Conjuntos e Lógica Fuzzy

1 Definições e Terminologia

Seja U uma coleção de objetos denotada genericamente por $\{u\}$, a qual pode ser discreta (número finito de elementos) ou contínua. U é denominado de *Universo de Discurso* e u representa um elemento genérico de U.

Definição 1 (CONJUNTO FUZZY) *Um conjunto fuzzy F num universo de discurso U é caracterizado por uma função de pertinência $\mu_F : U \to [0,1]$ que associa a cada elemento u de U um número $\mu_F(u)$ no intervalo $[0,1]$ que representa o grau de pertinência de u em F. Um conjunto fuzzy pode ser visto como uma generalização do conceito de um conjunto ordinário cuja função de pertinência assume apenas dois valores $\{0,1\}$. Portanto um conjunto fuzzy F em U pode ser representado por um conjunto de pares ordenados de um elemento genérico u e o seu grau de pertinência: $F = \{(u, \mu_F(u)) \mid u \in U\}$. Quando U é contínuo, um conjunto fuzzy pode ser escrito como,*

$$F = \int_U \mu_F(u)/u, \tag{1}$$

onde o símbolo de integral, $\int_U$, representa a união dos pares $(u, \mu_F(u))$ representados por $\mu_F(u)/u$. Quando U é discreto, um conjunto fuzzy F é representado por,

$$F = \sum_{i=1}^{n} \mu_F(u_i)/u_i, \tag{2}$$

onde o símbolo de somatória, $\sum$, também representa a operação de união.

Definição 2 (SUPORTE, PONTO DE "CROSSOVER" e "FUZZY SINGLETON") *O suporte de um conjunto fuzzy F é o conjunto de todos os pontos u em U tal que $\mu_F(u) > 0$. Em particular, o elemento u em U tal que $\mu_F = 0.5$, é chamado de Ponto de "Crossover" e um conjunto fuzzy cujo suporte é um único ponto em U com $\mu_F = 1.0$ é denominado "Fuzzy Singleton".*

2 Operações sobre Conjuntos Fuzzy

Seja A e B dois conjuntos fuzzy no universo de discurso U com funções de pertinência μ_A e μ_B, respectivamente. As operações de união, intersecção, e complemento são definidas através das funções de pertinência dos conjuntos, como mostrado a seguir.

Definição 3 (UNIÃO) *A função de pertinência $\mu_{A\cup B}$ da união $A \cup B$ é definida para todo $u \in U$ como (figura 1),*

$$\mu_{A\cup B}(u) = \max(\mu_A(u), \mu_B(u)). \quad (3)$$

Definição 4 (INTERSECÇÃO) *A função de pertinência $\mu_{A\cap B}$ da intersecção $A \cap B$ é definida para todo $u \in U$ como (figura 1),*

$$\mu_{A\cap B}(u) = \min(\mu_A(u), \mu_B(u)). \quad (4)$$

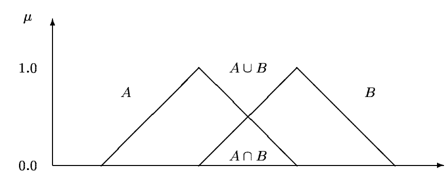

Figura 1: representação de $A \cup B$ e $A \cap B$

Definição 5 (COMPLEMENTO) *A função de pertinência $\mu_{\overline{A}}$ do complemento de um conjunto fuzzy A é definido para todo $u \in U$ como (figura 2),*

$$\mu_{\overline{A}}(u) = 1 - \mu_A(u). \tag{5}$$

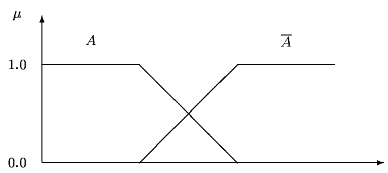

Figura 2: representação de um conjunto fuzzy A e seu complemento $\overline{A}$.

Conjuntos e Lógica Fuzzy

Definição 6 (PRODUTO CARTESIANO) *Se $A_1, \ldots, A_n$ são conjuntos fuzzy em $U_1, \ldots, U_n$, respectivamente, o produto cartesiano de $A_1, \ldots, A_n$ é um conjunto fuzzy no espaço $U_1 \times \ldots \times U_n$ com uma função de pertinência igual a,*

$$\mu_{A_1 \times \ldots \times A_n}(u_1, \ldots, u_n) = \min\{\mu_{A_1}(u_1), \ldots, \mu_{A_n}(u_n)\}, \tag{6}$$

ou

$$\mu_{A_1 \times \ldots \times A_n}(u_1, \ldots, u_n) = \mu_{A_1}(u_1) \cdot \ldots \cdot \mu_{A_n}(u_n), \tag{7}$$

onde $(\cdot)$ representa a operação de produto algébrico.

Definição 7 (RELAÇÃO FUZZY) *Uma relação fuzzy de aridade n é um conjunto fuzzy em $U_1 \times \ldots \times U_n$ e é expresso como,*

$$R_{U_1 \times \ldots \times U_n} = \{((u_1, \ldots, u_n), \mu_r(u_1, \ldots, u_n)) \mid (u_1, \ldots, u_n) \in U_1 \times \ldots \times U_n\}. \tag{8}$$

Definição 8 (COMPOSIÇÃO SUP-STAR) *Se R e S são relações fuzzy $U \times V$ e $V \times W$, respectivamente, a composição de R e S é uma relação fuzzy denotada por, $R \circ S$ e é definida através de,*

$$R \circ S = \left\{ \left[(u, w),\ \sup_{v}\ (\mu_R(u, v) * \mu_S(v, w)) \right], u \in U, v \in V, w \in W \right\}, \tag{9}$$

onde $*$ pode ser qualquer operador da classe de normas triangulares (veja definição 13).

Definição 9 (nível-α) *Define-se o conjunto nível-α ou corte-α de A como,*

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}. \tag{10}$$

Conjuntos e Lógica Fuzzy

3 Variáveis Linguísticas e Conjuntos Fuzzy

Definição 10 (NÚMERO FUZZY) *Um número fuzzy F num universo contínuo U é um conjunto fuzzy F em U normal e convexo, isto é,*

$$\max_{u \in U}\ \mu_F(u) = 1,$$

$$\mu_F(\lambda u_1 + (1 - \lambda) u_2) \geq \min(\mu_F(u_1), \mu_F(u_2)),$$

$$u_1, u_2 \in U, \lambda \in [0, 1]$$

Definição 11 (VARIÁVEIS LINGUÍSTICAS) *Uma variável linguística é caracterizado por uma quíntupla* $(x, T(x), U, G, M)$, *onde* x *é o nome de uma variável ;* $T(x)$ *é o conjunto de termos de* x, *ou seja, o conjunto dos nomes dos valores linguísticos de* x *e onde cada valor valor é interpretado como um número fuzzy definido em* U; G *é a regra sintática para geração dos nomes dos valores de* x; *e* M *é uma regra semântica que associa a cada valor um significado. Por exemplo, se* speed *é interpretado como variável linguística, então o seu conjunto de termos* T(speed) *poderia ser:* $T(\text{speed}) = \{\text{slow}, \text{medium}, \text{fast}, \text{very slow}, \dots\}$ *onde cada termo de*

T(speed) *é caracterizado por um conjunto fuzzy no universo de discurso* $U = [0, 100]$. *Pode-se interpretar* slow *como uma velocidade abaixo de 40 km/h,* medium *como uma velocidade em torno de 55 km/h, e* fast *como uma velocidade acima de 70 km/h. Esses termos podem ser caracterizados como conjuntos fuzzy com funções de pertinência como mostrado na figura 3.*

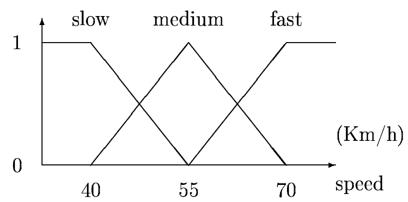

Figura 3: representação fuzzy de speed.

4 Lógica Fuzzy e Raciocínio Aproximado

Em lógica fuzzy e em raciocínio aproximado, existem duas importantes regras de inferência denominadas Modus Ponens Generalizado (GMP),

premissa 1:	$x = A'$
premissa 2:	**se** $x = A$ **então** $y = B$
conseqüência:	$y = B'$

e Modus Tollens Generalizado (GMT):

premissa 1:	$y = B'$
premissa 2:	**se** $x = A$ **então** $y = B$
conseqüência:	$x = A'$

A inferência fuzzy está baseada na regra de inferência composicional para raciocínio aproximado sugerida por Zadeh em 1973. Os conjuntos fuzzy A, A', B, B' são utilizados como valores linguísticos para as variáveis x, y ao invés de conjuntos precisos como em lógica clássica.

A regra de inferência Modus Ponens Generalizado, que se reduz a Modus Ponens quando $A' = A$ e $B' = B$, é um processo de inferência direto *(forward data driven inference)* que é particularmente útil para controladores fuzzy. A regra de inferência Modus Tollens Generalizado é um processo de inferência reverso *(backward goal driven inference)* é comumente utilizado em sistemas especialistas, por exemplo para diagnose médica.

Definição 12 (REGRA DE INFERÊNCIA COMPOSICIONAL Sup-Star) *Se R é uma relação fuzzy em $U \times V$, e x é um conjunto fuzzy em U, então a* regra de inferência sup-star *define que o conjunto fuzzy y em V induzido por x é dado por,*

$$y = x \circ R, \tag{11}$$

onde $x \circ R$ é a composição sup-star de x e R. Se star representa o operador mínimo então essa definição se reduz a regra de inferência composicional de Zadeh

5 Funções de Implicação Fuzzy

Em geral, uma regra de controle fuzzy é uma relação fuzzy que é expressa como uma implicação fuzzy. A definição de uma implicação fuzzy pode ser expressa através de uma função de implicação fuzzy. A escolha de uma função de implicação fuzzy envolvem critérios que não serão discutidos aqui.

Seguindo a idéia de Zadeh, vários pesquisadores propuseram funções de implicação fuzzy no qual os antecedentes e consequentes contêm variáveis fuzzy. Na literatura podem ser encontradas atualmente cerca de 40 funções de implicação fuzzy. Em geral essas implicações podem ser classificadas em três categorias básicas: *conjunção fuzzy, disjunção fuzzy e implicação fuzzy* . A seguir serão discutidos alguns tipos de funções de implicação fuzzy.

Definição 13 (NORMAS TRIANGULARES) *Uma norma triangular, representada genericamente por* $*$, *é uma função* $* : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, *inclui as operações de* intersecção, produto algébrico, produto limitado *e* produto drástico. *As operações associadas são definidas para todo* $x, y \in [0,1]$:

intersecção	$x \wedge y = \min\{x, y\}$
produto algébrico	$x \cdot y = xy$
produto limitado	$x \odot y = \max\{0, x+y-1\}$
produto drástico	$x \dot{\cap} y = \begin{cases} x & y = 1 \\ y & x = 1 \\ 0 & x, y < 1. \end{cases}$

Definição 14 (CO-NORMAS TRIANGULARES) *Uma co-norma triangular, representada genericamente por* $\dot{+}$, *é uma função* $\dot{+} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, *inclui as operações de* união, soma algébrica, soma limitada, soma drástica, *e* soma disjunta. *As operações associadas são definidas para todo* $x, y \in [0,1]$:

união	$x \vee y = \max\{x, y\}$
soma algébrica	$x \hat{+} y = x + y - xy$
soma limitada	$x \oplus y = \min\{1, x+y\}$
soma drástica	$x \dot{\cup} y = \begin{cases} x & y = 0 \\ y & x = 0 \\ 1 & x, y > 0. \end{cases}$
soma disjunta	$x \bigtriangleup y = \max\{\min(x, 1-y), \min(1-x, y)\}.$

As normas triangulares são empregadas para definir conjunções em raciocínio aproximado, enquanto que co-normas triangulares desempenham o mesmo papel para disjunções. Uma regra de controle fuzzy, "**se** $x = A$ **então** $y = B$" é representada por uma função de implicação fuzzy e é denotada por $A \to B$, onde A e B são conjuntos fuzzy definidos nos universos de discurso U e V com funções de pertinência μ_A e μ_B, respectivamente.

Definição 15 (CONJUNÇÃO FUZZY) *uma conjunção fuzzy é definida para todo $u \in U$ e $v \in V$ através de*

$$A \to B = A \times B = \int_{U \times V} \mu_A(u) * \mu_B(v)/(u, v), \tag{12}$$

onde $*$ é um operador representando uma norma triangular.

Definição 16 (DISJUNÇÃO FUZZY) *uma disjunção fuzzy é definida para todo $u \in U$ e $v \in V$ através de*

$$A \to B = A \times B = \int_{U \times V} \mu_A(u) \dot{+} \mu_B(v)/(u, v), \tag{13}$$

onde $\dot{+}$ é um operador que representa uma co-norma triangular.

Definição 17 (IMPLICAÇÃO FUZZY) *A implicação fuzzy está associada com cinco famílias de funções de implicação fuzzy em uso:*

1. *Implicação Material:* $A \to B = (\text{not}A) \dot{+} B$
2. *Cálculo Proposicional:* $A \to B = (\text{not}A) \dot{+} (A * B)$
3. *Cálculo Proposicional Extendido:* $A \to B = (\text{not}A \times \text{not}B) \dot{+} B$
4. *Generalização de Modus Ponens:* $A \to B = \sup\{c \in [0, 1], A * c \leq B\}$
5. *Generalização de Modus Tollens:* $A \to B = \inf\{t \in [0, 1], B \dot{+} t \leq A\}$

Baseado nessas definições muitas funções de implicação fuzzy podem ser geradas a partir das normas triangulares e co-normas triangulares. Por exemplo, utilizando-se a definição de conjunção fuzzy, a implicação de Mandani, R_c é obtida se o operador de intersecção é utilizado. Se o produto algébrico é utilizado, obtém-se a implicação fuzzy proposta por Larsen, R_p. As implicações fuzzy mais correntes estão definidas abaixo:

1. Regra do mínimo para implicação fuzzy (Mandani):

$$R_c = A \times B = \int_{U \times V} \mu_A(u) \wedge \mu_B(v)/(u, v). \tag{14}$$

2. Regra do produto para implicação fuzzy (Larsen):

$$R_p = A \times B = \int_{U \times V} \mu_A(u)\mu_B(v)/(u, v). \tag{15}$$

3. Produto Limitado:

$$R_{bp} = A \times B = \int_{U \times V} \mu_A(u) \odot \mu_B(v)/(u, v). \tag{16}$$

4. Produto Drástico:

$$R_{dp} = A \times B = \int_{U \times V} \mu_A(u) \dot{\cap} \mu_B(v)/(u, v). \tag{17}$$

5. Regra aritmética para implicação fuzzy (Zadeh):

$$R_a = (\text{not}A \times V) \oplus (U \times B) = \int_{U \times V} 1 \wedge (1 - \mu_A(u) + \mu_B(v))/(u, v). \tag{18}$$

6. Regra Max-Min para implicação fuzzy (Zadeh):

$$R_m = (A \times B) \cup (\text{not}A \times V) = \int_{U \times V} (\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)) \vee (1 - \mu_A(u))/(u, v). \tag{19}$$

7. Seqüência Padrão:

$$R_s = A \times V \to U \times B = \int_{U \times V} (\mu_A(u) > \mu_B(v))/(u, v)$$

$$\text{onde } \mu_A(u) > \mu_B(v) = \begin{cases} 1 & \mu_A(u) \leq \mu_B(v) \\ 0 & \mu_A(u) > \mu_B(v). \end{cases} \tag{20}$$

8. Implicação fuzzy Booleana:

$$R_b = (\text{not}A \times V) \cup (U \times B) = \int_{U \times V} (1 - \mu_A(u)) \vee (\mu_B(v))/(u, v). \tag{21}$$

9. Implicação fuzzy de Goguen:

$$R_\triangle = A \times V \to U \times B = \int_{U \times V} (\mu_A(u) \gg \mu_B(v))/(u, v)$$

$$\text{onde } \mu_A(u) \gg \mu_B(v) = \begin{cases} 1 & \mu_A(u) \leq \mu_B(v) \\ \frac{\mu_A(u)}{\mu_B(v)} & \mu_A(u) > \mu_B(v) \end{cases} \tag{22}$$

6 Interpretação dos conectivos "e" e "também"

Na maioria dos controladores fuzzy o conectivo de sentenças "**e**" é usualmente interpretado como uma conjunção fuzzy no espaço do produto cartesiano das variáveis envolvidas. Por exemplo, na regra "**se** ($x = A$ **e** $y = B$) **então** $z = C$", o antecedente é interpretado como um conjunto fuzzy no espaço $U \times V$, com a função de pertinência dada por,

$$\mu_{A \times B}(u, v) = \min\{\mu_A(u), \mu_B(v)\}, \tag{23}$$

ou

$$\mu_{A \times B}(u, v) = \mu_A(u) \cdot \mu_B(v), \tag{24}$$

onde U e V são universos de discurso associados com A e B, respectivamente.

Quando um sistema fuzzy é caracterizado por um conjunto de regras de controle fuzzy, a ordem em que aparecem as regras na base de conhecimento deve ser irrelevante. Isso implica que o conectivo de sentenças "**também**" deve possuir as propriedades de comutatividade e associatividade. Nesse sentido, deve-se notar que os operadores de normas triangulares e co-normas triangulares possuem tais propriedades e portanto se qualificam para a interpretação do conectivo "**também**"

Sob o ponto de vista prático utiliza-se a operação de união como interpretação do conectivo "**também**" em associação com as funções de implicação, R_c e R_p, já que acarretam em algoritmos simples de serem implementados.

7 Operadores Composicionais

Em geral, um operador composicional pode ser expresso como uma composição sup-star, onde "sup" denota o operador *supremo* e "star" denota um operador; como por exemplo *min*, *produto*, etc.; que é escolhido para uma aplicação específica. Na literatura podem ser encontrados quatro tipos de operadores composicionais utilizados como regra de inferência composicional:

- operação sup-min
- operação sup-produto
- operação sup-produto limitado
- operação sup-produto drástico

Em aplicações de controle os operadores sup-min e sup-produto são mais utilizados.

8 Mecanismos de Inferência

Os mecanismos de inferência empregados em controladores fuzzy são em geral muito mais simples do que aqueles utilizados em sistemas especialistas, já que na base de regras de um controlador o consequente de uma regra não é aplicado ao antecedente de outra regra. Em outras palavras, em controladores fuzzy não são empregados mecanismos de inferência em cadeia, já que as ações de controle são baseadas em inferências diretas de um único nível (Modus Ponens Generalizado)

Genericamente, uma base de regras possui a forma de um sistema MIMO[1]

$$R = \{R^1_{\mathsf{MIMO}}, R^2_{\mathsf{MIMO}}, \dots, R^n_{\mathsf{MIMO}}\},$$

onde R^i_{MIMO} representa a regra:

$$\textbf{se } (x = A_i \textbf{ e }, \dots, \textbf{ e } y = B_i) \textbf{ então } (z_1 = C_i, \dots, z_q = D_i).$$

o antecedente de R^i_{MIMO} forma um conjunto fuzzy $A_i \times \dots \times B_i$ no espaço $U \times \dots \times V$. O consequente é a união de q ações de controle independentes. Portanto a i-ésima regra R^i_{MIMO} pode ser representada como uma implicação fuzzy,

$$R^i_{\mathsf{MIMO}} : (A_i \times \dots \times B_i) \rightarrow (z_1 + \dots + z_n),$$

[1] Múltiplas Entradas e Múltiplas Saídas

dessa forma, a base de regras R pode ser representada como a união das várias regras,

$$\begin{aligned} R &= \{\cup_{i=1}^{n} R^{i}_{\mathsf{MIMO}}\} \\ &= \{\cup_{k=1}^{q} \cup_{i=1}^{n} [(A_i \times \ldots \times B_i) \to z_k)]\} \\ &= \{RB^{1}_{\mathsf{MISO}}, RB^{2}_{\mathsf{MISO}}, \ldots, RB^{q}_{\mathsf{MISO}}\} \end{aligned} \tag{25}$$

com efeito, uma base de regras R de um controlador fuzzy é composta por um conjunto de sub-bases de regras RB^{i}_{MISO}, onde cada sub-base de regras consistindo de n regras de controle fuzzy com múltiplas variáveis de estado do processo e uma única variável de controle. Um sistema fuzzy MIMO pode então ser representado como uma coleção de sistemas fuzzy MISO[2],

$$R = \{R^{1}_{\mathsf{MISO}}, R^{2}_{\mathsf{MISO}}, \ldots, R^{q}_{\mathsf{MISO}}\},$$

onde R^{k}_{MISO} representa a regra: $\begin{array}{l} \textbf{se } (x = A_i \textbf{ e }, \ldots, \textbf{ e } y = B_i) \textbf{ então } (z_k = D_i) \\ i = 1, \ldots, n. \end{array}$

[2] Múltiplas Entradas e única Saída

Vamos considerar a seguinte forma geral de regras de controle fuzzy para sistemas MISO para o caso de sistemas fuzzy com duas variáveis de entrada e uma variável de saída:

$$\begin{array}{rl} \text{entrada:} & x = A' \textbf{ e } y = B' \\ R_1: & \textbf{se } x = A_1 \textbf{ e } y = B_1 \textbf{ então } z = C_1 \\ \textbf{também } R_2: & \textbf{se } x = A_2 \textbf{ e } y = B_2 \textbf{ então } z = C_2 \\ & \ldots \\ & \ldots \\ \textbf{também } R_n: & \textbf{se } x = A_n \textbf{ e } y = B_n \textbf{ então } z = C_n \\ \hline & z = C' \end{array}$$

onde x, y e z são variáveis linguísticas representando as variáveis de estado do processo e a variável de controle, respectivamente, A_i, B_i, e C_i são valores linguísticos das variáveis x, y, e z nos universos U, V e W, respectivamente, e $i = 1, 2, \ldots, n$.

A regra de controle fuzzy "**se** $(x = A_i$ **e** $y = B_i)$ **então** $(z = C_i)$" é implementada como uma implicação (relação) fuzzy R e é definido como,

$$\begin{aligned} \mu_{R_i} &\triangleq \mu_{(A_i \textbf{ e } B_i \to C_i)}(u, v, w) \\ &= [\mu_{A_i}(u) \textbf{ e } \mu_{B_i}(v)] \to \mu_{C_i}(w), \end{aligned} \tag{26}$$

"A_i e B_i" é um conjunto fuzzy $A_i \times Bi$ em $U \times V$; $R_i \triangleq A_i$ **e** $B_i \to C_i$ é uma implicação fuzzy em $U \times V \times W$; e $\to$ denota uma função de implicação fuzzy.

O consequente C' é deduzido através da regra de inferência composicional sup-star empregando as definições de função de implicação fuzzy e dos conectivos "**e**" e "**também**".

No que se segue, vamos considerar algumas propriedades de mecanismos de inferência[3],

Lema 1 $(A', B') \circ \cup_{i=1}^{n} R_i = \cup_{i=1}^{n} (A', B') \circ R_i$.

Lema 2 *para as conjunções R_c, R_p, R_{bp} e R_{dp} temos,*

$$(A', B') \circ (A_i \textbf{ e } B_i \to C_i) = [A' \circ (A_i \to C_i)] \cap [B' \circ (B_i \to C_i)]$$
$$\textit{se } \mu_{A_i \times B_i} = \mu_{A_i} \wedge \mu_{B_i},$$

$$(A', B') \circ (A_i \textbf{ e } B_i \to C_i) = [A' \circ (A_i \to C_i)][B' \circ (B_i \to C_i)]$$
$$\textit{se } \mu_{A_i \times B_i} = \mu_{A_i} \cdot \mu_{B_i},$$

Lema 3 *Se as entradas são "fuzzy singletons", ou seja, $A' = u_0$, $B' = v_0$, então as funções de implicação R_c e R_p podem ser expressas como,*

$$\begin{aligned} R_c &= \hat{\alpha} \wedge \mu_{C_i}(w), \\ R_c &= \dot{\alpha} \wedge \mu_{C_i}(w), \\ R_p &= \hat{\alpha} \cdot \mu_{C_i}(w), \\ R_p &= \dot{\alpha} \cdot \mu_{C_i}(w), \end{aligned} \tag{27}$$

onde $\hat{\alpha} = \mu_{A_i}(u_0) \wedge \mu_{B_i}(v_0)$ e $\dot{\alpha} = \mu_{A_i}(u_0) \cdot \mu_{B_i}(v_0)$.

[3] nas equações a seguir, ($\circ$) denota o operador composicional sup-min e ($\bullet$) denota o operador sup-produto

Lema 4 $(A', B') \bullet \cup_{i=1}^{n} R_i = \cup_{i=1}^{n} (A', B') \bullet R_i$.

Lema 5 *Para as conjunções R_c, R_p, R_{bp} e R_{dp} temos,*

$$(A', B') \bullet (A_i \textbf{ e } B_i \to C_i) = [A' \bullet (A_i \to C_i)] \cap [B' \bullet (B_i \to C_i)]$$
$$\textit{se } \mu_{A_i \times B_i} = \mu_{A_i} \wedge \mu_{B_i},$$

$$(A', B') \bullet (A_i \textbf{ e } B_i \to C_i) = [A' \bullet (A_i \to C_i)][B' \bullet (B_i \to C_i)]$$
$$\textit{se } \mu_{A_i \times B_i} = \mu_{A_i} \cdot \mu_{B_i},$$

Pode-se concluir então que,

$$R_c : \mu_{C'} = \cup_{i=1}^{n} \alpha_i \wedge \mu_{C_i}, \tag{28}$$

$$R_p : \mu_{C'} = \cup_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \mu_{C_i}, \tag{29}$$

onde o fator de peso α_i é uma medida da contribuição da i-ésima regra para a ação de controle fuzzy. O fator de peso em questão pode ser determinado por dois métodos o primeiro utiliza a operação de mínimo ($\wedge$) para o produto cartesiano. O segundo emprega o produto algébrico ($\cdot$) para o produto cartesiano.

Por simplicidade assume-se que uma determinada base de regras possue apenas duas regras,

R_1 : **se** $x = A_1$ **e** $y = B_1$ **então** $z = C_1$

R_2 : **se** $x = A_2$ **e** $y = B_2$ **então** $z = C_2$

Em processos *on-line* as entradas são usualmente medidas através de sensores. Em geral, as medidas podem ser tratadas como "fuzzy singletons". Dessa forma, α_1 e α_2 podem ser expressos como,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \mu_{A_1}(x_0) \wedge \mu_{B_1}(y_0), \\ \alpha_2 &= \mu_{A_2}(x_0) \wedge \mu_{B_2}(y_0), \end{aligned} \tag{30}$$

onde $\mu_{A_1}(x_0)$ e $\mu_{B_1}(y_0)$ fazem o papel do grau de coincidência entre os dados do processo e os dados correspondentes a primeira regra.

Essas relações assumem um papel importante nos quatro tipos de raciocínio empregados atualmente em controladores fuzzy e descritos a seguir.

Regra da Operação de Mínimo como Função de Implicação Fuzzy: esse modo de raciocínio criado por Mandani utiliza a regra de operação de mínimo, R_c como uma função de implicação fuzzy. Nesse modo de raciocínio, a i-ésima regra conduz a seguinte decisão de controle,

$$\mu_{C_i'}(w) = \alpha_i \wedge \mu_{C_i}(w),$$

o que implica que a função de pertinência μ_C da conseqüência C é dada por,

$$\begin{aligned} \mu_C(w) &= \mu_{C_1'} \vee \mu_{C_2'} \\ &= [\alpha_1 \wedge \mu_{C_1}(w)] \vee [\alpha_2 \wedge \mu_{C_2}(w)]. \end{aligned}$$

Para obter uma ação de controle determinística, uma estratégia para transformação de um conjunto fuzzy em valor escalar deve ser utilizada como será visto adiante. O processo de raciocínio aqui descrito é ilustrado na figura 4.

Figura 4: interpretação gráfica do raciocínio fuzzy utilizando a operação de mínimo como função de implicação.

Regra da Operação de Produto Algébrico como Função de Implicação Fuzzy: esse método desenvolvido por Larsen utiliza a regra do produto algébrico, R_p como função de implicação. Nesse caso, a i-ésima regra, conduz a seguinte decisão de controle,

$$\mu_{C_i'}(w) = \alpha_i \cdot \mu_{C_i}(w),$$

consequentemente, a função de pertinência μ_C é dada por,

$$\begin{aligned}\mu_C(w) &= \mu_{C_1'} \vee \mu_{C_2'} \\ &= [\alpha_1 \cdot \mu_{C_1}(w)] \vee [\alpha_2 \cdot \mu_{C_2}(w)].\end{aligned}$$

O método de raciocínio aqui descrito é ilustrado graficamente na figura 5

Figura 5: interpretação gráfica do raciocínio fuzzy utilizando o produto algébrico como função de implicação.

Método de Tsukamoto com Termos Linguísticos como Funções de Pertinência Monotônicas: esse método proposto por Tsukamoto é uma simplificação do raciocínio fuzzy proposto por Mandani onde as funções de pertinência dos conjuntos fuzzy A_i, B_i e C_i são monotônicas.

O resultado inferido a partir da primeira regra é α_1 tal que $\alpha_1 = \mu_{C_1}(w_1)$. O resultado inferido a partir da segunda regra é $\alpha_2 = \mu_{C_2}(w_2)$. Uma ação de controle escalar pode então ser deduzida como,

$$z_0 = \frac{\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

O processo de raciocínio aqui descrito é representado graficamente na figura 6

Figura 6: representação gráfica do método de Tsukamoto.

O Consequente de uma Regra como Função das Variáveis linguísticas de Entrada: nesse modo de raciocínio, a i-ésima regra de controle possui a forma,

R_i : **se** $(x = A_i$ **e** $, \dots ,$ **e** $y = B_i)$ **então** $z = f_i(x, \dots , y)$ onde $x, \dots , y$, e z são variáveis linguísticas representando as variáveis de estado do processo e a variável de controle, respectivamente. $A_i, \dots , B_i$ são valores linguísticos das variáveis $x, \dots , y$ nos universos de discurso $U, \dots , V$, respectivamente, com $i = 1, 2, \dots , n$; e f_i é função das variáveis de estado $x, \dots , y$.

Por simplicidade, vamos assumir que apenas duas regras compõem a base de conhecimento:

R_1 : **se** $x = A_1$ **e** $y = B_1$ **então** $z = f_1(x, y)$

R_2 : **se** $x = A_2$ **e** $y = B_2$ **então** $z = f_2(x, y)$.

A ação de controle inferida pela primeira e segunda regra são iguais ,respectivamente a, $\alpha_1 f_1(x_0, y_0)$ e $\alpha_2 f_2(x_0, y_0)$. Correspondendo a uma ação de controle dada por,

$$z_0 = \frac{\alpha_1 f_1(x_0, y_0) + \alpha_2 f_2(x_0, y_0)}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Método Simplificado: esse método, largamente utilizado devido ao reduzido número de operações, é uma simplificação do método proposto por Mandani como o método de Tsukamoto. Uma ação de controle, pode então ser deduzida como,

$$z_0 = \frac{\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

onde w_1 e w_2 correspondem ao valor de máximo das funções triangulares C_1 e C_2. A figura 7 ilustra tal método.

Figura 7: método simplificado.

9 Estratégias de Transformação Fuzzy-Escalar

Basicamente, a transformação fuzzy-escalar [4] corresponde a um mapeamento do espaço de ações de controle fuzzy definido sobre o universo de discurso para o espaço de ações de controle não-fuzzy ou escalares.

No presente, as estratégias mais comumente utilizadas são:

Método do Critério Máximo: esse método produz como ação de controle o valor no qual a função de pertinência assume o valor máximo.

Método da Média dos Máximos: essa estratégia gera uma ação de controle obtida pelo valor médio de todas as ações de controle locais onde a função de pertinência assume o valor máximo. Mais especificamente, no caso de um universo discreto, a ação de controle pode ser expressa como,

$$z_0 = \sum_{j=1}^{l} \frac{w_j}{l},$$

onde w_j é o valor de suporte no qual a função de pertinência $\mu_z(w_j)$ assume o seu valor máximo, e l é o número de valores suporte.

Método do Centro de Gravidade: é o método mais utilizado, e se baseia no cálculo do centro de gravidade da função de pertinência. No caso de um universo discreto o cálculo do centro de gravidade resulta em,

$$z_0 = \frac{\sum_{j=1}^{n} \mu_z(w_j) \cdot w_j}{\sum_{j=1}^{n} \mu_z(w_j)},$$

onde n é o número de níveis de quantização da saída.

[4] defuzzification