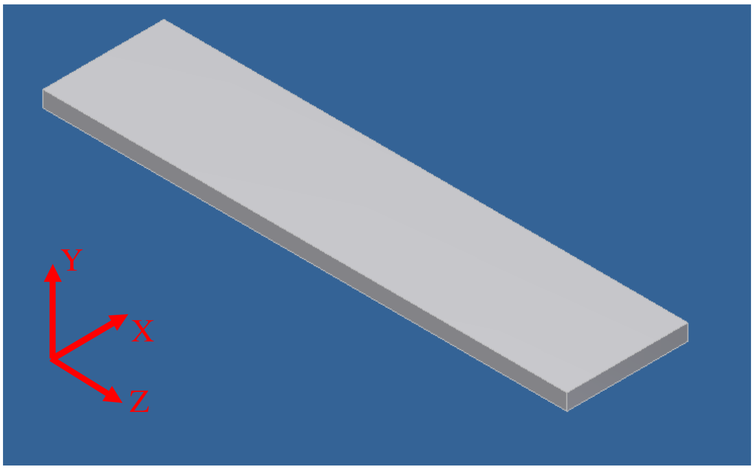


Figura 4.14 - Modelo 1. Configuração não-deformada

Hipóteses:

- Seção transversal da correia é uniforme.
- Uso de material equivalente com propriedades de rigidez $(EI, EA, etc.)$ invariáveis ao longo do comprimento.
- A configuração inicial (não-deformada) da correia corresponde àquela em que seu eixo central encontra-se reto, sem apresentar torção entre linhas homólogas, de forma que: $\kappa_{x0} = \kappa_{y0} = \kappa_{t0} = 0$. (Conforme Figura 4.14).
- Carregamentos: apenas tração (T_0) nas extremidades da correia e peso próprio.
- Condições de contorno: deslocamentos nulos nos pontos de apoios. Rotações permitidas nos pontos de apoio. (Viga bi-apoiada).

Objetivos:

- Determinar a distribuição de esforços, $T = T(s)$, $Q = Q(s)$ e $M = M(s)$, ao longo da correia utilizando as equações diferenciais de equilíbrio de Love (válidas para grandes deslocamentos), além de outras equações necessárias para a determinação dos esforços.

- Comparar os resultados obtidos com os encontrados pela R.M..

Equações diferenciais de equilíbrio para a correia:

Um breve resumo da dedução das equações de Love Clebsh-Kirchhoff-Love é apresentado no ANEXO G, para o qual foi utilizado como referência RAMOS, 2001.

- As equações diferenciais de equilíbrio de Clebsh-Kirchhoff-Love são:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial s_i} - Q_y.k_{ti} + T.k_{yi} + f_x = 0 \qquad \text{Eq. 4.52}$$

$$\frac{\partial Q_y}{\partial s_i} - T.k_{xi} + Q_x.k_{ti} + f_y = 0 \qquad \text{Eq. 4.53}$$

$$\frac{\partial T}{\partial s_i} - Q_x.k_{yi} + Q_y.k_{xi} + f_z = 0 \qquad \text{Eq. 4.54}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial s_i} - M_y.k_{ti} + M_z.k_{yi} - Q_y + m_x = 0 \qquad \text{Eq. 4.55}$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial s_i} - M_z.k_{xi} + M_x.k_{ti} + Q_x + m_y = 0 \qquad \text{Eq. 4.56}$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial S_i} - M_x.k_{yi} + M_y.k_{xi} + m_z = 0 \qquad \text{Eq. 4.57}$$

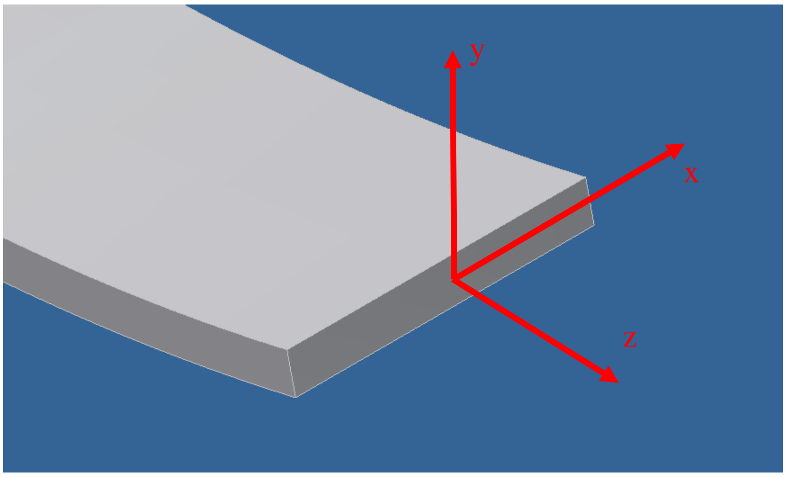


Figura 4.15 - Eixos locais de flexão (x,y) e torção (z) da correia

São considerados os eixos locais de flexão das seções transversais da correia os eixos x e y, e torção o eixo z, conforme indicado na Figura 4.15.

Equações constitutivas:

Admite-se válidas as seguintes equações constitutivas, onde os valores de rigidez assinalados são os valores de rigidez equivalente para a correia:

$T = (EA).\varepsilon$	Eq. 4.58	$M_x = (EI_x).\Delta\kappa_x$	Eq. 4.59
$Q_x = (GA).\gamma_{zx}$	Eq. 4.60	$M_y = (EI_y).\Delta\kappa_y$	Eq. 4.61
$Q_y = (GA).\gamma_{zy}$	Eq. 4.62	$M_z = (GJ).\Delta\kappa_t$	Eq. 4.63

Relações geométricas:

$$\kappa_x = -\chi.cos(\varphi) \quad \text{Eq. 4.64}$$

$$\kappa_y = \chi.sen(\varphi) \quad \text{Eq. 4.65}$$

$$\kappa_t = \tau + d\varphi/ds \quad \text{Eq. 4.66}$$

Simplificações:

Considerando as hipóteses adotadas para o Modelo 1 (correia sob flexão simples), as seguintes simplificações são possíveis:

- Os eixos principais de flexão coincidem com as direções principais de curvatura (da curva formada pelo eixo central da correia em sua configuração deformada). Em outras palavras: a base formada pelos versores ($\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$) coincide com aquela formada pelos versores (-$\vec{b}$, $\vec{n}$, $\vec{t}$).
- Decorre da simplificação anterior que $\varphi = 0$, ou seja, o ângulo entre a direção normal, $\vec{n}$, e o plano principal de flexão y, z é sempre nulo, já que $\vec{n} \equiv \vec{e}_y$.
- A tortuosidade do eixo central é nula para o carregamento considerado $\tau = 0$.
- Os esforços distribuídos por unidade de comprimento da correia são tais que $f_x = 0$, $f_y = -mg.\cos(\theta)$ e $f_z = -mg.\mathrm{sen}(\theta)$, conforme pode ser visto na Figura 4.16.

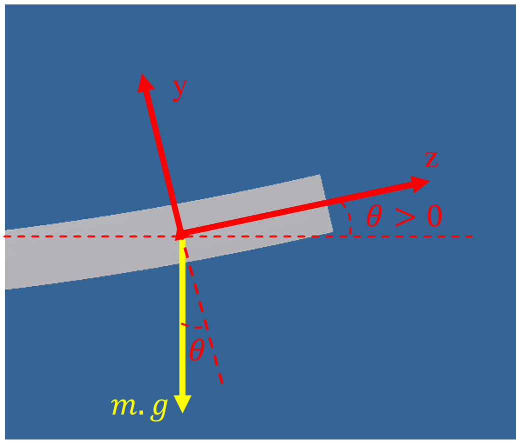


Figura 4.16 - Carregamento por unidade de comprimento mg

Em que m é a massa por unidade de comprimento da correia e g é a aceleração da gravidade.

- Os momentos distribuídos por unidade de comprimento da correia são tais que $\mathrm{m_x} = 0$, $\mathrm{m_y} = 0$ e $\mathrm{m_z} = 0$.

Assim, das relações geométricas, levando em conta que $\varphi = 0$ e $\tau = 0$:

$$\kappa_x = -\chi$$

$$\kappa_y = 0$$

$$\kappa_t = 0$$

Usando as relações geométricas nas equações constitutivas e lembrando que $\kappa_{x0} = \kappa_{y0} = \kappa_{t0} = 0$, virá:

$$\mathrm{T} = (\mathrm{EA}).\varepsilon \qquad \mathrm{M_x} = -(\mathrm{EI_x}).\chi$$

$$\mathrm{Q_x} = (\mathrm{GA}).\gamma_{zx} \qquad \mathrm{M_y} = 0$$

$$\mathrm{Q_y} = (\mathrm{GA}).\gamma_{zy} \qquad \mathrm{M_z} = 0$$

Finalmente,

$$\frac{\partial \mathrm{Q_x}}{\partial \mathrm{s}} = 0$$

$$\frac{\partial \mathrm{Q_y}}{\partial \mathrm{s}} + \mathrm{T}\chi = \mathrm{mg.\cos}\,(\theta)$$

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{s}} - \mathrm{Q_y}\chi = \mathrm{mg.sen}\ (\theta)$$

E,

$$-(\mathrm{EI_x})\frac{\partial \chi}{\partial \mathrm{s}} - \mathrm{Q_y} = 0$$

$$\mathrm{Q_x} = 0$$

(Observe que a última equação de equilíbrio de momentos fica atendida prontamente).

Ou de forma simplificada:

$$\mathrm{Q_y} = -(\mathrm{EI_x}).\frac{\partial \chi}{\partial \mathrm{s}}$$

$$\frac{\partial \mathrm{Q_y}}{\partial \mathrm{s}} + \mathrm{T}\chi = \mathrm{mg.cos}\ (\theta)$$

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{s}} - \mathrm{Q_y}\chi = \mathrm{mg.sen}\ (\theta)$$

Além disso:

$$\chi = \frac{\partial \theta}{\partial \mathrm{s}}$$

Eliminando a força cortante ($\mathrm{Q_y}$) da 1ª equação de equilíbrio de momentos e substituindo nas demais:

$$-(\mathrm{EI_x}).\frac{\partial^2 \chi}{\partial \mathrm{s}^2} + \mathrm{T}\chi = \mathrm{mg.cos}\ (\theta) \qquad \text{Eq. 4.67}$$

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{s}} + (\mathrm{EI_x}).\frac{\partial \chi}{\partial s}\chi = \mathrm{mg.sen}(\theta) \qquad \text{Eq. 4.68}$$

$$\chi = \frac{\partial \theta}{\partial \mathrm{s}} \qquad \text{Eq. 4.69}$$

As equações foram adimensionalizadas através dos seguintes parâmetros, em que os símbolos acentuados com til são os parâmetros adimensionais:

$$\tilde{s} = \frac{s}{L_o} \qquad \Rightarrow \qquad s = \tilde{s}.L_o$$

$$\tilde{T} = \frac{T}{T_o} \qquad \Rightarrow \qquad T = \tilde{T}.T_o$$

$$\tilde{\chi} = \chi.L_o \qquad \Rightarrow \qquad \chi = \frac{\tilde{\chi}}{L_o}$$

$$\theta = \tilde{\theta}$$

Assim,

$$\frac{-(\mathrm{EI_x})}{\mathrm{mg}}.\frac{\partial^2\left(\frac{\tilde{\chi}}{L_o}\right)}{\partial(\tilde{s}.L_o)^2} + \frac{(\tilde{T}.T_o).\left(\frac{\tilde{\chi}}{L_o}\right)}{\mathrm{mg}} = \cos(\tilde{\theta}) \qquad \text{Eq. 4.70}$$

$$\frac{1}{\mathrm{mg}}.\frac{\partial(\tilde{T}.T_o)}{\partial(\tilde{s}.L_o)} + \frac{(\mathrm{EI_x})}{\mathrm{mg}}.\frac{\partial.\left(\frac{\tilde{\chi}}{L_o}\right)}{\partial(\tilde{s}.L_o)}\left(\frac{\tilde{\chi}}{L_o}\right) = \mathrm{sen}(\tilde{\theta}) \qquad \text{Eq. 4.71}$$

$$\tilde{\chi} = \frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial(\tilde{s}.L_o)}.L_o \qquad \text{Eq. 4.72}$$

Simplificando as equações 4.70, 4.71 e 4.72,

$$\frac{-(\mathrm{EI_x})}{\mathrm{m.g.}L_0^3}.\frac{\partial^2\tilde{\chi}}{\partial\tilde{s}^2} + \frac{T_o}{L_o.\mathrm{m.g}}.\tilde{T}.\tilde{\chi} = \cos(\tilde{\theta}) \qquad \text{Eq. 4.73}$$

$$\frac{T_o}{\mathrm{m.g.}L_o}.\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\tilde{s}} + \frac{(\mathrm{EI_x})}{\mathrm{m.g.}L_0^3}.\frac{\partial.\tilde{\chi}}{\partial\tilde{s}}.\tilde{\chi} = \mathrm{sen}(\tilde{\theta}) \qquad \text{Eq. 4.74}$$

$$\tilde{\chi} = \frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial\tilde{s}} \qquad \text{Eq. 4.75}$$

Define-se os coeficientes,

$$\mathrm{R} = \frac{(\mathrm{EI_x})}{\mathrm{m.g.}L_0^3} \qquad \text{Eq. 4.76}$$

$$\mathrm{W} = \frac{T_o}{L_o.\mathrm{m.g}} \qquad \text{Eq. 4.77}$$

Finalmente obtêm-se as equações adimensionais,

$$-\mathrm{R}.\frac{\partial^2\tilde{\chi}}{\partial\tilde{s}^2} + \mathrm{W}.\tilde{T}.\tilde{\chi} = \cos(\tilde{\theta}) \qquad \text{Eq. 4.78}$$

$$\mathrm{W}.\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\tilde{s}} + \mathrm{R}.\frac{\partial.\tilde{\chi}}{\partial\tilde{s}}.\tilde{\chi} = \mathrm{sen}(\tilde{\theta}) \qquad \text{Eq. 4.79}$$

$$\tilde{\chi} = \frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial\tilde{s}} \qquad \text{Eq. 4.80}$$

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{ds}} = \mathrm{sen}(\tilde{\theta}) \qquad \text{Eq. 4.81}$$

Para $\mathrm{R} = W = 1$ e as seguintes condições de contorno aplicadas, $\tilde{T}(0) = 1$, $\tilde{T}(1) = 1$, $\tilde{\chi}(0) = 0$ e $\tilde{\chi}(1) = 0$ (condição de viga bi-apoiada), obtêm-se os gráficos 4.5, 4.6, 4.7 e 4.8.

Fazendo $\mathrm{R} = W$ é equivalente a fazer $k.L = 1$, o que geralmente não ocorre em uma situação real, mas infelizmente quando foram calculados R e W para uma correia com as mesmas propriedades e geometria que foram utilizadas no modelo de elementos finitos da seção 4.3 (caso real), observou-se que os resultados do modelo analítico numérico eram divergentes. Entretanto, para a situação hipotética em que $\mathrm{R} = W = 1$ possível obter os gráficos a seguir:

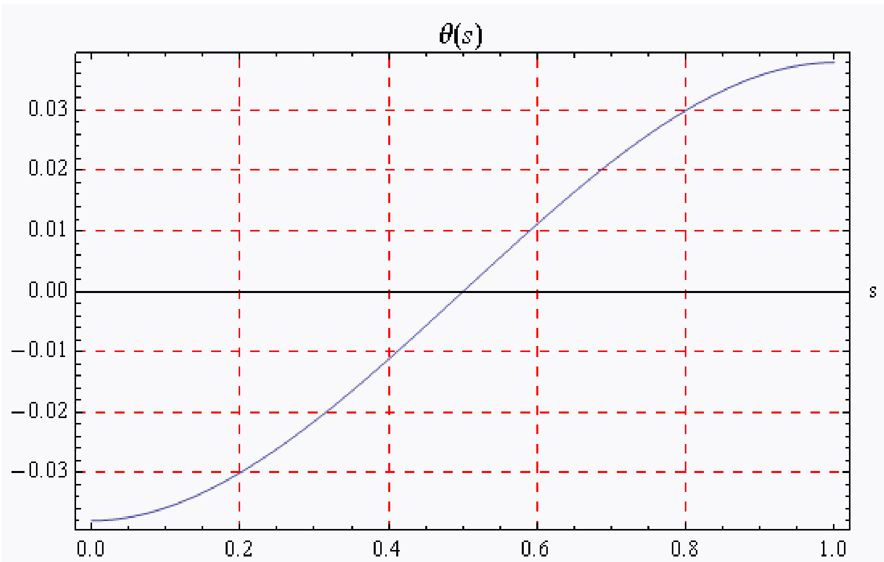


Gráfico 4.5- Rotação x Coordenada Curvilínea. Ambos adimensionalizados.

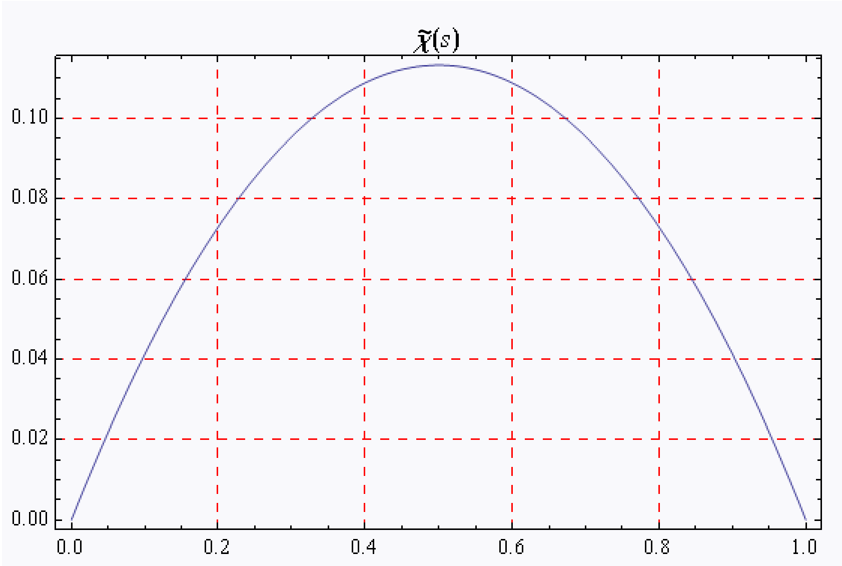


Gráfico 4.6 - Curvatura x Coordenada Curvilínea. Ambos adimensionalizados.

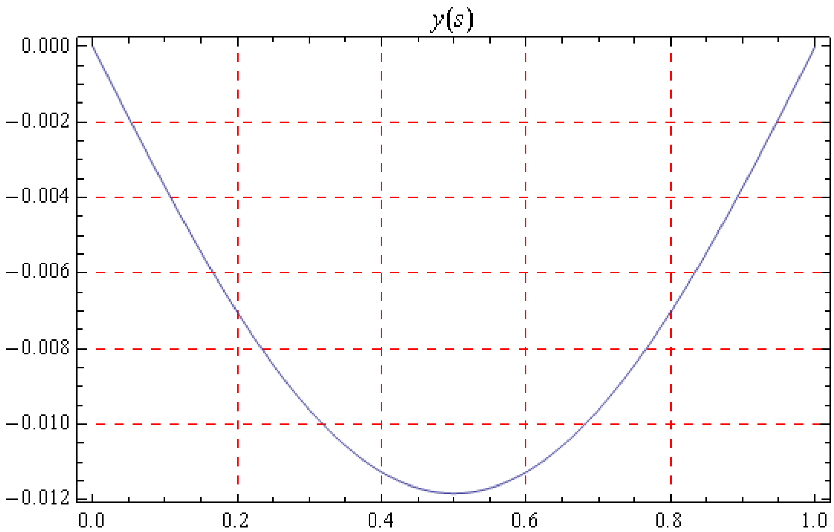


Gráfico 4.7- Deslocamento Vertical x Curvatura Adimensionalizada.

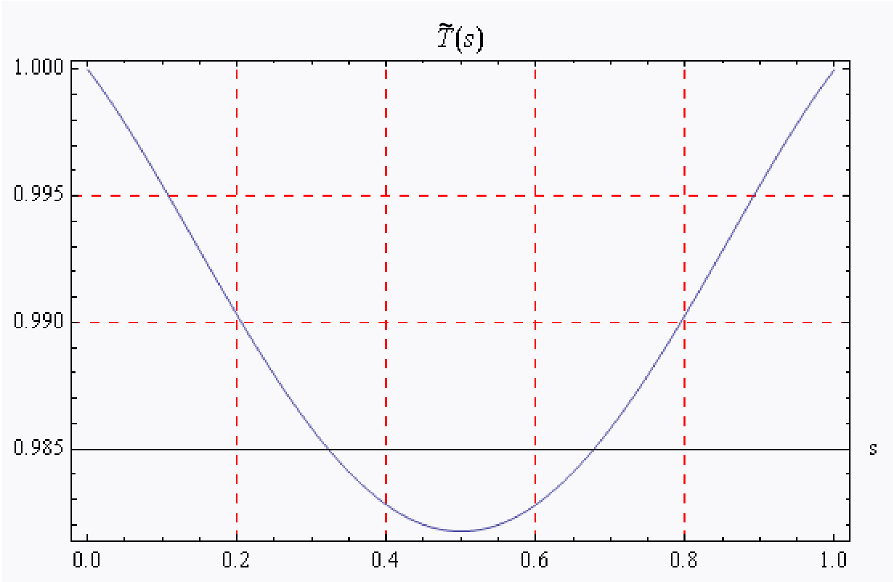


Gráfico 4.8 - Esforço de Tração x Coordenada Curvilínea. Ambos adimensionalizados.

Observa-se pelo Gráfico 4.5, Gráfico 4.6 e Gráfico 4.8, que a rotação é aproximadamente $0{,}038\,\mathrm{rad}$ nos apoios e nula no ponto médio da correia. A curvatura adimensionalizada é nula nos apoios e máxima no centro, igual a $0{,}11$. No gráfico do esforço de tração observa-se que a tração é variável ao longo da coordenada curvilínea. Esta variação, que neste exemplo atingiu o valor máximo de 2%, não poderia ser observada no modelo da resistência dos materiais, pois neste modelo o esforço de tração é constante ao longo da correia. O deslocamento vertical máximo foi de aproximadamente 12 mm.

4.3 Modelo em Elementos Finitos

O Método dos elementos finitos consiste na divisão do domínio de integração em um número finito de pequenas regiões denominadas de elementos finitos, transformando o contínuo em discreto.

Essa divisão do domínio chama-se malha, a qual é composta de elementos com arestas formando faces e nós que são pontos de intersecção das arestas.

Na presente sessão é apresentado um modelo em elementos finitos, o qual é modelado a partir de elementos unidimensionais, com seção transversal constante e material com comportamento elástico-lineares.

O modelo aqui apresentado tem uma concepção diferente da usual. Normalmente é gerada uma geometria, com auxílio de um software de CAD, esta geometria é importada para um software de pré-processamento de elementos finitos, neste software são aplicados os carregamentos e condições de contorno. O software de pré-processamento gera um arquivo de exportação para o software de processamento, este por sua vez cria outro arquivo de exportação que deve ser lido por um software de pós-processamento que muitas vezes pode ser o mesmo software de pré-processamento.

Os modelos aqui apresentados são criados a partir de linhas de comandos que serão lidas diretamente pelo programa de processamento. O pós-processado será lido pelo software de pós-processamento.

No ANEXO G são apresentadas algumas funções utilizadas para escrever os modelos em elementos finitos.

O Modelo

O modelo apresentado para a correia foi descrito da seguinte forma:

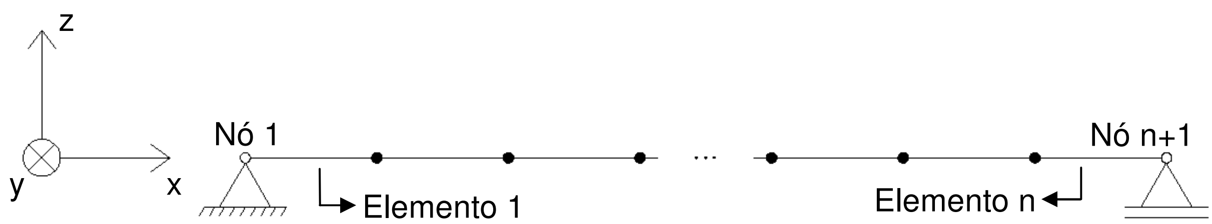


Figura 4.17 - Modelo utilizado para a correia

O Nó 1 possui restrição de movimento nas três direções de translação e em duas direções de rotação, então, permite-se rotação em torno do eixo y. O Nó n+1 possui restrição de translação somente na direção y e z, permitem-se rotações somente em y. O esforço de tração é aplicado no nó n+1.

Os n elementos utilizados possuem as mesmas propriedades de material e de geometria.

Seguem as propriedades de material, de geometria e o carregamento dos elementos do modelo:

Módulo de Elasticidade = 54,3 GPa; Coeficiente de Poisson = 0,426; Densidade = 2913,77 kg/m³; Diâmetro do Cabo = 10 mm; Comprimento do Elemento = 20 mm;

Esforço de Tração = 148 kN; Aceleração da Gravidade = 9,81 m/s²; Número de Elementos = 1800.

É válido ressaltar que o modelo em elementos finitos considera a correia como um elemento composto, cujas propriedades mecânicas podem ser calculadas conforme apresentado no Capítulo 6.

Para o modelo são considerados os efeitos não-lineares como grandes deslocamentos dos elementos. A simulação realizada considera o esforço de tração e o peso próprio da correia. O modelo considera a viga bi-apoiada.

Resultados da simulação computacional:

Figura 4.18 - Modelo em MSC Patran

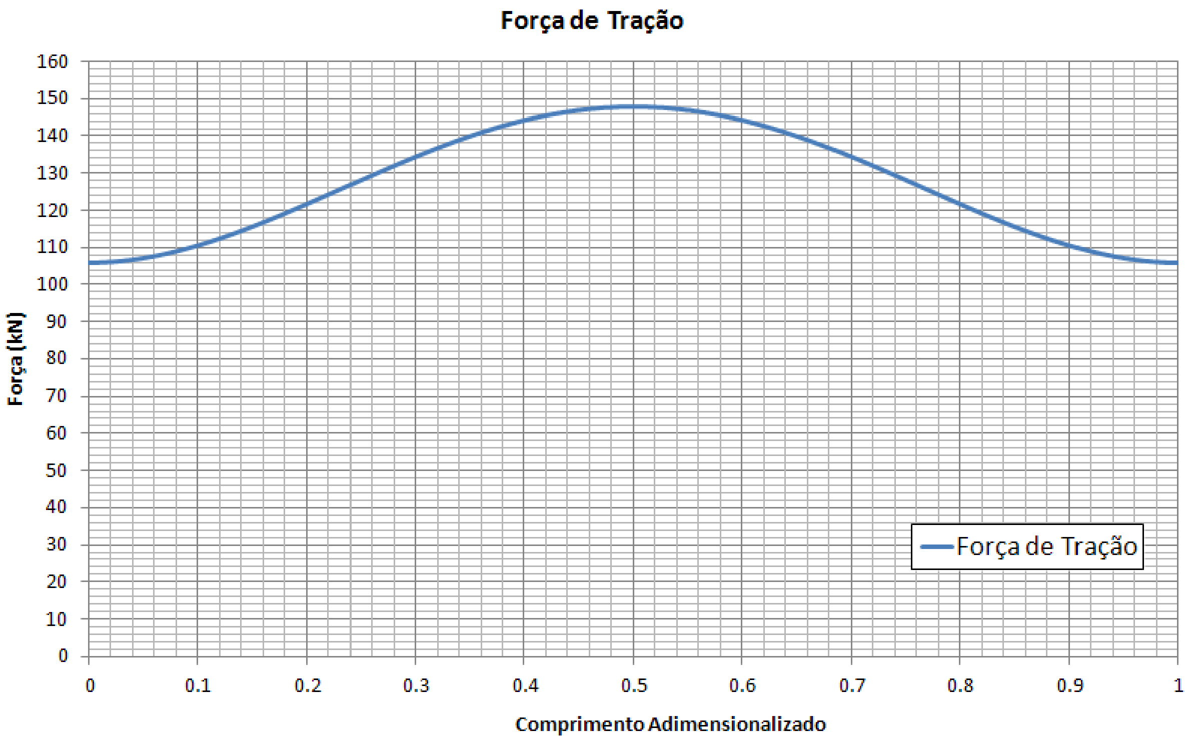


Figura 4.19 - Força de tração no modelo. Com peso próprio

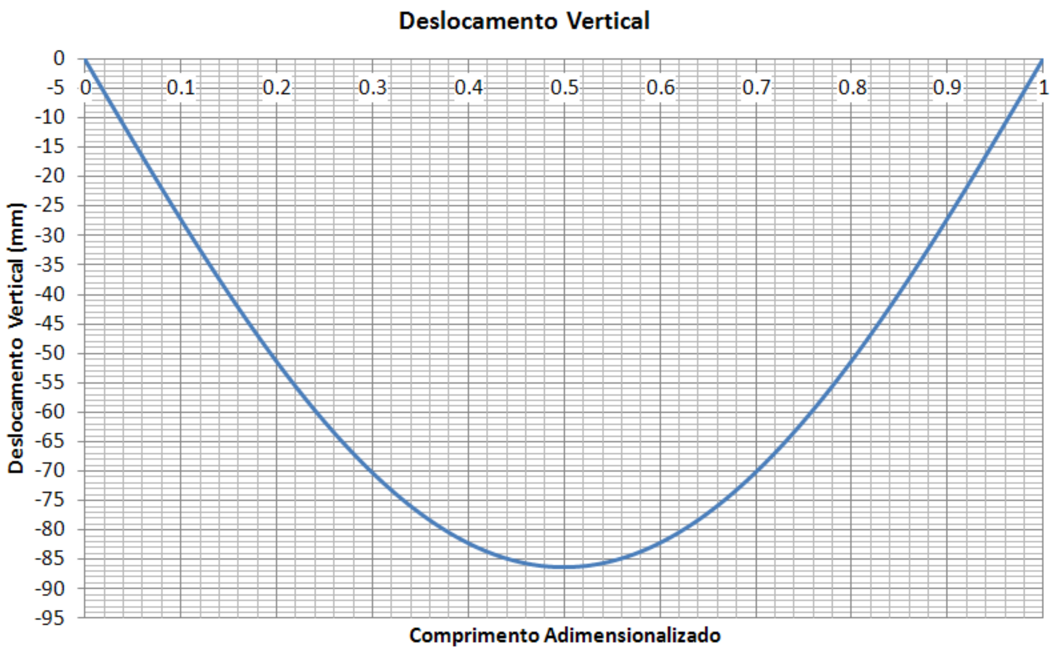


Figura 4.20 – Deslocamento Vertical no modelo. Com peso próprio

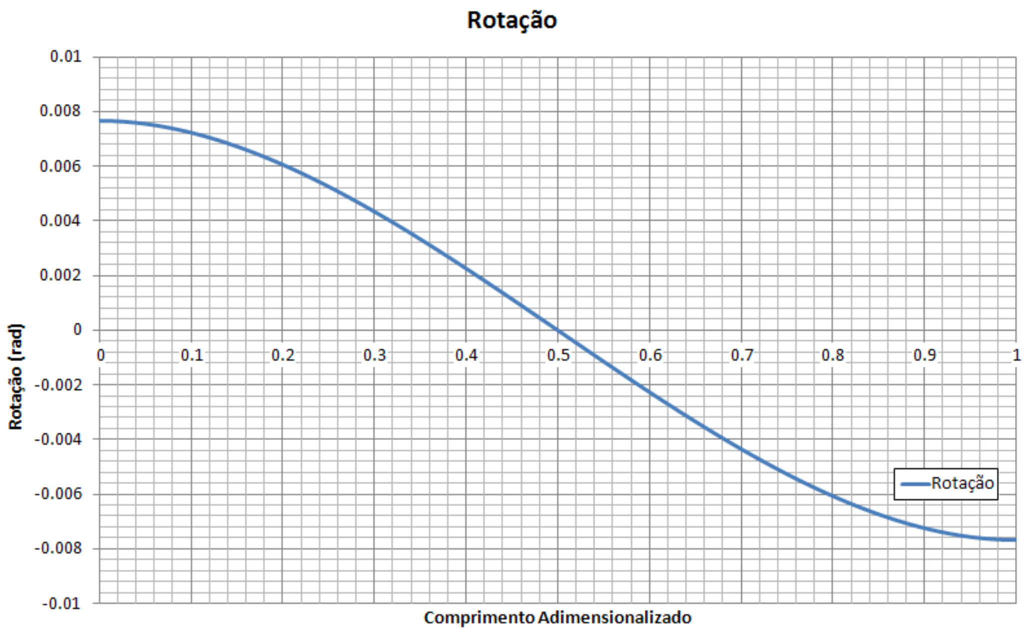


Figura 4.21 – Rotação no modelo. Com peso próprio

Quando o peso próprio é considerado acontece uma variação no esforço de tração ao longo do comprimento e deslocamentos verticais não nulos, com valor máximo no ponto médio da correia. A rotação é nula no ponto médio, positiva na primeira metade e negativa na segunda metade, de acordo com a convenção do programa de elementos finitos. O deslocamento vertical é máximo no centro da viga e nulo nos apoios.

5. MODELO ANALÍTICO-NUMÉRICO PARA TORÇÃO-TRAÇÃO

Este modelo, denominado Modelo 2, calcula o esforço de tração em cada cabo de aço e o momento necessário para torcer a correia, considerando-a sob ação da tração aplicada nas extremidades, e ainda, impondo o giro de 180° em uma das extremidades, porém, não considerando o peso próprio da correia.

A correia será considerada como um elemento formado por dois elementos distintos: a borracha e os cabos de aço. A borracha será somente um elemento separador dos cabos de aço, estes serão responsáveis por suportar todos os esforços aplicados na correia.

O Modelo 2 é apresentado, em primeira instância, utilizando conceitos da Resistência dos Materiais, sobre os quais são aplicadas as hipóteses de pequenas deformações e pequenos deslocamentos. Em segunda instância, é apresentado um modelo hierarquicamente superior ao apresentado em primeira instância, pois, são aplicadas as equações de equilíbrio demonstradas por Clebsh-Kirchhoff-Love, para as quais não se aplicam as hipóteses de pequenas rotações e pequenos deslocamentos. Ver-se-á que os modelos de primeira e segunda instância convergem para o mesmo resultado. Em terceira instância, apresenta-se o modelo computacional em elementos finitos, considerando o mesmo carregamento e condições de contorno.

5.1 Resistência dos Materiais

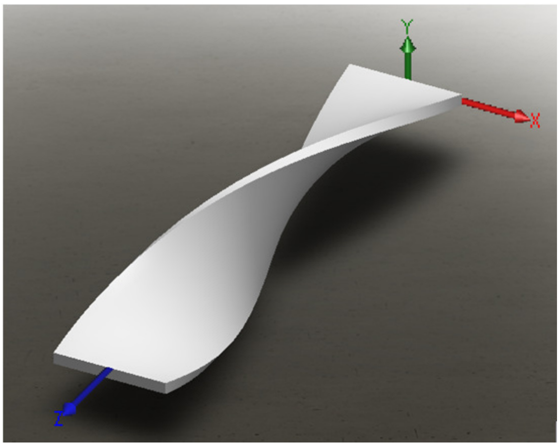


Figura 5.1 - Modelo Adotado

Definimos o vetor posição, $\vec{r}_0$, de um ponto pertencente ao eixo central de um dos cabos de aço, na configuração não deformada da mesma.

$$\vec{r}_0 = \left(u_x, u_y, u_z\right)_{B1}$$

A geometria do eixo central de um dos cabos de aço, após a torção, admite um modelo de hélice de passo constante, a qual terá seu vetor posição descrita a seguir:

$$x_0 = r_0.\cos\left(\frac{\pi.z_0}{L_0}\right) \qquad y_0 = r_0.sen\left(\frac{\pi.z_0}{L_0}\right)$$

$$\vec{r}_0 = r_0.\cos\left(\frac{\pi.z_0}{L_0}\right).\vec{e}_x + r_0.sen\left(\frac{\pi.z_0}{L_0}\right).\vec{e}_y + z_0.\vec{e}_z = \left(r_0.\cos\left(\frac{\pi.z_0}{L_0}\right), r_0.sen\left(\frac{\pi.z_0}{L_0}\right), z_0\right)_{B1} \qquad \text{Eq. 5.1}$$

Em que $B1 = \left(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\right)$ é a base ortonormal positiva associada ao sistema fixo de coordenadas Oxyz.

Considerando somente a torção uniforme e a tração na correia, pode-se descrever o vetor posição, $\vec{r}_1$, na configuração deformada:

$$x_1 = r_1.\cos\left(\frac{\pi.z_1}{L_1}\right) \qquad y_1 = r_1.sen\left(\frac{\pi.z_1}{L_1}\right)$$

$$\vec{r}_1 = r_1.\cos\left(\frac{\pi.z_1}{L_1}\right).\vec{e}_x + r_1.sen\left(\frac{\pi.z_1}{L_1}\right).\vec{e}_y + z_1.\vec{e}_z = \left(r_1.\cos\left(\frac{\pi.z_1}{L_1}\right), r_1.sen\left(\frac{\pi.z_1}{L_1}\right), z_1\right)_{B1} \qquad \text{Eq. 5.2}$$

O deslocamento ocorrido entre a configuração não deformada e a configuração deformada pode ser determinado através da subtração dos vetores $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_0$.

$$\vec{u} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$$

$$\vec{u} = \left(r_1.\cos\left(\frac{\pi.z_1}{L_1}\right) - r_0.\cos\left(\frac{\pi.z_0}{L_0}\right)\right).\vec{e}_x + \left(r_1.sen\left(\frac{\pi.z_1}{L_1}\right) - r_0.sen\left(\frac{\pi.z_0}{L_0}\right)\right).\vec{e}_y + \left(z_1 - z_0\right).\vec{e}_z$$

Eq. 5.3

Em que, $\frac{\pi.z_0}{L_0} = \theta_0$ e $\frac{\pi.z_1}{L_1} = \theta_1$

Designa-se S_1 a coordenada curvilínea do eixo central do cabo de aço na configuração deformada e S_0 a coordenada curvilínea do eixo central do cabo de aço na configuração não-deformada.

$$\left(\frac{dS_1}{d\theta_1}\right)^2 = \left(\frac{dx_1}{d\theta_1}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{d\theta_1}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{d\theta_1}\right)^2 \quad \text{Eq. 5.4}$$

$$\left(\frac{dS_1}{d\theta_1}\right)^2 = r_1^2 + \left(\frac{L_1}{\pi}\right)^2$$

$$\frac{dS_1}{d\theta_1} = \left(r_1^2 + \left(\frac{L_1}{\pi}\right)^2\right)^{1/2} \quad \text{Eq. 5.5}$$

Analogamente,

$$\frac{dS_0}{d\theta_0} = \left(r_0^2 + \left(\frac{L_0}{\pi}\right)^2\right)^{1/2} \quad \text{Eq. 5.6}$$

$$\frac{dS_1}{d\theta_1}.\frac{d\theta_0}{dS_0} = \left(r_1^2 + \left(\frac{L_1}{\pi}\right)^2\right)^{1/2}.\left(r_0^2 + \left(\frac{L_0}{\pi}\right)^2\right)^{-1/2} \quad \text{Eq. 5.7}$$

Em ambas configurações, deformada e não-deformada, a hélice sofre a mesma rotação de 180°. Portanto, pode-se aproximar $\theta_1 = \theta_0$.

Assim,

$$\frac{dS_1}{dS_0} = \left(\frac{(\pi.r_1)^2 + L_1^2}{(\pi.r_0)^2 + L_0^2}\right)^{1/2} = 1 + \varepsilon_{t_i} \quad \text{Eq. 5.8}$$

Em que ε_t é o alongamento do eixo central do cabo de aço.

$$F_i = (E.A).\varepsilon_{t\,i} \quad \text{Eq. 5.9}$$

$$T_C = \sum_{i=1}^{n} F_i.\cos(\alpha_i) \qquad \text{Eq. 5.10}$$

$$M_t = \sum_{i=1}^{n} F_i.r_i.sen(\alpha_i) \qquad \text{Eq. 5.11}$$

Em que,

n = número de cabos de aço no interior da correia

$$\alpha_i = \arctan\left(\frac{\pi.r_i}{L}\right) \qquad \text{Eq. 5.12}$$

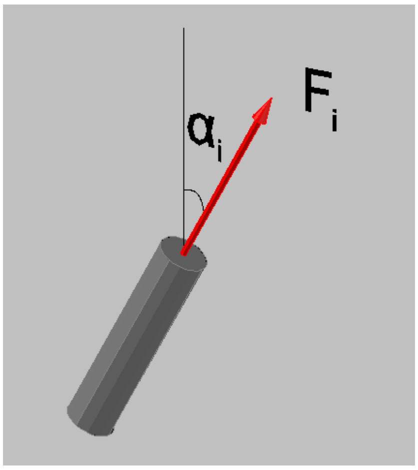


Figura 5.2 - Cabos de aço no interior da correia

Através das equações apresentadas anteriormente pode-se determinar o momento torçor e a força de tração na região do *turnover*.

Pode-se perceber que o modelo matemático apresentado considera que todos os esforços são suportados pelos cabos de aço. A borracha presente na correia tem função de elemento separador dos cabos de aço, sendo responsável somente pelo espaçamento entre eles, sem transmissão de cargas.

No Modelo 2 foi feita uma simplificação em relação a torção do cabo de aço em relação ao eixo central do próprio cabo. O modelo desconsidera que o cabo gire ao redor de seu próprio eixo, por exemplo, no estudo de caso apresentado neste trabalho, o cabo central da correia, cujo eixo central é colinear com o eixo central da correia não sofre torção, mas sabe-se que o processo de vulcanização da correia garante total adesão entre a borracha e os cabos. Assim, quando a borracha sofre o giro de 180° este cabo também gira em 180°, entretanto, isto não é considerado no modelo.

Assim, tendo posse da configuração interna da correia, mais especificamente o número e espaçamento do cabos de aço no interior da mesma, comprimento do virador e o esforço de tração na correia antes do virador é possível determinar a tensão e a deformação em cada um dos cabos através das equações 5.9, 5.10, 5.11 e 5.12 e obter resultados semelhantes aos apresentados nos gráficos 7.1, 7.2, 7.3 e 7.4..

5.2 Equações de Equilíbrio de Clebsh-Kirchhoff-Love

A aplicação das equações diferenciais de equilíbrio será dividida em duas etapas. Na primeira, a correia está plana e totalmente descarregada, configuração de referência R0, na configuração não-deformada e na condição deformada ela sofre uma torção de 180°, configuração R1, ainda sem o esforço de tração. Na segunda, a correia está torcida na condição não-deformada, conforme resultado da primeira etapa e sofre o esforço de tração, resultando na condição deformada final, configuração R2.

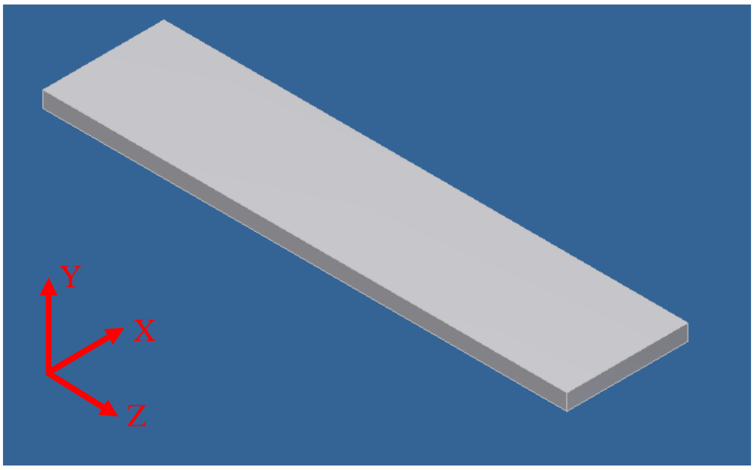


Figura 5.3 - Configuração não-deformada da primeira etapa, R0.

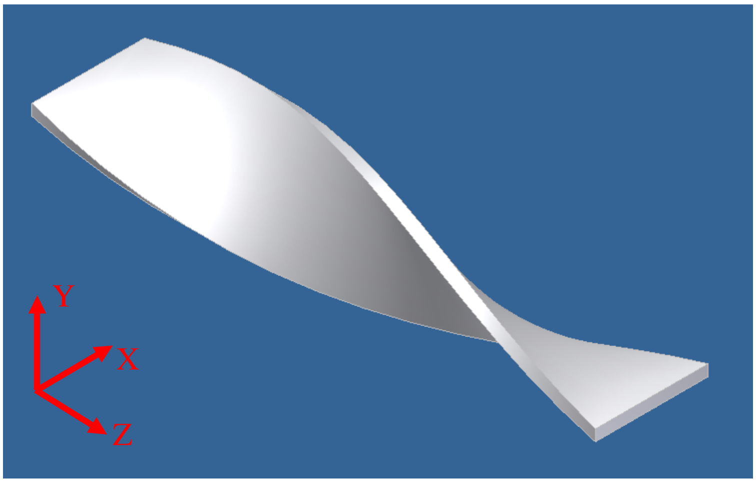


Figura 5.4 – Configuração deformada ao final da primeira etapa, R1.

Hipóteses:

- Seção transversal da correia é uniforme.
- Uso de material equivalente com propriedades de rigidez $(EI, EA, etc.)$ invariáveis ao longo do comprimento, quando descritos em relação à base solidária a correia.
- Na configuração inicial (não-deformada) da primeira etapa a correia corresponde àquela em que seu eixo central encontra-se reto, sem apresentar flexão e torção entre linhas homólogas, de forma que: $\kappa_{x0} = \kappa_{y0} = 0$ e $\kappa_{t0} = 0$.
- Na configuração inicial (não-deformada) da segunda etapa a correia permanece com seu eixo central reto, sem apresentar flexão, mas agora apresenta uma torção inicial entre linhas homólogas, de forma que: $\kappa_{x1} = \kappa_{y1} = 0$ e $\kappa_{t1} = \frac{d}{ds_1}\left(\frac{\pi . s_1}{L}\right) = \frac{\pi}{L}$.
- Carregamentos: apenas torção na primeira etapa (M_{t1}) e tração-torção (T_2) e (M_{t2}) nas extremidades da correia na segunda etapa.

Objetivos:

- Determinar a distribuição de esforços, $T = T(s)$ e $M_t = M_t(s)$, ao longo da correia utilizando as equações diferenciais de equilíbrio de Love (válidas para grandes deslocamentos), além de outras equações necessárias para a determinação dos esforços.

Equações diferenciais de equilíbrio para a correia:

- As equações diferenciais de equilíbrio de Clebsh-Kirchhoff-Love são:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial s_i} - Q_y.k_{ti} + T.k_{yi} + f_x = 0 \qquad \text{Eq. 4.52}$$

$$\frac{\partial Q_y}{\partial s_i} - T.k_{xi} + Q_x.k_{ti} + f_y = 0 \qquad \text{Eq. 4.53}$$

$$\frac{\partial T}{\partial s_i} - Q_x.k_{yi} + Q_y.k_{xi} + f_z = 0 \qquad \text{Eq. 4.54}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial s_i} - M_y.k_{ti} + M_z.k_{yi} - Q_y + m_x = 0 \qquad \text{Eq. 4.55}$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial s_i} - M_z.k_{xi} + M_x.k_{ti} + Q_x + m_y = 0 \qquad \text{Eq. 4.56}$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial s_i} - M_x.k_{yi} + M_y.k_{xi} + m_z = 0 \qquad \text{Eq. 4.57}$$

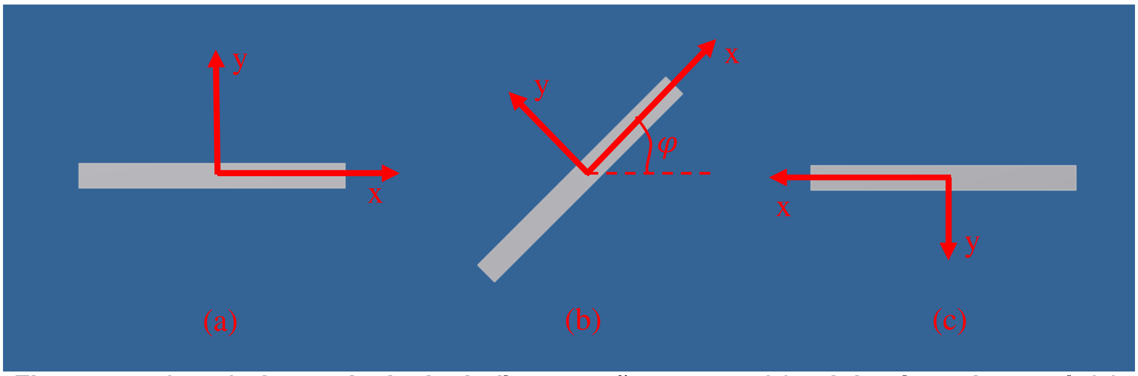


Figura 5.5 - (x,y,z) eixos principais de flexo-torção, em que (z) sai do plano do papel. (a) extremidade da correia, (b) seção transversal intermediária e (c) outra extremidade da correia.

São considerados os eixos locais de flexão das seções transversais da correia os eixos x e y, e torção o eixo z, conforme indicado na Figura 5.5.

Equações constitutivas:

Admite-se válidas as seguintes equações constitutivas, onde os valores de rigidez assinalados são os valores de rigidez equivalente para a correia:

$$T = (EA).\varepsilon \qquad \text{Eq. 4.58} \qquad M_x = (EI_x).\Delta\kappa_x \qquad \text{Eq. 4.59}$$

$$Q_x = (GA).\gamma_{zx} \qquad \text{Eq. 4.60} \qquad M_y = (EI_y).\Delta\kappa_y \qquad \text{Eq. 4.61}$$

$$Q_y = (GA).\gamma_{zy} \qquad \text{Eq. 4.62} \qquad M_z = (GJ).\Delta\kappa_t \qquad \text{Eq. 4.63}$$

Relações geométricas:

$$\kappa_x = -\chi.cos(\varphi) \qquad \text{Eq. 4.64}$$

$$\kappa_y = \chi.sen(\varphi) \qquad \text{Eq. 4.65}$$

$$\kappa_t = \tau + d\varphi/ds \qquad \text{Eq. 4.66}$$

Simplificações:
Considerando as hipóteses adotadas para o Modelo 2 (correia sob torção e tração), as seguintes simplificações são possíveis para as duas etapas:

- A tortuosidade do eixo central da correia é nula para o carregamento considerado $\tau = 0$.
- Os esforços distribuídos por unidade de comprimento da correia são nulos, uma vez que o peso próprio da correia não está sendo considerado. Então: $f_x = f_y = f_z = 0$.
- Os momentos distribuídos por unidade de comprimento da correia são nulos também ($\mathrm{m_x} = 0$, $\mathrm{m_y} = 0$ e $\mathrm{m_z} = 0$).
- O ângulo φ varia linearmente em função do comprimento, de maneira que, pode ser definido da seguinte forma:

$$\varphi(s) = \frac{\pi . s}{L} \qquad \text{Eq. 5.13}$$

Em que, L é o comprimento do virador.

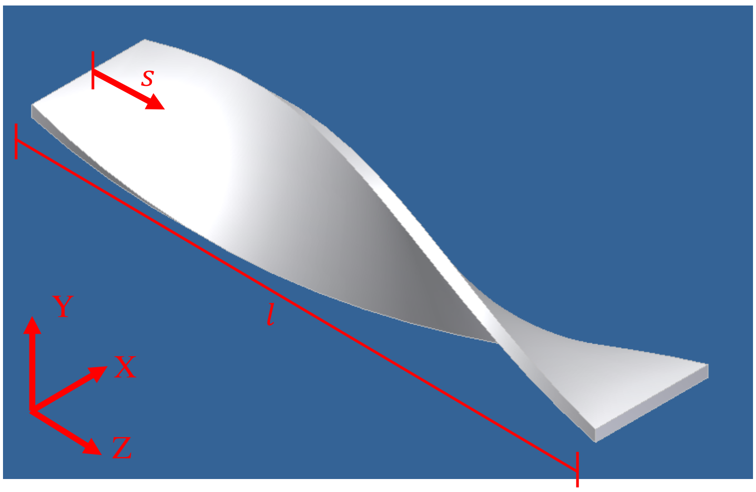


Figura 5.6 - Comprimento do virador e definição de s

➢ $\chi(s) = 0$, pois o eixo central permanece reto na configuração deformada.

Assim, das relações geométricas, tem-se:

$$\kappa_x = 0$$

$$\kappa_y = 0$$

$$\kappa_t = \frac{\pi}{L}$$

Usando as relações geométricas nas equações constitutivas e lembrando que para a primeira etapa, $\kappa_{x0} = \kappa_{y0} = 0$ e $\kappa_{t0} = 0$, virá:

$T = (EA).\varepsilon$	Eq 5.14	$M_x = 0$	Eq 5.17
$Q_x = (GA).\gamma_{zx}$	Eq 5.15	$M_y = 0$	Eq 5.18
$Q_y = (GA).\gamma_{zy}$	Eq 5.16	$M_z = (GJ).\kappa_{t1}$	Eq 5.19

Usando as relações geométricas nas equações constitutivas e lembrando que para a segunda etapa, R2, $\kappa_{x2} = \kappa_{y2} = 0$ e $\kappa_{t2} = \frac{d}{ds_o}\left(\frac{\pi.s_o}{l}\right)$, virá:

$T = (EA).\varepsilon$	Eq 5.20	$M_x = 0$	Eq 5.23
$Q_x = (GA).\gamma_{zx}$	Eq 5.21	$M_y = 0$	Eq 5.24
$Q_y = (GA).\gamma_{zy}$	Eq 5.22	$M_z = (GJ).\kappa_{t2}$	Eq 5.25

Na primeira etapa, de acordo com as simplificações apresentadas, tem-se:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial S_i} - Q_y.k_{ti} = 0 \qquad \text{Eq. 5.26}$$

$$\frac{\partial Q_y}{\partial S_i} + Q_x.k_{ti} = 0 \qquad \text{Eq. 5.27}$$

$$\frac{\partial T}{\partial S_i} = 0 \qquad \text{Eq. 5.28}$$

$$Q_y = 0 \qquad \text{Eq. 5.29}$$

$$Q_x = 0 \qquad \text{Eq. 5.30}$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial S_i} = 0 \qquad \text{Eq. 5.31}$$

Assim, duas das equações de momentos ficam automaticamente satisfeitas e desta forma, duas equações de forças tornam-se $0 = 0$.

Portanto, após simplificar as equações de Clebsh-Kirchhoff-Love, tem-se:

$$\frac{\partial T}{\partial S_i} = 0 \qquad \text{Eq. 5.28}$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial S_i} = 0 \qquad \text{Eq. 5.31}$$

O esforço de tração é constante, porém diferente de zero, pois durante as simplificações também foi adotada a hipótese na primeira etapa que as seções transversais da correia permanecem planas, isto é, não ocorre empenamento das seções transversais. O momento torçor é constante ao longo do virador, entretanto, não-nulo. Este momento é constante devido à hipótese adotada, a qual descreve o ângulo de giro de acordo com uma função linear ao longo do virador. Caso fosse considerada uma variação não linear do ângulo, o momento não seria constante.

Para a segunda etapa, pode-se simplificar as equações de Clebsh-Kirchhoff-Love de maneira que elas de se reduzam para:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial S_i} - Q_y.k_{ti} = 0 \qquad \text{Eq. 5.32}$$

$$\frac{\partial Q_y}{\partial S_i} + Q_x.k_{ti} = 0 \qquad \text{Eq. 5.33}$$

$$\frac{\partial T}{\partial S_i} = 0 \qquad \text{Eq. 5.34}$$

$$Q_y = 0 \qquad \text{Eq. 5.35}$$

$$Q_x = 0 \qquad \text{Eq. 5.36}$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial S_i} = 0 \qquad \text{Eq. 5.37}$$

Portanto, após simplificar as equações de Clebsh-Kirchhoff-Love na segunda etapa, R2, tem-se:

$$\frac{\partial T}{\partial S_i} = 0 \qquad \text{Eq. 5.38}$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial S_i} = 0 \qquad \text{Eq. 5.39}$$

Com isso vê-se que o momento torçor permanece constante na segunda etapa. O esforço de tração, da mesma forma que antes é constante ao longo da correia.

Sabe-se que a correia é formada por cabos de aço uniformemente espaçados no interior da borracha. Agora será estimado o esforço em cada cabo, de maneira que, será considerado que a borracha não transmite esforços, servindo somente como elemento espaçador entre os cabos.

Designa-se S_2 a coordenada curvilínea do eixo central de um dos cabos de aço da correia na configuração deformada final, R2, e S_1 a coordenada curvilínea do eixo central do cabo de aço na configuração R1.

$$\left(\frac{dS_2}{d\theta_2}\right)^2 = \left(\frac{dx_2}{d\theta_2}\right)^2 + \left(\frac{dy_2}{d\theta_2}\right)^2 + \left(\frac{dz_2}{d\theta_2}\right)^2 \qquad \text{Eq. 5.40}$$

$$\left(\frac{dS_2}{d\theta_2}\right)^2 = r_2^2 + \left(\frac{L_2}{\pi}\right)^2 \qquad \text{Eq. 5.41}$$

$$\frac{dS_2}{d\theta_2} = \sqrt{r_2^2 + \left(\frac{L_2}{\pi}\right)^2} \qquad \text{Eq. 5.42}$$

Analogamente,

$$\frac{dS_1}{d\theta_1} = \sqrt{r_1^2 + \left(\frac{L_1}{\pi}\right)^2} \qquad \text{Eq. 5.43}$$

Assim,

$$\frac{dS_2}{d\theta_2}\frac{d\theta_1}{dS_1} = \sqrt{r_2^2 + \left(\frac{L_2}{\pi}\right)^2} \Big/ \sqrt{r_1^2 + \left(\frac{L_1}{\pi}\right)^2} \qquad \text{Eq. 5.44}$$

Em ambas configurações, R2 e R1, a hélice sofre a mesma rotação de 180°. A deformação do eixo central da correia é pequena frente ao comprimento do virador, assim, o passo da hélice é aproximadamente o mesmo nas duas configurações. Logo, por consideração puramente cinemática, admite-se $\theta_1 = \theta_2$.

Desta forma,

$$\frac{dS_2}{dS_1} = \left(\frac{(\pi r_2)^2 + l_2^2}{(\pi r_1)^2 + l_1^2}\right)^{1/2} = 1 + \varepsilon_t \qquad \text{Eq. 5.45}$$

Em que ε_t é o alongamento do eixo central do cabo de aço.

Assim, o esforço de tração em cada cabo de aço da correia pode ser calculado pela expressão a seguir:

$$F_i = (EA).\varepsilon_{ti}$$ Eq. 5.46

O esforço de tração na correia pode ser calculado pela expressão:

$$T_c = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos(\alpha_i)$$ Eq. 5.47

O momento torçor necessário para girar a correia:

$$\mathrm{M_t} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{F_i r_i} \operatorname{sen}(\alpha_\mathrm{i})$$ Eq. 5.48

Em que,

n é o número de cabos de aço no interior da correia.

$\alpha = \alpha(\mathrm{r}, \mathrm{l})$ é o ângulo de hélice do cabo de aço, o qual é função da distância do eixo central da correia e do comprimento do virador.

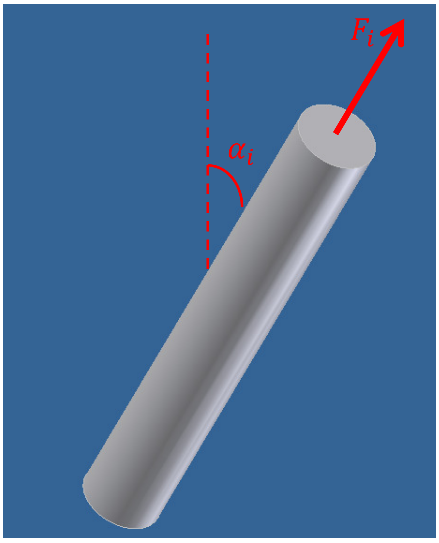


Figura 5.7 - Cabos de aço no interior da correia

Pode-se definir uma função α_i, a qual depende da distância do cabo de aço até o eixo de torção da correia e do comprimento do turnover.

A função α_i pode ser calculada a partir da seguinte expressão:

$$\alpha_\mathrm{i} = \arctan\left(\frac{\pi \mathrm{r_i}}{\mathrm{l}}\right)$$ Eq. 5.49

Através das equações apresentadas anteriormente pode-se determinar o momento torçor e a força de tração na região do turnover.

5.3 Modelo em Elementos Finitos

Neste modelo são apresentados os cabos de aço no interior da borracha, uniformemente espaçados, considerando as propriedades dos dois materiais, diferentemente do modelo 1, que considera as propriedades equivalentes da correia.

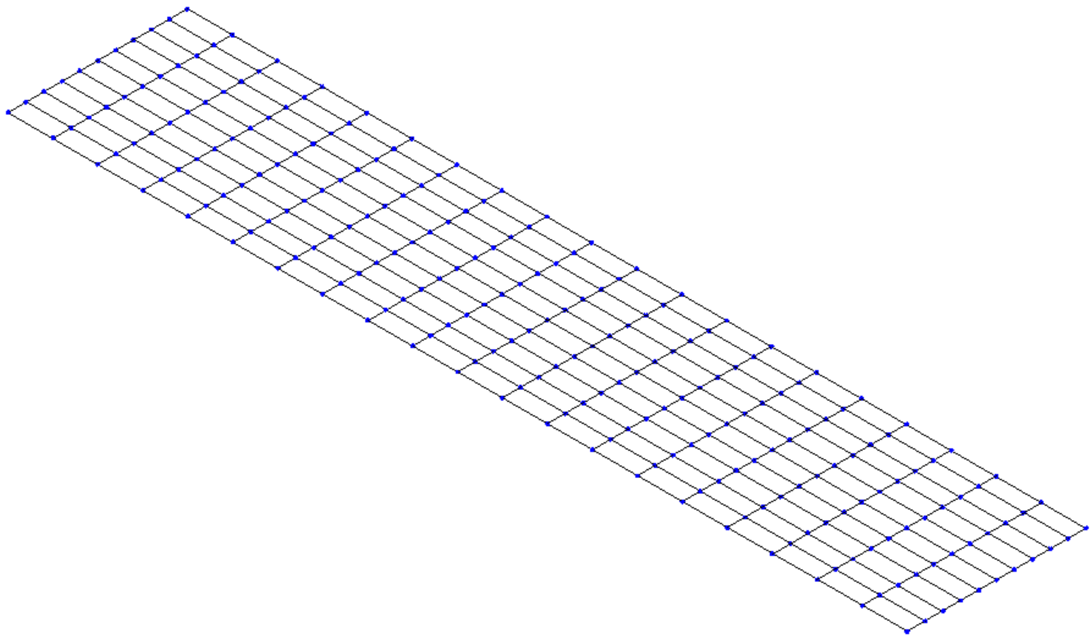


Figura 5.8 - Vista isométrica da correia- Configuração não-deformada

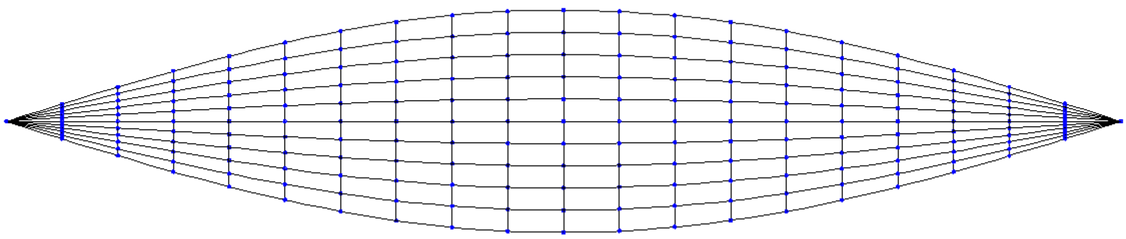


Figura 5.9 – Vista frontal da correia – Configuração deformada

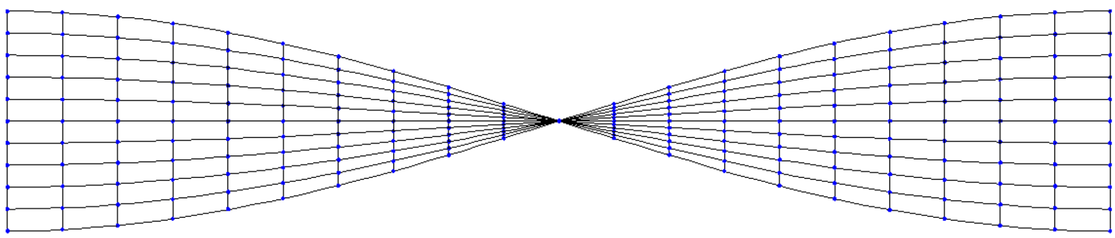


Figura 5.10 – Vista superior da correia – Configuração deformada

Inicialmente, na configuração não-deformada, a correia está plana, sem qualquer carregamento, conforme mostra a Figura 5.8. Na configuração deformada a correia sofre um giro de 180° e um esforço de tração (não representado na figura), como mostra a Figura 5.9 e a Figura 5.10.

No modelo 2 em elementos finitos é utilizada a seguinte configuração para formação da malha: primeiramente, definiu-se os nós, depois os elementos dos cabos de aço (modelados por elementos unidimensionais), definiu-se os elementos que representam a borracha (modelada por elementos bidimensionais quadriláteros de espessura constante).

O modelo foi montado alternando cabos de aço e borracha, como mostra a

Figura 5.11. Para entendimento da figura é importante saber que os nós são representados pelos pontos em azul. Os cabos de aço são as linhas em vermelho. CBEAM é o comando utilizado na linguagem de elementos finitos para identificar elementos unidimensionais, no caso os cabos de aço. CQUAD4 é o comando que identifica elementos bidimensionais, no caso a borracha.

É importante ressaltar que os nós que definem os elementos de cabos são os mesmos que definem os elementos de borracha, desta forma, fica assegurado que a borracha está completamente aderida ao cabo.

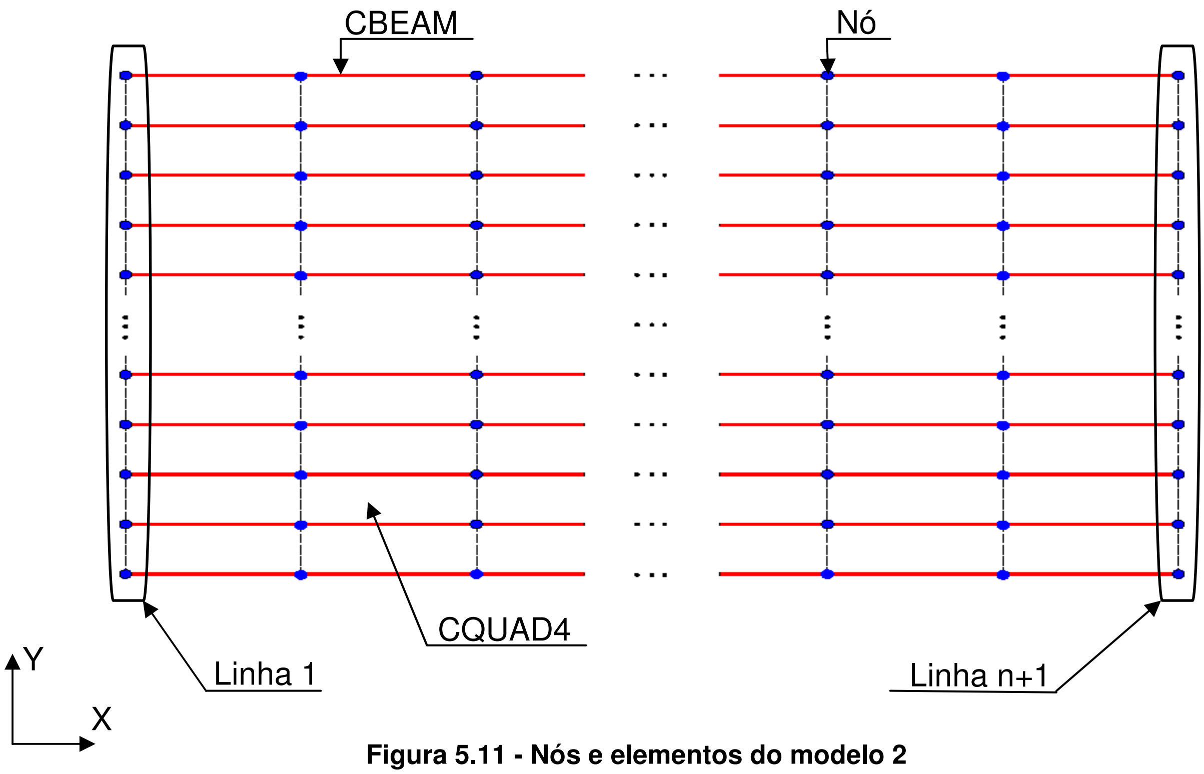


Figura 5.11 - Nós e elementos do modelo 2

Da mesma forma que nos modelos 1, a linha 1 possui restrição de movimento nas três direções de translação e em duas direções de rotação, então, permite-se rotação em torno do eixo y. A linha n+1 de nós possui restrição de translação somente na direção y e z, permitindo rotação somente em y. O esforço de tração é aplicado em todos os nós da linha n+1.

As características aplicadas ao modelo são: Números de cabos = 23; Largura da correia = 1200 mm; Comprimento do virador = 36000 mm; Força de tração em cada cabo de aço = 6438,0 N; Número de nós = 8303; Número de elementos que modelam a borracha = 7920; Número de elementos que modelam os cabos de aço = 8280.

Tabela 5.1 - Propriedades dos materiais do modelo

Propriedades dos Materiais		
	Borracha	Cabos de Aço
Módulo de Elasticidade	2,78 MPa	210 GPa
Módulo de Cisalhamento	6,0 MPa	80 GPa
Densidade	1190 kg/m³	7850 kg/m³
Coeficiente de Poisson	0,47	0,30
Diâmetro	-	10 mm
Espessura	22 mm	-

Para o modelo são considerados os efeitos não-lineares e grandes deslocamentos dos elementos. São realizadas duas simulações, sendo a primeira considerando somente o esforço de tração na borracha, sem peso próprio.

Resultados da simulação computacional:

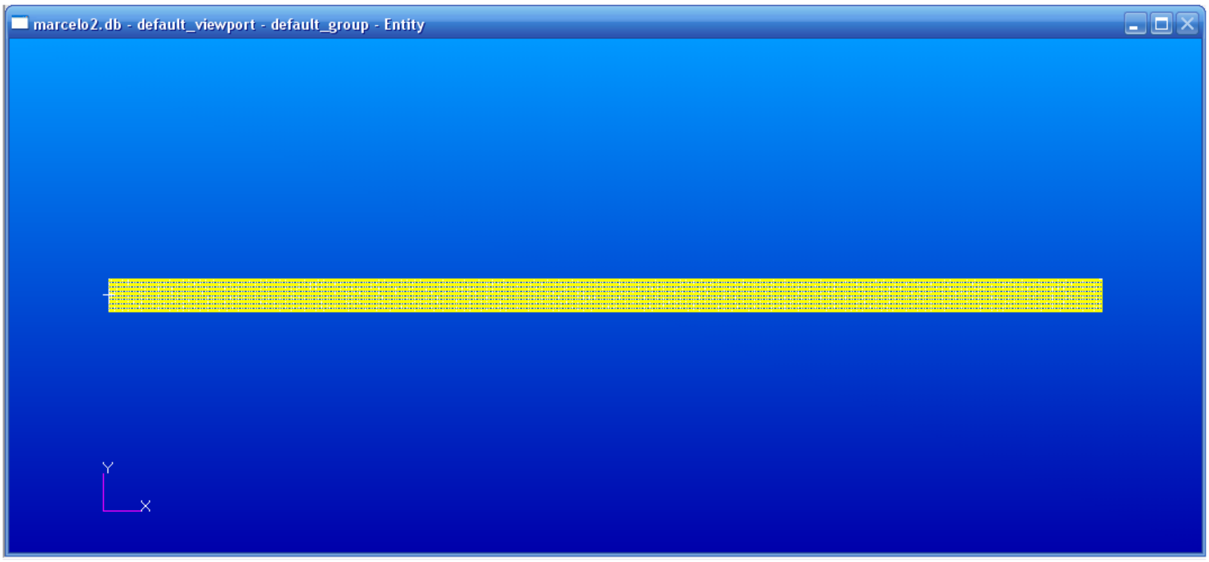


Figura 5.12 - Malha do modelo em MSC Patran

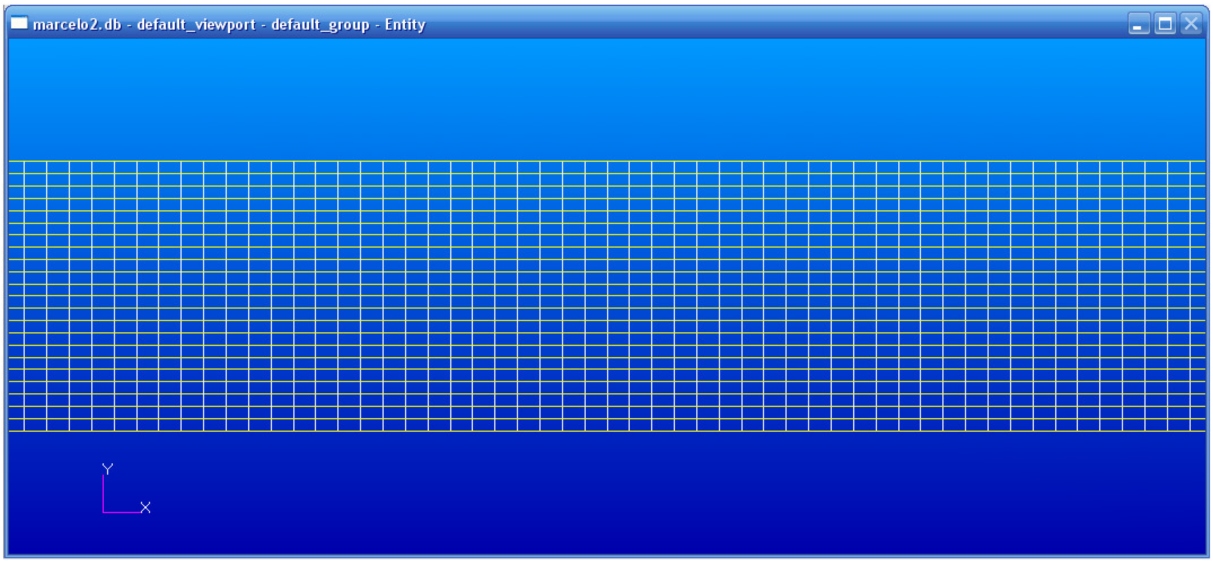


Figura 5.13 - Malha do modelo em MSC Patran. (Ampliação)

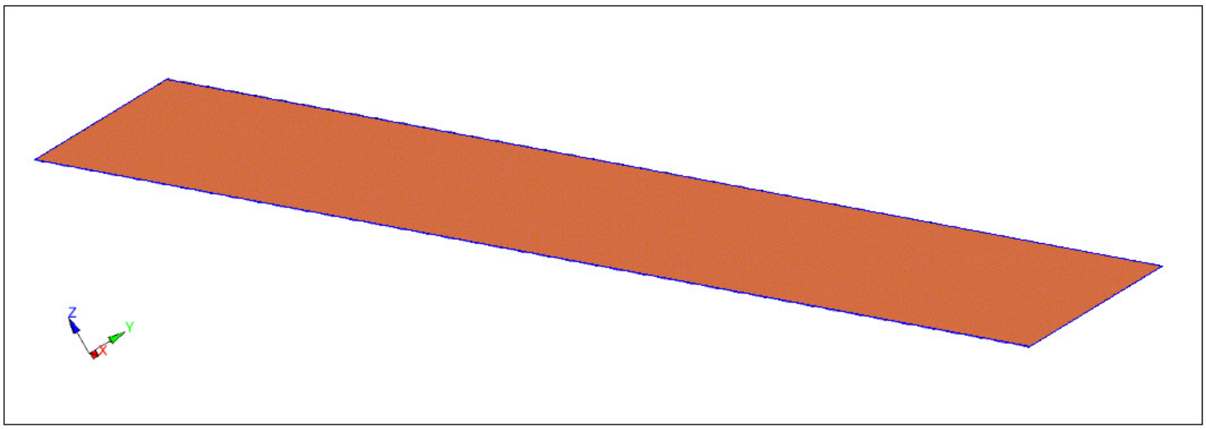


Figura 5.14 - Configuração inicial. Não-deformada

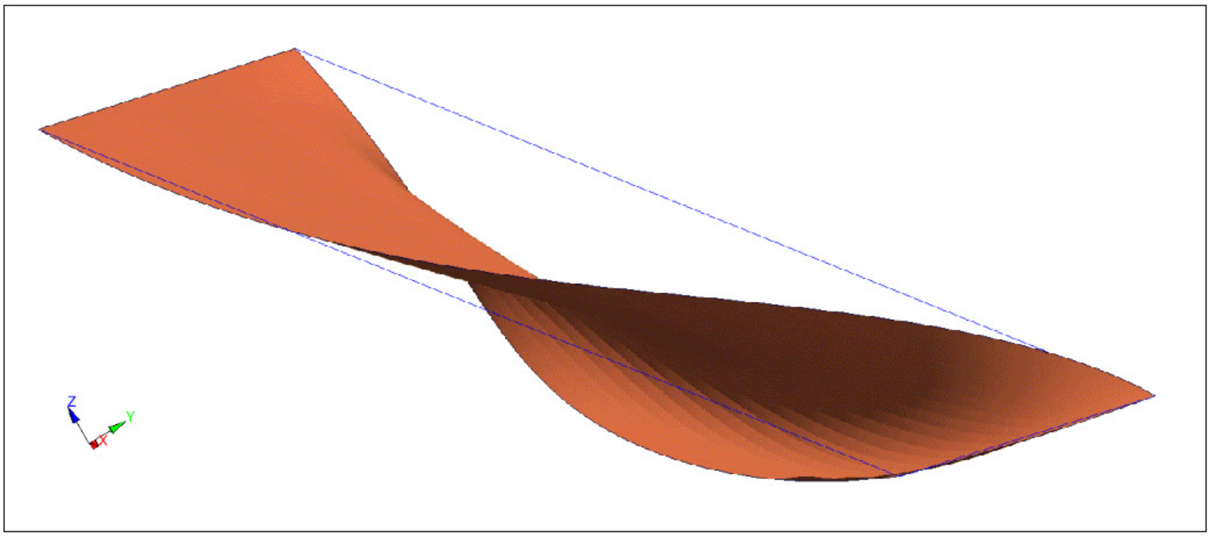


Figura 5.15 - Configuração final. Deformada

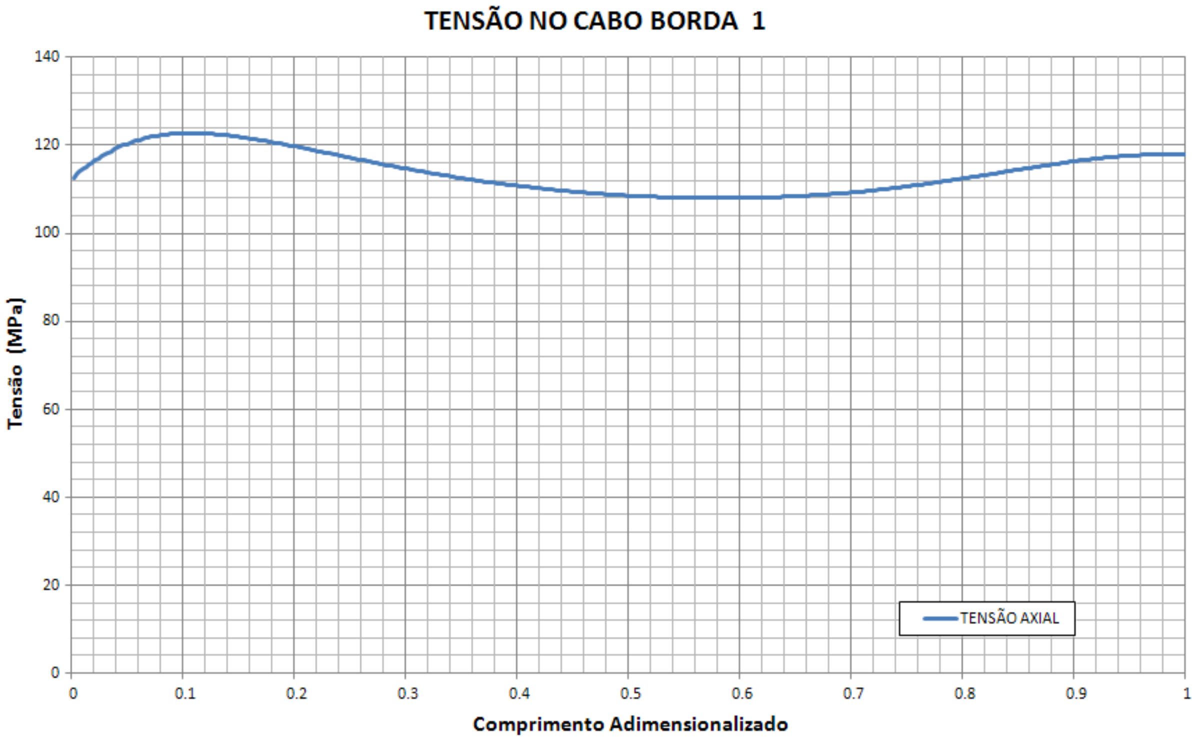


Figura 5.16 - Tensão no ponto médio da seção transversal do cabo de aço de um dos lados da correia.

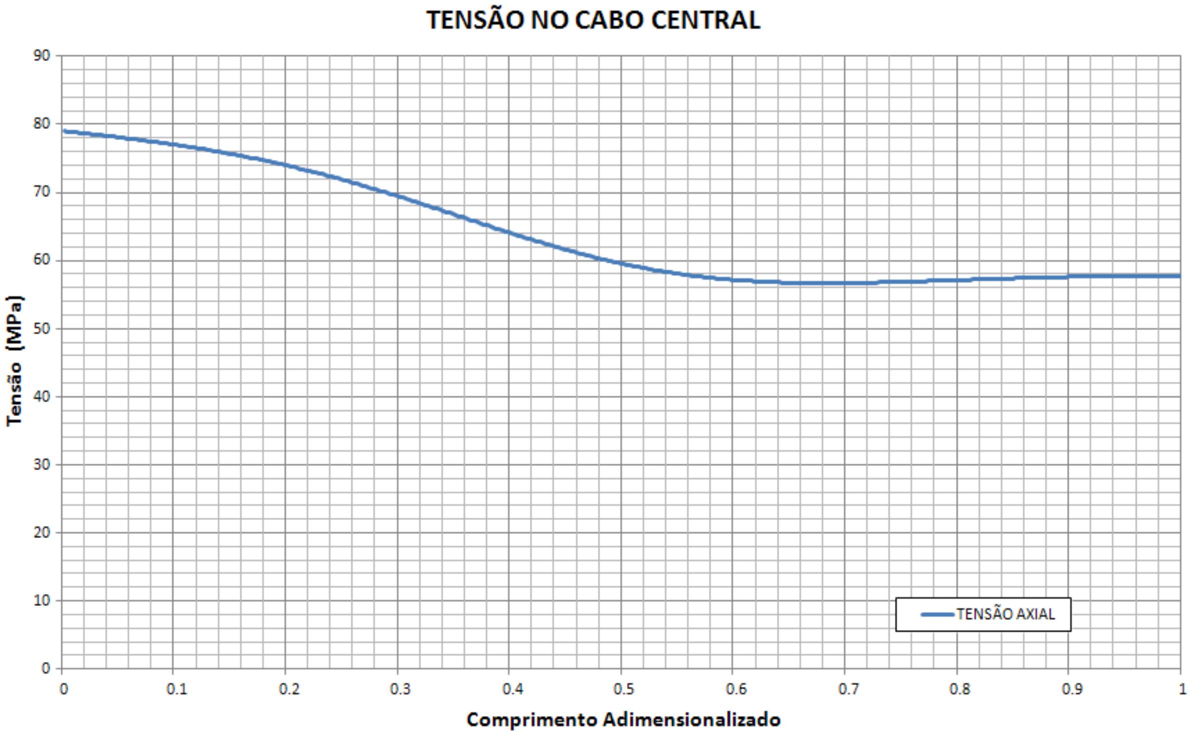


Figura 5.17- Tensão no ponto médio da seção transversal do cabo de aço central da correia.

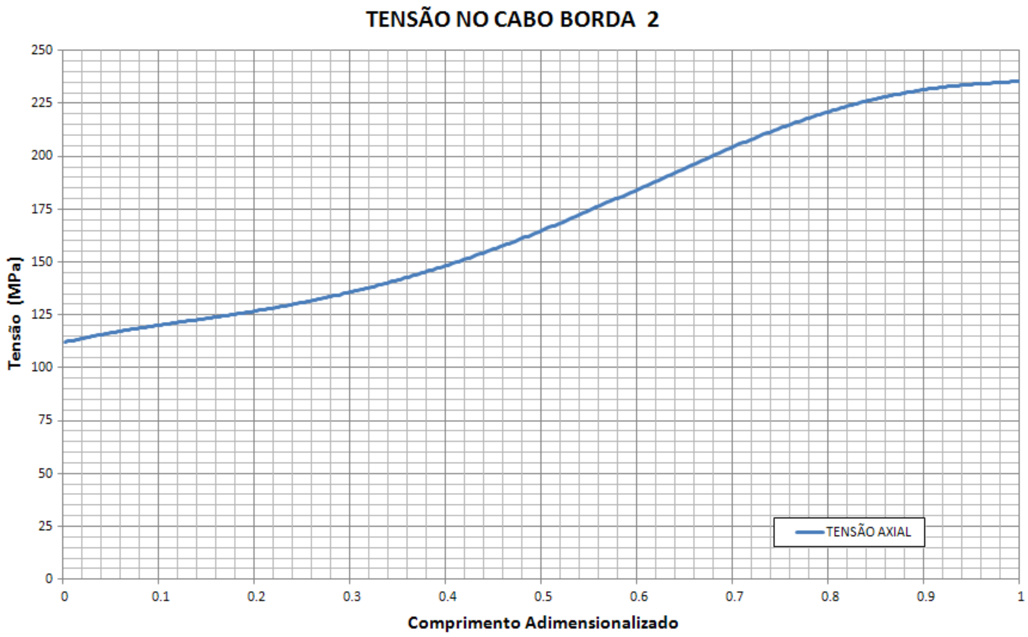


Figura 5.18 - Tensão no ponto médio da seção transversal do cabo de aço do outro lado da correia.

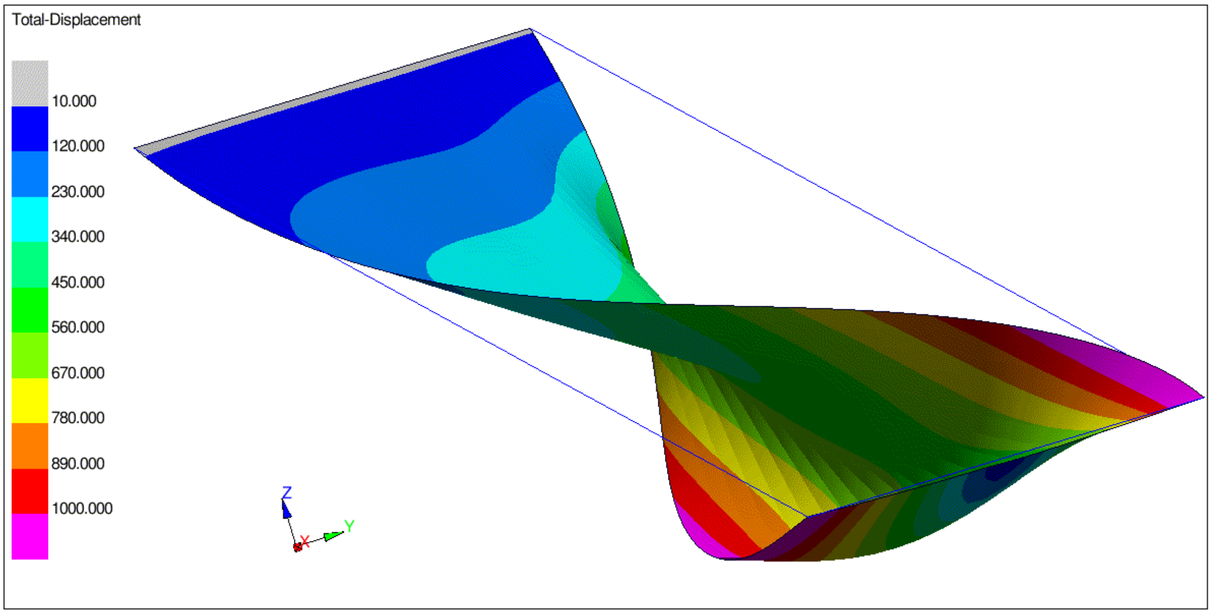


Figura 5.19- Deslocamento total dos elementos

É possível observar pelas Figuras 5.16, 5.17 e 5.18 que as tensões nos cabos de aço da borda da correia são realmente maiores que a tensão no cabo central.

Pela Figura 5.19, vê-se que o deslocamento do ponto médio do eixo central da correia está entre 340 e 450 mm, sendo este um valor razoável, uma vez que, este intervalo contempla o valor referência para SAG, que é de 1% do comprimento total do virador. Lembrando que o virador modelado possui 36000 mm de comprimento.

Para o modelo de elementos finitos apresentado nas páginas anteriores foram feitas algumas aproximações a fim de que pudessem ser obtidos alguns resultados da simulação, pois inicialmente a correia foi modelada com 87 cabos de aço (real) e elementos de borracha entre estes cabos, mas depois este modelo teve de ser revisado.

Na simulação, a tração e flexão foram aplicadas no modelo, sendo este calculado normalmente. É importante ressaltar que este modelo estuda apenas a tração-torção, mas a flexão pode ser estudada em conjunto também. A diferença entre o modelo de tração-torção e o modelo tração-torção-flexão é a aceleração gravidade que pode ser imposta igual a zero para o primeiro modelo.

Após aplicar o carregamento de tração (eventualmente a flexão), o modelo impõe pequenos giros na última linha de nós ao redor do eixo central da correia até que o giro de 180° seja completado. Entretanto, quando foi feita a simulação do modelo com 87 cabos de aço verificou-se que o cálculo divergia, não sendo possível obter qualquer resultado. Assim, o modelo foi revisado para uma situação equivalente com 23 cabos de aço. A geometria e o carregamento foram mantidos. Com isso, foi possível obter os resultados apresentados nesta seção.

Para facilitar a simulação foi colocada uma barra completamente rígida na última linha de nós para facilitar a convergência do modelo.

6. DETERMINAÇÃO DE PROPRIEDADES MECÂNICAS DE MATERIAIS COMPOSTOS

A correia é um elemento formado por uma matriz de borracha reforçada por cabos de aço no sentido longitudinal da correia, sendo este o sentido preferencial de carregamento.

Os modelos apresentados no presente trabalho consideram o Módulo de Elasticidade , E, e o módulo de elasticidade cisalhante, G, como se a correia fosse um elemento homogêneo, mas na realidade trata-se de um material composto, o qual apresenta claramente duas fases, a borracha e os cabos de aço.

A fim de determinar as propriedades equivalentes da correia foi usada metodologia apresentada em Mendonça, 2005 para todas as seções deste capítulo.

A seguir é apresentada, de forma simplificada, a metodologia e algumas equações para o cálculo das propriedades equivalentes.

As propriedades macroscópicas de um material compósito, como resistência e comportamento elástico, dependem das propriedades individuais dos materiais que o compõem, além da orientação destes materiais. Após a construção do material composto, é possível determinar todas as propriedades relevantes através de ensaios mecânicos. Porém, na etapa de projeto, estes ensaios são obviamente inviáveis, além da necessidade de dispor de ferramentas de cálculo para a estimativa dessas propriedades.

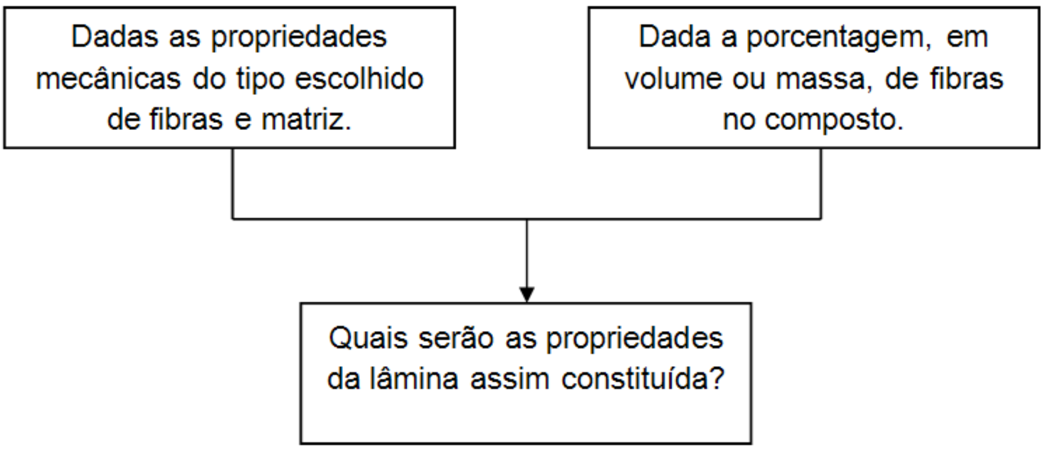


Figura 6.1 -Projeto de um material composto

6.1 Propriedades mecânicas

As propriedades mecânicas de uma lâmina são valores identificados em ensaios nos quais o estado de tensões aplicado seja simples, de preferência uniaxial, de maneira que a relação tensão-deformação também seja simples, envolvendo apenas um parâmetro, como ocorre numa relação linear.

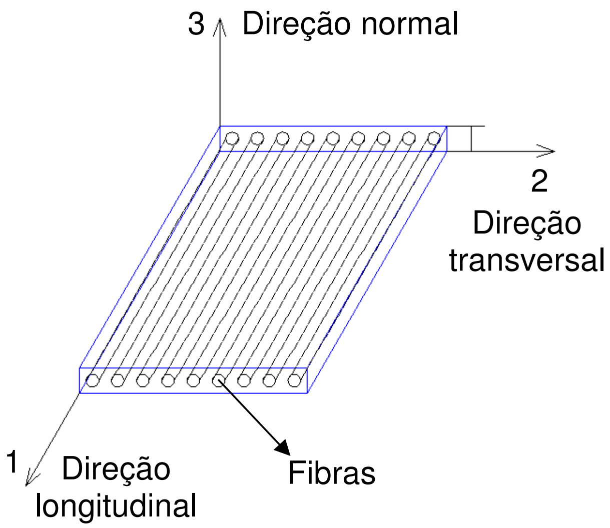


Figura 6.2 – Direções principais de propriedades mecânicas em uma lâmina

A Figura 6.2 mostra os elementos principais de uma lâmina. A direção das fibras define as três direções principais de propriedades da lâmina, que são as direções tomadas como referência nas definições das propriedades mecânicas, tensões, deformações e demais cálculos básicos. A direção principal 1 é a direção longitudinal, indicada pelo eixo 1. A direção principal 2, transversal à fibra, é indicada pelo eixo 2.

Considera-se, para o desenvolvimento que segue, um elemento de dimensões diferenciais de uma lâmina, mostrado na Figura 6.3, submetido a uma tensão normal na direção longitudinal 1, σ_1, e a tensões nulas nas demais direções.

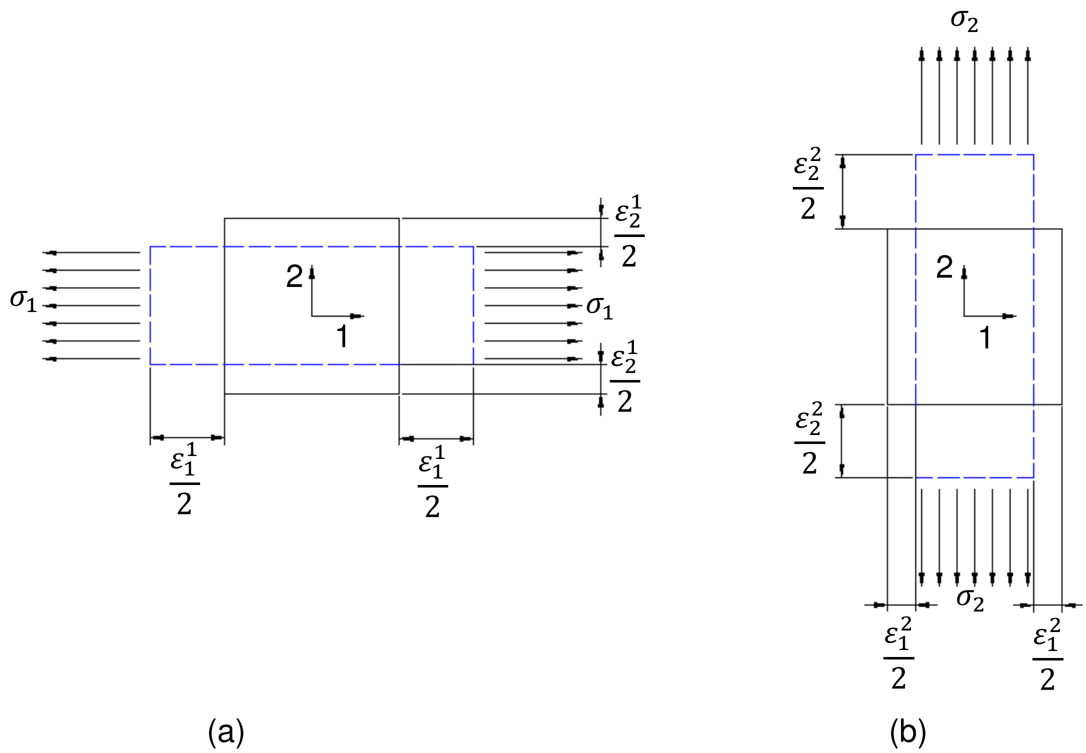


Figura 6.3 – Tensões e deformações normais nas direções 1 e 2

Observa-se que σ_1 provoca duas componentes de deformação: ε_1^1 na direção 1 (direção do carregamento) e ε_2^1 na direção 2, perpendicular à direção de carregamento. ε_2^1 é proveniente do efeito de Poisson.

Na nomenclatura usada para as deformações, o índice superior de ε indica a direção do carregamento e o índice inferior indica a direção de deformação; assim, define-se:

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1^1} \quad \text{Eq. 6.1}$$

$$\upsilon_{12} = -\frac{\varepsilon_2^1}{\varepsilon_1^1} \quad \text{Eq. 6.2}$$

Em que E_1 é o módulo de elasticidade longitudinal na direção principal 1 da lâmina e υ_{21}é o coeficiente de Poisson maior, obtido quando a carga é aplicada somente na direção 1.

Observa-se que quando a tensão é aplicada na direção 2, também há deformações nas duas direções, ε_2^2 e ε_1^2; a primeira deformação é na direção da carga e a segunda, na direção perpendicular a ela. Define-se então:

$$E_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2^2} \qquad \text{Eq. 6.3}$$

$$\upsilon_{21} = -\frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2^2} \qquad \text{Eq. 6.4}$$

Em que E_2 é o módulo de elasticidade na direção 2, e υ_{21} é o coeficiente de Poisson menor, obtido quando a carga é aplicada somente na direção 2.

Para os materiais compostos em geral, $E_1 \neq E_2$ e $\upsilon_{12} \neq \upsilon_{21}$ enquanto nos materiais isotrópicos estes valores são idênticos.

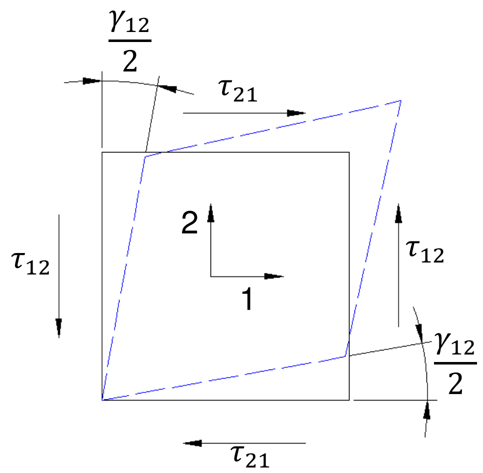


Figura 6.4 - Tensão e deformação cisalhante

A Figura 6.4 mostra os elementos básicos num ensaio de cisalhamento: a tensão cisalhante τ_{21} aplicada nas direções principais, e a deformação cisalhante γ_{12}. Se estes valores podem ser aplicados e medidos no ensaio de um corpo de prova, pode-se obter a propriedade:

$$G_{12} = \frac{\tau_{21}}{\gamma_{12}} \qquad \text{Eq. 6.5}$$

Em que G_{12} é o módulo de elasticidade cisalhante da lâmina em relação aos eixos principais do material.

6.2 Frações de massa e de volume

O principal parâmetro indicativo da constituição da lâmina é a proporção relativa entre fibra e matriz.

A seguir são apresentadas algumas definições e relações básicas, definindo primeiramente as seguintes quantidades:

v_c é o volume do composto;

v_f é o volume de fibras;

v_v é o volume de vazios dentro do composto;

v_m é o volume de matriz;

m_c é a massa do composto;

m_f é a massa de fibra;

m_m é a massa de matriz.

Tem-se, então, as seguintes relações:

$$v_c = v_f + v_m + v_v \qquad \text{Eq. 6.6}$$

$$m_c = m_f + m_m \qquad \text{Eq. 6.7}$$

Definem-se V_f e V_m como as frações volumétricas de fibras e de matriz, M_f e M_m como as respectivas frações de massa:

$$V_f = \frac{v_f}{v_c},\ V_m = \frac{v_m}{v_c},\ V_v = \frac{v_v}{v_c},\ M_f = \frac{m_f}{m_c} \text{ e } M_m = \frac{m_m}{m_c} \qquad \text{Eqs. 6.8, 6.9, 6.10, 6.11}$$

Definem-se ainda ρ_c, ρ_f e ρ_m como a densidade (massa/volume) do composto, das fibras e da matriz, respectivamente. Com essas definições pode-se escrever:

$$\rho_c . v_c = \rho_f . v_f + \rho_m . v_m \qquad \text{Eq. 6.12}$$

6.3 Módulo e resistência longitudinal à tração

Considera-se, para o desenvolvimento que segue, que as fibras têm propriedades e diâmetros uniformes, são contínuas, perfeitamente paralelas e perfeitamente aderidas a matriz.

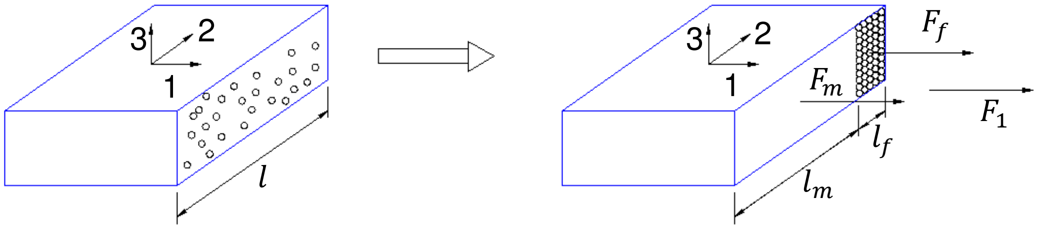


Figura 6.5 - Forças suportadas pelas fibras, Ff, pela matriz, Fm e pelo composto, F1

A força total transmitida pelo segmento de lâmina composta é F_1. Parte dessa força é suportada pelas fibras, F_f, e parte pela matriz, F_m, de forma que:

$$F_1 = F_m + F_f \qquad \text{Eq. 6.13}$$

Essas forças podem ser expressas em termos das tensões e respectivas áreas onde elas atuam, A_1, A_f e A_m:

$$F_1 = \sigma_1 . A_1 = \sigma_f . A_f + \sigma_m . A_m \qquad \text{Eq. 6.14}$$

Considerando que, $V_f = A_f / A_1$ e $V_m = A_m / A_1$, dividindo a expressão acima por A_1, obtem-se:

$$\sigma_1 = \sigma_f . V_f + \sigma_m . V_m \qquad \text{Eq. 6.15}$$

Uma vez que não há deslizamento entre fibra e matriz, as deformações da fibra, da matriz e do composto são idênticas, isto é, $\varepsilon_c = \varepsilon_m = \varepsilon_f$.

Assim, pode-se diferenciar a última equação em relação a deformação, obtendo:

$$\frac{d\sigma_1}{d\varepsilon} = \frac{d\sigma_f}{d\varepsilon} . V_f + \frac{d\sigma_m}{d\varepsilon} . V_m \qquad \text{Eq. 6.16}$$

Finalmente,

$$E_1 = E_f . V_f + E_m . V_m \qquad \text{Eq. 6.17}$$

6.4 Módulo e resistência transversal à tração

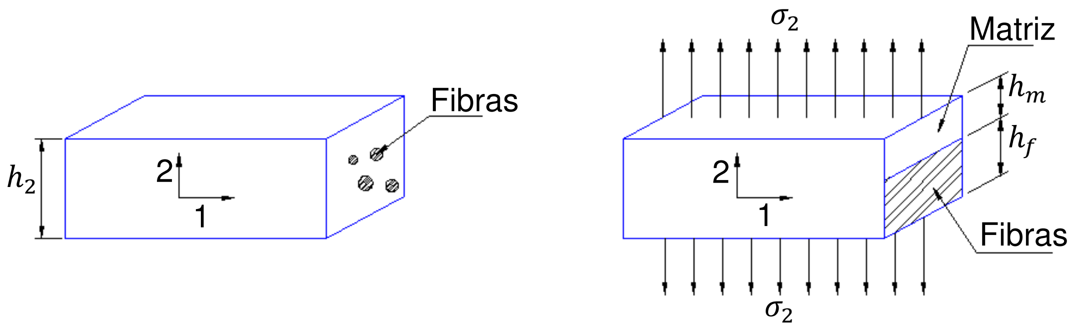


Figura 6.6 - Modelo para obtenção de propriedades transversais dos materiais compostos unidirecionais.

Considera-se agora que o composto seja carregado apenas na direção transversal 2, perpendicular à fibra. O primeiro modelo a ser descrito é o mais simplificado disponível, conforme Figura 6.6, o qual considera que a massa de fibras possa ser reunida em camadas compactas ao lado da camada da matriz. Cada camada é perpendicular à direção de carga e oferece a mesma área para suportá-la, de forma que cada camada suportará a mesma carga e terá a mesma tensão, isto é, $\sigma_c = \sigma_m = \sigma_f$. O elongamento total na direção 2, δ_2, será a soma dos elongamentos da camada de matriz, δ_m, e da fibra, δ_f, ou seja:

$$\delta_2 = \delta_f + \delta_m \qquad \text{Eq. 6.18}$$

Se as espessuras do composto, da fibra e da matriz são h_2, h_f e h_m, e as deformações são ε_2, ε_f e ε_m, respectivamente, tem-se:

$$\varepsilon_2 . h_2 = \varepsilon_f . h_f + \varepsilon_m . h_m \qquad \text{Eq. 6.19}$$

Identifica-se as frações de volume como $V_f = h_f / h_2$ e $V_m = h_m / h_2$. Então,

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_f . V_f + \varepsilon_m . V_m \qquad \text{Eq. 6.20}$$

Considerando que a matriz e a fibra se comportem de forma linear, pode-se fazer:

$$\frac{\sigma_2}{E_2} = \frac{\sigma_m}{E_m} . V_m + \frac{\sigma_f}{E_f} . V_f \qquad \text{Eq. 6.21}$$

Uma vez que as tensões são idênticas, obtém-se que:

$$\frac{1}{E_2} = \frac{V_m}{E_m} + \frac{V_f}{E_f} \qquad \text{Eq. 6.22}$$

Uma observação mais detalhada mostra que o modelo que levou à equação anterior é demasiadamente simplificado. Na realidade, nenhuma seção da lâmina é constituída só de fibra ou só de matriz como implicado. Assim, a hipótese de que as tensões nas fibras são iguais à da matriz não é correta.

Um modelo um pouco mais elaborado consiste em tomar uma porção de matriz em volta da fibra como apresentado na Figura 6.7.

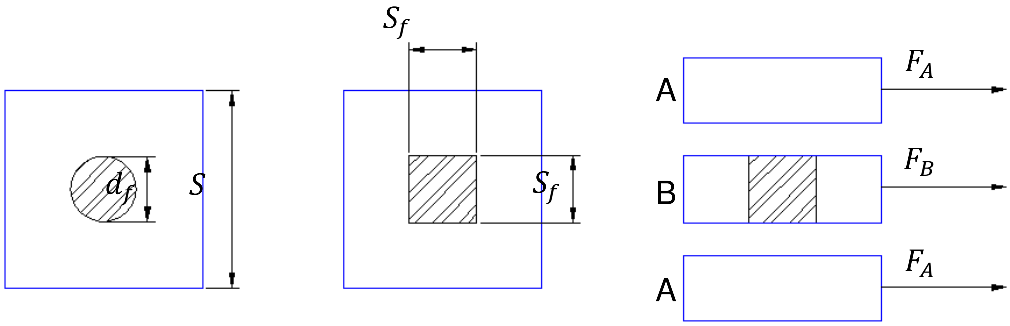


Figura 6.7 - Definição e divisão de um volume representativo

O elemento da Figura 6.7 é um volume representativo da lâmina. A fibra é convertida numa fibra de seção quadrada de mesma área com lado igual a $s_f = \sqrt{\frac{\pi}{4}}.d_f$.

Dado o volume relativo de fibras V_f, o tamanho s do volume representativo é obtido a partir da seguinte equação, para uma fibra de seção transversal circular:

$$s = \sqrt{\frac{\pi}{4.V_f}}.d_f \qquad \text{Eq. 6.23}$$

Uma vez que V_f é igual a $\frac{\pi.d^2}{4.s^2}$.

Neste modelo o volume é dividido em três fatias, A, B e A, como mostrado na Figura 6.7. Observando que a fatia B, tracionada na direção indicada, é composta por elementos de rigidez em série, que correspondem exatamente à situação vista no modelo simplificado da Figura 6.6, então a rigidez da fatia B pode ser estimada como:

$$\frac{1}{E_B} = \frac{1}{E_f}\frac{s_f}{s} + \frac{1}{E_m}.\frac{s_m}{s} \qquad \text{Eq. 6.24}$$

Em que $\frac{s_f}{s}$ e $\frac{s_m}{s}$ são os volumes relativos de fibra e de matrizna fatia B, e $s_m = s - s_f$.

É de fácil demonstração que:

$$\frac{s_f}{s} = \sqrt{V_f} \quad \text{e} \qquad \frac{s_m}{s} = 1 - \sqrt{V_f} \qquad \text{Eq. 6.25 e 6.26}$$

Finalmente, determina-se a rigidez efetiva da fatia B:

$$E_B = \frac{E_m}{1-\sqrt{V_f}\left(1-{E_m}/{E_f}\right)} \qquad \text{Eq. 6.27}$$

A rigidez do conjunto A e B é obtida, com boa precisão, através da equação:

$$E_2 = E_B.\frac{s_f}{s} + E_m.\frac{s_m}{s} \qquad \text{Eq. 6.28}$$

Substituindo a rigidez de B,

$$E_2 = E_m\left[\left(1-\sqrt{V_f}\right) + \frac{\sqrt{V_f}}{1-\sqrt{V_f}\left(1-{E_m}/{E_f}\right)}\right] \qquad \text{Eq. 6.29}$$

6.5 Módulo de elasticidade cisalhante G_{12}

Para obter uma estimativa para o módulo de elasticidade cisalhante G_{12} pode-se usar um procedimento de resistência dos materiais semelhante àquele usado inicialmente na estimativa de E_2, mas da mesma forma encontra-se resultados pouco precisos.

Uma estimativa mais precisa é proveniente da aplicação do procedimento semi-analítico comentado na seção 3.4.2 de Mendonça, 2005, que resulta:

$$\frac{G_{12}}{G_m} = \frac{1+\zeta.\eta.V_f}{1-\eta.V_f} \qquad \text{Eq. 6.30}$$

Com,

$$\eta = \frac{{G_f}/{G_m}-1}{{G_f}/{G_m}+\zeta} \qquad \text{Eq. 6.31}$$

O valor sugerido, em Mendonça, 2005, para ζ, caso o composto possua fibras de seção circular em arranjo quadrado, como na Figura 6.8, foi $\zeta = 1$.

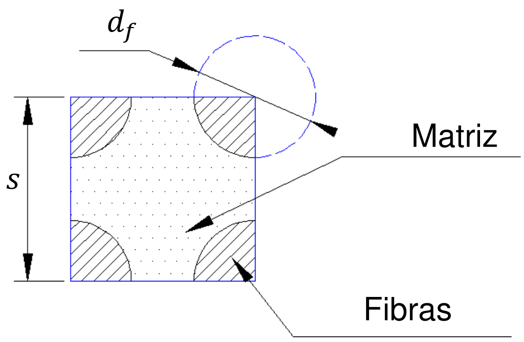


Figura 6.8 – Representação idealizada de disposição de fibras de seções circulares em arranjos quadrados.

6.6 Coeficientes de Poisson

Quando se aplica carga na direção 1 da lâmina, usa-se a hipótese de que as deformações na fibra e na matriz são idênticas, isto é, $\varepsilon_f = \varepsilon_m = \varepsilon_1$ na direção 1. Já na direção 2, as deformações provenientes de σ_1, são distintas, dadas por:

$$\varepsilon_{2m} = -\upsilon_m . \varepsilon_1 \qquad \text{e} \qquad \varepsilon_{2f} = -\upsilon_f . \varepsilon_1$$

Em que, υ_m e υ_f são os coeficientes da fibra e da matriz.

Para um comprimento representativo L da lâmina na direção 2, as parcelas de fibras e da matriz perfazem comprimentos L_f e L_m, as deformações transversais sofridas são:

$$\varepsilon_{2m} = \frac{\Delta_{2m}}{L_m} = -\upsilon_m . \varepsilon_1 \qquad \text{e} \qquad \varepsilon_{2f} = \frac{\Delta_{2f}}{L_m} = -\upsilon_f . \varepsilon_1$$

Em que, Δ_{2m} e Δ_{2f} são as variações de comprimento.

Assim,

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta_{2m} + \Delta_{2f}}{L_m} = \frac{-\upsilon_m . \varepsilon_1 . L_m - \upsilon_f . \varepsilon_2 . L_m}{L} \qquad \text{Eq. 6.32}$$

Colocando ε_1 em evidencia e observando que, por definição, $\upsilon_{12} = {}^{-\varepsilon_2}/_{\varepsilon_1}$.

Lembrando que $\upsilon_{12} = \upsilon_m . V_m + \upsilon_f . V_f$.

$$\varepsilon_2 = -\varepsilon_1 . (\upsilon_m . V_m + \upsilon_f . V_f) \qquad \text{Eq. 6.33}$$

Pela teoria da elasticidade,

$$\upsilon_{21} = \frac{E_2}{E_1}\upsilon_{12} \qquad \text{Eq. 6.33}$$

7. ESTUDO DE CASO/ COMPARAÇÕES ENTRE MODELOS

No presente capítulo serão aplicadas as fórmulas obtidas no modelo algébrico apresentado no capítulo 5 em um transportador de correia real.

A Tabela 7.1 mostra algumas propriedades da correia utilizada no projeto em questão.

Tabela 7.1 - Dados da Correia

DADOS DA CORREIA	
Carcaça	ST-4500
Fabricante	Goodyear
Largura	2200 mm
Tipo de Revestimento	Stacker
Módulo de Elasticidade	324 kN/mm[1]
Espessura da correia	31,0 mm
Número de Cabos de Aço	103 cabos
Ruptura dos Cabos de Aço	96,5 kN
Construção do Cabo de Aço	7 x 19
Diâmetro do Cabo de Aço	10,0 mm
Distância entre Cabos de Aço	20,5 mm
Massa linear da correia	120,60 kg/m

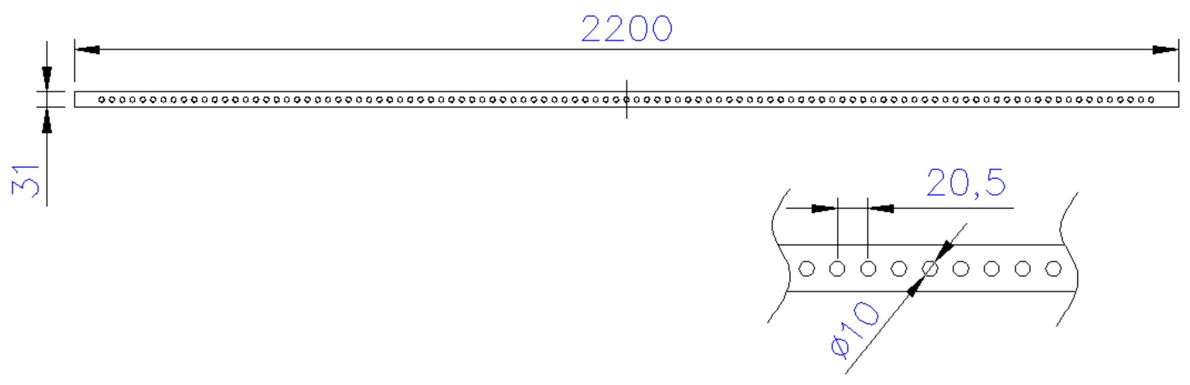


Figura 7.1 - Seção transversal da correia – Dimensões em milímetros

[1] O módulo de elasticidade normalmente é dado em MPa , mas na literatura técnica de transportadores de correia, o módulo de elasticidade significa a carga admissível da correia por unidade de comprimento. Por exemplo, para os dados apresentados na tabela 7.1, o esforço de tração admissível é 712800 kN.

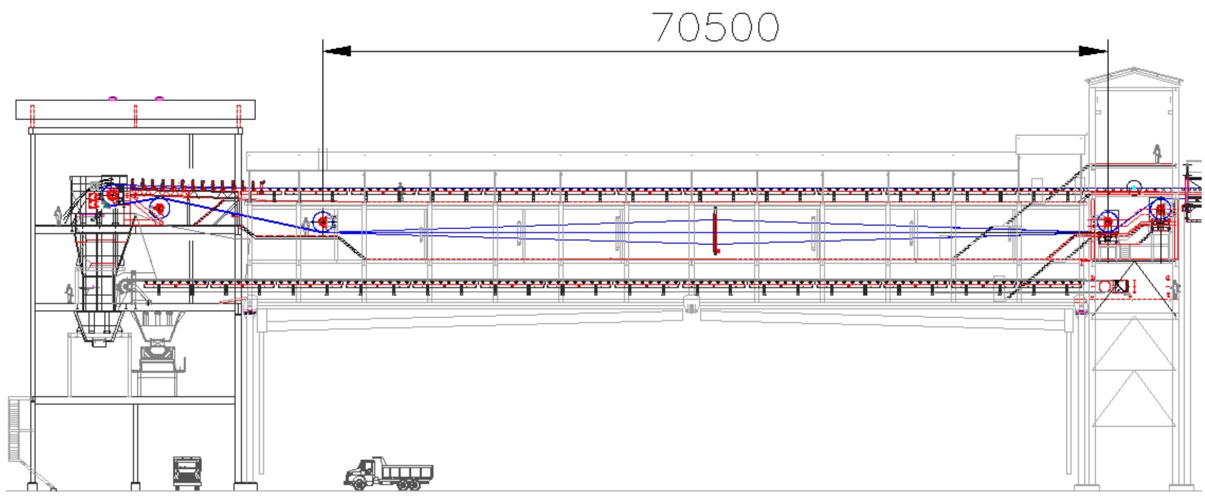


Figura 7.2 - *Turnover* em estudo - Dimensão em milímetros

A Tabela 7.2 mostra algumas propriedades do transportador em questão.

Tabela 7.2 - Dados do transportador

DADOS DO TRANSPORTADOR	
Comprimento horizontal	1783,3 m
Elevação	18,7 m
Capacidade de Projeto	20000 ton/h
Velocidade de Correia	4,3 m/s
Potência Instalada	4 motores x 1500 cv = 6000 cv
Força de tração no *turnover* estudado	922 kN
Comprimento do *turnover*	70,5 m

Tração e Torção

Lembrando as equações obtidas do modelo algébrico:

$$\textit{Força no cabo de aço} \Rightarrow \mathrm{F_i} = (\mathrm{E.A}).\varepsilon_{\mathrm{t_i}}$$

$$\textit{Forca de tração na correia} \Rightarrow T_c = \sum_{i=1}^{n} F_i.\cos(\alpha_i)$$

$$\textit{Momento torçor na correia} \Rightarrow M_t = \sum_{i=1}^{n} F_i.r_i.\sin(\alpha_i)$$

$$\hat{A}ngulo\ de\ h\acute{e}lice\ \Rightarrow\ \alpha_i = arctan\left(\frac{\pi . r_i}{L}\right)$$

No ANEXO E é possível encontrar a tabela com cálculos realizados.

Os gráficos a seguir são obtidos a partir do modelo matemático apresentado no capítulo 5:

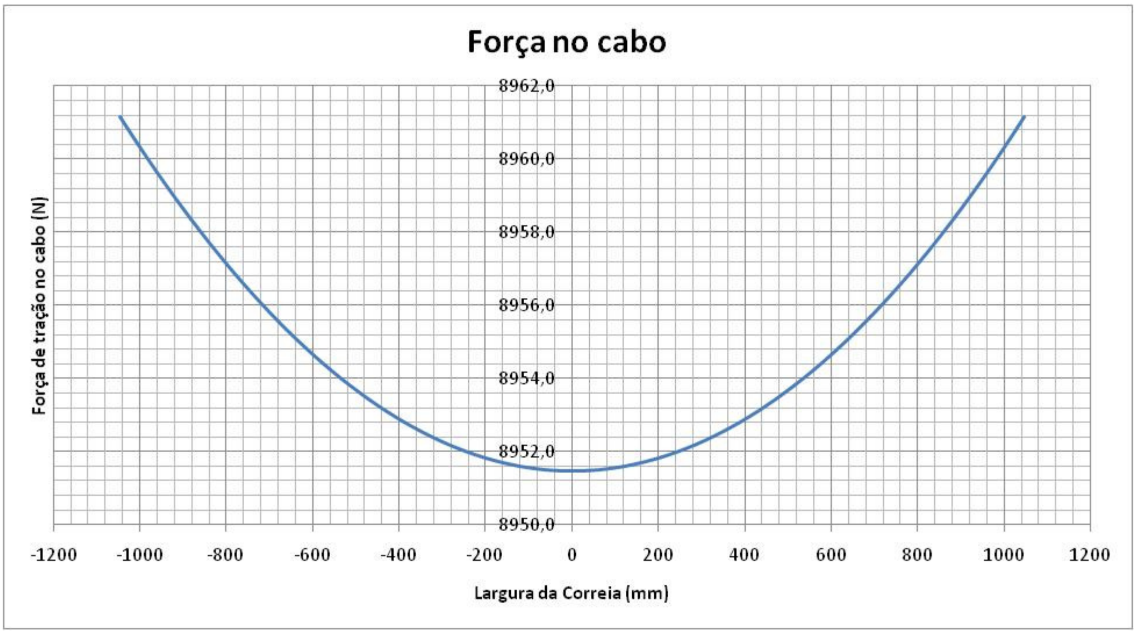


Gráfico 7.1 - Forca no cabo de aço em função da posição relativa ao centro da correia

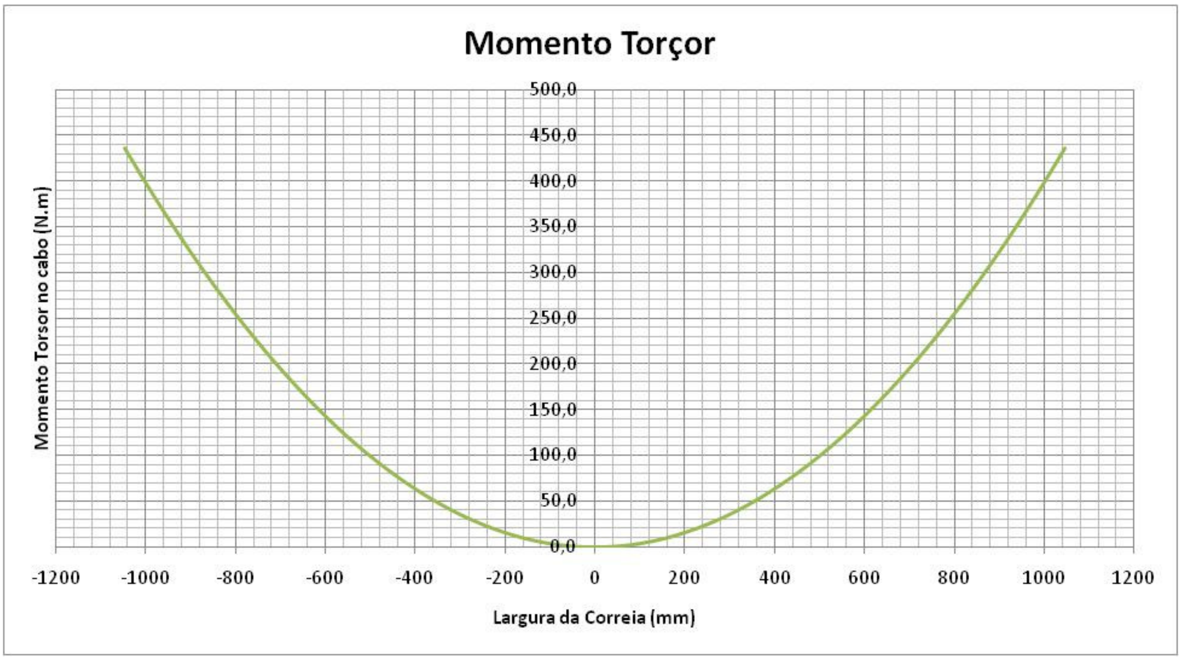


Gráfico 7.2 – Momento Torçor no cabo de aço em função da posição relativa ao centro da correia

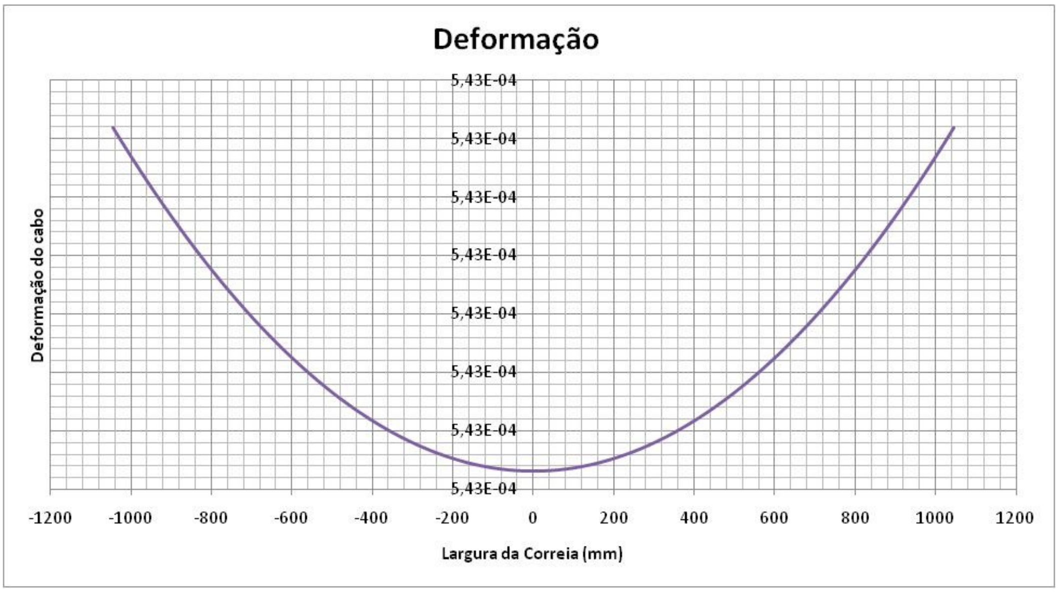


Gráfico 7.3 – Deformação no cabo de aço em função da posição relativa ao centro da correia

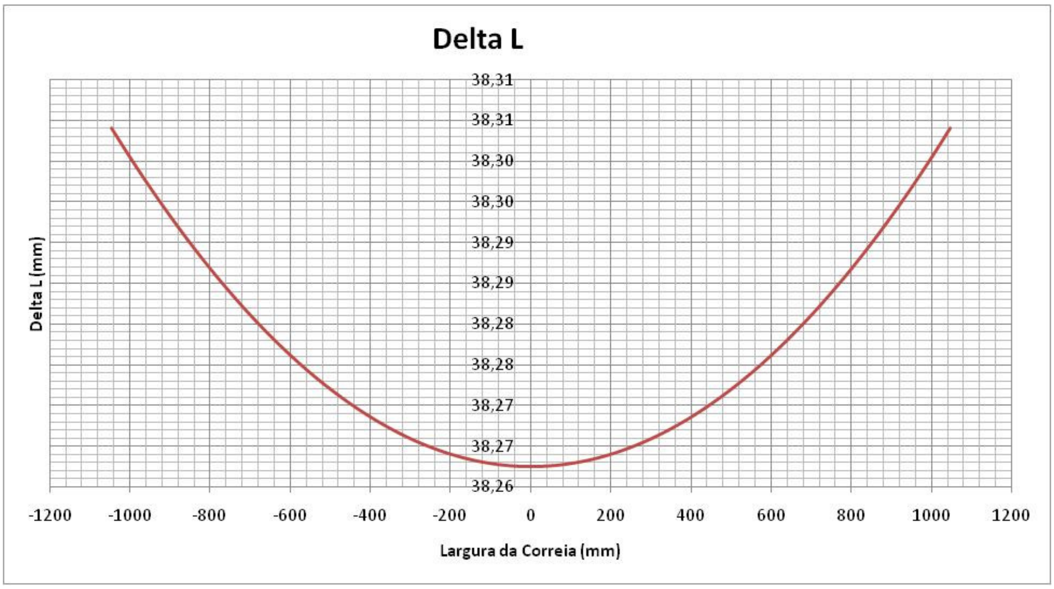


Gráfico 7.4 – Variação no comprimento do cabo de aço em função da posição relativa ao centro da correia

Como pode ser observado nos gráficos apresentados, os cabos mais próximos da borda da correia são mais solicitados, tanto na tração quanto na torção.

Na torção em relação ao eixo central da correia, vê-se que o cabo mais próximo a borda sofre o maior esforço e o cabo no centro da correia não sofre torção, de acordo com a simplificação adotada no modelo.

O modelo desenvolvido mantém coerência com o modelo encontrado na bibliografia, o qual expõe que os cabos da borda são mais solicitados e os cabos do centro são menos solicitados.

Cálculo do SAG (Modelo Bi-apoiado) para o caso estudado

Como pode ser visto no capítulo 4, foi apresentada a expressão para o cálculo do SAG, a qual é retomada abaixo:

$$SAG = \frac{q.E.I}{P^2}.\left(\frac{2.e^{k.L/2}}{e^{k.L}+1}-1\right)+\frac{q.L^2}{8.P}$$

De acordo com os dados apresentados na Tabela 7.1e Tabela 7.2, tem-se:

$q = 120{,}6\ kg/m$

$L = 70{,}5\ m$

$P = 922000\ N$

$E = 1472723\ Pa$

$I = 31.2200^3.10^{-12} = 0{,}33\ m^4$

Lembrando que,

$$k = \sqrt{\frac{P}{E.I}}$$

Substituindo,

$$SAG = \frac{q.E.I}{P^2}.\left(\frac{2.e^{\sqrt{\frac{P}{E.I}}.L/2}}{e^{\sqrt{\frac{P}{E.I}}.L}+1}-1\right)+\frac{q.L^2}{8.P}$$

Fazendo a substituição numérica,

$$\delta_{caso} = \frac{120{,}6.9{,}81.147272{,}3.0{,}33}{922000^2}.\left(\frac{2.e^{\sqrt{\frac{922000}{147272{,}3.0{,}33}}.70{,}5/2}}{e^{\sqrt{\frac{922000}{147272{,}3.0{,}33}}.70{,}5}+1}-1\right)+\frac{120{,}6.9{,}81.70{,}5^2}{8.922000}$$

$$\delta_{caso} = 0{,}798$$

Normalmente o SAG máximo é 1% do comprimento do *turnover*, neste caso tem-se:

$$SAG(percentual) = \frac{0{,}798}{70{,}5}.100\% = 1{,}13\%$$

$SAG(percentual)$ igual a 1,13% é um valor completamente aceitável, pois não é sabido quais foram os critérios de projeto utilizados neste caso. O valor normalmente utilizado em projetos é SAG(percentual)=1%, em condições de regime na operação do transportador.

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho objetivou analisar os esforços na correia especificamente na região de *turnover* mediante modelos matemáticos existentes na literatura ou através de novos modelos. Para cumprir estes objetivos foram propostos alguns modelos, de acordo com hipóteses simplificadoras e carregamentos aplicados para cada um dos modelos.

No Capítulo 2 foi apresentada uma revisão bibliográfica contendo os modelos encontrados na literatura para determinação dos esforços no *turnover*, comprimento ótimo, ou mesmo, as diferentes configurações de *turnover* encontrados ao redor do mundo. Apesar da busca por informações em vários meios, banco de dados e acervos digitais, não foi possível encontrar muitas referências que pudessem contribuir com o presente trabalho. Essa dificuldade para obter informações relativas ao tema dá-se porque o assunto “transportadores de correia” não é difundido no meio acadêmico, sendo mais recorrente apenas nas empresas especializadas no ramo, as quais não divulgam este *know how* para outras pessoas ou empresas.

No Capítulo 3 foi apresentada uma discussão dos modelos analítico-numéricos encontrados na literatura. Nos modelos discutidos foram apresentadas algumas hipóteses de geometria e esforços que não necessariamente foram apresentadas na fonte original. A principal referência apresentada neste capítulo foi o modelo de Ryan Lemmon, em que ele apresenta um modelo simplificado para o cálculo de esforços e comprimento ótimo do *turnover.* Apesar de ter sido feita uma discussão inicial a respeito do modelo de Lemmon no ANEXO C, esta discussão poderia ser mais aprofundada, entretanto, já é possível de se concluir que Lemmon fez algumas hipóteses, as quais o levaram a perder algumas informações importantes no cálculo do modelo.

No Capítulo 4 foi apresentado um modelo analítico-numérico para flexo-tração da correia, para o qual foram devidamente apresentadas algumas hipóteses de geometria e esforços. Neste modelo foram demonstradas equações para cálculo do SAG, que vem a ser o deslocamento máximo da linha elástica da correia entre os pontos de apoio. O modelo para flexo-tração foi dividido em três sub-modelos, os quais foram modelados sob ponto de partida diferentes. Um sub-modelo partiu das equações da resistência dos materiais e da teoria da elasticidade; o segundo sub-modelo partiu das equações diferencias de equilíbrio apresentadas por Clebsh-Kirchhoff-Love e das relações constitutivas. O segundo sub-modelo é hierarquicamente superior ao primeiro sub-modelo, pois não foram feitas as hipóteses de pequenos deslocamentos e pequenas rotações, e ainda, é possível observar no segundo sub-modelo a variação do esforço de tração ao longo da coordenada curvilínea, observação esta que não era possível de ser realizada no primeiro sub-modelo, para o qual o esforço de tração é constante ao longo de toda a viga.

No terceiro sub-modelo, ainda no capítulo 4, foi apresentado um modelo em elementos finitos, o qual utilizou analises não-lineares, como resultado, foi possível observar a variação do esforço de tração ao longo da viga conforme apresentado no segundo sub-modelo.

Em todos os três sub-modelos, do capítulo 4, podem ser aplicadas diferentes condições de contorno, entre elas: condição bi-apoiada e condição bi-engastada. Foram elaborados alguns gráficos que mostram as mudanças no deslocamento do ponto central da viga de acordo com o esforço de tração aplicado nas extremidades da viga.

Outra importante observação a ser feita no capítulo 4, é que a equação que descreve o SAG, para o modelo bi-apoiado, apresenta duas parcelas; a primeira dependente da rigidez flexional da viga e a segunda que depende somente do comprimento entre apoios e do carregamento. Na literatura encontra-se somente a segunda parcela como forma de calcular o SAG. Um estudo detalhado mostrou que a primeira parcela é relevante para o cálculo do SAG somente quando o produto $k.l$ é menor que 10 (ou menor que 20 para o caso bi-engastado).

Uma observação importante referente ao capítulo 4 é que as propriedades utilizadas para efetuar os cálculos no modelo devem ser consideradas como uma mistura ponderada pelo volume dos elementos constituintes da correia. Essas propriedades do material composto podem ser calculadas conforme foi apresentado no capítulo 6.

No Capítulo 5 foi apresentado um modelo analítico-numérico para torção-tração da correia. Neste modelo a correia é formada por cabos de aço e borracha, separadamente, ao contrário do modelo apresentado no Capítulo 4 que considera a correia como elemento composto pelas propriedades dos cabos e da borracha. Da mesma forma que no capítulo 4, este modelo apresentou três sub-modelos; o primeiro elaborado a partir das equações da resistência dos materiais; o segundo a partir das equações de Clebsh-Kirchhoff-Love e por último o modelo a partir da simulação não-linear em elementos finitos. Observou-se que os sub-modelos deste capítulo convergiram para o mesmo resultado, sem diferença na análise dos esforços para estes casos. No capítulo 7 foi apresentado um estudo de caso utilizando as equações apresentadas no capítulo 5, com isto, observou-se que os esforços nos cabos de aço na borda da correia são maiores que nos cabos do centro da correia, conforme já apresentado em referências anteriores.

No Capítulo 6 foi apresentado um modelo para o cálculo das propriedades equivalentes da correia, para tal modelo foi utilizado como referência a obra de MENDONÇA, 2005. As propriedades calculadas através do modelo do Capítulo 6 foram utilizadas no Capítulo 4.

No Capítulo 7 é apresentado um estudo de caso, utilizando as equações apresentadas nos modelos dos capítulos anteriores.

O presente trabalho ainda é muito simplista visto a quantidade de variáveis envolvidas em um projeto de viradores, mas já apresenta alguns resultados interessantes, conforme exposto anteriormente. Existem muitas sugestões de estudos que podem ser feitos para dar continuidade ao presente texto, as quais serão apresentadas a seguir:

- Proposta de um modelo analítico-numérico considerando carregamento de flexão (devido ao peso próprio da correia), torção e tração. Este modelo poderia ser obtido a partir das equações de Clebsh-Kirchhoff-Love. A sugestão de estudo seria hierarquicamente superior aos modelos apresentados no presente texto.
- Proposta de um modelo em elementos finitos considerando os carregamentos de flexão, torção e tração, possibilitando comparações com o modelo analítico-numérico para as mesmas condições geométricas e de carregamento.
- Posposta de inclusão de pontos de apoio intermediários nos modelos apresentados e também nas sugestões anteriores. Através do modelo

apresentado por LEMMON, 2002, vê-se que neste são considerados 3 pontos de apoios intermediários ao longo do virador. A inclusão destes pontos de apoio faria com que os modelos se tornassem mais próximos da realidade construtiva dos viradores, sendo assim, um modelo hierarquicamente superior aos já apresentados.

- As correias dos transportadores estão sujeitas a carregamentos cíclicos, isto é, esforços de repetitivos e de intensidades de variáveis. Poderia abrir uma nova vertente para este projeto e incluir um estudo sobre a vida em fadiga da correia, dados os esforços solicitantes e as propriedades do elemento composto.

Por fim, é possível concluir que o presente trabalho alcançou o seu objetivo, que era estudar os modelos encontrados na literatura, discuti-los, apresentar novos modelos para o dimensionamento de viradores, e ainda, foi possível abrir novas possibilidades de estudo para este tema, conforme apresentados nos parágrafos anteriores.

9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADVANCED CONVEYOR TECHNOLOGIES. AC-TEK. Disponível em: http://www.actek.com/. Acessado em 07/12/2010.

BULK SOLIDS HANDLING. Disponível em: http://www.bulk-solids-handling.com/index.cfm?pid=9369&keyword=TURNOVER. Acessado em 07/12/2010.

CEMA HOME PAGE. Conveyor Equipament Manufactures Association. Disponível em: http://www.cemanet.org/. Acessado em 07/12/2010.x

CEMA (2005). Belt Conveyors for Bulk Materials. 6th Ed., Engineering Conference for Conveyor Equipament Manufactures Association, 599 p.

CONVEYOR DYNAMICS, INC.. Website Conveyor Dynamics. Disponível em: http://www.conveyor-dynamics.com/cdi_intro.htm. Acessado em 07/12/2010.

DIN 22101, Continuous conveyors-Belt conveyors for loose bulk materials-Basis for calculation and dimensioning, 2002. 50 p.

GERE, J. M. Mecânica dos Materiais. São Paulo. THOMSON. 2003. 698p.

GOODYEAR (1975). Handbook of Conveyor & Elevator Belting. Akron, Ohio.1975.

LEMMON, R.. Local Stresses in Belt Turnovers in Conveyor Belts. Bulk Material Handling by Conveyor Belt IV. SME Conference. 2002, 17 p.

LEMMON, R.. Belt Turnover Design using Finite Element Analysis. BeltCon 15. 2009, 20 p.

LEMMON, R.. Belt Turnover Design Application of Finite Element Analysis – part 1. Belt Conveyor Technology. 2010, 5 p.

LEMMON, R.. Belt Turnover Design Application of Finite Element Analysis – part 2. Belt Conveyor Technology. 2010, 5 p.

LINEAR STATIC ANALYSIS USER'S GUIDE, MD Nastran 2011 &MSC Nastran 2011, MSC.Software Corporation, 2011, 774 p.

MENDONÇA, P. T. R., Materiais Compostos & Estruturas-Sanduíche, Ed. Manole, 2005, 632 p.

MERCÚRIO, Manual de correias transportadoras. Ano: desconhecido.

PHOENIX, Phoenix Conveyor Belts Design Fundamentals, Humburg. 2004, 61 p.

RAMOS JR, R. Modelos Analíticos no Estudo do Comportamento Estrutural de Tubos Flexíveis e Cabos Umbilicais. São Paulo. 2001. 367 p.

SANDVIK, Belt-Twist Belt Turning, Sandvik Conveyor Components, Service Manual. 2006. 2p.

SANTOS, Marcio dos. Análise elástica em transportadores de correia. São Paulo. EPUSP. 1998, 78 p.

TIMOSHENKO, S. P.. Theory of elasticity. 3rd Ed. McGraw-Hill, 1970. 567p.

10. ANEXO A - JUSTIFICATIVA AMBIENTAL

Alguns tipos de materiais transportados podem aderir à superfície da correia, permanecendo na mesma após a região de descarga. A fim de minimizar o volume de material aderido à correia colocam-se raspadores no tambor de descarga, conforme Figura 10.1, em contato direto com a correia. A raspagem não é totalmente eficiente, restando ainda uma camada aderida. O material remanescente pode se desprender da correia ao longo de toda a extensão do retorno devido à força gravitacional e à vibração da correia.

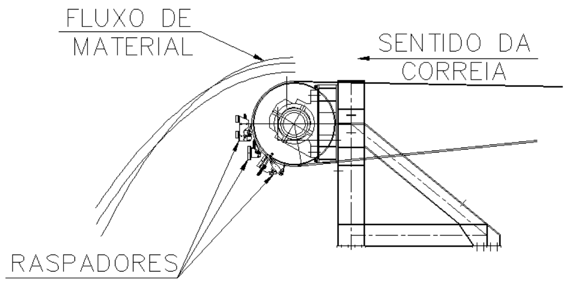


Figura 10.1: Raspadores no tambor de descarga.

As vezes é colocado embaixo do transportador principal um outro equipamento, denominado transportador de limpeza, cuja função é recolher o material desprendido da correia na região do virador e devolvê-lo ao fluxo normal do material.

Esta justificativa tem importância ambiental, conforme dito anteriormente, pois a aplicação do virador e do transportador de limpeza evita que o material se desprenda ao longo do transportador e conseqüentemente suje toda a área sob a máquina, como mostrado na Figura 10.2:

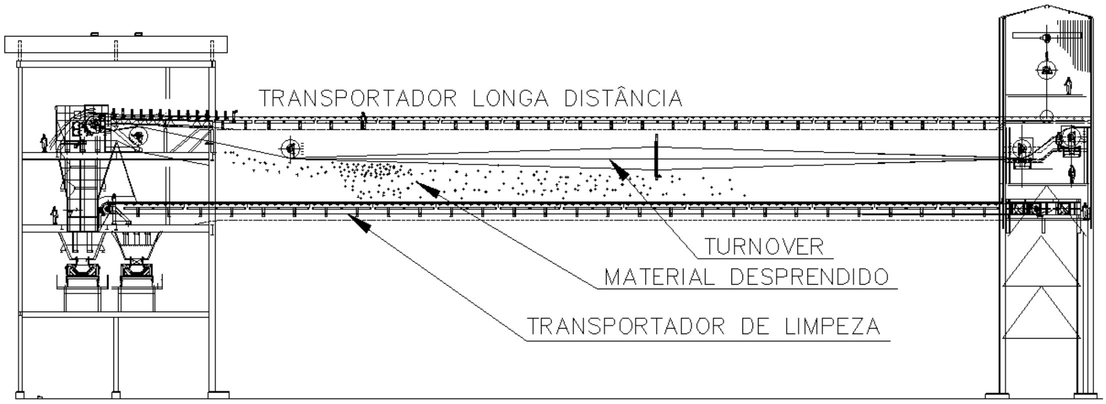


Figura 10.2: *Turnover* na região de descarga e transportador de limpeza.

Após serem feitas algumas hipóteses será apresentado o cálculo do volume de material residual na correia a fim de justificar a implantação do *turnover* e a aplicação de um transportador de limpeza logo abaixo do virador.

Para justificar a importância ambiental do *turnover* é elaborado o seguinte cálculo:

- Dados de entrada:
  - Capacidade de projeto do transportador: Q = 24000 t/h.
  - Velocidade da correia: v = 5,16 m/s.
  - Largura da correia: bw = 2200 mm.
- Hipóteses:
  - Camada de material incrustado antes da raspagem: h = 2 mm.
  - Densidade do material: $\gamma = 2{,}4$ t/m³.
  - Eficiência de raspagem: $\eta_r = 95\%$.
  - Percentual de material desprendido da correia no *turnover*: $\eta_g = 80\%$.
  - Largura útil da correia, bw_u, segue a fórmula:

$$bw_u = bw - 2.\left(\frac{0{,}055.bw}{25{,}5} + 0{,}9\right).25{,}4 \qquad \text{(CEMA)} \qquad \text{Eq. 10.1}$$

Em que, *bw* é a largura da correia em milímetros.

A largura útil da correia é a largura sobre a qual existe material sendo transportado, como mostrado na Figura 10.3:

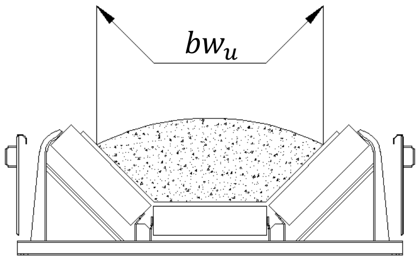


Figura 10.3: Largura da correia útil.

❖ Cálculos:

- Largura útil da correia:

$$bw_u = bw - 2.\left(\frac{0{,}055.bw}{25{,}4} + 0{,}9\right).25{,}4 = 2200 - 2.\left(\frac{0{,}055.2200}{25{,}4} + 0{,}9\right). \qquad \text{Eq. 10.2}$$

$$bw_u = 1912{,}28\,\text{mm}$$

- Capacidade de material incrustado:

$$Q_i = \frac{h}{1000}.v.\frac{bw_u}{1000}.\gamma.3600 = \frac{2}{1000}.5{,}16.\frac{1912{,}28}{1000}.2{,}4.3600 \qquad \text{Eq. 10.3}$$

$$Q_i = 170{,}50\,\text{t/h}$$

- Capacidade de material residual incrustado:

$$Q_r = Q_i.(1-\eta_r) = 170{,}50.(1-0{,}95) \qquad \text{Eq. 10.4}$$

$$Q_r = 8{,}525\,\text{t/h}$$

- Volume de material desprendido na região do *turnover*:

$$V_t = \frac{Q_r.\eta_g}{\gamma} = \frac{8{,}525.0{,}80}{2{,}4} \qquad \text{Eq. 10.5}$$

$$V_t = 2{,}84\,\text{m}^3\text{/h}$$

Como pode ser visto pelo cálculo apresentado o volume de material é significativo, ainda mais, considerando que este tipo de transportador é projetado para trabalhar sem interrupções.

Com isso comprova-se a viabilidade ambiental do virador.

11. ANEXO B – JUSTIFICATIVA ECONÔMICA

Os transportadores de longa distância possuem custo de projeto e fabricação que muitas vezes ultrapassa a cifra de dezenas de milhões de reais.

Os componentes utilizados necessitam de engenharia, materiais com certificação e processos de manufatura rigorosamente controlados, fatores que contribuem significativamente para o aumento do custo do equipamento.

A utilização do *turnover* contribui para a redução do desgaste de alguns componentes do transportador, por exemplo, a correia e roletes de retorno. Entretanto, para sua implantação, é necessário que se acrescente alguns componentes no transportador. Em geral, ocorre acréscimo no número de tambores; entretanto, economiza-se no número de roletes.

Com o passar dos anos, verificou-se que a vida útil da correia e rolos de retorno aumenta em aproximadamente 15% quando o *turnover* é utilizado, e ainda, que a vida útil da correia e dos rolos é de aproximadamente 5 anos. Apesar de não existir bibliografia que comprove tais dados, foi possível obter estes números com equipes de manutenção de grandes mineradoras.

Para justificar economicamente a utilização do *turnover* é elaborado o seguinte cálculo:

Dados de entrada:

- Comprimento da correia: 3650 m
- Quantidade de rolos de retorno: 1.028 unidades
- Custo da correia por metro: R$ 1.550,00
- Custo dos rolos de retorno: R$ 260,00 (unitário)

Gastos adicionais devido a implantação do *turnover*:

- Número de tambores: 4 unidades
- Custo dos tambores: R$ 200.000,00 (unitário)

Os valores apresentados são aproximados e referentes ao ano de 2010.

- Cálculos:
  - Custo total da correia: $3650m.\frac{R\$1550{,}00}{m} = R\$5.657.500{,}00$
  - Custo total dos rolos: $1028unidades.\frac{R\$260{,}00}{unidade} = R\$267.280{,}00$
  - Custo total de tambores: $4unidades.\frac{R\$200.000{,}00}{unidade} = R\$800.000{,}00$
- Resultados:

$$(R\$5.657.500{,}00 + R\$267.280{,}00).15\% = R\$888.717{,}00$$

Assim, tem-se economia de aproximadamente R$900.000,00 a cada 5 anos e um gasto adicional de R$800.000,00 uma única vez.

Com isso comprova-se a viabilidade econômica do *turnover*.

12. ANEXO C – DISCUSSÃO DO MODELO APRESENTADO POR LEMMON, 2002

LEMMON, 2002 apresenta em sua introdução uma clara explicação da importância do *Turnover* e alguns critérios de projeto da região estudada neste trabalho.

No mesmo artigo Lemmon apresenta dois modelos para o projeto de *Turnovers*. O primeiro, chamado *Mordstein Turnover*, é apenas apresentado, entretanto, Lemmon não entrou em detalhes neste modelo. O segundo modelo, chamado *Flat Helix Turnover,* é apresentado com mais detalhes, os quais serão discutidos adiante.

São apresentados alguns critérios de projeto, por exemplo: (i) a tensão de borda não deve atingir 115% da tensão nominal da correia; (ii) tensão no centro não deve ser inferior a 5 N/mm para prevenir a flambagem no centro da correia, e (iii) o máximo SAG recomendando deve ser aproximadamente, ou menor que, 1% do comprimento do *turnover*. Não é possível descobrir qual a origem destes valores, talvez seja da experiência profissional de Lemmon.

No capítulo 3, MODELOS ANALÍTICO-NUMÉRICOS, no texto de Lemmon, são feitas algumas hipóteses a respeito da correia, a qual é considerada como um material homogêneo e isotrópico. O próprio Lemmon reconhece que esta hipótese não é correta. Atualmente, a correia é considerada um material ortotrópico.

12.1 Tensão Nominal

Na equação 5.1.1 apresentada por Lemmon a tensão nominal na correia pode ser calculada pela seguinte fórmula:

$$T_n = \int_{-bw/2}^{bw/2} \sigma_t . dy \qquad \text{Eq. 12.1}$$

Em que,

T_n é a tensão nominal da correia

σ_t é a tensão local da correia

dy é um incremento na largura da correia

bw é a largura da correia

Em RAMOS. JR, 2001, no conjunto de equações (a.12) pode-se encontrar o esforço de tração atuante na seção transversal de uma barra como:

$$T = \iint (\sigma_z)\,.\,dx.\,dy$$

Em que x,y denotam os eixos principais de flexão da seção transversal e z é o eixo ortogonal ao plano xy.

Assim, Lemmon considerou que a tensão é constante ao longo da espessura da correia em um infinitésimo de largura. Esta consideração parece bastante razoável, pois a espessura da correia é muito menor que a largura e muito menor que o comprimento do *Turnover*, assim a variação em função da espessura não deve ser significativa.

12.2 Vetor posição

Na equação 12.2, Lemmon apresenta o vetor posição de um ponto do eixo central de um cabo de aço interno a correia quando submetida apenas a torção.

$$p(t) = \frac{L}{\pi}.\,t.\,\hat{\imath} + r.\sin(t).\,\hat{\jmath} + r.\cos(t).\,\hat{k} \qquad \text{Eq. 12.2}$$

Em que, $t = \frac{\pi.x}{L}$

$\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ e $\hat{k}$ são versores de base ortonormal positiva associada ao sistema global (fixo) de coordenadas OXYZ.

r é a distância do eixo central da correia (sob torção apenas)

L é o comprimento do *Turnover*

A equação realmente descreve o vetor posição da hélice.

12.3 Torção

A tensão devido a torção é determinada a partir da seguinte equação, Eq. 12.3:

$$\sigma_{TO} = \frac{T_n}{bw} + E.\left[\sqrt{\left(\frac{r.\pi}{L}\right)^2 + 1} - \frac{1}{2}.\sqrt{\left(\frac{bw.\pi}{2.L}\right)^2 + 1} - \frac{L}{\pi.bw}.\ln\left(\frac{bw.\pi}{2.L} + \sqrt{\left(\frac{bw.\pi}{2.L}\right)^2 + 1}\right)\right] \qquad \text{Eq. 12.3}$$

No presente trabalho não foi possível rededuzir a equação Eq. 12.3, pois não se sabe qual modelo Lemmon adotou para tal dedução.

Na equação Eq. 12.4, Lemmon apresenta a tensão na linha de centro da correia:

$$\sigma_{TO,r=0} = \frac{T_n}{bw} - \frac{E}{3}.\left[\sqrt{\left(\frac{bw.\pi}{L}\right)^2 + 1} - 1\right] \qquad \text{Eq. 12.4}$$

Pode-se verificar a dedução da equação 12.4 a partir da equação 12.3, a qual foi considerada correta.

A partir da equação 12.3:

$$\sigma_{TO} = \frac{T_n}{bw} + E.\left[\sqrt{\left(\frac{r.\pi}{L}\right)^2 + 1} - \frac{1}{2}.\sqrt{\left(\frac{\pi.bw}{2.L}\right)^2 + 1} - \frac{L}{\pi.bw}.\ln\left(\frac{\pi.bw}{2.L} + \sqrt{\left(\frac{\pi.bw}{2.L}\right)^2 + 1}\right)\right]$$

Define-se o adimensional:

$$\vartheta = \frac{\pi.bw}{2.L} \qquad \text{Eq. 12.5}$$

Substituindo o adimensional, Eq. 12.5, em 12.3 e fazendo $r = 0$:

$$\sigma_{TO,r=0} = \frac{T_n}{bw} + E.\left[1 - \frac{\sqrt{\vartheta^2+1}}{2} - \frac{\ln\left(\vartheta+\sqrt{\vartheta^2+1}\right)}{2.\vartheta}\right] \qquad \text{Eq. 12.6}$$

Pode-se definir outro adimensional, β, de tal forma que:

$$\beta = \sqrt{\vartheta^2 + 1} > 1$$

$$\beta^2 = \vartheta^2 + 1 \quad \rightarrow \quad \vartheta^2 = \beta^2 - 1 \quad \rightarrow \quad \vartheta = \sqrt{\beta^2 - 1}$$

Substiutindo β na expressão de $\sigma_{TO,r=0}$, tem-se:

$$\sigma_{TO,r=0} = \frac{T_n}{bw} + E.\left[1 - \frac{\beta}{2} - \frac{\ln\left(\sqrt{\beta^2-1}+\beta\right)}{2.\sqrt{\beta^2-1}}\right] \qquad \text{Eq. 12.7}$$

Lembrando que o teorema de Taylor pode ser escrito da seguinte forma:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(a)}{k!}.(x-a)^k \qquad \text{Eq. 12.8}$$

Define-se a função $\sigma_{TO,r=0}(\beta)$:

$$\sigma_{TO,r=0}(\beta) = \frac{T_n}{bw} + E.\left[1 - \frac{\beta}{2} - \frac{\ln\left(\sqrt{\beta^2 - 1} + \beta\right)}{2.\sqrt{\beta^2 - 1}}\right]$$

Desenvolvendo a expressão $\sigma_{TO,r=0}(\beta)$ em série, em torno de $\beta = 1$, obtêm-se:

$$\sigma_{TO,r=0}(\beta) = \frac{T_n}{bw} + E.\left[\frac{1}{3} - \frac{\beta}{3} - \frac{(\beta-1)^2}{15} + \frac{(\beta-1)^3}{35} - \frac{4.(\beta-1)^4}{315} + O[\beta-1]^{9/2}\right]$$

Desprezando os termos de ordem $(\beta - 1)^2$e superiores, virá:

$$\sigma_{TO,r=0} = \frac{T_n}{bw} - \frac{E}{3}.[\beta - 1] = \frac{T_n}{bw} - \frac{E}{3}.\left[\sqrt{\vartheta^2+1} - 1\right]$$

Então,

$$\sigma_{TO,r=0} = \frac{T_n}{bw} - \frac{E}{3}.\left[\sqrt{\left(\frac{\pi.bw}{2.L}\right)^2 + 1} - 1\right] \qquad \text{Eq. 12.4}$$

Vê-se que a equação encontrada está de acordo com LEMMON, 2002.

Da mesma forma como foi feito para $r = 0$, agora será feito $r = {}^{bw}/_{2}$. A expressão 5.1.5. calcula a tensão devido a torção na borda da correia.

Pode-se verificar a dedução da equação 12.10 a partir da equação 12.3:

$$\sigma_{TO} = \frac{T_n}{bw} + E.\left[\sqrt{\left(\frac{r.\pi}{L}\right)^2 + 1} - \frac{1}{2}.\sqrt{\left(\frac{\pi.bw}{2.L}\right)^2 + 1} - \frac{L}{\pi.bw}.\ln\left(\frac{\pi.bw}{2.L} + \sqrt{\left(\frac{\pi.bw}{2.L}\right)^2 + 1}\right)\right] \qquad \text{Eq. 12.3}$$

Para $r = {}^{bw}/_{2}$, tem-se:

$$\sigma_{TO,r=\frac{bw}{2}} = \frac{T_n}{bw} + E.\left[\sqrt{\vartheta^2+1} - \frac{1}{2}.\sqrt{\vartheta^2+1} - \frac{\ln\left(\vartheta + \sqrt{\vartheta^2+1}\right)}{2.\vartheta}\right]$$

$$\sigma_{TO,r=\frac{bw}{2}} = \frac{T_n}{bw} + E.\left[\frac{\sqrt{\vartheta^2+1}}{2} - \frac{\ln\left(\vartheta+\sqrt{\vartheta^2+1}\right)}{2.\vartheta}\right] \qquad \text{Eq. 12.9}$$

Em que,

$$\vartheta = \frac{\pi.bw}{2.L} \qquad \text{Eq. 12.5}$$

Ou ainda, $\beta = \sqrt{\vartheta^2+1} > 1$:

$$\sigma_{TO,r=\frac{bw}{2}} = \frac{T_n}{bw} + E.\left[\frac{\beta}{2} - \frac{\ln\left(\sqrt{\beta^2-1}+\beta\right)}{2.\sqrt{\beta^2-1}}\right]$$

Desenvolvendo a expressão $\sigma_{TO,r=\frac{bw}{2}}$ em série, em torno de $\beta = 1$, obtêm-se:

$$\sigma_{TO,r=\frac{bw}{2}} = \frac{T_n}{bw} + E.\left[-\frac{2}{3} + \frac{2.\beta}{3} - \frac{(\beta-1)^2}{15} + \frac{(\beta-1)^3}{35} - \frac{4.(\beta-1)^4}{315} + O[\beta-1]^{9/2}\right]$$

Desprezando os termos de ordem $(\beta - 1)^2$e superiores, virá:

$$\sigma_{TO,r=\frac{bw}{2}} = \frac{T_n}{bw} + E.\left[\frac{2.\beta}{3} - \frac{2}{3}\right] = \frac{T_n}{bw} + \frac{2.E}{3}.\left[\sqrt{\vartheta^2+1} - 1\right]$$

Então,

$$\sigma_{TO,r=\frac{bw}{2}} = \frac{T_n}{bw} + \frac{2.E}{3}.\left[\sqrt{\left(\frac{\pi.bw}{2.L}\right)^2 + 1} - 1\right] \qquad \text{Eq. 12.10}$$

Vê-se que a equação encontrada está de acordo com LEMMON, 2002.

12.4 Momento de inércia

O momento de inércia não é constante no *turnover*. Lemmon propõe duas equações para o cálculo do momento de inércia em função do comprimento do *turnover*.

As equações 5.2.1.1 e 5.2.1.2 propostas por Lemmon:

$$I_z = \frac{bw.t_{eq}^3 + t_{eq}.bw^3}{24} + \frac{bw.t_{eq}^3 - t_{eq}.bw^3}{24}.\cos\left(\frac{2.\pi.x}{L}\right) \qquad \text{Eq. 12.11}$$

$$I_y = \frac{bw.t_{eq}^3 + t_{eq}.bw^3}{24} + \frac{t_{eq}.bw^3 - bw.t_{eq}^3}{24}.\cos\left(\frac{2.\pi.x}{L}\right) \qquad \text{Eq. 12.12}$$

Pode-se verificar a dedução das equações 12.11 e 12.12 a partir do modelo apresentado a seguir:

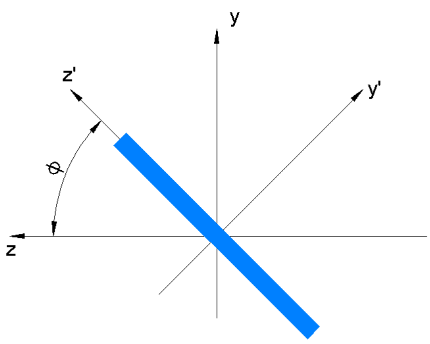


Figura 12.1: Sistema de coordenadas

A partir da Mecânica Clássica:

$$I_z = \iint y^2.dA = \iint [y^2].dA$$

Mas,

$$y = y'.\cos\varphi + z'.\sin\varphi$$

Em que,

$\varphi = \frac{\pi.x}{L}$ = ângulo de giro por unidade de comprimento

Logo,

$$I_z = \iint [y'.\cos\varphi + z'.\sin\varphi]^2.dA$$

$$= \iint (y')^2.\cos^2\varphi\,.dA + 2.\iint y'z'.\sin\varphi\,.\cos\varphi\,.dA + \iint (z')^2.\sin^2\varphi\,.dA$$

Por simetria, $I_{y'z'} = 2.\iint y'z'.\sin\varphi\,.\cos\varphi\,.dA = 0$

$$I_z = I_{z'}.\cos^2\varphi + I_{y'}.\sin^2\varphi$$

$$I_z = I_{z'}.\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2.\varphi)}{2}\right) + I_{y'}.\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2.\varphi)}{2}\right)$$

$$I_z = \frac{I_{z'} + I_{y'}}{2} + \frac{I_{z'} - I_{y'}}{2}.\cos(2.\varphi)$$

Analogamente,

$$I_y = \frac{I_{z'} + I_{y'}}{2} + \frac{I_{y'} - I_{z'}}{2}.\cos(2.\varphi)$$

$$I_{z'} = \frac{bw.t_{eq}^3}{12}$$

$$I_{y'} = \frac{t_{eq}.bw^3}{12}$$

Finalmente,

$$I_z = \frac{bw.t_{eq}^3 + t_{eq}.bw^3}{24} + \frac{bw.t_{eq}^3 - t_{eq}.bw^3}{24}.\cos\left(\frac{2.\pi.x}{L}\right)$$

$$I_y = \frac{bw.t_{eq}^3 + t_{eq}.bw^3}{24} + \frac{t_{eq}.bw^3 - bw.t_{eq}^3}{24}.\cos\left(\frac{2.\pi.x}{L}\right)$$

Vê-se que as equações encontradas estão de acordo com LEMMON, 2002.

12.5 Flexão

O momento fletor é divido em dois planos: vertical e horizontal.

Plano Vertical

Em LEMMON, 2002 são apresentadas equações do momento fletor divididas em tramos.

A Figura 12.2 mostra os esforços solicitantes no *turnover* para o plano vertical:

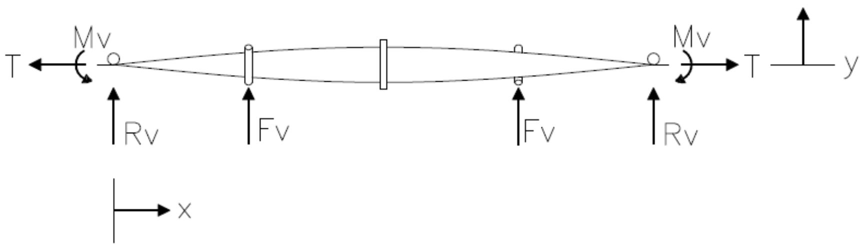


Figura 12.2 - Forças no plano vertical. LEMMON, 2002

São apresentadas por LEMMON, 2002 as seguintes equações para o cálculo do momento fletor no plano vertical:

Para $x = 0$ até $x = {}^{L}/_{4}$,

$$M_z = -M_v + \left(\frac{wb.L}{2} - F_v\right).x - \frac{wb.x^2}{2} - T.y$$

Para $x = {}^{L}/_{4}$ até $x = {}^{L}/_{2}$,

$$M_z = -M_v - \frac{F_v.L}{2} + \frac{wb.L.x}{2} - \frac{wb.x^2}{2} - T.y$$

Modelo Adotado

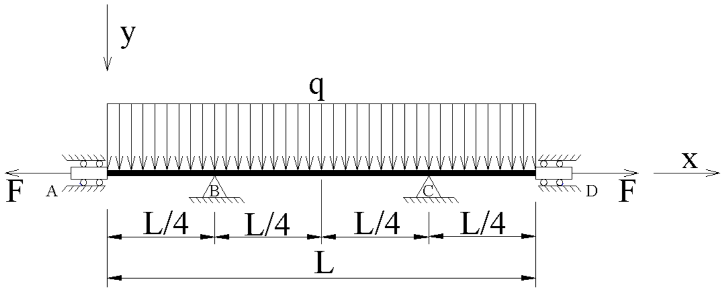


Figura 12.3 - Modelo Adotado

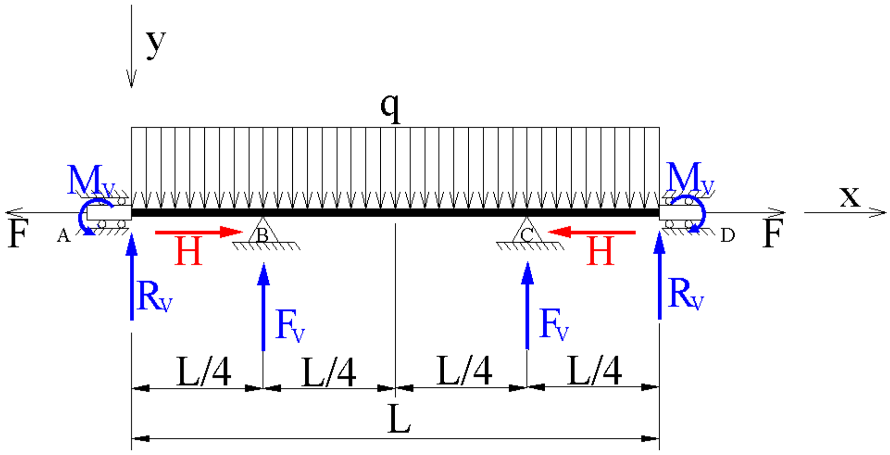


Figura 12.4 - Reações de Apoio

Vê-se que o modelo apresentado na Figura 12.4 possui 8 incógnitas e através da estática são possíveis apenas 3 equações. Assim o modelo é hiperestático, com grau de hiperestaticidade igual a 5.

Existe um eixo de simetria de carregamento, assim pode reduzir o grau de hiperestaticidade para 1.

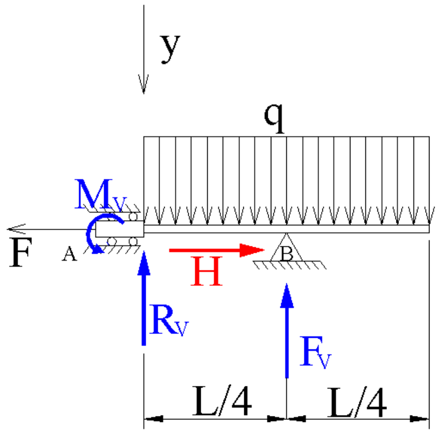


Figura 12.5 - Modelo simplificado

A partir das equações da estática,

$$\sum F_{vericais} = 0 \quad \rightarrow \quad R_v = \frac{q.L}{2} - F_v$$

A equação do momento fletor para o primeiro tramo:

Para $x = 0$ até $x = {}^{L}/_{4}$,

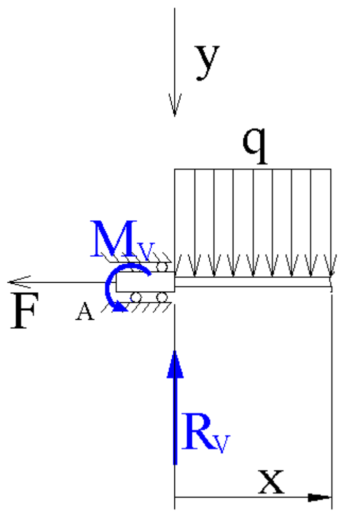


Figura 12.6 - Primeiro tramo

$$M(x) = -M_v + R_v.x - \frac{q.x^2}{2} - F.y$$

Substituindo R_v,

$$M(x) = -M_v + \left(\frac{q.L}{2} - F_v\right).x - \frac{q.x^2}{2} - F.y$$

A equação encontrada está de acordo com a equação apresentada em LEMMON, 2002.

A equação do momento fletor para o segundo tramo:

Para $x = {}^{L}/_{4}$ até $x = {}^{L}/_{2}$,

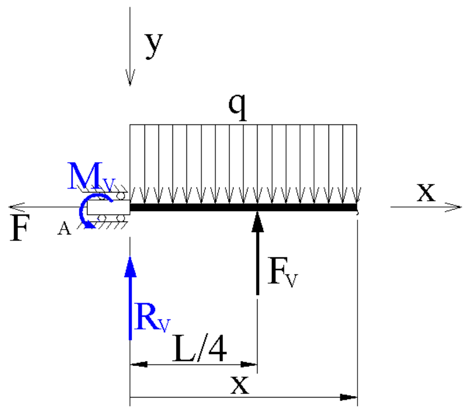


Figura 12.7 - Segundo tramo

$$M(x) = M({}^{L}/_{4}) + F_v.\left(x - \frac{L}{4}\right) - \frac{q.\left(x - \frac{L}{4}\right)^2}{2}$$

Substituindo $M({}^{L}/_{4})$,

$$M(x) = -M_v + \left(\frac{q.L}{2} - F_v\right).\frac{L}{4} - \frac{q.\left(\frac{L}{4}\right)^2}{2} - F.y + F_v.\left(x - \frac{L}{4}\right) - \frac{q.\left(x - \frac{L}{4}\right)^2}{2}$$

Simplificando,

$$M(x) = -M_v + \frac{4.q.L^2}{32} - \frac{F_v.L}{4} - \frac{q.L^2}{32} - F.y + F_v.x - \frac{F_v.L}{4} - \frac{q.x^2}{2} + \frac{q.x.L}{4} - \frac{q.L^2}{32}$$

$$M(x) = -M_v + \frac{q.L^2}{16} - \frac{F_v.L}{2} - F.y + F_v.x - \frac{q.x^2}{2} + \frac{q.x.L}{4}$$

A equação acima difere da encontrada por LEMMON, 2002:

$$M_z = -M_v - \frac{F_v.L}{2} + \frac{wb.L.x}{2} - \frac{wb.x^2}{2} - T.y$$

A equação encontrada não está de acordo com LEMMON, 2002.

Plano Horizontal

Em LEMMON, 2002 são apresentadas equações do momento fletor divididas em tramos.

A Figura 12.8 mostra os esforços solicitantes no *turnover* para o plano vertical:

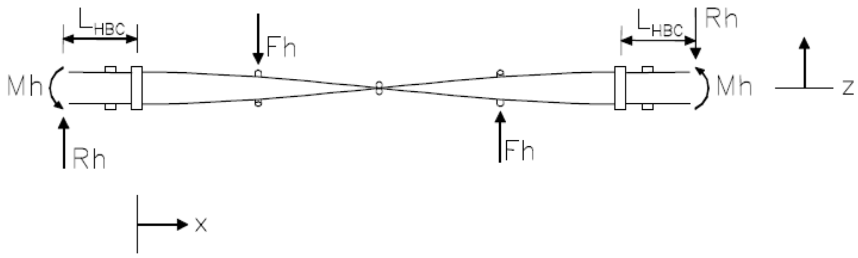


Figura 12.8- Forças no plano horizontal. LEMMON, 2002

Na Figura 12.8, vê-se que Lemmon não exibiu o esforço de tração da correia, apesar de tê-lo considerado no equacionamento.

São apresentadas por Lemmon as seguintes equações para o cálculo do momento fletor no plano horizontal:

Para $\mathrm{x} = -\mathrm{L_{HBC}}$ até $\mathrm{x} = {}^{\mathrm{L}}/_{4}$,

$$\mathrm{M_Y} = -\mathrm{M_H} + \mathrm{R_H}.(\mathrm{L_{HBC}} + \mathrm{x}) - \mathrm{T.z}$$

Para $\mathrm{x} = {}^{\mathrm{L}}/_{4}$ até $\mathrm{x} = {}^{\mathrm{L}}/_{2}$,

$$\mathrm{M_Y} = -\mathrm{M_H} + \mathrm{R_H}.(\mathrm{L_{HBC}} + \mathrm{x}) - \mathrm{F_H}.\left(\mathrm{x} - \frac{\mathrm{L}}{4}\right) - \mathrm{T.z}$$

Em que,

$$M_{\mathrm{H}} = \mathrm{R_H}.\left(\mathrm{L_{HBC}} + \frac{\mathrm{L}}{2}\right) - \frac{F_{\mathrm{H}}.\mathrm{L}}{4}$$

Modelo Adotado

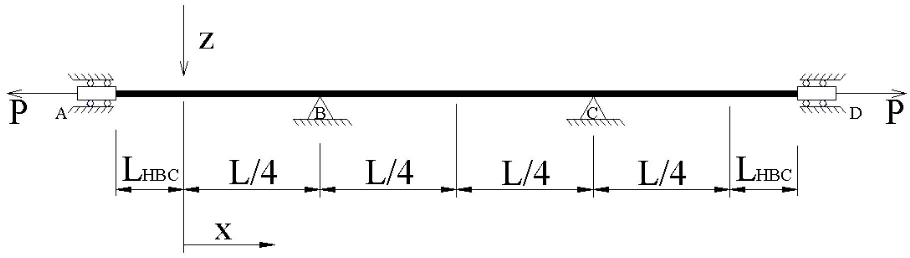


Figura 12.9 - Modelo Adotado

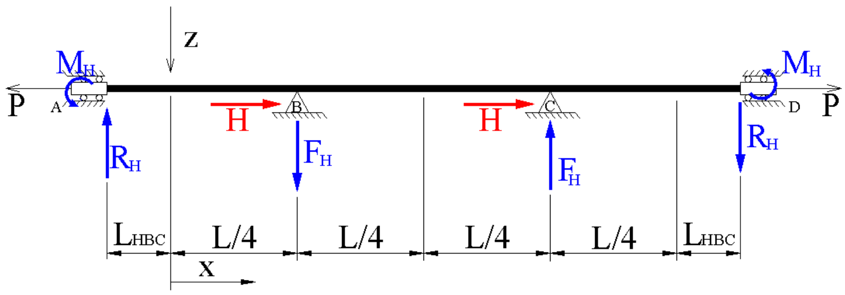


Figura 12.10 - Reações de Apoio

Vê-se que o modelo apresentado na Figura 12.10 possui 8 incógnitas e através da estática são possíveis apenas 3 equações. Assim o modelo é hiperestático, com grau de hiperestaticidade igual a 5. Serão usados alguns métodos para tornar o modelo isostático.

Existe um eixo de antissimetria de carregamento, assim pode reduzir o grau de hiperestaticidade para 1.

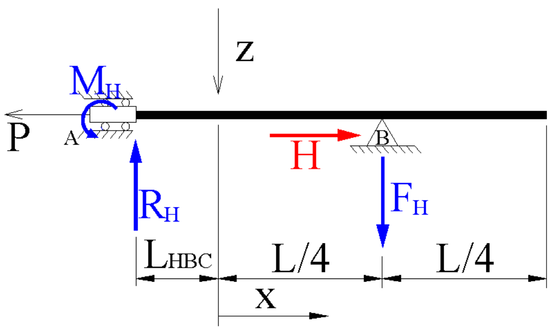


Figura 12.11 - Modelo simplificado

A partir das equações da estática,

$$\sum F_{vericais} = 0 \rightarrow R_v = F_H$$

A equação do momento fletor para o primeiro tramo:

Para $x = -L_{HBC}$ até $x = {}^{L}/_{4}$,

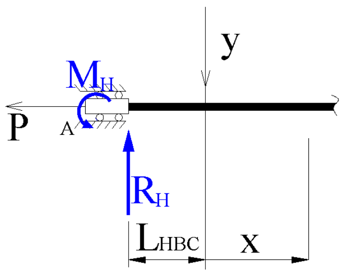


Figura 12.12 - Primeiro tramo

$$M(x) = -M_H + R_v.(L_{HBC} + x) - P.z$$

A equação encontrada está de acordo com a equação apresentada em LEMMON, 2002.

A equação do momento fletor para o segundo tramo:

Para $x = {}^{L}/_{4}$ até $x = {}^{L}/_{2}$,

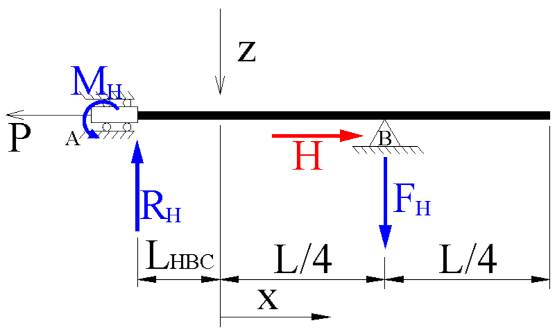


Figura 12.13 - Segundo tramo

$$M(x) = M({}^{L}/_{4}) - F_H.\left(x - \frac{L}{4}\right)$$

$$M(x) = -M_H + R_H.(L_{HBC} + x) - P.z - F_H.\left(x - \frac{L}{4}\right)$$

A equação encontrada está de acordo com a equação apresentada em LEMMON, 2002.

Sabe-se que no ponto $x = {}^{L}/_{2}$ o momento fletor na viga é igual a zero, basta observar a antissimetria do carregamento.

Assim,

$$M({}^{L}/_{2}) = 0$$

$$M({}^{L}/_{2}) = -M_H + R_H.\left(L_{HBC} + \frac{L}{2}\right) - P.z - F_H.\left(\frac{L}{2} - \frac{L}{4}\right) = 0$$

$$M({}^{L}/_{2}) = -M_H + R_H.\left(L_{HBC} + \frac{L}{2}\right) - P.z - F_H.\frac{L}{4} = 0$$

$$M_H = R_H.\left(L_{HBC} + \frac{L}{2}\right) - P.z - F_H.\frac{L}{4}$$

A equação encontrada está de acordo com a equação apresentada em LEMMON, 2002 se for admitida a hipótese que o momento fletor causado pela parcela $-P.z$ seja nulo. Caso contrário, LEMMON, 2002, por algum motivo, omitiu a referida parcela.

12.6 Espessura Equivalente

Uma aproximação da espessura da correia, t_{belt}, pode ser determinada pela fórmula a seguir:

$$t_{belt} < 0{,}521.\sqrt[3]{\frac{NC.d_c}{bw}}$$

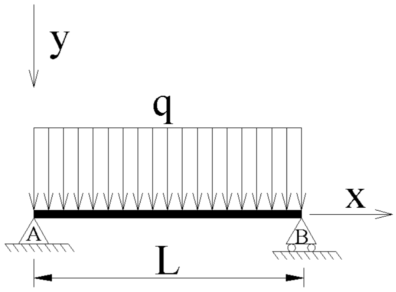
A expressão usada por LEMMON, 2002 resulta em um adimensional, entretanto, sabe-se que a espessura real da correia normalmente está compreendida entre 20 e 40 milímetros.

Não foi possível demonstrar a expressão da Espessura Equivalente, esta expressão pode ter vindo de algum conhecimento a partir de dados medidos em campo ou ensaios feitos por Lemmon, R..

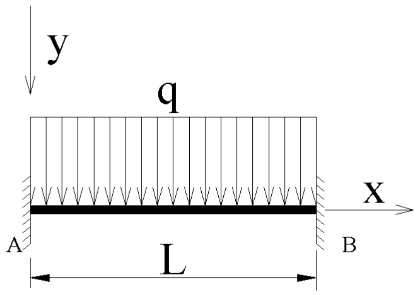
13. ANEXO D – VERIFICAÇÃO DOS MODELOS DE SAG

Na capítulo 4 foram determinadas as equações do SAG para dois modelos: Bi-apoiado e Bi-engastado. Para verificar toda a dedução algébrica dos modelos foi calculado o limite das expressões do SAG quando o esforço de tração P tende a zero.

Quando P tende a zero, a equação do SAG deve recuperar as equações clássicas da Mecânica dos Sólidos, as quais são apresentadas a seguir:



$$y_{máx} = \frac{5.q.l^4}{384.E.I}$$



$$y_{máx} = \frac{q.l^4}{384.E.I}$$

13.1 Modelo Bi-apoiado

A partir do desenvolvimento apresentado no capítulo 4, o SAG para o modelo bi-apoiado pode ser calculado através da seguinte expressão:

$$y\left({}^{l}/_{2}\right) = \frac{q.E.I}{P^2}.\left(\frac{2.e^{k.\frac{l}{2}}}{e^{k.l}+1} - 1\right) + \frac{q.l^2}{8.P}$$

Define-se a função:

$$f(P) = e^{k.\frac{l}{2}} = e^{\sqrt{\frac{P}{E.I}}.\frac{l}{2}}$$

Substituindo na expressão do SAG e colocando a primeira parcela sobre um denominador comum, tem-se:

$$y\left({}^{l}/_{2}\right)=\frac{q.E.I}{P^2}.\left(\frac{2.e^{\sqrt{\frac{P}{E.I}}.\frac{l}{2}}-\left(e^{\sqrt{\frac{P}{E.I}}.\frac{l}{2}}\right)^2-1}{\left(e^{\sqrt{\frac{P}{E.I}}.\frac{l}{2}}\right)^2+1}\right)+\frac{q.l^2}{8.P}$$

Simplificando,

$$y\left({}^{l}/_{2}\right)=\frac{q.E.I}{P^2}.\left(\frac{2.f(P)-f^2(P)-1}{f^2(P)+1}\right)+\frac{q.l^2}{8.P}$$

Manipulando algebricamente a função $f(P)$:

$$\frac{P}{E.I}=\frac{4}{l^2}.\ln^2 f(P)$$

E ainda,

$$P=\frac{4.E.I}{l^2}.\ln^2 f(P)$$

Substituindo as duas expressões obtidas a partir de $f(P)$ na fórmula do SAG, tem-se:

$$y\left({}^{l}/_{2}\right)=\frac{q.l^4}{16.E.I.\ln^4 f(P)}.\left(\frac{2.f(P)-f^2(P)-1}{f^2(P)+1}\right)+\frac{q.l^4}{32.E.I.\ln^2 f(P)}$$

Simplificando,

$$y\left({}^{l}/_{2}\right)=\frac{q.l^4}{16.E.I}.\left(\frac{2.f(P)-f^2(P)-1}{\ln^4 f(P).(f^2(P)+1)}+\frac{1}{2.\ln^2 f(P)}\right)$$

$$y\left({}^{l}/_{2}\right)=\frac{q.l^4}{16.E.I}.\left(\frac{4.f(P)-2.f^2(P)-2+(f^2(P)+1).\ln^2 f(P)}{2.\ln^4 f(P).(f^2(P)+1)}\right)$$

Expandindo a expressão:

$$y\left({}^{l}/_{2}\right)=\frac{q.l^4}{16.E.I}.\left(\frac{4.f(P)-2.f^2(P)-2+f^2(P).\ln^2 f(P)+\ln^2 f(P)}{2.\ln^4 f(P).(f^2(P)+1)}\right)$$

Neste momento toda a expressão está em função de $f(P)$.

Continuando,

$$\lim_{P\to 0} y\left({}^{l}/_{2}\right)=\lim_{P\to 0}\frac{q.l^4}{16.E.I}.\left(\frac{4.f(P)-2.f^2(P)-2+f^2(P).\ln^2 f(P)+\ln^2 f(P)}{2.\ln^4 f(P).(f^2(P)+1)}\right)$$

$$\lim_{P\to 0} y\left({}^{l}/_{2}\right)=\frac{q.l^4}{16.E.I}.\lim_{P\to 0}\left(\frac{4.f(P)-2.f^2(P)-2+f^2(P).\ln^2 f(P)+\ln^2 f(P)}{2.\ln^4 f(P).(f^2(P)+1)}\right)$$

A primeira parcela do produto é constante em relação a P, portanto, pode sair do limite.

Agora deve-se encontrar o seguinte limite,

$$\lim_{P\to 0}\left(\frac{4.f(P)-2.f^2(P)-2+f^2(P).\ln^2 f(P)+\ln^2 f(P)}{2.\ln^4 f(P).(f^2(P)+1)}\right)$$

Sabe-se que,

$$\lim_{P\to 0} f(P)=1$$

Fazendo uma substituição de variáveis, tem-se:

$$\lim_{f(P)\to 1}\left(\frac{4.f(P)-2.f^2(P)-2+f^2(P).\ln^2 f(P)+\ln^2 f(P)}{2.\ln^4 f(P).(f^2(P)+1)}\right)$$

Neste momento encontra-se uma indeterminação,

$$\lim_{f(P)\to 1}\left(\frac{4.f(P)-2.f^2(P)-2+f^2(P).\ln^2 f(P)+\ln^2 f(P)}{2.\ln^4 f(P).(f^2(P)+1)}\right)=\frac{0}{0}$$

Aplicar-se-á a regra de L´Hopital:

Primeira Iteração:

- Derivada do numerador:

$$4-4.f(P)+\frac{2.\ln f(P)}{f(P)}+2.f(P).\ln f(P)+2.f(P).\ln f(P)^2$$

- Derivada do denominador:

$$\frac{8.\ln f(P)^3}{f(P)}+8.f(P).\ln f(P)^3+4.f(P).\ln f(P)^4$$

A indeterminação ainda permanece.

Segunda Iteração:

- Derivada do numerador:

$$-2+\frac{2}{f(P)^2}+6.\ln f(P)-\frac{2.\ln f(P)}{f(P)^2}+2.\ln f(P)^2$$

- Derivada do denominador:

$$24.\ln f(P)^2+\frac{24.\ln f(P)^2}{f(P)^2}+24.\ln f(P)^3-\frac{8.\ln f(P)^3}{f(P)^2}+4.\ln f(P)^4$$

A indeterminação ainda permanece.

Terceira Iteração:

- Derivada do numerador:

$$-\frac{6}{f(P)^3}+\frac{6}{f(P)}+\frac{4.\ln f(P)}{f(P)^3}+\frac{4.\ln f(P)}{f(P)}$$

- Derivada do denominador:

$$\frac{48.\ln f(P)}{f(P)^3}+\frac{48.\ln f(P)}{f(P)}-\frac{72.\ln f(P)^2}{f(P)^3}+\frac{72.\ln f(P)^2}{f(P)}+\frac{16.\ln f(P)^3}{f(P)^3}+\frac{16.\ln f(P)^3}{f(P)}$$

A indeterminação ainda permanece.

Quarta Iteração:

- Derivada do numerador:

$$\frac{22}{f(P)^4}-\frac{2}{f(P)^2}-\frac{12.\ln f(P)}{f(P)^4}-\frac{4.\ln f(P)}{f(P)^2}$$

- Derivada do denominador:

$$\frac{48}{f(P)^4}+\frac{48}{f(P)^2}-\frac{288.\ln f(P)}{f(P)^4}+\frac{96.\ln f(P)}{f(P)^2}+\frac{264.\ln f(P)^2}{f(P)^4}-\frac{24.\ln f(P)^2}{f(P)^2}-\frac{48.\ln f(P)^3}{f(P)^4}-\frac{16.\ln f(P)^3}{f(P)^2}$$

Após a quarta iteração, tem-se o seguinte limite a ser determinado:

$$\lim_{f(P)\to 1}\left(\frac{\frac{22}{f(P)^4}-\frac{2}{f(P)^2}-\frac{12.\ln f(P)}{f(P)^4}-\frac{4.\ln f(P)}{f(P)^2}}{\frac{48}{f(P)^4}+\frac{48}{f(P)^2}-\frac{288.\ln f(P)}{f(P)^4}+\frac{96.\ln f(P)}{f(P)^2}+\frac{264.\ln f(P)^2}{f(P)^4}-\frac{24.\ln f(P)^2}{f(P)^2}-\frac{48.\ln f(P)^3}{f(P)^4}-\frac{16.\ln f(P)^3}{f(P)^2}}\right)$$

Lembrando que:

$$\lim_{P\to 0} f(P)=1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{f(P)\to 1}\ln f(P)=0$$

Simplificando a expressão, uma vez que, $\lim_{f(P)\to 1}\ln f(P)=0$, tem-se:

$$\lim_{f(P)\to 1}\left(\frac{\frac{22}{f(P)^4}-\frac{2}{f(P)^2}}{\frac{48}{f(P)^4}+\frac{48}{f(P)^2}}\right)=\frac{22-2}{48+48}=\frac{20}{96}=\frac{5}{24}$$

Finalmente,

$$\lim_{P\to 0} y\left({}^{l}/_{2}\right) = \frac{q.l^4}{16.E.I}.\frac{5}{24} = \frac{5.q.l^4}{384.E.I}$$

Assim, o resultado obtido recupera a equação clássica da deflexão no ponto médio de uma viga bi-apoiada com carregamento distribuído constante.

13.2 Modelo Bi-engastado

A partir do desenvolvimento apresentado no relatório parcial, o SAG para o modelo bi-engastado pode ser calculado através da seguinte expressão:

$$y\left({}^{l}/_{2}\right) = \frac{q.E.I}{P^2}.\left(\frac{2.e^{k.\frac{l}{2}}}{e^{k.l}+1} - 1\right) + \frac{q.l^2}{6.P}.\left(\frac{e^{k.\frac{l}{2}}}{e^{k.l}+1} + \frac{1}{4}\right)$$

Define-se a função:

$$f(P) = e^{k.\frac{l}{2}} = e^{\sqrt{\frac{P}{E.I}}.\frac{l}{2}}$$

Manipulando algebricamente a função $f(P)$:

$$\frac{P}{E.I} = \frac{4}{l^2}.\ln^2 f(P)$$

E ainda,

$$P = \frac{4.E.I}{l^2}.\ln^2 f(P)$$

Substituindo na expressão do SAG e colocando a primeira parcela sobre um denominador comum, simplificando, tem-se:

$$y\left({}^{l}/_{2}\right) = \frac{q.l^4}{16.E.I.\ln^4 f(P)}.\left(\frac{2.e^{k.\frac{l}{2}} - e^{k.l} - 1}{e^{k.l}+1}\right) + \frac{q.l^4}{24.E.I.\ln^2 f(P)}.\left(\frac{4.e^{k.\frac{l}{2}} + e^{k.l} + 1}{4.(e^{k.l}+1)}\right)$$

$$y\left({}^{l}/_{2}\right) = \frac{q.l^4}{96.E.I}.\left(\frac{12.e^{k.\frac{l}{2}} - 6.e^{k.l} - 6}{\ln^4 f(P).(e^{k.l}+1)}\right) + \frac{q.l^4}{96.E.I}.\left(\frac{4.e^{k.\frac{l}{2}} + e^{k.l} + 1}{\ln^2 f(P).(e^{k.l}+1)}\right)$$

$$y\left({}^{l}/_{2}\right) = \frac{q.l^4}{96.E.I}.\left[\left(\frac{12.e^{k.\frac{l}{2}} - 6.e^{k.l} - 6}{\ln^4 f(P).(e^{k.l}+1)}\right) + \left(\frac{\ln^2 f(P).\left(4.e^{k.\frac{l}{2}} + e^{k.l} + 1\right)}{\ln^4 f(P).(e^{k.l}+1)}\right)\right]$$

$$y\left({}^{l}/_{2}\right) = \frac{q.l^4}{96.E.I}.\left[\left(\frac{12.e^{k.\frac{l}{2}} - 6.e^{k.l} - 6 + 4.\ln^2 f(P).e^{k.\frac{l}{2}} + \ln^2 f(P).e^{k.l} + \ln^2 f(P)}{\ln^4 f(P).(e^{k.l}+1)}\right)\right]$$

$$y\left({}^{l}\!/_{2}\right) = \frac{q.l^4}{96.E.I}.\left[\left(\frac{12.f(P) - 6.f(P)^2 - 6 + 4.\ln^2 f(P).f(P) + \ln^2 f(P).f(P)^2 + \ln^2 f(P)}{\ln^4 f(P).f(P)^2 + \ln^4 f(P)}\right)\right]$$

Neste momento toda a expressão está em função de $f(P)$.

Sabe-se que,

$$\lim_{P\to 0} f(P) = 1$$

Fazendo uma substituição de variáveis, tem-se:

$$\lim_{P\to 0} y\left({}^{l}\!/_{2}\right) = \lim_{f(P)\to 1} \frac{q.l^4}{96.E.I}.\left[\left(\frac{12.f(P) - 6.f(P)^2 - 6 + 4.\ln^2 f(P).f(P) + \ln^2 f(P).f(P)^2 + \ln^2 f(P)}{\ln^4 f(P).f(P)^2 + \ln^4 f(P)}\right)\right]$$

$$\lim_{P\to 0} y\left({}^{l}\!/_{2}\right) = \frac{0}{0}$$

Neste momento encontra-se uma indeterminação,

Aplicar-se-á a regra de L´Hopital:

Primeira Iteração:

- Derivada do numerador:

$$12 - 12.f(P) + 8.\ln f(P) + \frac{2.\ln f(P)}{f(P)} + 2.f(P).\ln f(P) + 4.\ln f(P)^2 + 2.f(P).\ln f(P)^2$$

- Derivada do denominador:

$$\frac{4.\ln f(P)^3}{f(P)} + 4.f(P).\ln f(P)^3 + 2.f(P).\ln f(P)^4$$

A indeterminação ainda permanece.

Segunda Iteração:

- Derivada do numerador:

$$-10 + \frac{2}{f(P)^2} + \frac{8}{f(P)} + 6.\ln f(P) - \frac{2.\ln f(P)}{f(P)^2} + \frac{8.\ln f(P)}{f(P)} + 2.\ln f(P)^2$$

- Derivada do denominador:

$$12.\ln f(P)^2 + \frac{12.\ln f(P)^2}{f(P)^2} + 12.\ln f(P)^3 - \frac{4.\ln f(P)^3}{f(P)^2} + 2.\ln f(P)^4$$

A indeterminação ainda permanece.

Terceira Iteração:

- Derivada do numerador:

$$-\frac{6}{f(P)^3}+\frac{6}{f(P)}+\frac{4.\ln f(P)}{f(P)^3}-\frac{8.\ln f(P)}{f(P)^2}+\frac{4\,.\ln f(P)}{f(P)}$$

- Derivada do denominador:

$$\frac{24.\ln f(P)}{f(P)^3}+\frac{24\,.\ln f(P)}{f(P)}-\frac{36\,.\ln f(P)^2}{f(P)^3}+\frac{36.\ln f(P)^2}{f(P)}+\frac{8.\ln f(P)^3}{f(P)^3}+\frac{8\,.\ln f(P)^3}{f(P)}$$

A indeterminação ainda permanece.

Quarta Iteração:

- Derivada do numerador:

$$\frac{22}{f(P)^4}-\frac{8}{f(P)^3}-\frac{2}{f(P)^2}-\frac{12\,.\ln f(P)}{f(P)^4}+\frac{16\,.\ln f(P)}{f(P)^3}-\frac{4\,.\ln f(P)}{f(P)^2}$$

- Derivada do denominador:

$$\frac{24}{f(P)^4}+\frac{24}{f(P)^2}-\frac{144.\ln f(P)}{f(P)^4}+\frac{48\,.\ln f(P)}{f(P)^2}+\frac{132.\ln f(P)^2}{f(P)^4}-\frac{12.\ln f(P)^2}{f(P)^2}-\frac{24.\ln f(P)^3}{f(P)^4}-\frac{8.\ln f(P)^3}{f(P)^2}$$

Após a quarta iteração, tem-se o seguinte limite a ser determinado:

$$\lim_{f(P)\to 1}\left(\frac{\frac{22}{f(P)^4}-\frac{8}{f(P)^3}-\frac{2}{f(P)^2}-\frac{12\,.\ln f(P)}{f(P)^4}+\frac{16\,.\ln f(P)}{f(P)^3}-\frac{4\,.\ln f(P)}{f(P)^2}}{\frac{24}{f(P)^4}+\frac{24}{f(P)^2}-\frac{144.\ln f(P)}{f(P)^4}+\frac{48\,.\ln f(P)}{f(P)^2}+\frac{132.\ln f(P)^2}{f(P)^4}-\frac{12.\ln f(P)^2}{f(P)^2}-\frac{24.\ln f(P)^3}{f(P)^4}-\frac{8.\ln f(P)^3}{f(P)^2}}\right)$$

Lembrando que:

$$\lim_{P\to 0} f(P)=1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{f(P)\to 1} \ln f(P)=0$$

Simplificando a expressão, uma vez que, $\lim_{f(P)\to 1} \ln f(P)=0$, tem-se:

$$\lim_{f(P)\to 1}\left(\frac{\frac{22}{f(P)^4}-\frac{8}{f(P)^3}-\frac{2}{f(P)^2}}{\frac{24}{f(P)^4}+\frac{24}{f(P)^2}}\right)=\frac{22-8-2}{24+24}=\frac{12}{48}=\frac{1}{4}$$

Finalmente,

$$\lim_{P \to 0} y\left({}^{l}/_{2}\right) = \frac{q.l^4}{96.E.I}.\frac{1}{4} = \frac{q.l^4}{384.E.I}$$

Assim, o resultado obtido recupera a equação clássica da deflexão no ponto médio de uma viga bi-engastada com carregamento distribuído constante.

14. ANEXO E – TABELA DE CÁLCULO

Tabela 14.1 - Valores Calculados

N° do Cabo	Posição relativa ao centro	Raio (mm)	Alfa (Graus)	Força no cabo (N)	Deformação	Delta L (mm)	Momento torçor (N.m)
1	-51	1045,5	2,67	8961,166	0,0005433	38,30	436,01610
2	-50	1025,0	2,62	8960,789	0,0005433	38,30	419,08506
3	-49	1004,5	2,56	8960,420	0,0005433	38,30	402,48930
4	-48	984,0	2,51	8960,058	0,0005433	38,30	386,22879
5	-47	963,5	2,46	8959,703	0,0005432	38,30	370,30356
6	-46	943,0	2,41	8959,356	0,0005432	38,30	354,71360
7	-45	922,5	2,35	8959,017	0,0005432	38,29	339,45890
8	-44	902,0	2,30	8958,684	0,0005432	38,29	324,53947
9	-43	881,5	2,25	8958,360	0,0005431	38,29	309,95531
10	-42	861,0	2,20	8958,042	0,0005431	38,29	295,70642
10	-42	861,0	2,20	8958,042	0,0005431	38,29	295,70642
11	-41	840,5	2,14	8957,733	0,0005431	38,29	281,79280
12	-40	820,0	2,09	8957,430	0,0005431	38,29	268,21444
13	-39	799,5	2,04	8957,135	0,0005431	38,29	254,97135
14	-38	779,0	1,99	8956,848	0,0005431	38,29	242,06353
15	-37	758,5	1,94	8956,568	0,0005430	38,28	229,49098
16	-36	738,0	1,88	8956,296	0,0005430	38,28	217,25370
17	-35	717,5	1,83	8956,031	0,0005430	38,28	205,35168
18	-34	697,0	1,78	8955,773	0,0005430	38,28	193,78493
19	-33	676,5	1,73	8955,523	0,0005430	38,28	182,55345
20	-32	656,0	1,67	8955,280	0,0005430	38,28	171,65724
21	-31	635,5	1,62	8955,045	0,0005429	38,28	161,09630
22	-30	615,0	1,57	8954,817	0,0005429	38,28	150,87062
23	-29	594,5	1,52	8954,597	0,0005429	38,28	140,98022
24	-28	574,0	1,47	8954,384	0,0005429	38,28	131,42508
25	-27	553,5	1,41	8954,179	0,0005429	38,27	122,20520
26	-26	533,0	1,36	8953,981	0,0005429	38,27	113,32060
27	-25	512,5	1,31	8953,790	0,0005429	38,27	104,77127
28	-24	492,0	1,26	8953,607	0,0005429	38,27	96,55720
29	-23	471,5	1,20	8953,432	0,0005429	38,27	88,67840
30	-22	451,0	1,15	8953,264	0,0005428	38,27	81,13487
31	-21	430,5	1,10	8953,103	0,0005428	38,27	73,92661
32	-20	410,0	1,05	8952,950	0,0005428	38,27	67,05361
33	-19	389,5	0,99	8952,805	0,0005428	38,27	60,51588
34	-18	369,0	0,94	8952,666	0,0005428	38,27	54,31342
35	-17	348,5	0,89	8952,536	0,0005428	38,27	48,44623
36	-16	328,0	0,84	8952,412	0,0005428	38,27	42,91431
37	-15	307,5	0,79	8952,297	0,0005428	38,27	37,71766
38	-14	287,0	0,73	8952,188	0,0005428	38,27	32,85627
39	-13	266,5	0,68	8952,088	0,0005428	38,27	28,33015
40	-12	246,0	0,63	8951,994	0,0005428	38,26	24,13930
41	-11	225,5	0,58	8951,908	0,0005428	38,26	20,28372
42	-10	205,0	0,52	8951,830	0,0005428	38,26	16,76340
43	-9	184,5	0,47	8951,759	0,0005427	38,26	13,57836
44	-8	164,0	0,42	8951,695	0,0005427	38,26	10,72858
45	-7	143,5	0,37	8951,639	0,0005427	38,26	8,21407
46	-6	123,0	0,31	8951,591	0,0005427	38,26	6,03482
47	-5	102,5	0,26	8951,550	0,0005427	38,26	4,19085
48	-4	82,0	0,21	8951,516	0,0005427	38,26	2,68214
49	-3	61,5	0,16	8951,490	0,0005427	38,26	1,50871
50	-2	41,0	0,10	8951,471	0,0005427	38,26	0,67054
51	-1	20,5	0,05	8951,460	0,0005427	38,26	0,16763

52	0	0,0	0,00	8951,456	0,0005427	38,26	0,00000
53	1	20,5	0,05	8951,460	0,0005427	38,26	0,16763
54	2	41,0	0,10	8951,471	0,0005427	38,26	0,67054
55	3	61,5	0,16	8951,490	0,0005427	38,26	1,50871
56	4	82,0	0,21	8951,516	0,0005427	38,26	2,68214
57	5	102,5	0,26	8951,550	0,0005427	38,26	4,19085
58	6	123,0	0,31	8951,591	0,0005427	38,26	6,03482
59	7	143,5	0,37	8951,639	0,0005427	38,26	8,21407
60	8	164,0	0,42	8951,695	0,0005427	38,26	10,72858
61	9	184,5	0,47	8951,759	0,0005427	38,26	13,57836
62	10	205,0	0,52	8951,830	0,0005428	38,26	16,76340
63	11	225,5	0,58	8951,908	0,0005428	38,26	20,28372
64	12	246,0	0,63	8951,994	0,0005428	38,26	24,13930
65	13	266,5	0,68	8952,088	0,0005428	38,27	28,33015
66	14	287,0	0,73	8952,188	0,0005428	38,27	32,85627
67	15	307,5	0,79	8952,297	0,0005428	38,27	37,71766
68	16	328,0	0,84	8952,412	0,0005428	38,27	42,91431
69	17	348,5	0,89	8952,536	0,0005428	38,27	48,44623
70	18	369,0	0,94	8952,666	0,0005428	38,27	54,31342
71	19	389,5	0,99	8952,805	0,0005428	38,27	60,51588
72	20	410,0	1,05	8952,950	0,0005428	38,27	67,05361
73	21	430,5	1,10	8953,103	0,0005428	38,27	73,92661
74	22	451,0	1,15	8953,264	0,0005428	38,27	81,13487
75	23	471,5	1,20	8953,432	0,0005429	38,27	88,67840
76	24	492,0	1,26	8953,607	0,0005429	38,27	96,55720
77	25	512,5	1,31	8953,790	0,0005429	38,27	104,77127
78	26	533,0	1,36	8953,981	0,0005429	38,27	113,32060
79	27	553,5	1,41	8954,179	0,0005429	38,27	122,20520
80	28	574,0	1,47	8954,384	0,0005429	38,28	131,42508
81	29	594,5	1,52	8954,597	0,0005429	38,28	140,98022
82	30	615,0	1,57	8954,817	0,0005429	38,28	150,87062
83	31	635,5	1,62	8955,045	0,0005429	38,28	161,09630
84	32	656,0	1,67	8955,280	0,0005430	38,28	171,65724
85	33	676,5	1,73	8955,523	0,0005430	38,28	182,55345
86	34	697,0	1,78	8955,773	0,0005430	38,28	193,78493
87	35	717,5	1,83	8956,031	0,0005430	38,28	205,35168
88	36	738,0	1,88	8956,296	0,0005430	38,28	217,25370
89	37	758,5	1,94	8956,568	0,0005430	38,28	229,49098
90	38	779,0	1,99	8956,848	0,0005431	38,29	242,06353
91	39	799,5	2,04	8957,135	0,0005431	38,29	254,97135
92	40	820,0	2,09	8957,430	0,0005431	38,29	268,21444
93	41	840,5	2,14	8957,733	0,0005431	38,29	281,79280
94	42	861,0	2,20	8958,042	0,0005431	38,29	295,70642
95	43	881,5	2,25	8958,360	0,0005431	38,29	309,95531
96	44	902,0	2,30	8958,684	0,0005432	38,29	324,53947
97	45	922,5	2,35	8959,017	0,0005432	38,29	339,45890
98	46	943,0	2,41	8959,356	0,0005432	38,30	354,71360
99	47	963,5	2,46	8959,703	0,0005432	38,30	370,30356
100	48	984,0	2,51	8960,058	0,0005433	38,30	386,22879
101	49	1004,5	2,56	8960,420	0,0005433	38,30	402,48930
102	50	1025,0	2,62	8960,789	0,0005433	38,30	419,08506
103	51	1045,5	2,67	8961,166	0,0005433	38,30	436,01610

15. ANEXO F – COMANDOS PATRAN/NASTRAN

A seguir são apresentados e explicados alguns comandos utilizados nos programas dos modelos propostos, de acordo com a referência Linear Static Analysis User's Guide, 2008:

CQUAD4:
The connectivity of the CQUAD4 and the CTRIA3 elements are entered on the CQUAD4 and CTRIA3 entries, respectively. The format of the Bulk Data entry CQUAD4 in the MD/MSC Nastran Quick Reference Guide is as follows:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
CQUAD4	EID	PID	G1	G2	G3	G4	THETA or MCID	ZOFFS	
			T1	T2	T3	T4			

EID Element identification number.
PID Property identification number of a PSHELL entry.
Gi Grid point identification numbers of connection points.
THETA Material property orientation angle in degrees.
MCID Material coordinate system identification number.
ZOFFS Offset from the surface of grid points to the element reference plane.
Ti Membrane thickness of element at grid points G1 through G4.

CROD:
The CROD element is a straight prismatic element (the properties are constant along the length) that has only axial and torsional stiffness. The CROD element is the simplest element of all the elements that have geometry (the scalar elements are simpler; however, they do not have geometry associated with them). If desired, the CBAR or CBEAM element can be used to represent a rod member; however, these elements are somewhat more difficult to define because you need to specify an element coordinate system explicitly. If you need an element with only tension-compression and torsion, the CROD element is an ideal choice. The format of the Bulk Data entry CROD in the MD/MSC Nastran Quick Reference Guide is as follows:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
CROD	EID	PID	G1	G2					

EID Element identification number.
PID Property identification number of a PROD entry.
G1, G2 Grid point identification numbers of connection points.

FORCE

Concentrated forces can be applied directly to the grid points with the FORCE, FORCE1, and FORCE2 entries. The FORCE entry is the most commonly used entry and is the one used in most of the examples to this point. The Bulk Data entry FORCE in the MD/MSC Nastran Quick Reference Guide allows you to specify the magnitude and direction of a force vector in any coordinate system.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
FORCE	SID	G	CID	F	N1	N2	N3		

SID Load set identification number.
G Grid point identification number.
CID Coordinate system identification number.
F Scale factor.
Ni Components of a vector measured in coordinate system defined by CID.

GRID

The Bulk Data entry GRID in the MD/MSC Nastran Quick Reference Guide is used to identify a grid point, specify the location of the grid point in space with respect to a reference coordinate system, assign permanent constraints, and define the directions of motions at the grid point. The format of the grid point entry is as follows:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
GRID	ID	CP	X1	X2	X3	CD	PS	SEID	

ID Grid point identification number.
CP Identification number of coordinate system in which the location of the grid point is defined.
X1, X2, X3 Location of the grid point in coordinate system CP.
CD Identification number of coordinate system in which the displacements, degrees of freedom, constraints, and solution vectors are defined at the grid point.
PS Permanent single-point constraints associated with the grid point.
SEID Superelement identification number.

MAT1

The MAT1 entry may also be used to define the mass density, coefficient of thermal expansion, and stress limits. The mass properties are only required in static analysis when a gravity loading or rotating force is used; however, they are useful for model checkout with any loading condition (of course, they are very important for dynamic analysis). The format of the Bulk Data entry MAT1 in the MD/MSC Nastran Quick Reference Guide is as follows:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
MAT1	MID	E	G	NU	RHO	A	TREF	GE	
	ST	SC	SS	MCSID					

MID Material identification number
E Young's modulus
G Shear modulus
NU Poisson's ratio
RHO Mass density
A Thermal expansion coefficient
TREF Reference temperature
ST, SC, SS Stress limits for tension, compression, and shear
MCSID Material coordinate system identification number

PROD
Declaração das propriedades da CROD.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
PROD	PID	MID	A	J	C	NSM			

PID Property identification number.
MID Material identification number.
A Area of the rod.
J Torsional constant.
C Coefficient to determine torsional stress.
NSM Nonstructural mass per unit length.

PSHELL
Elemento de casca.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
PSHELL	PID	MID1	T	MID2	$12I/T^3$	MID3	TS/T	NSM	
	Z1	Z2	MID4						

PID Property identification number.
MID1 Material identification number for the membrane.
T Default membrane thickness for Ti.
MID2 Material identification number for bending.
12I/T3 Bending moment of inertia ratio 12I/ . Ratio of the actual bending moment inertia of the shell I to the bending moment of inertia of a homogeneous shell /12. The default value is for a homogeneous shell.
MID3 Material identification number for transverse shear.
TS/T Transverse shear thickness ratio TS/T. Ratio of the shear thickness, (TS), to the membrane thickness of the shell T. The default value is for a homogeneous shell.
NSM Nonstructural mass per unit area.

Z1, Z2 Fiber distances for stress calculations. The positive direction is determined by the righthand rule and the order in which the grid points are listed on the connection entry.
MID4 Material identification number for membrane-bending coupling.

SLOAD

The SLOAD entry is used to apply loads to scalar points only-it cannot be used with grid points. The format of the Bulk Data entry SLOAD in the MD/MSC Nastran Quick Reference Guide is as follows:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
SLOAD	SID	S1	F1	S2	F2	S3	F3		

SID Load set identification number.
Si Scalar or grid point identification number.
Fi Load magnitude.

CBAR

The CBAR element is a straight one-dimensional element that connects two grid points. The capabilities and limitations of the CBAR element are as summarized:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
CBAR	EID	PID	GA	GB	X1	X2	X3	OFFT	
	PA	PB	W1A	W2A	W3A	W1B	W2B	W3B	

Alternate Format

CBAR	EID	PID	GA	GB	G0			OFFT	
	PA	PB	W1A	W2A	W3A	W1B	W2B	W3B	

EID Unique element identification number. (0 < Integer < 100,000,000)
PID Property identification number of a PBAR, PBARL or PBRSECT entry. (Integer > 0; Default = EID unless BAROR entry has nonzero entry in field 3.)
GA, GB Grid point identification numbers of connection points. (Integer > 0;)
X1, X2, X3 Components of orientation vector , from GA, in the displacement coordinate system at GA (Default), or in the basic coordinate system.
(Real)

PBAR

The properties of the CBAR elements are entered on the PBAR entry that is identified by the PID entered in field 3. The format of the Bulk Data entry PBAR in the MD/MSC Nastran Quick Reference Guide is as follows:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
PBAR	PID	MID	A	I1	I2	J	NSM		
	C1	C2	D1	D2	E1	E2	F1	F2	
	K1	K2	I12						

PID Property identification number.
MID Material identification number.
A Area of bar cross section.
I1, I2, I12 Area moments of inertia.
J Torsional constant.
NSM Nonstructural mass per unit length.
Ci, Di, Ei, Fi Stress recovery coefficients.
K1, K2 Area factor for shear.

GRAV

The GRAV entry is used to define the direction and magnitude of a gravity vector in any user-defined coordinate system. The components of the gravity vector are multiplied by the mass matrix to obtain the components of the gravity force at each grid point. Since the mass matrix is used to compute the forces, you must have mass in your model, typically defined by the density on a material entry. Note that the GRAV entry must have a unique SID-no other loading entry may use the same ID. The LOAD entry can be used to combine gravity loading with other types of loading. The format of the Bulk Data entry GRAV in the MD/MSC Nastran Quick Reference Guide is as follows:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
GRAV	SID	CID	G	N1	N2	N3			

SID Set identification number.
CID Coordinate system identification number.
G Acceleration vector scale factor.
Ni Acceleration vector components measured in coordinate system CID.

16. ANEXO G - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE EQUILÍBRIO

As equações gerais de equilíbrio de uma barra sob ação de um carregamento genérico e cujo eixo na configuração deformada é descrito por uma curva qualquer no espaço foram relatadas em LOVE, 1944. A notação usada por Love é de difícil entendimento por parte de pesquisadores e estudantes que tomam contato com o assunto pela primeira vez. Desta forma, será utilizada a notação conforme apresentado em RAMOS, 2001, que mostra ser uma forma mais didática de como se obter as equações diferenciais de equilíbrio.

Eixos principais de flexo-torção e direções principais de curvatura

Considera-se, inicialmente, na configuração não-deformada, uma barra prismática de eixo reto, de forma que as linhas homólogas pertencentes a diferentes seções transversais sejam paralelas entre si.

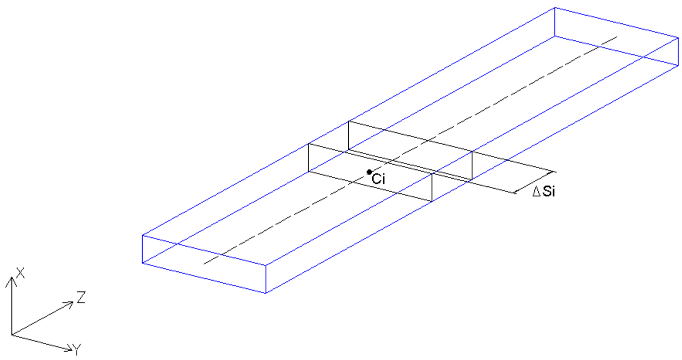


Figura 16.1 - Configuração não-deformada

Se a barra for submetida a torção, sem ser fletida, seu eixo permanecerá reto e os elementos lineares em diferentes seções transversais que na configuração inicial eram paralelos tornam-se inclinados um em relação ao outro.

Na Figura 16.1, define-se o ponto Ci, do qual partem três elementos lineares na direção dos eixos X, Y e Z, portanto, elementos tri-ortogonais ente si.

Designa-se por ΔSi a distância entre as duas seções transversais e por Δfi o ângulo, em radianos, entre as direções destes dois elementos na configuração deformada.

Então, se a barra não estiver sendo fletida, a torção pode ser dada por:

$$k_{ti} = \lim_{\Delta S_i \to 0} \frac{\Delta f_i}{\Delta S_i} = \frac{df_i}{dS_i}$$

Se a barra também estiver sendo fletida, a torção k_{ti} não pode ser calculada de modo tão simples. Neste caso deve-se admitir que o eixo central na configuração deformada torna-se uma curva qualquer no espaço.

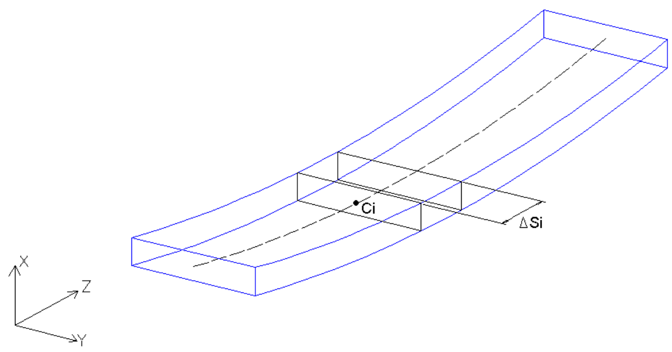


Figura 16.2 - Configuração deformada

Na Figura 16.2, configuração deformada, os três elementos lineares não continuam a ser necessariamente ortogonais entre si devido às distorções que podem existir no ponto entre estas direções.

Através destes três elementos é possível construir para cada seção transversal um novo sistema de eixos ortogonais (x, y, z), com origem no ponto Ci.

O eixo z será definido pela tangente ao eixo central deformado em Ci, o plano (x, z) será definido como o plano que contém o elemento linear que na configuração não-deformada, parte de Ci na direção X. O plano (x, z) será um dos planos principais da barra. O sentido do eixo z é escolhido de tal forma que o comprimento de arco deformado $(\mathrm{S_i})$ do eixo central, medido a partir de um ponto escolhido sobre o eixo aumente. O sentido do eixo x pode ser escolhido arbitrariamente, porém o sentido do eixo y deve ser escolhido de modo que a base formada tenha orientação positiva. Assim, o sistema de eixos $(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ construído para qualquer ponto do eixo central deformado consiste nos eixos principais de flexo-torção da barra naquele ponto.

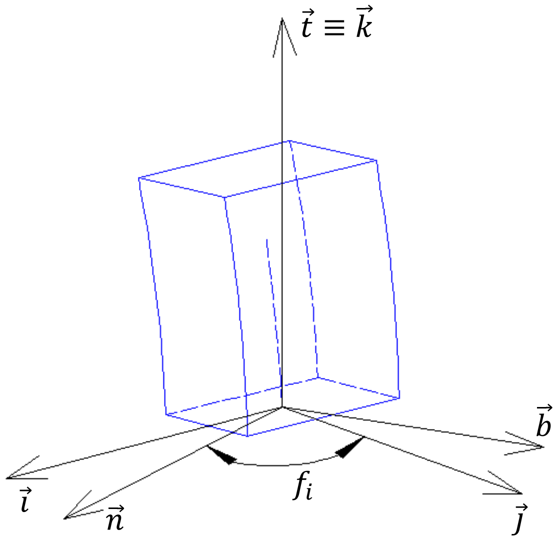


Figura 16.3 - Detalhe do eixo central na configuração deformada

A base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ indica os eixos principais de flexo-torção. Os versores $(\vec{n}, \vec{b}, \vec{t})$ formam o triedro de Frenet. Assim, (y, z) forma o plano de flexão e $(\vec{n}, \vec{b})$ são as direções principais de curvatura.

Define-se f_i, o ângulo formado entre o versor $\vec{n}$ e o plano principal de flexão (y, z).

A matriz de mudança de base pode ser dada da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} f_i & -\cos f_i & 0 \\ \cos f_i & \operatorname{sen} f_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \vec{n} \\ \vec{b} \\ \vec{t} \end{bmatrix}$$

Relações de Frenet:

$$\frac{d\vec{n}}{dS_i} = \tau_i . \vec{b} - \chi_i . \vec{t}$$

$$\frac{d\vec{b}}{dS_i} = \tau_i . \vec{n}$$

$$\frac{d\vec{t}}{dS_i} = \chi_i . \vec{n}$$

Em que, χ_i e τ_i representam, respectivamente, a curvatura e a tortuosidade em um ponto qualquer da curva na configuração deformada.

Derivando a matriz de mudança de base em relação ao comprimento de arco deformado S_i, substituindo as relações de Frenet, por fim, reorganizando os termos, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\vec{i}}{dS_i} \\ \frac{d\vec{j}}{dS_i} \\ \frac{d\vec{k}}{dS_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{df_i}{dS_i} + \tau_i\right).\cos f_i & \left(\frac{df_i}{dS_i} + \tau_i\right).\mathrm{sen}\, f_i & -\chi_i.\mathrm{sen}\, f_i \\ -\left(\frac{df_i}{dS_i} + \tau_i\right).\mathrm{sen}\, f_i & \left(\frac{df_i}{dS_i} + \tau_i\right).\cos f_i & -\chi_i.\cos f_i \\ \chi_i & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \vec{n} \\ \vec{b} \\ \vec{t} \end{bmatrix}$$

Define-se o vetor curvatura:

$$\vec{K_i} = \chi_i.\vec{b} \text{ ou } \vec{K_i} = (-\chi_i.\cos f_i).\vec{i} + (\chi_i.\mathrm{sen}\, f_i).\vec{j}$$

O vetor curvatura possui duas componentes segundo os eixos principais de flexão da barra:

$$k_{xi} = -\chi_i.\cos f_i$$

$$k_{yi} = \chi_i.\mathrm{sen}\, f_i$$

Pode-se definir,

$$k_{ti} = \frac{df_i}{dS_i} + \tau_i$$

Assim,

$$\begin{bmatrix} \frac{d\vec{i}}{dS_i} \\ \frac{d\vec{j}}{dS_i} \\ \frac{d\vec{k}}{dS_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_{ti} & -k_{yi} \\ -k_{ti} & 0 & k_{xi} \\ k_{yi} & -k_{xi} & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{bmatrix}$$

Equações diferenciais de equilíbrio da barra

Considerando os eixos principais de flexo-torção $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, designa-se por Q_x, Q_y e T as componentes de força. De maneira que, Q_x e Q_y representam as forças cortantes nas direções de $\vec{i}$ e $\vec{j}$, enquanto T representa a força normal. Designa-se também,

M_x, M_y e M_z as componentes de binário na seção, assim M_x e M_y representam os momentos fletores, enquanto M_z representa a torção.

A Figura 16.4 mostra os esforços solicitantes numa seção genérica. Os esforços solicitantes são determinados através das seguintes relações:

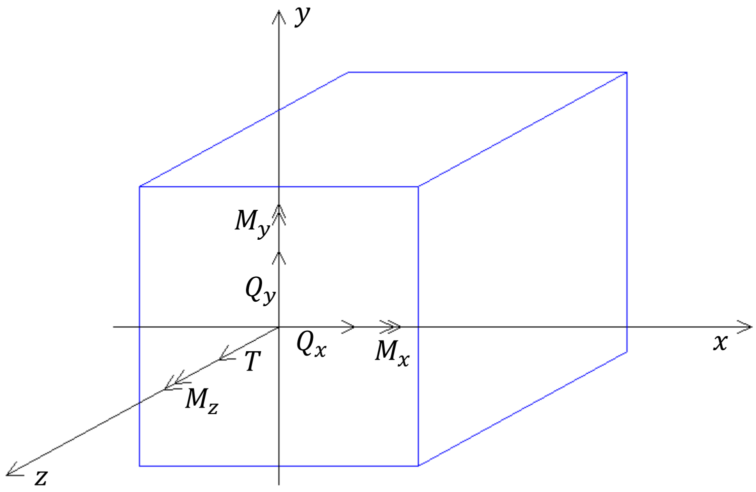


Figura 16.4 - Esforços solicitantes em uma seção genérica da barra

Os esforços solicitantes indicados na Figura 16.4 são obtidos através das seguintes relações:

$$Q_x = \iint (\tau_{zx}).dx.dy \qquad M_x = \iint (\sigma_z.y).dx.dy$$

$$Q_y = \iint (\tau_{zy}).dx.dy \qquad M_y = -\iint (\sigma_z.x).dx.dy$$

$$T = \iint (\sigma_z).dx.dy \qquad M_z = \iint (\tau_{zy}.x - \tau_{zx}.y).dx.dy$$

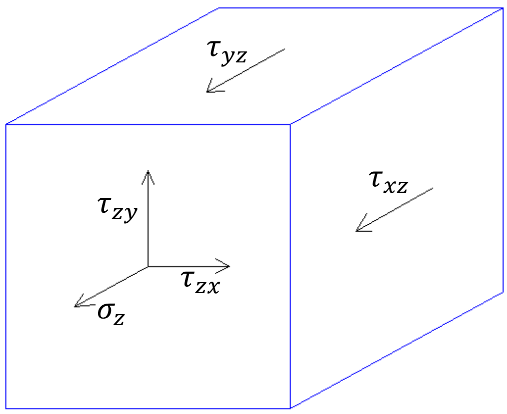


Figura 16.5 - Tensões atuantes na seção

Sejam f_x, f_y, f_z e m_x, m_y, m_z, as componentes de força e de momentos distribuídos por unidade de comprimento deformado segundo as direções principais de flexo-torção.

Deve-se observar que tanto os esforços externos distribuídos por unidade de comprimento (f_x, f_y, f_z, m_x, m_y, m_z) quanto os esforços internos solicitantes (Q_x, Q_y, T, M_x, M_y, M_z) são funções do tempo e do espaço.

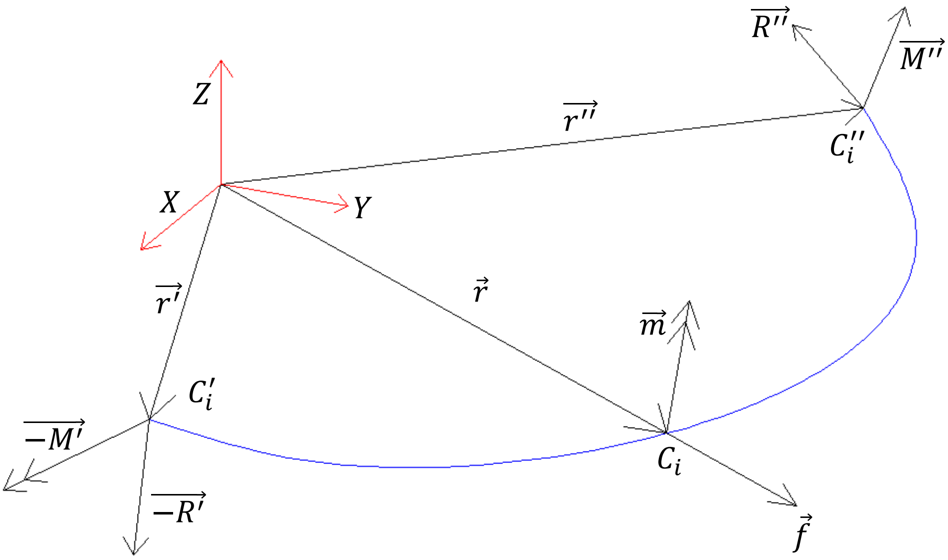


Figura 16.6 - Esforços externos e internos em um elemento infinitesimal de barra

A Figura 16.6 mostra um elemento infinitesimal de uma barra deformada de comprimento $\Delta S_i = S_i'' - S_i'$, em que S_i' e S_i'' são comprimentos de arco S_i medidos a partir de uma posição arbitrária associada às posições dos pontos extremos do elemento (C_i' e C_i'').

$\vec{R}$ e $\vec{M}$ são resultantes de forças e binários relacionados aos esforços internos solicitantes nas duas posições extremas.

As equações diferenciais de equilíbrio da barra serão obtidas impondo-se o equilíbrio de forças e momentos.

Equilíbrio de forças para o elemento:

$$\overrightarrow{R''} + \left(-\overrightarrow{R'}\right) + \int_{S_i'}^{S_i''} \vec{f}\,.\,dS_i = \vec{0}$$

Finalmente, obtêm-se as equações de equilíbrio de forças segundo as direções principais de flexo-torção:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial S_i} - Q_y . k_{ti} + T . k_{yi} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial Q_y}{\partial S_i} - T . k_{xi} + Q_x . k_{ti} + f_y = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial S_i} - Q_x . k_{yi} + Q_y . k_{xi} + f_z = 0$$

Impondo o equilíbrio de momentos, tem-se:

$$\overrightarrow{M''} + \left(-\overrightarrow{M'}\right) + (C_i'' - C_i') \times \overrightarrow{R''} + \int_{S_i'}^{S_i''} (C_i - C_i') \times \vec{f} \,. dS_i + \int_{S_i'}^{S_i''} \vec{m} \,. dS_i = \vec{0}$$

Equações escalares de equilíbrio de momentos segundo as direções principais de flexo-torção:

$$\frac{\partial M_x}{\partial S_i} - M_y . k_{ti} + M_z . k_{yi} - Q_y + m_x = 0$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial S_i} - M_z . k_{xi} + M_x . k_{ti} + Q_x + m_y = 0$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial S_i} - M_x . k_{yi} + M_y . k_{xi} + m_z = 0$$