

[Taub, H. "Circuitos Digitais e Microprocessadores", ed. McGraw-Hill, 1984]

Exemplo 1.26-1 Uma estudante consulta o catálogo da universidade e fica sabendo que pode matricular-se em determinada disciplina de eletrônica somente se ela satisfizer uma das seguintes condições:

1. Já completou sessenta créditos e é uma estudante de engenharia regularmente matriculada.
 2. Ou completou sessenta créditos e é uma estudante de engenharia e tem o consentimento do departamento.
- Ou completou menos de sessenta créditos e é uma estudante de engenharia com matrícula especial.
3. Ou é uma estudante regularmente matriculada e tem o consentimento do departamento.
 4. Ou é uma estudante de engenharia e não tem o consentimento do departamento.

Encontre uma expressão mais simples que indique a possibilidade de a estudante matricular-se no curso.

SOLUÇÃO: Introduzimos as variáveis w, x, y, z e v para representar as seguintes situações:

- w = a estudante completou sessenta créditos
- x = a estudante é aluna de engenharia
- y = a estudante tem matrícula regular
- z = a estudante tem consentimento do departamento
- v = a estudante pode matricular-se na disciplina

Assim, $y = V$ (Verdadeiro) ou $y = 1$ representa a proposição que é verdade que a estudante tem matrícula regular. De maneira correspondente, $\bar{y} = 0$ ou $y = 0$ significa que a estudante tem matrícula especial. Quando as variáveis w, x, y e z assumem valores tais que $v =$ verdadeiro, a estudante pode matricular-se na disciplina. A especificação de quanto isto ocorre pode ser feita pela equação algébrica lógica

$$v = w.x.y + w.x.z + \bar{w}.x.\bar{y} + y.z + x.\bar{z} \quad (1.26-1)$$

Se a condição 1 for satisfeita, isto é, $w = 1, x = 1$ e $y = 1$ simultaneamente, então o termo $w.x.y$ na Eq. (1.26-1) é $w.x.y = 1$, e conseqüentemente $v = 1$, independentemente dos valores lógicos dos demais termos de Eq. (1.26-1). Os diversos termos da Eq. (1.26-1) são ligados pelo conetivo OR correspondente à palavra "OU" na especificação geral das condições.

A simplificação pode ser efetuada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} v &= w.x.y + \bar{w}.x.\bar{y} + y.z + x.\bar{z} && \text{Fatorar } x \text{ do segundo e quinto termos} \\ &= w.x.y + \bar{w}.x.\bar{y} + y.z + x.\bar{z} && \text{Da Eq. (1.15-8a)} \\ &= w.x.y + \bar{w}.x.\bar{y} + y.z + x.\bar{z} + w.x && \text{Da Eq. (1.15-6b)} \\ &= w.x.(y+1) + \bar{w}.x.\bar{y} + y.z + x.\bar{z} && \text{Fatorando } wx \text{ do primeiro e último termos} \\ &= w.x + \bar{w}.x.\bar{y} + y.z + x.\bar{z} && A=1 = 1; A . 1 = A \\ &= x.(w + \bar{w}.\bar{y}) + y.z + x.\bar{z} && \text{Fatorando } x \text{ do primeiro e segundo termos} \\ &= x.(w + \bar{y}) + y.z + x.\bar{z} && \text{Da Eq. (1.15-8a)} \\ &= x.w + x.\bar{y} + y.z + x.\bar{z} && \text{Da Eq. (1.15-6b)} \end{aligned}$$

A Expressão resultante é idêntica à expressão do exemplo 1.25-6, portanto:

$$v = x + y.z \quad (1.26-2)$$

Assim, a estudante poderá matricular-se na disciplina ($v = 1$) se for uma aluna de engenharia ($x = 1$) ou se simultaneamente tiver matrícula regular e consentimento do departamento ($y = z = 1$).

[Taub, H. "Circuitos Digitais e Microprocessadores", ed. McGraw-Hill, 1984]

Exemplo 1.26-2 Há cinco livros em uma prateleira v , w , x , y e z . Você deve selecionar alguns entre eles de modo a satisfazer todas as condições a seguir:

1. Selecionar v ou w ou ambos.
2. Selecionar x ou z mas não ambos.
3. Selecionar v e z juntos ou nenhum dos dois.
4. Se selecionar y também deve selecionar z .
5. Se selecionar w também deve selecionar v e y .

Façamos com que as variáveis v , w , x , y e z (que usamos para representar os livros) também representem as proposições "o livro v foi selecionado", "o livro w foi selecionado" etc. Fazemos u representar a proposição que a seleção feita obedece a todos os requisitos. Neste caso a relação lógica entre as variáveis é

$$u = (v + w) \cdot (x \oplus z) \cdot (\overline{v \oplus z}) \cdot (y \supset z) \cdot (w \supset v \cdot y) \quad (1.26-3)$$

Cada uma das expressões entre parênteses se refere a uma das condições acima. Como o problema exige que todas as condições sejam satisfeitas, elas são ligadas pela função AND. O primeiro parênteses envolve a função INCLUSIVE-OR, conforme a especificação da condição 1, enquanto o segundo parênteses envolve a função EXCLUSIVE-OR, conforme a condição 2. O conetivo EXCLUSIVE-OR requer a seleção de uma ou outra das variáveis, mas não ambas nem nenhuma. De maneira correspondente, o complemento de EXCLUSIVE-OR requer a seleção da ambas as variáveis ou nenhuma delas, exatamente como especificado na condição 3 para as variáveis v e z . Assim, o terceiro parênteses da Eq. (1.26-3) é $\overline{v \oplus z}$. A condição 4 especifica que a seleção de y implica a seleção de z , isto é, $y \supset z$, e, finalmente, a condição 5 requer que w implique ambos, v e y , ou seja, $w \supset v \cdot y$.

Para permitir a manipulação da Eq. (1.26-3) reescrevemos a equação usando somente as operações AND, OR E NOT. Da Tab. 1.18-1 e Eq. (1.22-1) obtemos:

$$u = (v + w) \cdot (x \cdot \bar{z} + \bar{x} \cdot z) \cdot (v \cdot z + \bar{v} \cdot \bar{z}) \cdot (\bar{y} + z) \cdot (\bar{w} + v \cdot y) \quad (1.26-4)$$

Temos, então:

$$\begin{aligned} u &= (v \cdot z + \bar{v} \cdot w \cdot \bar{z}) \cdot (x \cdot \bar{z} + \bar{x} \cdot z) \cdot (\bar{y} + z) \cdot (\bar{w} + v \cdot y) && \text{Multiplicando o primeiro e o terceiro parêntese e usando} \\ & && A \cdot A = A, A \cdot \bar{A} = 0 \text{ e } A + A \cdot B = A \\ &= (v \cdot \bar{w} \cdot z + v \cdot y \cdot z) \cdot (x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} + \bar{x} \cdot y \cdot z + \bar{x} \cdot z) && \text{Multiplicando o primeiro e o quarto parênteses e também o} \\ & && \text{segundo e terceiro parênteses, e usando } A \cdot A = A \text{ e } A \cdot \bar{A} = 0. \\ &= v \cdot \bar{w} \cdot x \cdot y \cdot z + v \cdot \bar{w} \cdot \bar{x} \cdot z + v \cdot \bar{x} \cdot y \cdot z && \text{Multiplicando os parênteses e usando } A \cdot A = A \text{ e } A \cdot \bar{A} = 0 \\ &= v \cdot \bar{x} \cdot z \cdot (\bar{w} \cdot y + \bar{w} + y) && \text{Fatorando o fator comum conforme} \\ & && A \cdot B + A \cdot C = A \cdot (B + C) \\ &= v \cdot \bar{x} \cdot z \cdot (\bar{w} + y) && A + A \cdot B = A \text{ [Eq. (1.15-6a)]} \end{aligned}$$

O resultado seria $u = v \cdot \bar{x} \cdot z \cdot (\bar{w} + y)$, cuja interpretação é: devemos selecionar v e z rejeitar x e, ao mesmo tempo, se selecionarmos w , devemos selecionar y (se w for rejeitado, não importa se selecionamos ou rejeitamos y).

Alternativamente, o resultado poderia se escrito $u = v \cdot \bar{x} \cdot z \cdot \bar{w} + v \cdot \bar{x} \cdot z \cdot y$, ou seja, podemos selecionar v e z rejeitando x e w (y opcional), ou ainda podemos selecionar v , z e y rejeitando x (w opcional).