

# Introdução a Simulação Discreta

**PROF.DR. PAULO E. MIYAGI**

*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*

*Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos*

**São Paulo, SP**

**2004**

1. Introdução à Simulação .....	2
1.1 Quando usar a simulação .....	2
1.2 Vantagens e desvantagens da simulação .....	2
1.3 Áreas de aplicação .....	3
2. Sistemas e Ambiente do Sistema .....	5
2.1 Componentes de um sistema.....	5
2.2 Modelo de um sistema.....	6
2.3 Tipos de modelos.....	6
2.4 Simulação de sistemas a eventos discretos.....	6
2.5 Procedimento para uma simulação .....	7
3. Exemplos de Simulação .....	10
3.1 Simulação de sistemas de filas .....	10
3.2 Simulação de sistemas de estoque .....	20
3.3 Outros exemplos de simulação .....	24
4. Linguagens de Simulação e Simuladores .....	29
4.1 Linguagens específicas .....	29
4.2 Pacotes de simulação .....	29
5. Bibliografia .....	31

# 1. Introdução à Simulação

**Simulação** é, em geral, entendida como a “imitação” de uma operação ou de um processo do mundo real. A simulação envolve a geração de uma “história artificial” de um sistema para a análise de suas características operacionais.

O comportamento de um sistema é estudado através de um **modelo de simulação**. Este modelo geralmente utiliza diversos parâmetros sobre a operação do sistema. Uma vez desenvolvido e validado, o modelo pode ser usado para investigar uma grande variedade de questões sobre o sistema. Mudanças no sistema podem ser simuladas a fim de prever seu impacto no seu desempenho. A simulação pode também ser usada para estudar sistemas ainda na fase de concepção, antes que sejam efetivamente implementados. Assim, a simulação pode ser usada como uma ferramenta para prever os efeitos de uma mudança em sistemas existentes e também como uma ferramenta de projeto para avaliar e validar o desempenho de novos sistemas.

Existem casos onde um **modelo** é baseado em formulações matemáticas. Este modelo é, em geral, desenvolvido através de equações integro-diferenciais, teoria de probabilidades, métodos algébricos, etc. Entretanto, muitos sistemas na vida real são tão complexos que seus modelos matemáticos são muito difíceis de serem formulados ou utilizados. Nestes casos, utilizam-se as técnicas de simulação para “imitar” o comportamento do sistema num certo intervalo de tempo. A partir desta simulação, dados são coletados como se um sistema real estivesse sendo observado. Estes dados podem então ser usados para estimar as medidas de desempenho do sistema.

## 1.1 Quando usar a simulação

A maior disponibilidade de **ferramentas de simulação**, a crescente capacidade computacional e os avanços nas metodologias de simulação fizeram da simulação uma das técnicas mais usadas e aceitas em tarefas de análise e desenvolvimento de sistemas.

Considera-se que a simulação pode ser usada principalmente para as seguintes finalidades:

- Estudar as interações internas de um sistema complexo, ou de um subsistema dentro de um sistema complexo.
- Realizar alterações nas informações, na organização e no ambiente do sistema para observar seus efeitos.
- Experimentar novos projetos ou novos procedimentos antes de implementá-las, e assim estar preparado para o que puder acontecer.
- Identificar as variáveis mais importantes de um sistema e como elas interagem através do estudo dos sinais de entrada e das saídas resultantes.
- Verificar soluções analíticas, sendo neste caso utilizado como um instrumento de validação.
- Adquirir maior conhecimento sobre o modelo de simulação e sobre o processo de desenvolvimento do modelo para melhorias do sistema.

## 1.2 Vantagens e desvantagens da simulação

A simulação é vantajosa quando ela “imita” com menor custo ou menos recursos o que acontece num sistema real. Os dados de saída de uma simulação devem corresponder diretamente às saídas que seriam obtidas do sistema real. Em contraste com as técnicas

analíticas, a simulação de modelos é "**executada**" ao invés de ser resolvida. Dado um conjunto particular de entradas o modelo é executado e o comportamento do sistema é estudado. Este processo de alteração de variáveis do modelo resulta em um conjunto de **cenários** a serem avaliados.

As principais vantagens da simulação são:

- Novas políticas, procedimentos operacionais, regras de decisão, fluxos de informação, procedimentos organizacionais, etc. podem ser estudados sem interferência nas operações do sistema real.
- Novos equipamentos, arranjos físicos, sistemas de transporte, etc. podem ser testados antes de se investir recursos com as aquisições envolvidas.
- Hipóteses de como e por que certos fenômenos ocorrem podem ser avaliados.
- O tempo pode ser comprimido ou expandido, permitindo que o fenômeno em estudo possa ser acelerado ou retardado.
- "Gargalos" onde as informações ou materiais têm seus fluxos comprometidos podem ser identificados.

As principais desvantagens são:

- A construção de modelos requer um treinamento especial. Pode ser considerada uma "arte" que se aprende ao longo do tempo e que envolve o "bom" uso da experiência.
- Os resultados da simulação podem ser difíceis de interpretar. Como as saídas da simulação podem incluir variáveis aleatórias, não é trivial determinar se os resultados observados resultam de inter-relações efetivas das partes do sistema ou se são fruto da aleatoriedade do sistema.
- A modelagem do sistema e a análise dos dados podem consumir muito tempo e muitos recursos. Por outro lado, economizar tempo e recursos na modelagem e na análise pode resultar em cenários insuficientes para atender os objetivos.

Na defesa do uso da simulação, as desvantagens acima citadas têm sido minimizadas através dos seguintes argumentos:

- Fornecedores de softwares de simulação têm continuamente desenvolvido pacotes que contêm um tipo de *template* de modelos pré concebidos nos quais é necessário somente definir os dados da operação.
- Muitos fornecedores de softwares têm desenvolvido pacotes com ferramentas que facilitam a análise dos dados de saída da simulação.
- Os avanços nas plataformas computacionais permitem que a simulação seja realizada cada vez mais rapidamente.

### 1.3 Áreas de aplicação

As áreas de aplicação da simulação são muito amplas e variadas. Algumas das áreas de aplicação identificadas através dos trabalhos apresentados em recentes eventos técnico-científicos são:

Sistemas de manufatura

- Sistemas de manipulação e movimentação de materiais
- Operações de montagem
- Planejamento da inter-operação entre sistemas de estoques
- Manufatura ágil (sistema distribuído, sistemas inteligentes, sistemas autônomos)

Sistemas de saúde

- Custo e faturamento de produtos farmacêuticos
- Otimização do atendimento em ambulatórios
- Gerenciamento dos recursos hospitalares

Sistemas envolvendo recursos naturais

- Gerenciamento de sistemas de coleta de lixo
- Operação eficiente de plantas nucleares
- Atividades de restauração do ambiente

Sistemas de transporte

- Transferências de cargas
- Operações de *containers* em portos
- Postos de pedágio flexíveis de acordo com a demanda

Sistemas de construção civil

- Processo de montagem de pontes suspensas
- Novos paradigmas do processo construtivo
- Interface para as ferramentas de projeto e construção

Sistemas de restaurantes e entretenimento

- Análise do fluxo de clientes em *fast-foods*
- Determinação do número ideal de funcionários de empresas de serviços
- Atividades em parques temáticos

Reengenharia e processo de negócios

- Integração de sistemas baseado no fluxo de tarefas
- Análise de soluções

Processamento de alimentos

- Operações no processamento de pescados
- Avaliação da capacidade no processamento de cereais

Sistemas computacionais

- Sistemas com arquitetura Cliente/Servidor
- Redes heterogêneas

## 2. Sistemas e Ambiente do Sistema

Para modelar um sistema, é necessário assimilar o conceito de **sistema** e de **fronteira do sistema**. Um **sistema** é definido como um grupo de objetos que estão agregados de acordo com uma relação de interdependência para atingir certos objetivos.

Um sistema é muitas vezes afetado por mudanças que ocorrem fora do sistema. Estas mudanças ocorrem, portanto, no chamado ambiente externo do sistema. Em modelagem de sistemas, é necessário definir a fronteira entre o sistema e seu ambiente. Esta definição depende da finalidade do estudo.

No caso de um sistema industrial, por exemplo, os fatores que controlam a chegada de ordens de fabricação podem ser considerados como uma influência externa à fábrica e, portanto, parte do ambiente. Contudo, se o efeito da demanda na variação da produção for um fator decisivo para o processo, haverá claramente uma relação entre a oferta da fábrica e a demanda, e esta relação precisa ser considerada como uma atividade do sistema.

### 2.1 Componentes de um sistema

Para entender e analisar um sistema, certos termos são pré-definidos:

- **Entidade** é um objeto de interesse em um sistema.
- **Atributo** é uma propriedade da entidade.
- **Atividade** representa uma ação que ocorre dentro do sistema.
- **Evento** é uma ocorrência que altera o estado do sistema (o evento pode ser entendido como uma atividade primária e instantânea que não admite decomposição).
- **Estado** descreve uma situação do sistema e é identificado pelos valores das suas variáveis num determinado instante.

A Tabela 2.1 lista exemplos de entidades, atributos, atividades, eventos e estado das variáveis de diversos sistemas. Somente uma listagem parcial dos componentes do sistema é mostrada pois, uma lista completa depende do objetivo do estudo.

Tabela 2.1 Exemplos de sistemas e seus componentes

Sistema	Entidades	Atributos	Atividades	Eventos	Variáveis de estado
Bancos	Clientes	Conta corrente	depósito, retirada	Chegada ao banco, saída do banco	número de caixas ocupados, número de clientes esperando
Transporte	Veículos transportadores	Malha viária, destino	transporte (movimentação)	Chegada na estação, saída da estação	número de veículos esperando em cada estação, número de veículos em trânsito
Manufatura	Máquinas	Velocidade, capacidade, taxa de falhas	usinagem, estampagem, soldagem	falha, quebra	estado da máquina (ocupado, livre, quebrada)
Comunicações	Mensagens	Comprimento, destino	transmissão de mensagens	Chegada da mensagem ao destino	número de mensagens esperando para serem transmitidos
Inventário	Almoxarifado, estoque	Capacidade	retirada de partes	Pedido	Nível do estoque, demanda prevista

## 2.2 Modelo de um sistema

Um **modelo**, em engenharia, pode ser definido como uma representação de um sistema com o intuito de estudá-lo. Para a maioria dos casos, é necessário somente considerar os aspectos do sistema que afetam esse estudo. Estes aspectos são representados no modelo do sistema, e este modelo, por definição, é uma simplificação do sistema. Por outro lado, o modelo deve ser suficientemente detalhado para permitir conclusões válidas sobre o sistema real. Diferentes modelos de um mesmo sistema podem ser necessários de acordo com o objetivo do estudo.

Os modelos devem considerar a representação de todos os componentes de um sistema como as entidades, atributos, atividades, eventos e estados. Contudo, o modelo para um estudo específico em geral deve conter somente os componentes que são relevantes para o caso.

## 2.3 Tipos de modelos

**Modelos** podem ser classificados como sendo matemáticos ou físicos. Um modelo matemático usa notação simbólica e relações matemáticas para representar um sistema. Um modelo de simulação é um tipo particular de modelo matemático de um sistema.

Modelos podem ser ainda classificados como instantâneos ou dinâmicos, determinísticos ou estocásticos e, discretos ou contínuos (existem também outras classificações que podem ser consideradas).

Modelos dinâmicos representam sistemas e como eles se comportam em função dos eventos passados e com o decorrer do tempo. Modelos instantâneos representam sistemas e como eles se comportam em função apenas dos eventos atuais, isto é não se considera os eventos passados.

Modelos determinísticos têm um conjunto conhecido de entradas, os quais resultarão em um único conjunto de saídas. Modelos estocásticos possuem um ou mais variáveis aleatórias como entrada que levam a saídas aleatórias. Assim, as saídas da simulação estocástica devem ser tratadas como estimativas estatísticas das características reais de um sistema.

Modelos discretos e contínuos são definidos de acordo com as mesmas considerações que definem se um sistema é discreto ou contínuo. Contudo, um modelo de **simulação discreta** não é usado apenas para modelar um sistema discreto, nem um modelo de **simulação contínua** é exclusivo para modelar sistemas contínuos. Modelos de simulação são de fato muito úteis para análise em conjunto de fenômenos discretos e contínuos. A escolha de qual deles usar é função das características do sistema e do objetivo do estudo.

## 2.4 Simulação de sistemas a eventos discretos

A simulação de sistemas a eventos discretos é própria para a análise de sistemas no qual o estado (discreto) das variáveis muda apenas com a ocorrência de eventos (considerados instantâneos). Os modelos de simulação são analisados por **métodos numéricos** ao invés de métodos analíticos. Isto é, em vez de métodos analíticos que empregam o raciocínio dedutivo/matemático para resolver um modelo, consideram-se métodos numéricos que empregam procedimentos computacionais para executar os modelos matemáticos.

Os modelos quando executados geram uma história artificial do sistema baseada nas suposições assumidas. Resultados e observações são então colhidos para serem analisadas e estimar o desempenho do sistema real.

Como os modelos de simulação do mundo real são relativamente complexos, e a quantidade de informações manipuladas é muito grande, geralmente utilizam-se computadores para executar a sua simulação.

## 2.5 Procedimento para uma simulação

A Figura 2.1 ilustra o procedimento para uma análise de sistemas por simulação.

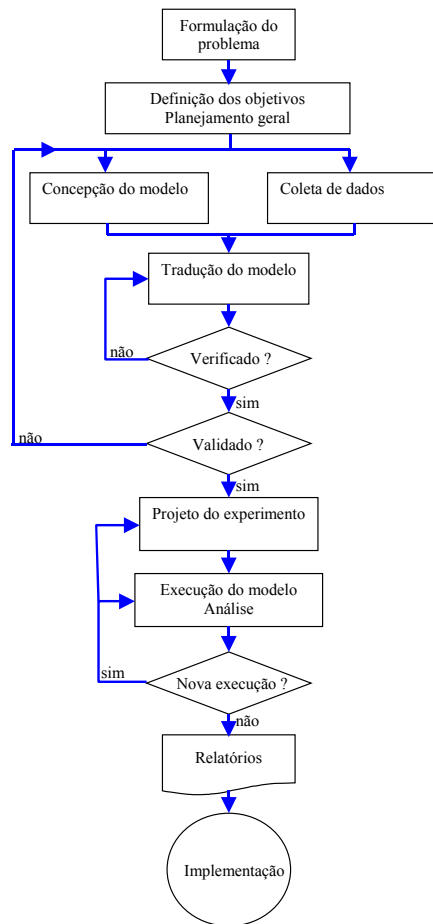


Figura 2.1 Procedimento básico para análise de sistemas por simulação

Os passos neste procedimento são os seguintes:

- **Formulação do problema a ser simulado:** Todo estudo deve começar pela definição do problema. Se as definições são realizadas pelo usuário que está com o problema, o projetista deve se assegurar de que o problema foi efetivamente entendido. Se as definições do problema são desenvolvidas pelo projetista, é importante que o usuário também esteja de acordo com a formulação. Apesar de não estar indicado na Figura 2.1, há ocasiões em que o problema precisa ser reformulado à medida que o estudo evolui.

- **Definição dos objetivos e planejamento geral:** Os objetivos envolvem as questões que precisam ser respondidas pela simulação. Neste ponto deve-se avaliar e confirmar que a simulação é a técnica adequada para tratar o problema e, como se planeja atingir os objetivos previstos. Se a simulação é apropriada, o planejamento geral deve incluir uma especificação das alternativas que devem ser consideradas, e um critério para comparar os resultados. Deve especificar também as estratégias para o estudo em termos dos recursos envolvidos, o custo do estudo, o número de dias necessários para completar cada fase e, os resultados previstos no final de cada estágio.
- **Concepção do modelo:** A tarefa de modelagem envolve certa habilidade para abstrair as características essenciais de um problema, para selecionar e modificar as suposições que caracterizam o sistema, e para destacar os resultados de interesse. Deve-se começar com um modelo simples, e então, a partir deste, chegar a modelos mais complexos. A complexidade do modelo não deve ser maior que aquela requerida para alcançar os objetivos do estudo. A violação deste princípio aumenta os custos de construção do modelo e de execução do modelo. Não é necessário ter uma correspondência bi-unívoca entre o modelo e o sistema real. Apenas a essência do sistema real é necessária no modelo. É aconselhável envolver o usuário na concepção do modelo. Isto aumenta a qualidade do modelo resultante e a confiança deste usuário na aplicação do modelo.
- **Coleta de dados:** Há uma relação entre a concepção do modelo e os dados de entrada necessários. Ao variar a complexidade do modelo, os dados necessários também podem mudar. Como a coleta de dados pode envolver muito tempo, é recomendável iniciar esta fase o quanto antes, geralmente junto com as etapas iniciais da construção do modelo. Os objetivos do estudo definem os tipos de dados a serem coletados.
- **Tradução do modelo:** Os sistemas do mundo real podem resultar em modelos que envolvem uma grande quantidade e variedade de informações assim, os modelos precisam ser traduzido para um formato adequado para serem tratados num computador. O projetista precisa decidir se editará o modelo em uma linguagem de simulação ou então se usará "pacotes" de softwares específicos. As linguagens de simulação são geralmente mais poderosas e mais flexíveis que os "pacotes" para fins específicos. Contudo, se o problema é passível de resolução com o uso de "pacotes", o tempo de construção de modelo será certamente menor. Além disso, os "pacotes" têm acrescentado características que aumentam sua flexibilidade.
- **Verificado?** : A verificação em geral faz parte do processo de edição do modelo e programação do computador preparando-o para a simulação. Deve-se verificar se o programa de computador executa o modelo conforme o esperado. Modelos complexos, envolvem maiores riscos na sua tradução para o computador e por isso deve-se ter maior cuidado nestes casos.
- **Validado?** : Validação é a confirmação de que um modelo é uma representação adequada do sistema real. Validação é geralmente resultante da calibração do modelo, isto é, um processo iterativo de comparar dados do modelo com o comportamento do sistema real, usando as discrepâncias entre os dois para melhorar o modelo. Este processo é repetido até que o modelo seja julgado aceitável.
- **Projeto do Experimento:** As alternativas e/ou cenários que serão simuladas devem ser detalhadas. Em geral, a decisão de quais alternativas serão simuladas é função do histórico dos cenários previamente obtidos e analisados. Para cada cenário que é simulado, decisões precisam ser tomadas sobre a magnitude dos



valores de inicialização, do tempo de simulação, e o número de repetições que devem ser feitas.

- **Execução do modelo e análise:** A execução do modelo e sua subsequente análise são realizadas e utilizadas para estimar medidas de desempenho para o sistema que está sendo simulado.
- **Nova execução?:** Baseado na análise das execuções realizadas, determina-se se são necessários experimentos adicionais e se novas especificações devem ser consideradas.
- **Relatórios:** Existem dois tipos de documentação: do programa e do experimento. A documentação do programa (do modelo de simulação) é imprescindível quando o programa é usado novamente e, é fundamental para a confiança dos usuários do sistema que podem tomar decisões baseados nos dados gerados. Os relatórios dos experimentos fornecem a "história" do projeto de simulação. Os resultados das análises devem ser apresentados de forma clara e concisa em um relatório final. Isto permite que os usuários do modelo revejam a formulação final, os critérios pelos quais alternativas foram comparadas, os resultados de experimentos, e a solução recomendada.
- **Implementação:** O sucesso da fase de implementação depende de como foram conduzidos os passos anteriores. Se o usuário esteve envolvido durante o processo de edição do modelo e entende a natureza do modelo e suas saídas este poderá contribuir efetivamente para a fase de implementação.

#### Atenção

A simulação é uma abordagem poderosa que pode ser usada para analisar muitos problemas complexos. Entretanto, antes da simulação ser escolhida como uma solução, deve-se avaliar se o problema pode ser resolvido matematicamente, através de teoria de filas, autômatos finitos, ou de outras técnicas. O desenvolvimento de modelos para simulação podem levar muito tempo, e se já existe uma solução analítica, esta poderá ser mais efetiva.

### 3. Exemplos de Simulação

Este capítulo apresenta exemplos relativamente simples mas que ilustram alguns procedimentos específicos para as simulações de sistemas a eventos discretos. As simulações neste capítulo seguem os seguintes passos:

- Determinação das características dos dados de entrada da simulação. Em alguns casos, estes dados podem ser modelados matematicamente como distribuições probabilísticas, variáveis contínuas ou discretas.
- Elaboração de uma estratégia de casos de simulação. Cada caso de simulação é diferente, isto é, para cada problema existe um desenvolvimento específico. Um exemplo de caso de simulação é ilustrado na Tabela 3.1 onde existem  $p$  dados de entrada,  $x_{ij}$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$ , e uma resposta  $y_i$ , para cada uma das situações simuladas  $i = 1, 2, \dots, n$ .
- Análise dos resultados em função das respostas  $y_i$  relativas a cada situação  $i$  e as correspondentes entradas  $x_{ij}$ .

Tabela 3.1 Tabela de casos (situações) de simulações:

Casos	Entradas					Resposta	
	$x_{i1}$	$x_{i2}$	...	$x_{ij}$	...	$x_{ip}$	$y_i$
1							
2							
3							
...							
...							
...							
$N$							

#### 3.1 Simulação de sistemas de filas

Um sistema de filas é caracterizado por uma população de elementos que desejam um serviço, pela natureza das chegadas dos elementos para execução dos serviços, pela natureza dos serviços a serem realizados, pela capacidade do sistema e pela disciplina de fila. Um sistema discreto de filas é ilustrado na Figura 3.1.

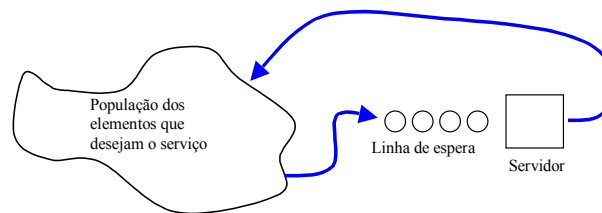


Figura 3.1 Sistema de filas.

Neste sistema considera-se que a população é infinita, isto é, se um elemento desta população for para a fila de espera do serviço, não existe alteração na taxa de chegada de outros elementos que estejam precisando deste serviço. A chegada dos elementos para os serviços ocorre de uma forma individual e estocástica através da fila de espera, de onde serão atendidos pelo servidor. O tempo de serviço é definido de acordo com uma distribuição de probabilidades que é considerada constante. A capacidade do sistema é considerada infinita (o sistema inclui o elemento que está no servidor mais aqueles que

estão esperando na fila). Os elementos são atendidos pelo servidor na ordem de chegada (num procedimento conhecido como FIFO: *first in, first out*).

“Chegadas de elementos” são descritas por uma distribuição do tempo entre os instantes de chegada. “Serviços” são descritos por uma distribuição do tempo de serviço. O total das taxas de chegadas efetivas deve ser menor do que a taxa máxima de serviço, ou a fila de espera crescerá indefinidamente (em alguns sistemas onde filas de entrada formam ciclos reentrantes, apesar da condição ser necessária, esta pode não ser suficiente). Quando as filas crescem indefinidamente, elas são chamadas de “instáveis”. Uma situação excepcional seria a taxa de chegada ser maior do que a taxa de serviço por um curto período de tempo.

Antes de apresentar os vários casos de simulação de sistemas de filas, é necessário definir o que são neste caso: o estado, os eventos e o relógio (*clock*) do sistema. O **estado** é definido em função do número de elementos no sistema e da situação do servidor: ocupado ou disponível. No caso de uma fila única existem somente dois eventos que podem afetar o estado do sistema: a entrada de um elemento dentro do sistema (evento de chegada) e a finalização de um serviço sobre um elemento (evento de saída).

Quando um serviço é completado, a simulação segue o fluxograma da Figura 3.2.

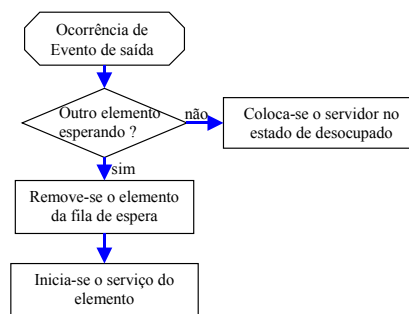


Figura 3.2. Fluxograma das atividades do servidor

O outro evento ocorre quando um elemento entra no sistema. O fluxograma correspondente está na Figura 3.3. O elemento pode encontrar o servidor ocupado ou disponível, assim, ou o elemento é atendido pelo servidor ou entra na fila para ser atendido.

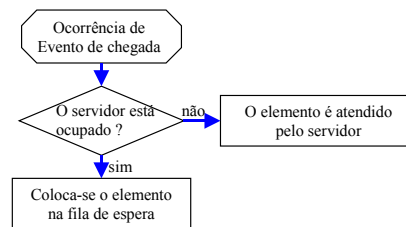


Figura 3.3 Fluxograma quando um elemento entra no sistema

Se o servidor está disponível e a fila vazia, o elemento que chega é imediatamente atendido pelo servidor. Considera-se impossível a situação onde o servidor está disponível e a fila não vazia.

Depois de completar um serviço, o servidor pode ficar disponível ou permanecer ocupado com o próximo elemento. Se a fila não estiver vazia, outro elemento entrará no servidor e este ficará ocupado. Se a fila estiver vazia, o servidor ficará disponível depois que o serviço for completado. Após o serviço ser completado é impossível ao servidor ficar ocupado se a fila estiver vazia. Analogamente, é impossível ao servidor estar disponível quando a fila não está vazia.

A simulações de um sistema de filas requer a manutenção de uma lista de eventos para determinar como o sistema se comporta. A **lista de eventos** indica a seqüência em que os eventos ocorrem no sistema. Esta seqüência é interpretada de acordo com um **relógio** (*clock* ou tempo de simulação) que define os instantes da ocorrência dos eventos. Numa simulação, os eventos podem também ocorrer de modo aleatório, isto é, imita-se a vida real quanto aos aspectos de incerteza.

A aleatoriedade pode ser implementada na simulação discreta através do uso de uma tabela de dígitos aleatórios. Isto é, considera-se um conjunto de dígitos aleatórios  $\{0,1,2,\dots,9\}$  que são utilizados para formar números aleatórios (pela seleção apropriada do número de dígitos e colocando o ponto decimal à esquerda do valor obtido). O número de dígitos define a precisão dos dados para a simulação. Se a distribuição dos valores de entrada envolve 2 casas decimais, 2 dígitos devem ser extraídos de uma tabela de dígitos aleatórios e o ponto decimal colocado a esquerda do número resultante.

Quando números são gerados através de um algoritmo obtêm-se os chamados números pseudo-aleatórios.

Num sistema de fila única, os tempos entre chegadas e os tempos de serviço são determinados (gerados) com base numa distribuição destes números aleatórios. Os exemplos a seguir ilustram como tais tempos podem ser gerados. Para simplificar esta apresentação, assume-se que os tempos entre chegadas são gerados jogando-se cinco vezes um dado de 10 faces. A Tabela 3.2 contém um conjunto de 5 tempos entre as chegadas geradas desta forma. Estes 5 tempos entre chegadas são utilizados para definir o tempo de chegada de 6 elementos no sistema de fila.

Tabela 3.2 Tempos entre chegadas e horário de chegada

<i>Elemento (cliente)</i>	<i>Tempo entre chegadas</i>	<i>Instante de chegada pelo relógio</i>
1	-	0
2	2	2
3	4	6
4	1	7
5	2	9
6	6	15

Assume-se que o primeiro elemento (cliente) chega no instante 0 (do relógio), quando então o relógio é disparado. O segundo cliente chega 2 unidades de tempo depois (relógio = 2). O terceiro cliente chega 4 unidades de tempo depois (relógio = 6), e assim por diante.

O segundo tempo de interesse é o tempo de serviço. A Tabela 3.3 contém os tempos de serviço de cada elemento (cliente). Considera-se que os tempos de serviço possíveis são: 1, 2, 3, e 4 unidades de tempo. Assumindo que todos os quatro valores têm a mesma probabilidade de ocorrer, estes valores podem ser gerados através de sorteio de uma bola - dentre 4 bolas (devidamente numeradas) dentro de um cesto - não esquecendo de repor a bola retirada no cesto a cada sorteio.

Tabela 3.3 Tempos de serviço

<i>Elemento (cliente)</i>	<i>Tempo de serviço</i>
1	2
2	1
3	3
4	2
5	1
6	4

Os intervalos entre chegadas e os tempos de serviço podem agora ser combinados para simular a dinâmica do sistema de fila única. Como indicado na Tabela 3.4, o primeiro elemento (cliente) chega no instante 0 do relógio, e imediatamente o serviço é iniciado, o que dispense 2 unidades de tempo. O serviço é completado no instante 2 do relógio. O segundo elemento chega no instante 2 e seu serviço é concluído no instante 3. Note que o quarto elemento chega no instante 7, mas o serviço não pode começar antes do instante 9 do relógio. Isto ocorre porque o serviço relativo ao terceiro elemento termina apenas no instante 9.

Tabela 3.4 Horários das chegadas e dos fins de serviços

<i>Elemento (cliente)</i>	<i>Instante de chegada (tempo do relógio)</i>	<i>Início do serviço (tempo do relógio)</i>	<i>Tempo de serviço (duração)</i>	<i>Fim do serviço (tempo do relógio)</i>
1	0	0	2	2
2	2	2	1	3
3	6	6	3	9
4	7	9	2	11
5	9	11	1	12
6	15	15	4	19

A Tabela 3.4 apresenta um conjunto de dados de um sistema de fila única para elementos atendidos com base numa política de FIFO. A tabela indica os instantes no tempo de relógio que cada evento ocorre. A segunda coluna indica os instantes de cada evento de chegada (elemento entrando na fila), enquanto que a última coluna indica os instantes de cada evento de saída (finalização de serviço). O que ocorre entre estes dois tipos de eventos são indicados em ordem cronológica na Tabela 3.5 e na Figura 3.4.

A Tabela 3.5 é ordenada pelo tempo do relógio e pelo número de identificação do cliente.

Tabela 3.5 Ordem cronológica dos eventos

<i>Tipo do evento</i>	<i>Identificação do elementos (cliente)</i>	<i>Tempo do relógio</i>
<i>chegada</i>	1	1
<i>saída</i>	1	2
<i>chegada</i>	2	2
<i>saída</i>	2	3
<i>chegada</i>	3	6
<i>chegada</i>	4	7
<i>saída</i>	3	9
<i>chegada</i>	5	9
<i>saída</i>	4	11
<i>saída</i>	5	12
<i>chegada</i>	6	15
<i>saída</i>	6	19

A Figura 3.4 indica quando e quais elementos estão na fila. É uma representação dos resultados das ocorrências dos eventos listados na Tabela 3.5. O primeiro elemento está no sistema do instante 0 até o instante 2 do relógio. O segundo elemento entra na fila no instante 2 e sai no instante 3 do relógio. Nenhum elemento está na fila do instante 3 ao instante 6. Durante alguns períodos dois elementos estão na fila, como no instante 8, quando o terceiro e quarto elementos estão esperando o servidor. Também, existem situações onde eventos ocorrem simultaneamente, como no instante 9, quando o terceiro elemento sai e o quinto elemento entra na fila.

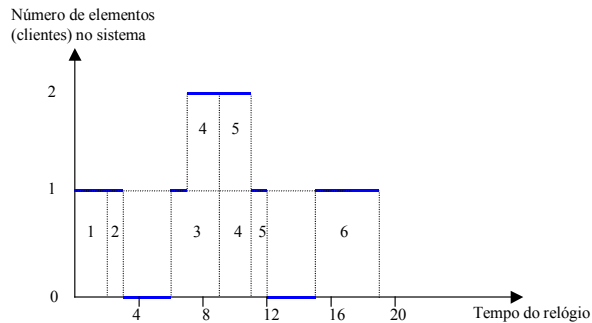


Figura 3.4 Número de elementos (clientes) no sistema

### Exemplo 3.1 Fila única com um único servidor

Considera-se aqui uma padaria com somente um caixa. Clientes chegam no caixa entre 1 a 8 minutos. Cada possível intervalo de chegada no caixa tem a mesma probabilidade de ocorrer, como ilustrado na Tabela 3.6.

Tabela 3.6 Probabilidade dos tempos entre chegadas no caixa

Tempo entre chegadas (minutos)	Probabilidade
1	0,125
2	0,125
3	0,125
4	0,125
5	0,125
6	0,125
7	0,125
8	0,125

O tempo de serviço do caixa varia de 1 a 6 minutos de acordo com as probabilidades indicadas na Tabela 3.7.

Tabela 3.7 Probabilidade dos tempos de serviço do caixa

Tempo de Serviço (minutos)	Probabilidade
1	0,10
2	0,20
3	0,30
4	0,25
5	0,10
6	0,05

O problema é analisar o sistema através da simulação de chegada de clientes no caixa e finalização dos serviços do caixa para 20 clientes.

De fato, 20 clientes é uma amostra muito pequena para se chegar a alguma conclusão final pois, a exatidão dos resultados está relacionada com o tamanho da amostra. O exemplo é assim apenas um modo de demonstrar como as simulações manuais podem ser conduzidas.

Neste exemplo é considerada uma tabela de dígitos aleatórios como base para a geração de números aleatórios. Dígitos aleatórios são convertidos em números aleatórios pela manipulação dos decimais no ponto apropriado. Por exemplo no caso dos tempos entre chegadas (Tabela 3.6), números com três dígitos são suficientes. É necessário listar somente 19 números aleatórios para os tempos entre chegadas, pois a primeira chegada é assumida como ocorrendo no instante 0, e assim somente 19 outras unidades de tempo para as chegadas são necessárias para completar os 20 clientes.

A Tabela 3.6 e a Tabela 3.7 são assim complementadas com dados da probabilidade cumulativa da distribuição e dos dígitos aleatórios considerados.(Tabela 3.8 e Tabela 3.9)

Tabela 3.8 Distribuição dos tempos entre chegadas no caixa

Tempo entre chegadas (minutos)	Probabilidade	Probabilidade cumulativa	Dígitos aleatórios considerados
1	0,125	0,125	001-125
2	0,125	0,250	126-250
3	0,125	0,375	251-375
4	0,125	0,500	376-500
5	0,125	0,625	501-625
6	0,125	0,750	626-750
7	0,125	0,875	751-875
8	0,125	1,000	876-1000

Tabela 3.9 Distribuição dos tempos de serviço do caixa

Tempo de Serviço (minutos)	Probabilidade	Probabilidade cumulativa	Dígitos aleatórios considerados
1	0,10	0,10	01-10
2	0,20	0,30	11-30
3	0,30	0,60	31-60
4	0,25	0,85	61-85
5	0,10	0,95	86-95
6	0,05	1,00	95-100

O tempo entre chegadas para os clientes são gerados por uma lista de 19 valores de três dígitos de uma tabela de números aleatórios e comparados com os dígitos aleatórios da Tabela 3.8.

Considera-se uma "boa" prática iniciar o processo numa posição qualquer dentro da tabela de dígitos aleatórios e a partir daí ir seguindo numa direção específica, nunca reutilizando a mesma seqüência de dígitos de dados em um problema. Se o mesmo padrão é usado repetidamente, as mesmas seqüências poderão ser geradas comprometendo a aleatoriedade desejada. A determinação entre os tempos de chegada no caixa são ilustrados na Tabela 3.10. Note que o primeiro dígito aleatório é 913. Através de uma comparação com os dados da quarta coluna na Tabela 3.8 determina-se que o tempo entre chegadas correspondente é de 8 minutos (primeira coluna da Tabela 3.8).

Tabela 3.10 Determinação dos tempos entre chegadas

<i>Cliente</i>	<i>Dígitos aleatórios</i>	<i>Tempo entre chegadas (minutos)</i>
1	-	-
2	913	8
3	727	6
4	015	1
5	948	8
6	309	3
7	922	8
8	752	7
9	353	2
10	302	3
11	109	1
12	093	1
13	607	5
14	738	6
15	359	3
16	888	8
17	106	1
18	212	2
19	493	4
20	535	5

Os tempos de serviço do caixa para os 20 clientes são ilustrados na Tabela 3.11. Estes tempos de serviços são gerados com base no procedimento anteriormente descrito, juntamente com a ajuda da Tabela 3.9. O primeiro tempo de serviço é de 4 minutos pois os dígitos aleatórios 84 estão no intervalo de 61-85.

Tabela 3.11 Determinação dos tempos de serviço

<i>Cliente</i>	<i>Dígitos aleatórios</i>	<i>Tempo de serviço (minutos)</i>
1	84	4
2	10	1
3	74	4
4	53	3
5	17	2
6	79	4
7	91	5
8	67	4
9	89	5
10	38	3
11	32	3
12	94	5
13	79	4
14	05	1
15	79	5
16	84	4
17	52	3
18	55	3
19	30	2
20	50	3

A ferramenta básica da simulação manual é a tabela de simulação. Estas tabelas são desenvolvidas para uma situação e posteriormente manuseadas e estruturadas para responder às questões colocadas. A tabela de simulação para este problema é uma extensão do tipo de tabela apresentada anteriormente (Tabela 3.4), onde considera-se que o primeiro cliente chega no instante 0. O serviço começa imediatamente e termina no instante 4. Este cliente fica no sistema por 4 minutos e o segundo cliente chega no instante 8 e assim o servidor ficou disponível por 4 minutos. No caso do quarto cliente, este chega no instante 15, mas não pode ser atendido antes do instante 18. Assim, este cliente espera na fila por 3 minutos. Este processo continua para todos os 20 clientes.



O desempenho geral do sistema é avaliado com base nos tempos de serviço, tempos que os clientes gastam dentro do sistema, tempos de disponibilidade do servidor e tempos que o cliente espera na fila.

Alguns destes valores são calculados como segue:

- O tempo médio de espera para os clientes:

$$\text{Tempo médio de espera (minutos)} = \frac{\text{Tempo total que os clientes esperam na fila (minutos)}}{\text{Número total de clientes}} = \frac{56}{20} = 2,8 \text{ minutos}$$

- A probabilidade que o cliente tem de esperar na fila:

$$\text{Probabilidade (espera)} = \frac{\text{Número de clientes que ficam na fila de espera}}{\text{Número total de clientes}} = \frac{13}{20} = 0,65$$

- A proporção de tempo disponível do servidor:

$$\text{Probabilidade de tempo disponível} = \frac{\text{Tempo total em serviço (minutos)}}{\text{Tempo total de simulação (minutos)}} = \frac{18}{86} = 0,21$$

A probabilidade de um servidor estar ocupado é o complemento de 0,21, isto é, 0,79.

- O tempo médio de serviço:

$$\text{Tempo médio de serviço} = \frac{\text{Tempo total de serviço (minutos)}}{\text{Número total de clientes}} = \frac{68}{20} = 3,4 \text{ minutos}$$

Este resultado pode ser comparado com o tempo esperado de serviço determinando-se a média da distribuição de tempo usando a equação:

$$E(S) = \sum_{s=0}^{\infty} sp(s)$$

Aplicando o valor desta equação para a distribuição na Tabela 3.9 temos que:

$$\text{Tempo esperado de serviço} = 1(0,10) + 2(0,20) + 3(0,30) + 4(0,25) + 5(0,10) + 6(0,05) = 3,2 \text{ min.}$$

O tempo esperado de serviço é um pouco menor que o tempo médio de serviço na simulação mas, quanto mais longa a simulação, mais o tempo médio se aproximará de  $E(s)$ .

- O tempo médio entre as chegadas:

$$\text{Tempo médio entre chegadas (minutos)} = \frac{\text{Somatória de todos os tempos entre chegadas (minutos)}}{\text{Número de chegadas} - 1} = \frac{82}{19} = 4,3 \text{ minutos}$$

1 é subtraído do denominador já que a primeira chegada é considerada como ocorrendo no instante 0. Este resultado pode ser comparado com a média da distribuição, cujos limites são  $a = 1$  e  $b = 8$ :

$$E(A) = \frac{a+b}{2} = \frac{1+8}{2} = 4,5 \text{ minutos}$$

Quanto mais longa a simulação mais a média dos tempos entre chegadas deverá se aproximar da média teórica,  $E(A)$ .

- O tempo médio de espera:

$$\text{Tempo médio de espera (minutos)} = \frac{\text{Tempo total dos clientes na fila de espera (minutos)}}{\text{Número de clientes que ficam na fila de espera}} = \frac{56}{13} = 4,3 \text{ minutos}$$

- O tempo médio que um cliente espera pode ser determinado em duas maneiras:

Primeira forma:

$$\text{Tempo médio que um cliente espera (minutos)} = \frac{\text{Tempo total que os clientes esperam no sistema (min)}}{\text{Número total de clientes}} = \frac{124}{20} = 6,2 \text{ minutos}$$

Segunda forma:

$$\text{Tempo médio que um cliente espera (minutos)} = \text{Tempo médio que os clientes esperam na fila (minutos)} + \text{Tempo médio de serviço (minutos)}$$

Isto é:

$$\text{Tempo médio que um cliente espera (minutos)} = 2,8 + 3,4 = 6,2 \text{ minutos}$$

A tomada de uma decisão sobre o sistema pode ser baseada nestes resultados, mas com maior tempo de simulação pode-se aumentar a precisão dos dados obtidos. De qualquer modo, algumas observações podem ser realizadas. A maioria dos clientes tem que esperar na fila do caixa apesar do tempo médio de espera não ser muito grande. O servidor não fica muito ocioso. Os objetivos considerados com base em tais resultados dependem de uma avaliação dos custos com servidores adicionais (simulações que envolvem variações das variáveis de chegada e de distribuição dos serviços são apresentados posteriormente)

### Exemplo 3.2 Fila única com 2 servidores

O objetivo deste exemplo é ilustrar o procedimento de simulação quando existe mais de um servidor. Considere uma lanchonete onde os clientes fazem suas refeições. Os clientes chegam de acordo com o indicado na Tabela 3.12.

Tabela 3.12 Distribuição dos tempos de entre chegadas dos clientes

Tempo entre chegadas (minutos)	Probabilidade	Probabilidade cumulativa	Dígitos aleatórios considerados
1	0,25	0,25	01-25
2	0,40	0,65	26-65
3	0,20	0,85	66-85
4	0,15	1,00	86-100

Existem 2 funcionários para atendimento: Func1 e Func2. Func1 é mais trabalhador e habilidoso além de mais rápido que Func2. A distribuição dos tempos de serviços são indicados na Tabela 3.13 e na Tabela 3.14.

Tabela 3.13 Distribuição dos tempos de serviço de Func1

Tempo de serviço (minutos)	Probabilidade	Probabilidade cumulativa	Dígitos aleatórios considerados
2	0,30	0,30	01-30
3	0,28	0,58	31-58
4	0,25	0,83	59-83
5	0,17	1,00	84-100

A simulação é realizada de modo similar ao exemplo 3.1. A regra de simplificação é que Func1 sempre atende os clientes quando ambos os funcionários estão disponíveis, isto é, considera-se que, Func1 tem maior iniciativa e motivação para este trabalho.

Tabela 3.14 Distribuição dos tempos de serviço de Func2

Tempo de serviço (minutos)	Probabilidade)	Probabilidade cumulativa	Dígitos aleatórios considerados
3	0,35	0,35	01-35
4	0,25	0,60	36-60
5	0,20	0,80	61-80
6	0,20	1,00	81-100

O problema é avaliar o desempenho do sistema e para estimar suas medidas de desempenho, é necessário definir quanto tempo deseja-se simular. Quanto mais extensa a simulação, mais precisos são os resultados entretanto, para fins ilustrativos será considerado um caso de 26 clientes.

Os possíveis eventos incluem: chegada de cliente, cliente começando a ser atendido por Func1, cliente completando o serviço com Func1, cliente começando a ser atendido por Func2, cliente completando o serviço com Func2. Os resultados da simulação são ilustrados na Tabela 3.15.

Tabela 3.15 Tabela de simulação resultante

Identificador do cliente	Dígito aleatório para ao tempo entre chegadas	Tempo entre chegadas	Instante de chegada	Dígito aleatório para o tempo de serviço	Func1			Func2			Tempo na fila
					Início do serviço	Tempo de serviço	Fim do serviço	Início do serviço	Tempo de serviço	Início do serviço	
1	-	-	0	95	0	5	5				0
2	26	2	2	21				2	3	5	0
3	98	4	6	51	6	3	9				0
4	90	4	10	92	10	5	15				0
5	26	2	12	89				12	6	18	0
6	42	2	14	38	15	3	18				1
7	74	3	17	14	18	2	20				1
8	80	3	20	61	20	4	24				0
9	68	3	23	50				23	4	27	0
10	22	1	24	49	24	3	27				0
11	48	2	26	39	27	3	30				1
12	34	2	28	53				28	4	32	0
13	45	2	30	88	30	5	35				0
14	24	1	31	01				32	3	35	1
15	34	2	33	81	35	4	39				2
16	63	2	35	53				35	4	39	0
17	38	2	37	81	39	4	43				2
18	80	3	40	64				40	5	45	0
19	42	2	42	01	43	2	45				1
20	56	2	44	67	45	4	49				1
21	89	4	48	01				48	3	51	0
22	18	1	49	47	49	3	52				0
23	51	2	51	75				51	5	56	0
24	71	3	54	57	54	3	57				0
25	16	1	55	87				56	6	62	1
26	92	4	59	47	59	3	62				0
					56			43			11

A análise da Tabela 3.15 resulta nas seguintes observações:

- Até o instante de 62 minutos Func1 estava ocupado 90% do tempo e Func2 estava ocupado apenas 69% do tempo. Existe um desequilíbrio que indica que Func2 tem muito mais tempo livre.

- 9 das 26 chegadas de clientes (cerca de 35%) envolvem espera. A média de tempo de espera para todos os clientes é de 0,42 minutos (25 segundos) que é relativamente baixa.
- Dos 9 casos que envolvem espera, esta foi na média de 1,22 minutos, o que é relativamente baixo.
- Em suma, este sistema parece estar adequadamente dimensionado para atendimento aos clientes. 1 funcionário não pode atender todos os clientes, e provavelmente 3 funcionários seria demasiado. O acréscimo de mais um funcionário, reduzirá o tempo de espera para zero. Contudo, o custo de espera teria de ser relativamente alto para justificar este servidor adicional.

## 3.2 Simulação de sistemas de estoque

Uma classe de problemas de simulação envolve sistemas de estoque. O comportamento dos dados de simulação de um sistema de estoque relativamente simples é ilustrado na Figura 3.5.

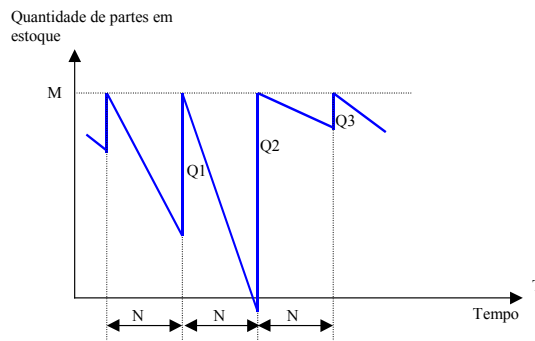


Figura 3.5 Nível de estoque de um sistema de estoque de partes

Este sistema tem uma verificação periódica do nível de estoque a cada intervalo de tempo  $= N$ . Se nestas verificações o nível em estoque é inferior a  $M$ , uma ordem de reposição de  $Q$  partes é efetivada para que o nível retorne ao valor  $M$ .

Neste sistema, o *lead time* (isto é, o intervalo de tempo entre a emissão da ordem de reposição e a reposição efetiva das partes) é considerada como zero. Em geral, como a demanda não é conhecida com certeza, a quantidade envolvida nas ordens de reposição são probabilísticas. Neste caso, a demanda é considerada como sendo uniforme dentro de cada período de tempo indicado na Figura 3.5. De fato, demandas não são em geral uniformes e têm flutuações com o tempo. Uma possibilidade é considerar que toda a demanda ocorre no início de cada ciclo. Outra possibilidade mais realística é que o *lead time* não é zero, isto é, é um valor associado a uma variação probabilística.

Nota-se na Figura 3.5 que existe uma situação onde a quantidade em estoque cai abaixo de zero, indicando uma falta e se considera que quando a ordem de reposição é efetivada, a demanda das partes que faltavam é atendida. Para evitar este problemas, e por segurança, em geral considera-se uma quantidade de estoque de reserva e/ou de segurança.

Aumentar as partes em estoque tem evidentemente custos que estão relacionados com a aquisição de tais partes (que também pode ser considerado como uma perda quando não se dispõe de fundos para os outros investimentos propostos), uso de um espaço físico, contratação de segurança, e assim por diante. Uma alternativa para evitar estes custos é fazer verificações e reposições com maior frequência. Isto também tem um custo

associado que é o custo de efetivação da ordem de reposição. Outros custos a serem considerados envolvem a rapidez no atendimento dos clientes e a reação destes (custos) com a falta de partes. Estoques maiores podem diminuir a possibilidades de faltas mas isto deve ser devidamente dimensionado para minimizar os custos envolvidos.

O custo total de um sistema de estoque é a medida de desempenho deste sistema. Este pode ser afetado por decisões políticas. Por exemplo, na Figura 3.5, como se define o nível máximo  $M$  de estoque, e o intervalo  $N$  das verificações periódicas ?

No sistema de estoque  $(M,N)$ , os eventos que podem ocorrer são: a demanda por partes em estoque, a verificação do nível de estoque, a recepção de partes de acordo com uma ordem ao final de cada período de verificação.

### Exemplo 3.3 Simulação de um sistema de estoques $(M,N)$

Este exemplo segue o padrão de funcionamento do sistema de estoque ilustrado na Figura 3.5. Considera-se que o nível máximo de estoque  $M$ , é de 11 unidades e o período de verificação  $N$ , é de 5 dias. O problema é estimar, através de simulações, o número médio de unidades em estoque e se for o caso o número de dias com falta de unidades em estoque. A distribuição da demanda por dia é indicada na Tabela 3.16.

Tabela 3.16 Demanda diária

Demanda	Probabilidade	Probabilidade cumulativa	Dígitos aleatórios considerados
0	0,10	0,10	01-10
1	0,25	0,35	11-35
2	0,35	0,70	36-70
3	0,21	0,91	71-91
4	0,09	1,00	92-100

Neste exemplo, o *lead time* é uma variável aleatória, como indicada na Tabela 3.17. Considera-se que as ordens de reposição são geradas ao final de cada verificação e o material solicitado é recebido e entra no sistema de acordo com o *lead time*.

Tabela 3.17 *Lead time*

Lead time (dias)	Probabilidade	Probabilidade cumulativa	Dígitos aleatórios considerados
1	0,6	0,6	1-6
2	0,3	0,9	7-9
3	0,1	1,0	10

Para fazer uma estimativa do número médio de unidades em estoque, deve-se simular vários ciclos. Neste exemplo, somente cinco ciclos serão realizados para ilustrar o procedimento.

Os dígitos aleatórios considerados para a demanda diária e para o *lead time* estão na coluna direita da Tabela 3.16 e Tabela 3.17. A Tabela 3.18 sintetiza o resultado da simulação. A simulação é iniciada com um nível de estoque de 3 unidades e uma ordem de reposição de 8 unidades agendadas para serem recebidas no prazo de 2 dias.

A seguir, a tabela de simulação é completada com várias datas devidamente selecionadas para descrever a operação do processo. As 8 unidades de reposição estão disponíveis no estoque na manhã do terceiro dia do primeiro ciclo, elevando o nível de estoque de 1 para 9 unidades. A demanda no primeiro ciclo reduziu o nível final do estoque para 2 unidades (final do quinto dia). Assim, é emitida a ordem de reposição de

9 unidades. Neste caso o *lead time* é de 1 dia. As 9 unidades são incluídas no estoque na manhã do dia 2 do segundo ciclo.

Tabela 3.18 Tabela de simulação para um sistema de estoque (M,N)

Ciclo	Dia	Estoque inicial	Dígito aleatório para a demanda	Demanda	Estoque final	Falta	Ordem de reposição	Dígito aleatório para o lead time	Dias para a chegada da reposição	
1	1	3	24	1	2	0			1	
	2	2	35	1	1	0			0	
	3	9	65	2	7	0				
	4	7	81	3	4	0				
	5	4	54	2	2	0	9	5	1	
2	1	2	03	0	2	0			0	
	2	11	87	3	8	0				
	3	8	27	1	7	0				
	4	7	73	3	4	0				
	5	4	70	2	2	0	9	0	3	
3	1	2	47	2	0	0			2	
	2	0	45	2	0	2			1	
	3	0	48	2	0	4			0	
	4	9	17	1	4	0				
	5	4	09	0	4	0	7	3	1	
4	1	4	42	2	2	0			0	
	2	9	87	3	6	0				
	3	6	26	1	5	0				
	4	5	36	2	3	0				
	5	3	40	2	1	0	10	4	1	
5	1	1	07	0	1	0			0	
	2	11	63	2	9	0				
	3	9	19	1	8	0				
	4	8	88	3	5	0				
	5	5	94	4	1	0	10	8	2	
					87					

Nota-se que no início do dia 2 do terceiro ciclo, o estoque é zero. Um pedido de 2 unidades neste dia leva a uma situação de falta. Estes pedidos ficam agendados para quando houver unidades suficientes em estoque, isto é, os pedidos continuam a ser considerados naquele dia e no próximo também quando ocorre um novo pedido de mais 2 unidades. No início do dia 4 do terceiro ciclo estão disponíveis no estoque 9 unidades. Assim, as 4 unidades que foram pedidas anteriormente e mais 1 unidade solicitada neste dia reduzem o estoque para 4 unidades.

Baseado nos cinco ciclos da simulação, a média de unidades em estoque no final dos dias é de aproximadamente 3,5 (87/25) unidades. Em 2 dos 25 dias existe uma situação de falta de unidades para atendimento aos pedidos.

### Exemplo 3.4 Problema do jornaleiro

O problema clássico trata-se da compra e venda de jornais. O jornaleiro compra os jornais por \$0,33 cada e vende-os por \$0,50 cada. Jornais não vendidos no final do dia são entregues de volta às empresas por \$0,05 cada. Os jornais são adquiridos em pacotes com 10 unidades. Existem três níveis de venda: *alta*, *média* e *baixa*, com probabilidades de ocorrência de 0,35; 0,45; 0,20 respectivamente. A distribuição da demanda de jornal para cada nível de venda é indicada na Tabela 3.19.

Os lucros são dados pela seguinte relação:

$$\text{Lucro} = \text{Rendimentos da venda} - \text{Custo dos jornais} - \text{Perda por excesso de demanda} + \text{venda da sobra de jornais}$$

Tabela 3.19 Distribuição da demanda de jornais

Demanda	Distribuição probabilística da demanda		
	Dia de alta venda	Dia de venda média	Dia de baixa venda
40	0,03	0,10	0,44
50	0,05	0,18	0,22
60	0,15	0,40	0,16
70	0,20	0,20	0,12
80	0,35	0,08	0,06
90	0,15	0,04	0,00
100	0,07	0,00	0,00

Pelos dados apresentados, o rendimento por venda é de \$0,50 por jornal vendido. O custo é de \$0,33 por jornal. A perda por excesso de demanda é de \$0,17 para cada pedido de jornal não atendido (evidentemente este custo é controverso pois pode representar a perda de cliente). A venda de cada jornal que sobra retorna \$0,05.

A Tabela 3.20 e Tabela 3.21 indicam os dígitos aleatórios para cada tipo de dia de venda de jornais e a demanda correspondente.

Tabela 3.20 Dígitos aleatórios para cada tipo de dia de venda de jornais

Tipo de dia de venda	Probabilidade	Probabilidade cumulativa	Dígito aleatório considerados
Alta	0,35	0,35	01-35
Média	0,45	0,80	36-80
Baixa	0,20	1,00	81-100

Tabela 3.21 Dígitos aleatórios para a demanda de jornais

Demanda	Distribuição cumulativa			Dígitos aleatórios considerados		
	Alta	Média	Baixa	Alta	Média	Baixa
40	0,03	0,10	0,44	01-03	01-10	01-44
50	0,08	0,28	0,66	04-08	11-28	45-66
60	0,23	0,68	0,82	09-23	29-68	67-82
70	0,43	0,88	0,94	24-43	69-88	83-94
80	0,78	0,96	1,00	44-78	89-96	95-100
90	0,93	1,00	1,00	79-93	97-100	
100	1,00	1,00	1,00	94-100		

Para resolver este problema por simulação é necessário definir inicialmente uma política de compra de certo número de jornais em cada dia e, depois realizar as simulações considerando um certo período para determinar o saldo final.

Neste caso, considera-se um período de 20 dias e a compra de 70 jornais por dia. Neste experimento, pode-se com isto avaliar os lucros diários e assim obter uma estimativa para o número de jornais vendidos. Os resultados desta simulação estão apresentados na Tabela 3.22.

No dia 1 a demanda é de 60 jornais. A venda de 60 jornais gera uma entrada de \$30,00. Sobram 10 jornais no final do dia e com o valor de \$0,05 cada, tem-se a recuperação de \$0,50. O lucro para o primeiro dia é determinado da seguinte maneira:

$$\text{Lucro} = \$30,00 - \$23,10 - 0 + \$0,50 = \$7,40$$

No dia 5 a demanda é maior do que o número de jornais adquirido. As vendas geram \$35,00 pois somente 70 jornais são disponíveis neste caso. Poderiam ser vendidos mais 20 jornais que não foram atendidos e assim se tem uma perda por excesso de demanda de \$3,40 (20 x \$0,17). O lucro do dia é calculado como se segue:

$$\text{Lucro} = \$35,00 - \$23,10 - \$3,40 + 0 = \$8,50.$$

Depois do dia 20 é realizada a soma dos lucros diários com o total de \$174,90. Este pode, também, ser computado como um total de 20 dias de simulação, como se segue abaixo:

$$\text{Lucro total} = \$645,00 - \$13,60 + \$5,50 = \$174,90$$

Tabela 3.22 Tabela de simulação para compra de jornais

Dia	Dígito aleatório por tipo de dia de venda	Tipo de dia de venda	Dígito aleatório para a demanda	Demanda	Vendas	Perda por excesso de demanda	Retorno de jornais não vendidos	Lucro do dia
1	94	Baixa	80	60	\$30,00		\$0,50	\$7,40
2	77	Média	20	50	25,00		1,00	2,90
3	49	Média	15	50	25,00		1,00	2,90
4	45	Média	88	70	35,00			11,90
5	43	Média	98	90	35,00	\$3,40		8,50
6	32	Alta	65	80	35,00	1,70		10,20
7	49	Média	86	70	35,00			11,90
8	00	Baixa	73	60	30,00		0,50	7,40
9	16	Alta	24	70	35,00			11,90
10	24	Alta	60	80	35,00	1,70		10,20
11	31	Alta	60	80	35,00	1,70		10,20
12	14	Alta	29	70	35,00			11,90
13	41	Média	18	50	25,00		1,00	2,90
14	61	Média	90	80	35,00	1,70		10,20
15	85	Baixa	93	70	35,00			11,90
16	08	Alta	73	80	35,00	1,70		10,20
17	15	Alta	21	60	30,00		0,50	7,40
18	97	Baixa	45	50	25,00		1,00	2,90
19	52	Média	76	70	35,00			11,90
20	78	Média	96	80	35,00	1,70		10,20
					\$645,00	\$13,60	\$5,50	\$174,90

### 3.3 Outros exemplos de simulação

Esta seção inclui outros exemplos clássicos de simulação.

#### Exemplo 3.5 Um problema de confiabilidade

Uma máquina de usinagem de grande porte possui 3 diferentes rolamentos que eventualmente podem apresentar falhas durante um serviço. A expectativa de vida útil de cada rolamento comporta-se de acordo com uma distribuição cumulativa indicada na Tabela 3.23.

Tabela 3.23 Tempo de vida útil dos rolamentos

Vida útil do rolamento (horas)	Probabilidade	Probabilidade cumulativa	Dígitos aleatórios considerados
1000	0,10	0,10	01-10
1100	0,13	0,23	11-23
1200	0,25	0,48	24-48
1300	0,13	0,61	49-61
1400	0,09	0,70	62-70
1500	0,12	0,82	71-82
1600	0,02	0,84	83-84
1700	0,06	0,90	85-90
1800	0,05	0,95	91-95
1900	0,05	1,00	96-100



Quando um rolamento falha, a máquina interrompe sua operação e a equipe de manutenção é acionada para substituir o rolamento. O tempo de atendimento da manutenção ao pedido da máquina é uma variável aleatória com uma distribuição indicada na Tabela 3.24.

Tabela 3.24 Tempo para atendimento pela manutenção

Tempo para atendimento (min)	Probabilidade	Probabilidade cumulativa	Dígitos aleatórios considerados
5	0,6	0,6	1-6
10	0,3	0,9	7-9
15	0,1	1,00	0

O custo para a máquina parada é estimada em \$5,00 por minuto. O custo direto da manutenção é de \$15,00 por hora. Esta manutenção dispense 20 minutos para a substituição de um rolamento, 30 minutos para a substituição de 2 rolamentos e 40 minutos para a substituição de 3 rolamentos. Cada rolamento custa \$16,00.

Além do procedimento tradicional de substituir apenas o rolamento com problema existe a opção de substituir todos os 3 rolamentos sempre que alguma falha ocorrer. Assim o objetivo aqui é estudar estas opções.

A Tabela 3.25 representa a simulação de 20.000 horas de operação da máquina. Note que existem momentos onde mais de um rolamento apresenta falha. Isto ocorre em função da precisão considerada no estudo.

Tabela 3.25 Substituição de rolamentos de acordo com o procedimento tradicional

Rolamento 1					Rolamento 2					Rolamento 3					
Dígitos aleatórios	Vida útil (h)	Vida acumulada (h)	Dígito aleatório	Tempo para atendimento (min)	Dígitos aleatórios	Vida útil (h)	Vida acumulada (h)	Dígito aleatório	Tempo para atendimento (min)	Dígitos aleatórios	Vida útil (h)	Vida acumulada (h)	Dígito aleatório	Tempo para atendimento (min)	
1	67	1400	1400	2	5	70	1500	1500	0	15	76	1500	1500	0	15
2	08	1000	2400	3	5	43	1200	2700	7	10	65	1400	2900	2	5
3	49	1300	3700	1	5	86	1700	4400	3	5	61	1400	4300	7	10
4	84	1600	5300	7	10	93	1800	6200	1	5	96	1900	6200	1	5
5	44	1200	6500	8	10	81	1600	7800	2	5	65	1400	7600	3	5
6	30	1200	7700	1	5	44	1200	9000	8	10	56	1300	8900	3	5
7	19	1000	8700	2	5	19	1100	10100	1	5	11	1100	10000	6	5
8	63	1400	10.100	8	10	51	1300	11400	1	5	86	1700	11700	3	5
9	02	1000	11100	3	5	45	1300	12700	7	10	57	1300	13000	1	5
10	02	1000	12100	8	10	12	1100	13800	8	5	49	1300	14300	4	5
11	77	1500	13600	7	10	48	1300	15100	0	15	36	1200	15500	8	10
12	59	1300	14900	5	5	09	1000	16100	8	10	44	1200	16700	2	5
13	23	1100	16000	5	5	44	1200	17300	1	5	94	1800	18500	1	5
14	53	1300	17300	9	10	46	1200	18500	2	5	78	1500	20000	7	10
15	85	1700	19000	6	5	40	1200	19700	8	10					
16	75	1500	20500	4	5	52	1300	21000	5	5					
110					125					95					

Considera-se que os tempos nunca são exatamente os mesmos e também que apenas um rolamento é substituído em cada ocorrência de falha. Dezesesseis substituições são realizadas para os rolamentos 1 e 2, mas somente quatorze substituições são requeridas para o rolamento 3. O custo do sistema é estimado como se segue:

$$\text{Custo do rolamento} = 46 \text{ rolamentos} \times \$16,00/\text{rolamento} = \$736,00$$

$$\text{Custo do tempo para atendimento} = (110 + 125 + 95) \text{ minutos} \times \$5/\text{minuto} = \$1.650$$

$$\text{Custo do tempo durante o reparo} = 46 \text{ rolam.} \times 20 \text{ min/rolam.} \times \$15,00/60 \text{ minutos} = \$4.600,00$$

$$\text{Custo da manutenção} = 46 \text{ rolamentos} \times 20 \text{ minutos/rolamentos} \times \$15,00/60 \text{ minutos} = \$230,00$$

$$\text{Custo total} = \$736,00 + \$1.650,00 + \$4.600,00 + \$230,00 = \$7.216,00$$

Tabela 3.26 é uma simulação usando o procedimento proposto de substituição simultânea de 3 rolamentos a cada ocorrência de falha. Nota-se que o mesmo tempo de vida útil acaba sendo estabelecido para os 3 rolamentos. Considera-se que os rolamentos estão dispostos em ordem numa prateleira e, são tirados seqüencialmente e devidamente instalados na máquina. Os dígitos aleatórios que definem a vida útil dos rolamentos nos casos adicionais são indicados a esquerda da barra (|) na décima quinta substituição do rolamento 3. Quando o novo procedimento é adotado, são necessários mais 18 conjuntos de rolamentos. Nesta simulação, o tempo para o atendimento é repetido mas gerado novamente de modo independente do primeiro estudo.

Tabela 3.26 Substituição de rolamentos de acordo com o novo procedimento proposto

	Rolamento 1 Vida útil (horas)	Rolamento 2 Vida útil (horas)	Rolamento 3 Vida útil (horas)	Primeira falha (horas)	Tempo de vida acumulada (horas)	Dígito aleatório	Tempo para atendimento (min)
1	1400	1500	1500	1400	1400	3	5
2	1000	1200	1400	1000	2400	7	10
3	1300	1700	1400	1300	3700	5	5
4	1600	1800	1900	1600	5300	1	5
5	1200	1600	1400	1200	6500	4	5
6	1200	1200	1300	1200	7700	3	5
7	1000	1100	1100	1000	8700	7	10
8	1400	1300	1700	1300	10000	8	10
9	1000	1300	1300	1000	11000	8	10
10	1000	1100	1300	1000	12000	3	5
11	1500	1300	1200	1200	13200	2	5
12	1300	1000	1200	1000	14200	4	5
13	1100	1200	1800	1100	15300	1	5
14	1300	1200	1500	1200	16500	6	5
15	1700	1200	63 1400	1200	17700	2	5
16	1500	1300	21 1100	1100	18800	7	10
17	85 1700	53 1300	23 1100	1100	19900	0	15
18	05 1000	29 1200	51 1300	1000	20900	5	5
							125

O custo total do novo procedimento é computado como se segue:

$$\text{Custo do rolamento} = 54 \text{ rolamentos} \times \$16,00/\text{rolamento} = \$864,00$$

$$\text{Custo do tempo para atendimento} = 125 \text{ minutos} \times \$5,00/\text{minuto} = \$625,00$$

$$\text{Custo do tempo durante o reparo} = 18 \text{ conj.} \times 40 \text{ min/conj.} \times \$5,00/\text{minutos} = \$3.600,00$$

$$\text{Custo da manutenção} = 18 \text{ conj.} \times 40 \text{ minutos/conj.} \times \$15,00/60 \text{ minutos} = \$180,00$$

$$\text{Custo total} = \$864,00 + \$625,00 + \$3.600,00 + \$180,00 = \$5.269,00.$$

O novo procedimento representa uma economia de \$1.947,00 nas 20.000 horas de simulação. Se a máquina operar continuamente, o tempo de simulação representa cerca de 2 ¼ anos. Assim, a economia é de aproximadamente \$865,00 por ano.

### Exemplo 3.6 Números aleatórios com distribuição normal

Um problema clássico de simulação é o de bombardeiros tentando atingir uma base inimiga como ilustrado na Figura 3.6. Se a bomba cair em qualquer parte da base, considera-se que o alvo é atingido caso contrário é uma perda. Considera-se que os bombardeiros voam sempre na direção horizontal, da esquerda para direita. O ponto de impacto das bombas é considerado como tendo uma distribuição normal ao redor do alvo principal  $(0,0)$  com um desvio padrão de 600 metros na direção horizontal e 300 metros na vertical. O problema é simular a operação e analisar o número de bombas que atingem o alvo.

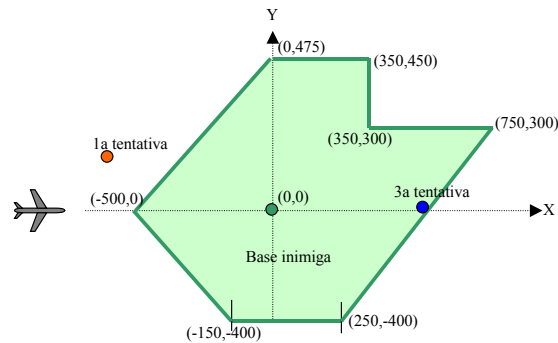


Figura 3.6 Bombardeio de base inimiga

A variável padronizada  $Z$  de uma distribuição normal é definida como:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

onde  $X$  é a variável normal aleatória,  $\mu$  é o valor médio da distribuição de  $X$ , e  $\sigma$  é o desvio padrão de  $X$ . Assim,

$$X = Z\sigma + \mu$$

Neste exemplo, o alvo principal tem as coordenadas  $(0,0)$ , isto é, o valor  $\mu$  é 0 tanto na direção horizontal como na direção vertical. Então,

$$X = Z_{\sigma_x}$$

$$Y = Z_{\sigma_y}$$

onde  $(X,Y)$  são as coordenadas obtidas por simulação da posição que a bomba atingiu. Se  $\sigma_x = 600$  e  $\sigma_y = 300$ . Então:

$$X = 600 Z_i$$

$$Y = 300 Z_j$$

O  $i$  e o  $j$  subscritos identificam os valores de  $Z$  nas direções horizontal e vertical respectivamente. Os valores de  $Z$  são números aleatórios com distribuição normal. Estes podem ser gerados através de uma distribuição uniforme de números aleatórios. Alternativamente, tabelas de números aleatórios com distribuição normal também podem ser utilizados.

Para entender o que acontece, de fato, neste caso deveriam ser conduzidas simulações de algumas dezenas de ciclos. Entretanto, apresentaremos aqui apenas a simulação de 1 ciclo. A tabela de números aleatórios com distribuição normal é utilizada da mesma forma como a tabela de números aleatórios, isto é, escolhe-se aleatoriamente um ponto de entrada na tabela e segue-se sistematicamente uma única direção evitando ciclos. A Tabela 3.27 apresenta os resultados desta simulação.

Tabela 3.27 Simulação dos bombardeios

Identificação da aeronave	RNNx	Coordenada x (600 RNNx)	RNNy	Coordenada y (300x RNNy)	Resultado
1	-0,84	-504	0,66	198	Perda
2	1,03	618	-0,13	-39	Perda
3	0,92	552	0,06	18	Acerto
4	-1,87	-1092	-1,40	-420	Perda
5	-0,16	-96	0,23	69	Acerto
6	-1,78	-1068	1,33	399	Perda
7	2,04	1224	0,69	207	Perda
8	1,08	648	-1,10	-330	Perda
9	-1,50	-900	-0,72	-216	Perda
10	-0,42	-252	-0,60	-180	Acerto

Obs.: RNNi = número aleatório com distribuição normal considerado para calcular o valor da coordenada i

O primeiro número aleatório com distribuição normal considerado é  $-0,84$ , gerando uma coordenada  $x = 600 * (-0,84) = -504$ . O número aleatório com distribuição normal usado para gerar a coordenada  $y$  é  $0,66$  que resulta na coordenada  $y = 300 * 0,66 = 198$ . Analisando-se a coordenada  $(-504, 198)$  verifica-se que se trata de uma perda. Esta coordenada e o resultante do terceiro lançamento de bomba são indicados na Figura 3.6. Os 10 bombardeios simulados resultam em 3 casos de sucesso e 7 de perdas. Muitos mais ciclos são necessários para avaliar o potencial de destruição do depósito. Este é um exemplo de simulação de Monte Carlo.

## 4. Linguagens de Simulação e Simuladores

As linguagens de simulação e os pacotes de simulação discreta são ferramentas muito úteis para a simulação de sistemas discretos. Alguns pacotes também incluem recursos para modelar sistemas de variáveis contínuas ou com um *mix* de variáveis contínuas e discretas.

### 4.1 Linguagens específicas

As linguagens de simulação em computador facilitam o desenvolvimento e execução de simulações de sistemas complexos do mundo real. Neste contexto existem as linguagens de programação de uso geral como o FORTRAN, Pascal, C, C++, ... As linguagens específicas de simulação como GPSS, SIMAN V, SIMSCRIPT II.5, SLAM II, ... e pacotes de simulação orientada a objetos como MODSIM III e similares. A seguir tem-se uma breve apresentação de algumas dessas linguagens.

#### GPSS

GPSS é uma linguagem de programação para o fim específico de simulação e com alto grau de estruturação e orientada para transações (um caso especial de orientação a processos). Foi projetada para facilitar a simulação de sistemas de filas.

#### SIMAN V, SINSRIPT II.5 e SLAM II

SIMAN V, SINSRIPT II.5 e SLAM II são programas de simulação de alto nível, que têm estruturas especialmente concebidas para facilitar a construção de modelos. Estas linguagens derivam da escolha da abordagem (por interação de processos, agendamento de eventos, etc.) para a modelagem de um sistema. Estas linguagens possuem praticamente todos os recursos e facilidades do GPSS mais a capacidade de realizar simulação contínua (sistemas com variação contínua do estado das variáveis).

#### MODSIM III

MODSIM III é um descendente da linguagem que uma empresa desenvolveu para o exército americano. Sua sintaxe é herdada do Modula-2 e Ada, assim como os conceitos de simulação provêm do SIMSCRIPT e Simula. Características de orientação a objetos foram derivados do Smaltalk.

### 4.2 Pacotes de simulação

A simulação de sistemas pode envolver vários níveis de complexidade e assim softwares específicos têm sido desenvolvidos para diferentes casos. A seguir, alguns dos pacotes de software mais populares atualmente são descritos brevemente:

#### ProModel / MedModel

No ProModel / MedModel, um modelo é construído definindo-se um caminho ou rota para uma entidade (item) ou várias entidades (itens como peças, partes, etc.), as capacidades de cada um dos pontos (estações) ao longo de uma rota destas entidades, os recursos envolvidos tais como os operadores, o sistema de movimentação das entidades, o

agendamento das chegadas de entidades e a especificação dos parâmetros de simulação. Este pacote permite ao usuário a inclusão de subrotinas em C ou Pascal.

## **SIMFACTORY II.5**

SIMFACTORY II.5 é um simulador de sistemas escrito em SIMSCRIPT II.5 e MODSIM III para profissionais que não possuem muita experiência nas técnicas de análise de sistemas. Um modelo é construído em etapas: definindo primeiramente o *layout* (arranjo físico do sistema) que consiste em estações de processamento, *buffers*, áreas de recepção de partes e caminhos dos transportadores, definição do produto (partes, itens, etc.), recursos e finalmente as interrupções.

## **AutoMod**

AutoMod, combina as características de uma linguagem de simulação para fins gerais e um simulador de sistemas específico. Possui recursos de programação gerais incluindo a especificação de processos e procedimentos, recursos, filas e variáveis. Processos são especificados em termos de fluxo de entidades (itens), conexões de entrada e saída para estações do sistema e lógica do processo. Recursos são especificados em termos de suas capacidades, tempo de processamento, tempo entre falhas e tempo para reparo. Entidades (itens) são definidas por sua forma e tamanho, atributos, taxas de geração e prioridades.

O simulador é voltado para análise de sistemas de movimentação de materiais onde pode-se definir elementos como: esteiras, veículos transportadores, pontes rolantes, etc.

## **Taylor II**

Um modelo em Taylor II consiste de quatro entidades fundamentais: *elements*, *jobs*, *routings* e *products*. Os tipos de *elements* são classificados em estação de entrada/saída, máquina, *buffer*, esteira transportadora, transporte, caminho, apoio, estoque. Uma ou mais operações podem envolver um mesmo elemento. As três operações básicas são: processamento, transporte e armazenamento.

## **Witness**

WITNESS contém elementos próprios para sistema de manufatura e é orientada às máquinas (*machine-oriented*). Por exemplo, máquinas podem ser do tipo: *single*, *batch*, *production*, *assembly*, *multi-station* ou *multi-cycle*. Transportadores podem ser cumulativos ou não cumulativos.

## **Arena**

Arena é um pacote de simulação extensível e com recursos de animação. O modelo de simulação é construído selecionando módulos que contêm características do processo. Por exemplo, um módulo de inspeção pode modelar a tarefa de inspeção de um processo. Depois da escolha e especificação dos parâmetros dos módulos, o Arena executa uma animação do processo.

## 5. Bibliografia

- Banks, Jerry ; Carson II; John S. & Nelson, Barry L.: "*Discrete Event System Simulation*", 2<sup>nd</sup> Ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 1996.
- Bastidas Gustin, Gladys D.: *Aplicação de Redes de Petri Interpretadas na Modelagem de Sistemas de Elevadores em Edifícios Inteligentes*, Dissertação de Mestrado, EPUSP, São Paulo, SP, 2000.
- Junqueira, Fabrício: *Modelagem de Sistemas Flexíveis de Movimentação de Materiais através de Redes de Petri Interpretadas*, Dissertação de Mestrado, EPUSP, São Paulo, SP, 2001.
- Riascos, Luis A.M.: *Modelagem do Tratamento de Falhas em Sistemas de Manufatura Através de Redes de Petri Auto-Modificáveis*, Dissertação de Mestrado, EPUSP, São Paulo, SP, 1998.
- Villani, Emilia: *Abordagem Híbrida para Modelagem de Sistemas de Ar Condicionado em Edifícios Inteligentes*, Dissertação de Mestrado, EPUSP, São Paulo, SP, 2000.