

## Capítulo 4

# PRELIMINARES MATEMÁTICOS: TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

Para o estudo de robôs manipuladores é necessário um conhecimento prévio das técnicas de descrição de posição, orientação e velocidade de corpos rígidos. Para o estudo dos movimentos de um corpo rígido é fundamental o conhecimento da teoria de transformação de coordenadas. Neste capítulo, são apresentadas as ferramentas matemáticas necessárias para o estudo dos movimentos de robôs manipuladores, incluindo, formas de descrever orientação de corpos rígidos, transformação de coordenadas, matriz de rotação e transformação homogênea.

### 4.1 Posição e Orientação de um Corpo Rígido

Um manipulador pode ser modelado como um sistema de corpos rígidos. A localização de cada corpo rígido é completamente descrita pela sua posição e orientação.

A posição pode ser representada pelas coordenadas de um ponto arbitrário, fixo no corpo. Seja  $O$ - $xyz$  um sistema de coordenadas fixo no espaço e seja  $O_1$  um ponto arbitrário, fixo no corpo rígido, como mostra a Figura 2-1. A posição do corpo rígido é representada pela posição do ponto  $O_1$  em relação ao sistema de coordenadas fixo, dada por:

$$\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)^t, \quad (4-1)$$

onde o superescrito “t” representa transposto e  $\mathbf{x}_0$  é um vetor coluna  $3 \times 1$  com as coordenadas do ponto  $O_1$ .

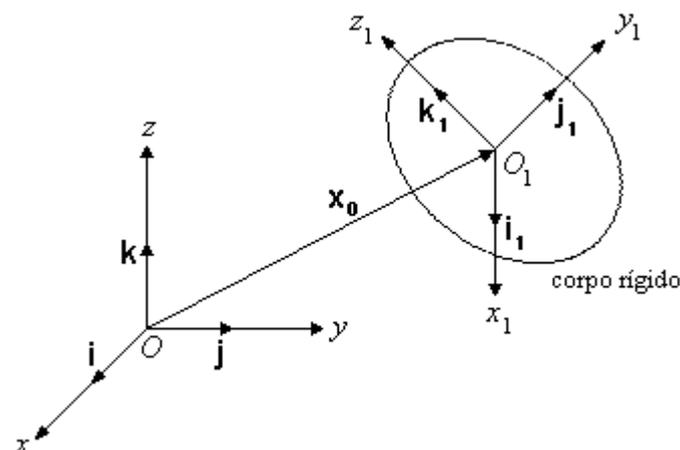


Figura 2-1: Posição e orientação de um corpo rígido.

Para representar a orientação do corpo rígido, um sistema de coordenadas  $O_1-x_1y_1z_1$  é fixo no corpo, como mostra a Figura 4-1. A orientação do corpo é então representada pela direção dos eixos  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$ . Seja,  $\mathbf{i}_1$ ,  $\mathbf{j}_1$  e  $\mathbf{k}_1$  os vetores unitários ao longo dos eixos  $x_1$ ,  $y_1$  e  $z_1$  respectivamente, descritos em relação ao sistema fixo. As componentes de cada um destes vetores são os cossenos diretores de cada eixo projetado no sistema de coordenadas fixo. Dessa forma, define-se a matriz  $\mathbf{R}$  como sendo:

$$\mathbf{R} = [\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1]. \quad (4-2)$$

Observa-se que os vetores  $\mathbf{i}_1$ ,  $\mathbf{j}_1$  e  $\mathbf{k}_1$  são vetores coluna de dimensão  $3 \times 1$  e portanto a matriz  $\mathbf{R}$  é uma matriz de dimensão  $3 \times 3$ . A matriz  $\mathbf{R}$  é chamada *matriz de rotação* e descreve completamente a orientação do corpo rígido em relação ao sistema de coordenadas fixo  $O-xyz$ . Note, que os vetores coluna e linha têm módulo unitário e são ortogonais entre si, logo,  $\mathbf{R}$  é uma matriz ortonormal.

## 4.2 Transformação de Coordenadas

Seja  $P$  um ponto de um corpo rígido arbitrário no espaço, como mostra a Figura 4-2. A posição do ponto  $P$  descrita em relação ao sistema de coordenadas fixo da base,  $O-xyz$ , é definida pelo vetor  $\mathbf{p}$ , como se segue:

$$\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)^t. \quad (4-3)$$

A posição do ponto  $P$  também pode ser expressa em relação ao sistema de coordenadas fixo no corpo,  $O_1-x_1y_1z_1$ , sendo dada por:

$$\mathbf{p}_1 = (p_{x_1}, p_{y_1}, p_{z_1})^t. \quad (4-4)$$

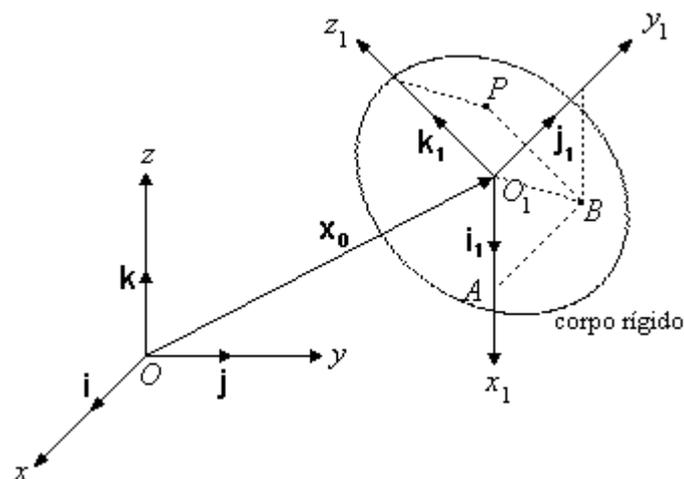


Figura 4-2: Transformação de coordenadas.

A relação entre os vetores  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{p}_1$  define a transformação de coordenadas entre os sistemas de coordenadas fixo na base,  $O-xyz$ , e fixo no corpo,  $O_1-x_1y_1z_1$ . A posição e a

orientação do corpo rígido, representados por  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{R}$ , derivados na seção anterior, serão utilizados para obter esta transformação de coordenadas. Note pela Figura 4-2 que,  $\mathbf{p} = \overline{OP}$ ,  $\mathbf{p}_1 = \overline{O_1P}$  e que o vetor  $\mathbf{p}$ , pode ser descrito pelos pontos  $O_1$ ,  $A$  e  $B$  no sistema  $O_1-x_1y_1z_1$ , da seguinte forma:

$$\overline{OP} = \overline{OO_1} + \overline{O_1A} + \overline{AB} + \overline{BP}. \quad (4-5)$$

Note que,  $\overline{OO_1}$  é o vetor  $\mathbf{x}_0$  e os vetores  $\overline{O_1A}$ ,  $\overline{AB}$ , e  $\overline{BP}$  são paralelos aos versores  $\mathbf{i}_1$ ,  $\mathbf{j}_1$  e  $\mathbf{k}_1$ , respectivamente. Dessa forma, pode-se escrever:

$$\mathbf{p} = \mathbf{x}_0 + p_{x1}\mathbf{i}_1 + p_{y1}\mathbf{j}_1 + p_{z1}\mathbf{k}_1, \quad (4-6)$$

que escrita na forma matricial, fica,

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{0,x} \\ x_{0,y} \\ x_{0,z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{x1} \\ p_{y1} \\ p_{z1} \end{bmatrix}, \quad (4-7)$$

ou compactamente,

$$\mathbf{p} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{R}\mathbf{p}_1. \quad (4-8)$$

Esta equação representa a transformação de coordenadas da coordenada fixa no corpo  $\mathbf{p}_1$  para a coordenada da base  $\mathbf{p}$ . Note que o primeiro termo do lado direito desta equação representa uma transformação de translação, enquanto o segundo termo representa uma transformação de rotação.

Se for desejada a transformação de coordenadas do sistema fixo na base para o sistema fixo no corpo, basta inverter a eq. (4-8). Para isso deve-se lembrar que a matriz  $\mathbf{R}$  é uma matriz ortonormal, e portanto,

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^t. \quad (4-9)$$

Assim, tem-se que:

$$\mathbf{p}_1 = -\mathbf{R}^t\mathbf{x}_0 + \mathbf{R}^t\mathbf{p}. \quad (4-10)$$

Como visto, as colunas da matriz de rotação representam os versores dos eixos principais do sistema transformado, descritos em relação ao sistema original. A medida que a inversa de uma matriz de rotação é equivalente à sua transposta, os vetores linha da matriz de transformação representam os versores dos eixos principais do sistema original descritos em relação ao sistema transformado.

### 4.3 Matrizes de Rotação

A matriz de rotação representa uma transformação de coordenadas relacionando as

coordenadas de um ponto  $P$  em dois sistemas com origem coincidente em um mesmo ponto. Além disso, a matriz de rotação fornece a orientação do sistema de coordenadas transformado (ou rotacionado) em relação ao sistema fixo. Como visto, as colunas da matriz de rotação são constituídas pelos versores do sistema transformado descritos em relação ao sistema fixo.

A Figura 4-3 mostra um ponto  $P$  representado por dois sistemas de coordenadas distintos, porém, com mesma origem. As coordenadas do ponto  $P$  no sistema  $O-xyz$  e no sistema  $O_1-x_1y_1z_1$  são dadas respectivamente pelas equações (4-3) e (4-4). O ponto  $P$  pode ser escrito de forma vetorial, utilizando os versores do sistema  $O_1-x_1y_1z_1$  e as suas coordenadas neste sistema, da seguinte forma:

$$\mathbf{p}_1 = p_{x1}\mathbf{i}_1 + p_{y1}\mathbf{j}_1 + p_{z1}\mathbf{k}_1. \quad (4-11)$$

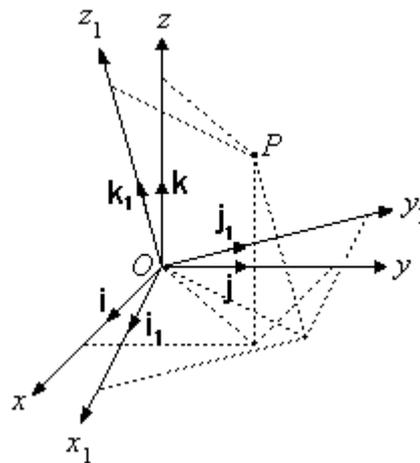


Figura 4-3: Transformação de rotação.

A medida que o ponto  $P$  é único, ou seja, está localizado em um ponto fixo do espaço, sendo somente visto de forma diferente pelos dois sistemas, pode-se escrever as seguintes relações:

$$\begin{aligned} p_x &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{i} = p_{x1}\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i} + p_{y1}\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{i} + p_{z1}\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{i}; \\ p_y &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{j} = p_{x1}\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{j} + p_{y1}\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{j} + p_{z1}\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{j}; \\ p_z &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k} = p_{x1}\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{k} + p_{y1}\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{k} + p_{z1}\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}; \end{aligned} \quad (4-12)$$

ou de forma matricial,

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i} & \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{i} & \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{i} \\ \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{j} & \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{j} & \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{j} \\ \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{k} & \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{k} & \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{x1} \\ p_{y1} \\ p_{z1} \end{bmatrix}, \quad (4-13)$$

que compactamente pode ser escrita como,

$$\mathbf{p} = \mathbf{R}_0^1 \mathbf{p}_1. \quad (4-14)$$

Assim a matriz de rotação que representa a transformação do sistema  $O-xyz$  para o sistema  $O_1-x_1y_1z_1$ ,  $\mathbf{R}_0^1$ , é dada por:

$$\mathbf{R}_0^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i} & \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{i} & \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{i} \\ \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{j} & \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{j} & \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{j} \\ \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{k} & \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{k} & \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k} \end{bmatrix}. \quad (4-15)$$

Ressalta-se que os versores  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{i}_1$ ,  $\mathbf{j}_1$ ,  $\mathbf{k}_1$  devem estar descritos em um mesmo sistema de coordenadas, podendo este ser o sistema  $O-xyz$  ou, o sistema  $O_1-x_1y_1z_1$  ou, mesmo ainda um terceiro sistema de coordenadas independente destes dois.

Analogamente pode-se obter as coordenadas de  $\mathbf{p}_1$  em função das coordenadas de  $\mathbf{p}$ . Assim, tem-se o seguinte:

$$\begin{aligned} p_{x1} &= \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{i}_1 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{i}_1 = p_x \mathbf{i} \cdot \mathbf{i}_1 + p_y \mathbf{j} \cdot \mathbf{i}_1 + p_z \mathbf{k} \cdot \mathbf{i}_1; \\ p_{y1} &= \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{j}_1 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{j}_1 = p_x \mathbf{i} \cdot \mathbf{j}_1 + p_y \mathbf{j} \cdot \mathbf{j}_1 + p_z \mathbf{k} \cdot \mathbf{j}_1; \\ p_{z1} &= \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k}_1 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1 = p_x \mathbf{i} \cdot \mathbf{k}_1 + p_y \mathbf{j} \cdot \mathbf{k}_1 + p_z \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1; \end{aligned} \quad (4-16)$$

que compactamente na forma matricial fica,

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{p}. \quad (4-17)$$

Dessa forma, a matriz de rotação que representa a transformação do sistema  $O_1-x_1y_1z_1$  para o sistema  $O-xyz$ ,  $\mathbf{R}_1^0$ , é dada por:

$$\mathbf{R}_1^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i}_1 & \mathbf{j} \cdot \mathbf{i}_1 & \mathbf{k} \cdot \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j}_1 & \mathbf{j} \cdot \mathbf{j}_1 & \mathbf{k} \cdot \mathbf{j}_1 \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{k}_1 & \mathbf{j} \cdot \mathbf{k}_1 & \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1 \end{bmatrix}. \quad (4-18)$$

Analisando as equações (4-14) e (4-17), e sabendo-se que a matriz de rotação é uma matriz ortonormal, pode-se concluir que,

$$\mathbf{R}_0^1 = (\mathbf{R}_1^0)^{-1} = (\mathbf{R}_1^0)^t. \quad (4-19)$$

Um resultado muito importante são as matrizes de rotação que descrevem rotações em torno dos eixos principais,  $x$ ,  $y$  e  $z$  de um sistema de coordenadas. Estas transformações são vistas nos exemplos que seguem.

**Exemplo 4.1:** Rotação em torno do eixo  $z$ .

A Figura 4-4 mostra uma rotação em torno do eixo  $z$  do sistema de coordenadas  $O-xyz$ , de um ângulo  $\theta$ , resultando no novo sistema de coordenadas  $O_1-x_1y_1z_1$ .

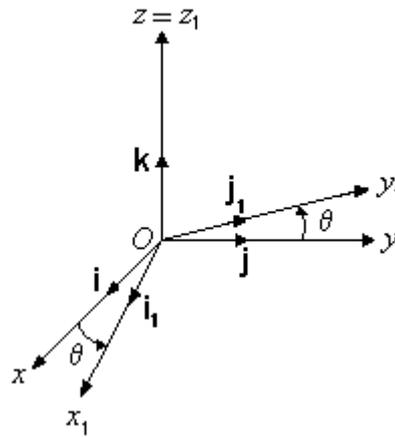


Figura 4-4: Rotação em torno do eixo z.

A matriz de rotação  $R_{z,\theta}$  que descreve esta transformação é dada pela eq. (4-15), que aplicada à rotação em questão resulta em,

$$R_{z,\theta} = \begin{bmatrix} i_1 \cdot i & j_1 \cdot i & k_1 \cdot i \\ i_1 \cdot j & j_1 \cdot j & k_1 \cdot j \\ i_1 \cdot k & j_1 \cdot k & k_1 \cdot k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4-20)$$

**Exemplo 4.2:** Rotação em torno do eixo y.

A Figura 4-5 mostra uma rotação em torno do eixo y de um ângulo  $\phi$ . A matriz de rotação,  $R_{y,\phi}$  que descreve esta transformação é dada por:

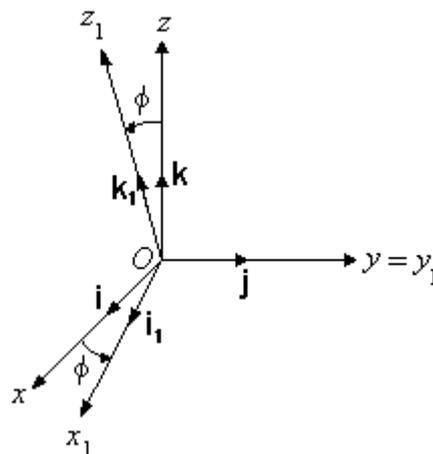


Figura 4-5: Rotação em torno do eixo y.

$$\mathbf{R}_{y,\phi} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i} & \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{i} & \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{i} \\ \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{j} & \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{j} & \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{j} \\ \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{k} & \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{k} & \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix}. \quad (4-21)$$

**Exemplo 4.3:** Rotação em torno do eixo  $x$ .

A matriz de rotação em torno do eixo  $x$  de um ângulo  $\alpha$ , esquematizada na Figura 4-6, é dada por:

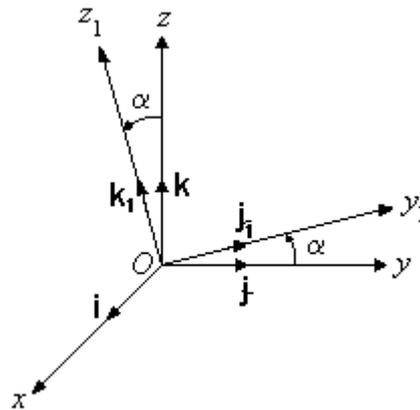


Figura 4-6: Rotação em torno do eixo  $x$ .

$$\mathbf{R}_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i} & \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{i} & \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{i} \\ \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{j} & \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{j} & \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{j} \\ \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{k} & \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{k} & \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}. \quad (4-22)$$

#### 4.4 Rotação de um vetor

A matriz de rotação também pode ser vista como um operador que age sobre um vetor, rodando o mesmo e fornecendo as suas novas coordenadas depois de rodado. A título de exemplo, a Figura 4-7, apresenta uma transformação de rotação em torno do eixo  $z$ , dada pela matriz  $\mathbf{R}$ . Os vetores  $\mathbf{p}_0$  e  $\mathbf{p}_1$  tem suas coordenadas expressas no sistema original,  $O-xyz$ , e o vetor  $\mathbf{p}_2$  tem suas coordenadas expressas no sistema transformado,  $O_1-x_1y_1z_1$ . Contudo o vetor  $\mathbf{p}_0$  tem as mesmas coordenadas do vetor  $\mathbf{p}_2$ , porém, cada um expresso em um sistema diferente. Dessa forma, tem-se as seguintes relações:

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{R}\mathbf{p}_2; \quad (4-23)$$

$$\mathbf{p}_2 \text{ (em relação à } O_1-x_1y_1z_1) = \mathbf{p}_0 \text{ (em relação à } O-xyz).$$

Assim, pode-se concluir que,

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{R}\mathbf{p}_0. \quad (4-24)$$

Como  $\mathbf{p}_0$  e  $\mathbf{p}_1$  estão ambos expressos no mesmo sistema (sistema  $O-xyz$ ), a eq. (4-24) não representa uma transformação de rotação mas sim a rotação do vetor  $\mathbf{p}_0$  originando o vetor  $\mathbf{p}_1$ .

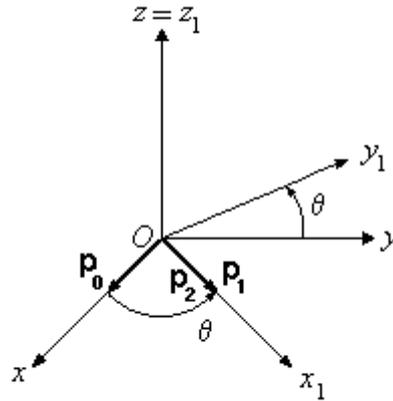


Figura 4-7: Rotação genérica de um vetor.

**Exemplo 4.4:** Rotação de um vetor.

A Figura 4-8 mostra a rotação do vetor  $\mathbf{p}$ , inicialmente com coordenadas  $(1, 0, 0)^t$ , em torno do eixo  $z$  de um ângulo de  $90^\circ$ .

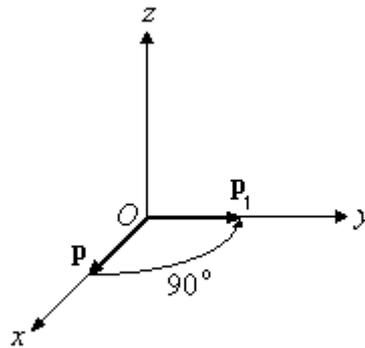


Figura 4-8: Rotação de um vetor em torno do eixo  $z$  de  $90^\circ$ .

Assim, de acordo com a eq (4-24),o vetor  $\mathbf{p}$  depois de rodado,  $\mathbf{p}_1$ , será dado por:

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{R}_{z,90^\circ} \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O que coincide com o esquema da Figura 4-8.

## 4.5 Composição de Rotações

Matrizes de rotação podem ser multiplicadas de forma a representar uma sequência de rotações. A medida que multiplicação de matrizes não tem propriedade comutativa, a ordem ou sequência das rotações é importante. Por exemplo, tem-se 3 sistemas de coordenadas,  $O_0-x_0y_0z_0$ ,  $O_1-x_1y_1z_1$  e  $O_2-x_2y_2z_2$ . O sistema 1 é obtido a partir da rotação do sistema 0 e o sistema 2, por sua vez, é obtido a partir da rotação do sistema 1. A relação entre as coordenadas de um ponto  $P$  visto por estes sistemas é dada por:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{R}_0^1 \mathbf{p}_1 \quad \text{e} \quad \mathbf{p}_1 = \mathbf{R}_1^2 \mathbf{p}_2. \quad (4-25)$$

A relação entre  $\mathbf{p}_0$  e  $\mathbf{p}_2$  será dada por,

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{R}_0^1 \mathbf{R}_1^2 \mathbf{p}_2 = \mathbf{R}_0^2 \mathbf{p}_2. \quad (4-26)$$

Portanto, a matriz  $\mathbf{R}_0^2$  representa uma transformação composta das rotações  $\mathbf{R}_0^1$  e  $\mathbf{R}_1^2$ , nesta ordem.

**Exemplo 4.5:** A Figura 4-9 mostra duas sequências de rotações. A primeira sequência consiste de uma rotação de  $90^\circ$  em torno do eixo  $y$ , seguida de uma rotação de  $90^\circ$  em torno de  $z$ . Na segunda sequência realiza-se as mesmas rotações, porém, em ordem inversa, ou seja, primeiramente faz-se uma rotação de  $90^\circ$  em torno de  $z$ , seguida de uma rotação de  $90^\circ$  em torno de  $y$ . Observa-se que ao final os sistemas de coordenadas obtidos a partir das duas sequências são diferentes. Em termos de matriz de rotação tem-se para estas duas sequências o seguinte:

Sequência 1:

$$\mathbf{R}_{y,\phi} \cdot \mathbf{R}_{z,\theta} = \begin{bmatrix} C\phi & 0 & S\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\phi & 0 & C\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\phi C\theta & -C\phi S\theta & S\phi \\ S\theta & C\theta & 0 \\ -S\phi C\theta & S\phi S\theta & C\phi \end{bmatrix}.$$

Sequência 2:

$$\mathbf{R}_{z,\theta} \cdot \mathbf{R}_{y,\phi} = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\phi & 0 & S\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\phi & 0 & C\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta C\phi & -S\theta & C\theta S\phi \\ S\theta C\phi & C\theta & S\theta S\phi \\ -S\phi & 0 & C\phi \end{bmatrix}.$$

Onde,  $C\theta = \cos\theta$ ,  $S\theta = \sin\theta$ ,  $C\phi = \cos\phi$  e  $S\phi = \sin\phi$ . Substituindo-se os valores dos ângulos resulta em:

Sequência 1:

$$\mathbf{R}_{y,90^\circ} \cdot \mathbf{R}_{z,90^\circ} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sequência 2:

$$\mathbf{R}_{z,90^\circ} \cdot \mathbf{R}_{y,90^\circ} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observa-se que os sistemas resultantes são diferentes.

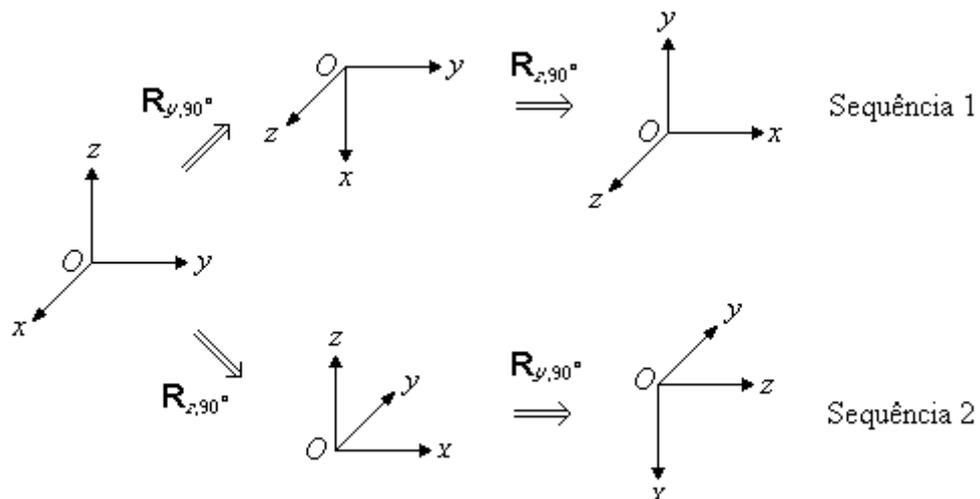


Figura 4-9: Exemplo de composição de rotações.

Um outro modo de se fazer uma composição de rotações é realizar as rotações em torno dos eixos do sistema original e não em torno dos sistemas resultantes, como foi feito anteriormente. A Figura 4-10 apresenta uma transformação consistindo primeiramente de uma rotação de um ângulo  $\phi$  em torno do eixo  $y$ , seguida de uma rotação de um ângulo  $\theta$  em torno do eixo  $z$  original. Após a primeira rotação, tem-se que:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{R}_{y,\phi} \mathbf{p}_1. \tag{4-27}$$

A segunda rotação não será obtida fazendo-se,

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{R}_{z,\theta} \mathbf{p}_2, \tag{4-28}$$

pois, após a primeira rotação, o eixo  $z$  resultante não será igual ao eixo  $z$  original. Para realizar a segunda rotação em torno do eixo  $z$  original, deve-se primeiramente fazer com que o novo eixo  $z$  se torne paralelo ao eixo  $z$  original. Para isso, deve-se rodar o vetor correspondente ao novo eixo  $z$  de um ângulo  $-\phi$  em torno de  $y$ . Observa-se, que somente o eixo  $z$  foi rodado e não o sistema de coordenadas. Com o novo eixo  $z$  paralelo ao eixo  $z$

original, pode-se então rodar  $\theta$  em torno de  $z$ . Finalizando, deve-se voltar o eixo  $z$  para a posição resultante após a primeira rotação, ou seja, cancelar a rotação que posicionou o eixo  $z$  paralelo ao eixo  $z$  original, assim, deve-se rodar o eixo  $z$  de um ângulo  $\phi$  em torno de  $y$ . Portanto, a segunda transformação será descrita por 3 operações, como a seguir:

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{R}_{y,-\phi} \mathbf{R}_{z,\theta} \mathbf{R}_{y,\phi} \mathbf{p}_2 \quad (4-29)$$

Substituindo a expressão acima na eq. (4-27), obtém-se a transformação desejada,

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{R}_{z,\theta} \mathbf{R}_{y,\phi} \mathbf{p}_2 \quad (4-30)$$

Note que  $\mathbf{R}_{y,-\phi}$  é a matriz inversa de  $\mathbf{R}_{y,\phi}$  e portanto elas se cancelam.

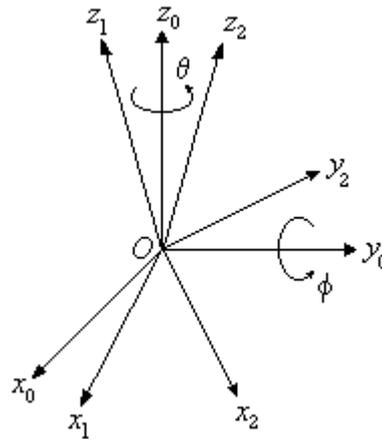


Figura 4-10: Composição de rotações em torno dos eixos originais.

Em resumo, pode-se concluir o seguinte:

- 1) Se a composição de rotações for realizada em torno dos eixos que vão resultando, as matrizes de rotação vão sendo multiplicadas da esquerda para a direita, na ordem em que as transformações são realizadas;
- 2) Se a composição de rotações for realizada em torno dos eixos originais, as matrizes de rotação vão sendo multiplicadas da esquerda para a direita, na ordem inversa em que as transformações são realizadas.

Observa-se que as duas afirmativas acima são válidas para a composição de qualquer número de rotações e não somente duas, como realizado nas demonstrações e nos exemplos.

**Exemplo 4.6:** A Figura 4-11 mostra duas sequências de rotações que consistem de uma rotação de  $90^\circ$  em torno do eixo  $y$ , seguida de uma rotação de  $90^\circ$  em torno do eixo  $z$  original. Na sequência 1, as rotações são realizadas de acordo com o que é dado e na sequência 2, as rotações realizadas são as mesmas utilizadas na demonstração, dadas pela eq. (4-29). De acordo com a eq. (4-30) esta sequência de rotações é descrita pela seguinte equação:

$$\mathbf{R}_{z,\theta} \mathbf{R}_{y,\phi} = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\phi & 0 & S\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\phi & 0 & C\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta C\phi & -S\theta & C\theta S\phi \\ S\theta C\phi & C\theta & S\theta S\phi \\ -S\phi & 0 & C\phi \end{bmatrix}$$

Que substituindo os valores dos ângulos resulta na seguinte transformação:

$$\mathbf{R}_{z,90^\circ} \mathbf{R}_{y,90^\circ} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

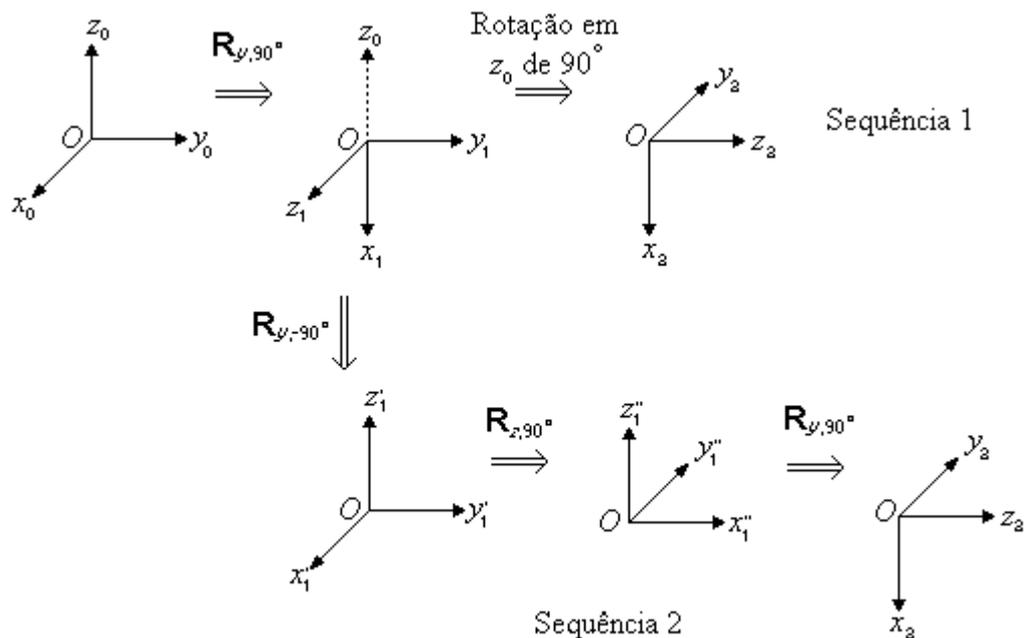


Figura 4-11: Exemplo de seqüência de rotações em torno dos eixos originais. Na seqüência 1, faz-se a segunda rotação em torno do eixo  $z_0$  original, enquanto que na seqüência 2, realiza-se as rotações descritas pela eq. (4-29).

### 4.6 Rotação em Torno de um Eixo Arbitrário

Algumas vezes é interessante rodar um sistema em torno de um eixo arbitrário  $\mathbf{n}$  de um ângulo  $\theta$ . O vetor  $\mathbf{n}$  é um vetor unitário, que passa pela origem  $O$ , com componentes  $n_x, n_y$  e  $n_z$ . A vantagem é que certas rotações podem ser descritas como uma única rotação em torno de um eixo  $\mathbf{n}$ , no lugar de diversas rotações em torno dos eixos principais. Para obter a matriz de rotação  $\mathbf{R}_{\mathbf{n},\theta}$  primeiramente alinha-se o vetor  $\mathbf{n}$  com o eixo  $z$  do sistema de coordenadas original. Então, roda-se o sistema de coordenadas em torno do eixo  $z$  de um ângulo  $\theta$ . Após isso, realiza-se as rotações necessárias para retornar o vetor  $\mathbf{n}$  à posição original. Em relação à Figura 4-12, o alinhamento do eixo  $\mathbf{n}$  com o eixo  $z_0$ , pode ser feito pela rotação em torno do eixo  $z_0$  de um ângulo  $-\alpha$  (o vetor  $\mathbf{n}$  está então no plano  $XZ$ ), seguida da rotação de um ângulo  $-\beta$  em torno de  $y_0$ . Nesta situação o eixo  $\mathbf{n}$  é paralelo ao eixo  $z_0$ . Após a rotação em torno do

novο eixo  $\mathbf{n}$ , de um ângulo  $\theta$ , reverte-se a sequência de rotações do eixo  $\mathbf{n}$ , realizando-se rotações em relação aos mesmos eixos originais porém, com ângulos opostos. A matriz de rotação resultante é dada por:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{n},\theta} = \mathbf{R}_{z,\alpha} \mathbf{R}_{y,\beta} \mathbf{R}_{z,\theta} \mathbf{R}_{y,-\beta} \mathbf{R}_{z,-\alpha}, \quad (4-33)$$

ou,

$$\mathbf{R}_{\mathbf{n},\theta} = \begin{bmatrix} C\alpha & -S\alpha & 0 \\ S\alpha & C\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\beta & 0 & S\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\beta & 0 & C\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\beta & 0 & -S\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ S\beta & 0 & C\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\alpha & S\alpha & 0 \\ -S\alpha & C\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4-34)$$

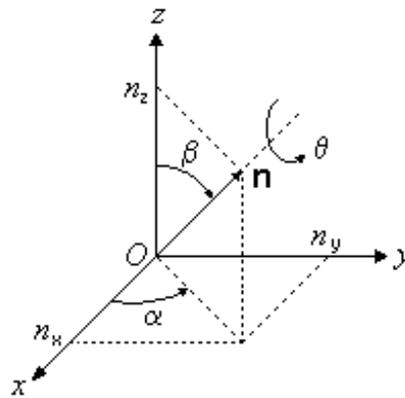


Figura 4-12: Rotação em torno de um eixo arbitrário,  $\mathbf{n}$ .

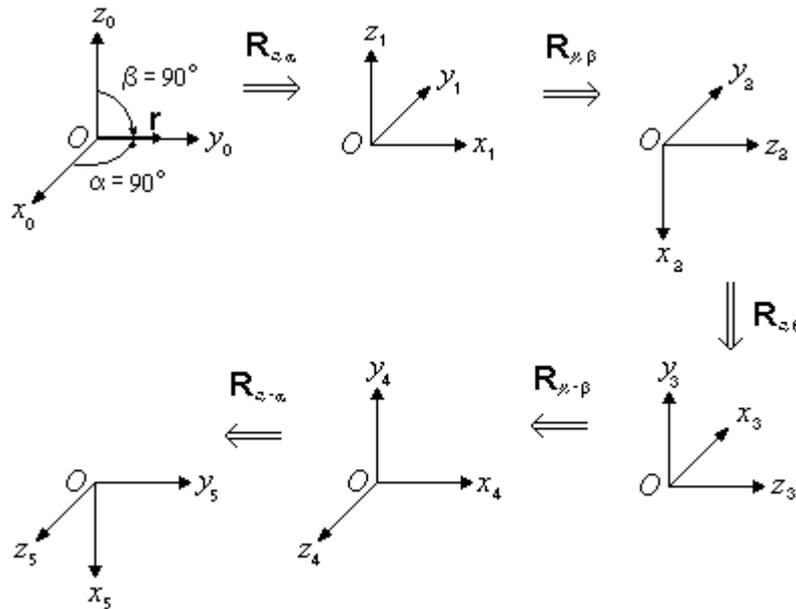
Da figura 4-12, pode-se perceber que:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{n_y}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}}; & \cos \alpha &= \frac{n_x}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}}; \\ \sin \beta &= \frac{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}}{n}; & \cos \beta &= \frac{n_z}{n}. \end{aligned}$$

Substituindo na expressão (4-34), resulta no seguinte:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{n},\theta} = \begin{bmatrix} n_x^2(1 - C\theta) + C\theta & n_x n_y(1 - C\theta) - n_z S\theta & n_x n_z(1 - C\theta) + n_y S\theta \\ n_x n_y(1 - C\theta) + n_z S\theta & n_y^2(1 - C\theta) + C\theta & n_y n_z(1 - C\theta) - n_x S\theta \\ n_x n_z(1 - C\theta) - n_y S\theta & n_y n_z(1 - C\theta) + n_x S\theta & n_z^2(1 - C\theta) + C\theta \end{bmatrix}. \quad (4-35)$$

**Exemplo 4.7:** Ache, segundo a matriz da eq. (4-35) a rotação de um ângulo de  $90^\circ$  em torno do eixo  $y$ , e compare este resultado com a rotação do exemplo 4-2, eq. (4-21).



**Figura 4-13:** Rotação em torno do eixo  $y$ , segundo o procedimento de rotação em torno de um eixo genérico.

Neste caso o vetor  $\mathbf{n}$  é o eixo  $y$ , cujas componentes são dadas por  $(0, 1, 0)^t$ , e o ângulo  $\theta$  é  $90^\circ$ . A figura 4-13, mostra as etapas necessárias à rotação pedida. Assim, a matriz que representa esta transformação será dada, segundo a eq. (4-35), por:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{y,90^\circ} &= \begin{bmatrix} 0 \cdot (1 - \cos 90^\circ) + \cos 90^\circ & 0 \cdot 1 \cdot (1 - \cos 90^\circ) - 0 \cdot \sin 90^\circ & 0 \cdot 0 \cdot (1 - \cos 90^\circ) + 1 \cdot \sin 90^\circ \\ 0 \cdot 1 \cdot (1 - \cos 90^\circ) + 0 \cdot \sin 90^\circ & 1 \cdot (1 - \cos 90^\circ) + \cos 90^\circ & 1 \cdot 0 \cdot (1 - \cos 90^\circ) - 0 \cdot \sin 90^\circ \\ 0 \cdot 0 \cdot (1 - \cos 90^\circ) - 1 \cdot \sin 90^\circ & 1 \cdot 0 \cdot (1 - \cos 90^\circ) + 0 \cdot \sin 90^\circ & 0 \cdot (1 - \cos 90^\circ) + \cos 90^\circ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Segundo a eq. (4-21), uma rotação de  $90^\circ$  em torno do eixo  $y$  é dada por:

$$\mathbf{R}_{y,90^\circ} = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & 0 & \sin 90^\circ \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin 90^\circ & 0 & \cos 90^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observa-se que, os resultados são iguais, como era esperado.

### 4.7 Matriz de Rotação em Termos de Ângulos de Euler

Nas seções anteriores, foi usada a matriz  $\mathbf{R}$ , de dimensões  $3 \times 3$ , para descrever a orientação de um corpo rígido ou de um sistema de coordenadas em relação a um sistema fixo. Os elementos da matriz, contudo não são independentes. A matriz de rotação tem nove

elementos, com três vetores coluna, que estão sujeitos à condição de módulo unitário e às condições de ortogonalidade, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^t \mathbf{b} = 0; & \quad \mathbf{t}^t \mathbf{b} = 0; & \quad \mathbf{b}^t \mathbf{n} = 0; \\ |\mathbf{n}| = 1; & \quad |\mathbf{t}| = 1; & \quad |\mathbf{b}| = 1. \end{aligned} \tag{4-36}$$

Assim, existem seis condições de ortogonalidade e de módulo, e portanto somente três dos nove elementos da matriz  $\mathbf{R}$  são linearmente independentes. Existem diversas formas de representação da orientação de sistemas de coordenadas ou de corpos rígidos, que usam somente três variáveis. Os chamados *ângulos de Euler* descrevem a orientação de um corpo rígido com três ângulos, sendo que estes ângulos são parâmetros independentes e cada um pode variar de maneira arbitrária. Observa-se, contudo, que existem diferentes tipos de representação de ângulos de Euler, as representações mais conhecidas estão listadas abaixo:

- Ângulos de Euler;
- Ângulos de “roll-pitch-yaw”;
- Ângulos Eulerianos.

Na robótica, os chamados ângulos de Euler são os mais utilizados, seguidos dos ângulos “roll-pitch-yaw”, sendo que os ângulos Eulerianos são pouco utilizados. Dessa forma, somente os dois primeiros conjuntos serão descritos.

**a) Ângulos de Euler:**

Os ângulos de Euler correspondem à seguinte sequência de rotações:

1. Rotação de um ângulo  $\phi$  em torno do eixo  $z$  ( $\mathbf{R}_{z,\phi}$ );
2. Rotação de um ângulo  $\theta$  em torno do novo eixo  $y$  ( $\mathbf{R}_{y,\theta}$ );
3. Rotação de um ângulo  $\varphi$  em torno do novo eixo  $z$  ( $\mathbf{R}_{z,\varphi}$ ).

Considere as três rotações do sistema  $O-xyz$  esquematizada na Figura 4-14. Primeiramente, o sistema sofre uma rotação no eixo  $z$  de um ângulo  $\phi$ . Em seguida, o novo sistema de coordenadas  $O-x'y'z'$  sofre uma rotação no eixo  $y'$  de um ângulo  $\theta$ . Finalmente, o novo sistema  $O-x''y''z''$  sofre uma rotação no eixo  $z''$  de um ângulo  $\varphi$ , resultando no sistema de coordenadas  $O_1-x_1y_1z_1$ . Os três ângulos,  $\phi$ ,  $\theta$  e  $\varphi$ , determinam a orientação do novo sistema de coordenadas de forma única, e são os *ângulos de Euler*.

A matriz de rotação que representa estas três rotações consecutivas é definida por:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\phi,\theta,\varphi} &= \mathbf{R}_{z,\phi} \mathbf{R}_{y',\theta} \mathbf{R}_{z'',\varphi}; \\ &= \begin{bmatrix} C\phi & -S\phi & 0 \\ S\phi & C\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta & 0 & S\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\theta & 0 & C\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\varphi & -S\varphi & 0 \\ S\varphi & C\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \\ &= \begin{bmatrix} C\phi C\theta C\varphi - S\phi S\varphi & -C\phi C\theta S\varphi - S\phi C\varphi & S\theta C\phi \\ S\phi C\theta C\varphi + C\phi S\varphi & -S\phi C\theta S\varphi + C\phi C\varphi & S\theta S\phi \\ -S\theta C\phi & S\theta S\varphi & C\theta \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{4-37}$$

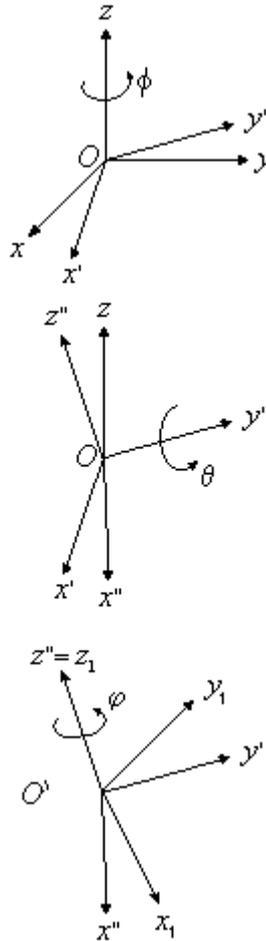


Figura 4-14: As três rotações consecutivas utilizadas para definir os ângulos de Euler.

A matriz  $\mathbf{R}_{\phi, \theta, \phi}$  representa a transformação de coordenadas do sistema  $O-xyz$  para o sistema  $O_1-x_1y_1z_1$ . Esta matriz pode também ser especificada em termos de rotações em torno dos eixos do sistema fixo, ou seja, primeiro uma rotação de um ângulo  $\phi$  em torno do eixo  $z_0$ , seguida de uma rotação de um ângulo  $\theta$  em torno do eixo  $y_0$  e finalmente, uma rotação de um ângulo  $\phi$  em torno do eixo  $z_0$ .

Para uma dada orientação arbitrária do sistema de coordenadas, os ângulos de Euler podem ser obtidos por relações geométricas simples. Note que, os ângulos de Euler não são únicos; o conjunto de ângulos  $(\phi + \pi, -\theta, \phi + \pi)$  resulta na mesma orientação que o conjunto de ângulos  $(\phi, \theta, \phi)$ , discutido anteriormente.

Uma operação muito importante é obter, a partir de uma dada matriz de rotação, os ângulos de Euler. Isto é realizado igualando-se uma matriz de rotação genérica, com elementos  $r_{i,j}$ , com a matriz de rotação em termos de ângulos de Euler,  $\mathbf{R}_{\phi, \theta, \phi}$ , da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & r_{2,3} \\ r_{3,1} & r_{3,2} & r_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\phi C\theta C\phi - S\phi S\phi & -C\phi C\theta S\phi - S\phi C\phi & C\theta S\phi \\ S\phi C\theta C\phi + C\phi S\phi & -S\phi C\theta S\phi + C\phi C\phi & S\theta S\phi \\ S\theta S\phi & S\theta C\phi & C\theta \end{bmatrix}. \quad (4-38)$$

Analisando-se o componente  $r_{3,3}$ , tem-se duas possibilidades:

1) Caso 1: Se  $r_{3,3} = C\theta \neq \pm 1$ ;

Neste caso tem-se que,

$$C\theta = r_{3,3} \quad \text{e} \quad S\theta = \pm \sqrt{1 - r_{3,3}^2}. \quad (4-39)$$

Assim,

$$\theta = \text{atan}_2(\sqrt{1 - r_{3,3}^2}, r_{3,3}), \quad (4-40)$$

ou,

$$\theta = \text{atan}_2(-\sqrt{1 - r_{3,3}^2}, r_{3,3}). \quad (4-41)$$

onde  $\text{atan}_2$  é a função arco tangente, que fornece o ângulo nos quatro quadrantes dependendo dos sinais do seno e do cosseno. Os ângulos  $\phi$  e  $\varphi$  podem ser obtidos pelas razões entre os elementos  $r_{1,3}$  e  $r_{2,3}$  e entre  $r_{3,1}$  e  $r_{3,2}$ , respectivamente. De acordo com a primeira opção para  $\theta$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \phi &= \text{atan}_2(r_{2,3}, r_{1,3}); \\ \varphi &= \text{atan}_2(r_{3,2}, -r_{3,1}). \end{aligned} \quad (4-42)$$

Na segunda opção, tem-se:

$$\begin{aligned} \phi &= \text{atan}_2(-r_{2,3}, -r_{1,3}); \\ \varphi &= \text{atan}_2(-r_{3,2}, r_{3,1}). \end{aligned} \quad (4-43)$$

2) Caso 2: Se  $r_{3,3} = 1 = C\theta$ ;

Neste caso tem-se ainda duas possibilidades.

2.1) Se,  $r_{3,3} = 1 = C\theta$ , tem-se que  $S\theta = 0$ , e portanto  $\theta = 0$ .

Utilizando-se as expressões para o seno e cosseno da soma de dois ângulos, a matriz de rotação fica:

$$\begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & 0 \\ r_{2,1} & r_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\phi C\varphi - S\phi S\varphi & -C\phi S\varphi - S\phi C\varphi & 0 \\ S\phi C\varphi + C\phi S\varphi & -S\phi S\varphi + C\phi C\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(\phi + \varphi) & -S(\phi + \varphi) & 0 \\ S(\phi + \varphi) & C(\phi + \varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4-44)$$

Portanto,

$$\phi + \varphi = \text{atan}_2(r_{2,1}, r_{1,1}) = \text{atan}_2(-r_{1,2}, r_{1,1}), \quad (4-45)$$

ou seja, existirão infinitos valores de  $\phi$  e  $\varphi$  que satisfazem a equação acima.

2.2) Se,  $r_{3,3} = -1 = C\theta$ , tem-se que  $S\theta = 0$ , e portanto  $\theta = 180^\circ$ .

Utilizando-se as expressões para o seno e coseno de dois ângulos, a matriz de rotação fica:

$$\begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & 0 \\ r_{2,1} & r_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C\phi C\varphi - S\phi S\varphi & C\phi S\varphi - S\phi C\varphi & 0 \\ -S\phi C\varphi + C\phi S\varphi & S\phi S\varphi + C\phi C\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C(\phi - \varphi) & -S(\phi - \varphi) & 0 \\ S(\phi - \varphi) & C(\phi - \varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4-46)$$

Portanto,

$$\phi - \varphi = \text{atan}_2(-r_{1,2}, -r_{1,1}) = \text{atan}_2(-r_{2,2}, -r_{2,1}), \quad (4-47)$$

ou seja, novamente existirão infinitos valores de  $\phi$  e  $\varphi$  que satisfazem a equação acima.

### b) Ângulos de “roll-pitch-yaw”:

Os ângulos “roll-pitch-yaw” consistem em um outro conjunto de ângulos independentes largamente utilizados na robótica, para descrever a orientação de corpos rígidos. Estes ângulos são normalmente descritos como rotações em torno dos eixos principais do sistema de coordenadas fixo. Eles correspondem à seguinte sequência:

1. “Yaw”: rotação de um ângulo  $\varphi$  em torno do eixo  $x_0$  ( $\mathbf{R}_{x_0, \varphi}$ );
2. “Pitch”: rotação de um ângulo  $\theta$  em torno do eixo fixo  $y_0$  ( $\mathbf{R}_{y_0, \theta}$ );
3. “Roll”: rotação de um ângulo  $\phi$  em torno do eixo fixo  $z_0$  ( $\mathbf{R}_{z_0, \phi}$ ).

As três rotações que definem os ângulos “roll-pitch-yaw” estão esquematizada na Figura 4-15. Os ângulos de “roll-pitch-yaw” também podem ser especificados em termos de rotações em torno dos eixos dos sistemas que vão surgindo. Dessa forma tem-se, primeiro uma rotação de um ângulo  $\phi$  em torno do eixo  $z$ , seguida de uma rotação de um ângulo  $\theta$  em torno do novo eixo  $y$  e finalmente, uma rotação de um ângulo  $\varphi$  em torno do novo eixo  $x$ . A matriz de rotação que representa os ângulos de “roll-pitch-yaw” é definida por:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\phi, \theta, \varphi} &= \mathbf{R}_{z, \phi} \mathbf{R}_{y, \theta} \mathbf{R}_{x, \varphi}, \\ &= \begin{bmatrix} C\phi & -S\phi & 0 \\ S\phi & C\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta & 0 & S\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\theta & 0 & C\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\varphi & -S\varphi \\ 0 & S\varphi & C\varphi \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} C\phi C\theta & C\phi S\theta S\varphi - S\phi C\varphi & C\phi S\theta C\varphi + S\phi S\varphi \\ S\phi C\theta & S\phi S\theta S\varphi + C\phi C\varphi & S\phi S\theta C\varphi - C\phi S\varphi \\ -S\theta & C\theta S\varphi & C\theta C\varphi \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4-48)$$

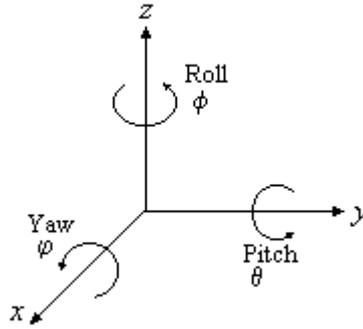


Figura 4-15: Ângulos “roll-pitch-yaw”.

O mesmo procedimento utilizado para se determinar os ângulos de Euler dada uma matriz de rotação, visto no item (a), pode ser utilizado para se determinar os ângulos “roll-pitch-yaw”, dada uma matriz de rotação genérica.

#### 4.8 Matriz de Rotação em Termos de Parâmetros de Euler-Rodrigues

Uma outra forma de descrever a orientação de sistemas de coordenadas ou de corpos rígidos, que é bastante utilizada na robótica, são os parâmetros de Euler-Rodrigues. Os parâmetros de Euler-Rodrigues formam um conjunto de quatro elementos, que descrevem a rotação de um ângulo arbitrário,  $\theta$ , em torno de um eixo também arbitrário,  $\mathbf{n}$ . Os parâmetros de Euler-Rodrigues ( $p, q, r, s$ ) são definidos pelas seguintes relações:

$$\begin{aligned} p &= n_x \sin(\theta / 2); \\ q &= n_y \sin(\theta / 2); \\ r &= n_z \sin(\theta / 2); \\ s &= \cos(\theta / 2). \end{aligned} \tag{4-49}$$

A eq. (4-35) da seção 4.6, consiste em uma matriz que descreve uma rotação em torno de um eixo arbitrário  $\mathbf{n}$  de um ângulo  $\theta$ , ou seja, uma rotação igual à definida pelos parâmetros de Euler-Rodrigues. Assim, substituindo-se na eq. (4-35) as componentes  $n_x, n_y, n_z$  e o seno e cosseno de  $\theta$ , pelos parâmetros  $p, q, r, s$  e realizando alguma álgebra, obtém-se uma matriz de rotação em termos dos parâmetros de Euler-Rodrigues, da seguinte forma:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{n},\theta} = \begin{bmatrix} 2(p^2 + s^2) - 1 & 2(pq - rs) & 2(pr + qs) \\ 2(pq + rs) & 2(q^2 + s^2) - 1 & 2(qr - ps) \\ 2(pr - qs) & 2(qr + ps) & 2(r^2 + s^2) - 1 \end{bmatrix}. \tag{4-50}$$

Observa-se que, partindo da eq. (4-35) para chegar na eq. (4-50), utiliza-se do fato de que o vetor  $\mathbf{n}$  tem módulo unitário, assim, automaticamente tem-se que,  $p^2 + q^2 + r^2 + s^2 = 1$ .

Uma operação muito importante é obter, a partir de uma dada matriz de rotação, os parâmetros de Euler-Rodrigues. Isto é realizado igualando-se uma matriz de rotação genérica,

com elementos  $r_{i,j}$ , com a matriz de rotação em termos dos parâmetros de Euler-Rodrigues, eq. (4-50), que resulta nas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\varepsilon}{2} \text{sinal}(r_{3,2} - r_{2,3}) \sqrt{r_{1,1} - r_{2,2} - r_{3,3} + 1}; \\ q &= \frac{\varepsilon}{2} \text{sinal}(r_{1,3} - r_{3,1}) \sqrt{-r_{1,1} + r_{2,2} - r_{3,3} + 1}; \\ r &= \frac{\varepsilon}{2} \text{sinal}(r_{2,1} - r_{1,2}) \sqrt{-r_{1,1} - r_{2,2} + r_{3,3} + 1}; \\ s &= \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{r_{1,1} + r_{2,2} + r_{3,3} + 1}. \end{aligned} \quad (4-51)$$

sujeitas às seguintes condições:

$$\begin{aligned} \text{sinal}(qr) &= \text{sinal}(r_{3,2} + r_{2,3}); \\ \text{sinal}(pq) &= \text{sinal}(r_{1,2} + r_{2,1}); \\ \text{sinal}(pr) &= \text{sinal}(r_{1,3} + r_{3,1}). \end{aligned} \quad (4-52)$$

onde  $\varepsilon$  é uma constante igual a  $\pm 1$ , cujo sinal é definido arbitrariamente e *sinal* é uma função definida da seguinte forma:

$$\text{sinal}(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x < 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \\ 1, & \text{se } x > 0. \end{cases} \quad (4-53)$$

Observa-se que as expressões (4-51) são obtidas utilizando-se somente os termos da diagonal principal e utilizando-se o fato de que  $p^2 + q^2 + r^2 + s^2 = 1$ . As condições de sinal presentes nas eq. (4-51) e (4-52) são originadas dos termos fora da diagonal principal e garantem uma rotação em torno do eixo  $\mathbf{n}$ , segundo a regra da mão direita. A existência da variável  $\varepsilon$  vem do fato de que uma rotação de um ângulo  $\theta$  em torno do eixo  $\mathbf{n}$ , é igual a uma rotação de um ângulo  $-\theta$  em torno do eixo  $-\mathbf{n}$ , existindo portanto, dois conjuntos distintos de parâmetros de Euler-Rodrigues para descrever uma mesma condição final, ou que resultam na mesma matriz de rotação.

Um ótimo exercício é realizar a álgebra necessária para se obter a matriz da eq. (4-50) e as expressões da eq. (4-51).

## 4.9 Transformação de Rotação em Termos de Quatêrnions

O conceito de quatêrnion tem sido aplicado com sucesso na análise de mecanismos. O uso de quatêrnions facilita a representação da orientação de um corpo rígido, como o efetuador de um manipulador. Um quatêrnion, que será representado pelo símbolo  $\mathbf{Q}$ , é uma entidade matemática construída a partir de um número real,  $s$ , e um vetor,  $\mathbf{n}$ , de três componentes, como se segue:

$$\mathbf{Q} = s + \mathbf{n} = s + n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k}. \quad (4-54)$$

Note que o vetor  $\mathbf{n}$  deve ser descrito em termos dos versores de um sistema de coordenadas cartesiano.

Por definição tem-se as seguintes propriedades de um quatêrnion:

- Parte escalar de  $\mathbf{Q}$ :  $s$ ;
- Parte vetorial de  $\mathbf{Q}$ :  $\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k}$ ;
- Conjugado de  $\mathbf{Q}$ :  $s - (n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k})$ ;
- Norma de  $\mathbf{Q}$ :  $s^2 + n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$ ;
- Quatêrnion unitário: norma = 1.

A adição de dois quatêrnions é obtida pela adição dos elementos correspondentes dos dois quatêrnions. A multiplicação de dois quatêrnions é dada, por definição, pela seguinte expressão:

$$\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 = s_1 s_2 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 + s_1 \mathbf{n}_2 + s_2 \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2, \quad (4-55)$$

onde o símbolo  $\times$  representa o produto vetorial entre dois vetores.

Com a ajuda da álgebra de quatêrnions, rotações finitas podem ser descritas de maneira simples e eficiente. Uma rotação de um ângulo  $\theta$  em torno de um vetor  $\mathbf{n}$  pode ser representada simplesmente por um quatêrnion, como se segue:

$$\mathbf{Q} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)(n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k}). \quad (4-56)$$

Observa-se que as quatro componentes do quatêrnion acima, consistem nos parâmetros de Euler-Rodrigues, visto na seção 4.8, assim este quatêrnion, ou rotação, pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathbf{Q} = s + p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k}, \quad (4-57)$$

onde  $s, p, q$  e  $r$  são os parâmetros de Euler-Rodrigues.

Se  $\mathbf{Q}_1$  define uma rotação de um ângulo  $\theta_1$  em torno de um eixo  $\mathbf{n}_1$  e  $\mathbf{Q}_2$  define uma rotação de um ângulo  $\theta_2$  em torno de  $\mathbf{n}_2$ , a rotação composta da primeira rotação seguida da segunda rotação, pode ser obtida pelo produto entre os dois quatêrnions, como se segue:

$$\mathbf{Q}_f = \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \quad (4-58)$$

onde  $\mathbf{Q}_f$  é o quatêrnion que representa a rotação resultante.

**Exemplo 4.8:** Uma composição de rotações composta por uma rotação de  $90^\circ$  em torno do eixo  $z$  seguida de uma rotação de  $90^\circ$  em torno do novo eixo  $y$ , é obtida em função de quatêrnions da seguinte forma:

A primeira rotação é representada pelo quatêrnion  $\mathbf{Q}_1$ , da seguinte forma:

$$\mathbf{Q}_1 = \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \mathbf{j}.$$

A segunda rotação, representada pelo quatêrnion  $\mathbf{Q}_2$ , é dada por:

$$\mathbf{Q}_2 = \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \mathbf{k}.$$

A rotação composta, representada pelo quatêrnion  $\mathbf{Q}_f$ , é obtida multiplicando-se  $\mathbf{Q}_1$  e  $\mathbf{Q}_2$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_f &= \mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_2 = (\cos 45^\circ + \sin 45^\circ \mathbf{j})(\cos 45^\circ + \sin 45^\circ \mathbf{k}) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{3}} \right) \\ &= \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \left( \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

Assim, a rotação final consiste de uma rotação de  $120^\circ$  em torno do eixo  $(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})/\sqrt{3}$ .

#### 4.10 Transformação Homogênea

A transformação homogênea é um método prático e compacto de definir uma transformação de coordenadas, englobando em uma única matriz, tanto a transformação de translação como a de rotação.

Define-se os vetores homogêneos  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{P}_1$ , de dimensão  $4 \times 1$ , como abaixo:

$$\mathbf{P} = (p_x, p_y, p_z, 1)^t, \quad \text{e} \quad \mathbf{P}_1 = (p_{x1}, p_{y1}, p_{z1}, 1)^t, \quad (4-59)$$

onde  $p_x$ ,  $p_y$  e  $p_z$  são as coordenadas de um ponto  $P$  fixo no espaço. Define-se também, a matriz homogênea,  $\mathbf{A}$ , de dimensão  $4 \times 4$ ;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}. \quad (4-60)$$

Assim, os vetores  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{p}_1$  são aumentados pela adição do número “1” como um quarto elemento, resultando em vetores  $4 \times 1$ , e a matriz de rotação  $\mathbf{R}$  é estendida para uma matriz  $4 \times 4$  pela combinação do vetor  $\mathbf{x}_0$  e da quarta linha, composta de zeros e um. Assim, a eq. (4-7), que define uma transformação de coordenadas, repetida abaixo,

$$\mathbf{p} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{R}\mathbf{p}_1, \quad (4-7)$$

fica escrita em termos dos vetores e matriz homogêneos, da seguinte forma:

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}\mathbf{P}_1, \quad (4-61)$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4-62)$$

Note que a matriz  $\mathbf{A}$  representa tanto a posição e a orientação do sistema  $O_1-x_1y_1z_1$  em relação ao sistema  $O-xyz$ . Assim, os dois termos do lado direito da eq. (4-7) reduzem a um único termo. A transformação de coordenadas dada pela eq. (4-61) é chamada de *transformação homogênea*.

De forma geral, a matriz homogênea é composta da seguinte forma:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_1 & \mathbf{x}_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4-63)$$

onde,  $\mathbf{i}_1$ ,  $\mathbf{j}_1$  e  $\mathbf{k}_1$  são os versores do sistema transformado descritos em relação ao sistema original e  $\mathbf{x}_0$  é o vetor posição do sistema transformado descrito em relação ao sistema original. Observa-se que, o que vale para matrizes de rotação, em relação à ordem de multiplicação, também vale para matrizes homogêneas.

A vantagem da transformação homogênea é a sua forma compacta de representação, que é conveniente para representar transformações consecutivas. Seja  $O_2-x_2y_2z_2$  um outro sistema de coordenadas, e  $\mathbf{p}_2$  as coordenadas do ponto  $P$  em relação a este sistema. A relação entre  $\mathbf{p}_2$  e  $\mathbf{p}_1$  é dada por:

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{R}'\mathbf{p}_2, \quad (4-64)$$

onde  $\mathbf{x}_1$  é a distância entre  $O_1$  e  $O_2$  e  $\mathbf{R}'$  é a matriz de rotação entre os sistemas  $O_1-x_1y_1z_1$  e  $O_2-x_2y_2z_2$ . Para representar as duas transformações consecutivas, do sistema  $O-xyz$  para o sistema  $O_1-x_1y_1z_1$  e deste para o sistema  $O_2-x_2y_2z_2$ , conforme a eq. (4-7), tem-se que substituir a eq. (4-64) na eq. (4-7), resultando no seguinte:

$$\mathbf{p} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{R}\mathbf{x}_1 + \mathbf{R}\mathbf{R}'\mathbf{p}_2. \quad (4-65)$$

Existem agora, portanto, três termos no lado direito da eq. (4-65) e a medida que aumenta o número de transformações, aumenta o número de termos no lado direito. A transformação homogênea fornece uma maneira compacta de representar diversas transformações de coordenadas por um único termo. Considere  $n$  transformações consecutivas do sistema  $n$  para o sistema  $0$ . Seja  $\mathbf{A}_{i-1}^i$  a matriz associada com a transformação homogênea do sistema  $i-1$  para o sistema  $i$ , então o vetor posição  $\mathbf{P}_0$  no sistema  $n$  é transformado em  $\mathbf{P}_0$  no sistema  $0$  por,

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{A}_0^1 \mathbf{A}_1^2 \dots \mathbf{A}_{n-1}^n \mathbf{P}_n = \mathbf{A}_0^n \mathbf{P}_n. \quad (4-66)$$

Assim, transformações consecutivas são descritas de maneira compacta, por um único termo.

A transformação homogênea inversa pode ser obtida invertendo-se a eq. (4-7), como se segue:

$$\mathbf{p}_1 = -\mathbf{R}^t \mathbf{x}_0 + \mathbf{R}^t \mathbf{p}, \quad (4-67)$$

que escrevendo de forma matricial, com os vetores e matriz homogêneos  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{P}_1$  e  $\mathbf{A}$ , fica:

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{P}, \quad (4-68)$$

onde,

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^t & -\mathbf{R}^t \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}. \quad (4-69)$$

**Exemplo 4.9:** Ache a matriz homogênea que representa a rotação de um ângulo  $\alpha$  em torno do eixo  $x$ , seguida de uma translação de uma distância  $b$  ao longo do eixo  $x$ , seguida de uma translação de uma distância  $d$  ao longo do eixo  $z$ , seguida de um rotação de um ângulo  $\theta$  sobre o eixo  $z$ .

A matriz homogênea que representa esta sequência de transformações é obtida multiplicando-se as matrizes homogêneas de cada transformação, na ordem em que são realizadas. Dessa forma, tem-se o seguinte:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha & 0 \\ 0 & S\alpha & C\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 & b \\ C\alpha S\theta & C\alpha C\theta & -S\alpha & -dS\alpha \\ S\alpha S\theta & S\alpha C\theta & C\alpha & dC\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**Exemplo 4.10:** A Figura 4-16 apresenta um esquema de um robô manipulando objetos posicionados em cima de uma mesa, guiado por uma câmera. A posição do centro do objeto e a orientação do mesmo, vistas pelo sistema de coordenadas da câmera são dados pela seguinte matriz homogênea:

$$\mathbf{A}_{\text{camera}}^{\text{objeto}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A origem do sistema de coordenadas fixo à base do robô e a orientação deste sistema, vistos pelo sistema de coordenadas da câmera, são fornecidos pela seguinte matriz homogênea:

$$\mathbf{A}_{camera}^{base} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & -1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

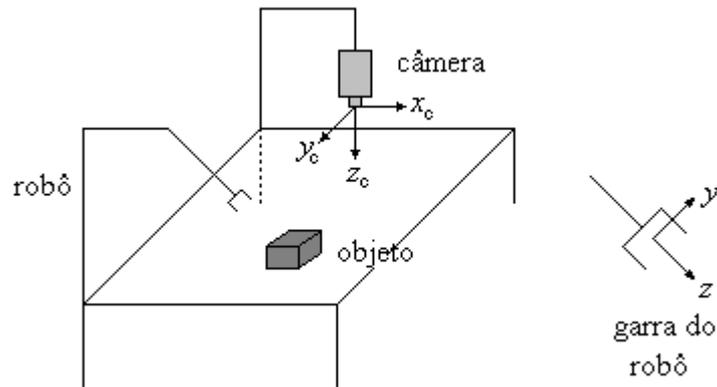


Figura 4-16: Esquema de um robô manipulando objetos em cima de uma mesa, guiado por uma câmera.

Além disso, também na Figura 4-16 é fornecido um esquema do posicionamento do sistema de coordenadas fixo à garra do robô. Assim, pede-se calcular os seguintes itens:

- A posição do centro do objeto e a sua orientação em relação ao sistema de coordenadas fixo à base do robô.
- A orientação e posição da garra do robô para que a mesma pegue o objeto por cima e com o seu eixo y paralelo ao eixo y do objeto.

**Resolução:**

a) Para se obter a posição e a orientação do objeto, em relação ao sistema fixo à base do robô, tendo-se a transformação dos sistema fixo no objeto em relação ao sistema da câmera e a transformação do sistema da base do robô em relação ao sistema da câmera, basta manipular as matrizes homogêneas da seguinte forma:

$$\mathbf{A}_{base}^{objeto} = \mathbf{A}_{base}^{camera} \cdot \mathbf{A}_{camera}^{objeto} = \left( \mathbf{A}_{camera}^{base} \right)^{-1} \cdot \mathbf{A}_{camera}^{objeto},$$

onde, a inversa da transformação da câmera para a base do robô pode ser obtida aplicando-se a eq. (4-69), na matriz  $\mathbf{A}_{camera}^{base}$ , que resulta na matriz abaixo,

$$\mathbf{A}_{base}^{camera} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Introduzindo-se a matriz acima na expressão anterior obtém a posição e orientação do objeto em relação à base do robô, ou seja,

$$\mathbf{A}_{base}^{objeto} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 11 \\ -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Para que o eixo  $z$  da garra coincida com o eixo  $z$  do objeto, porém com sentido oposto, ele deve ser descrito em relação ao sistema da base do robô pelo vetor  $(0,0,-1)^t$ , que é a terceira coluna na matriz homogênea calculada no item (a). Para que o eixo  $y$  da garra coincida com o eixo  $y$  do objeto, porém com qualquer sentido, deve ser dado pelo vetor  $(\pm 1,0,0)^t$ . Conhecendo-se os eixos  $z$  e  $y$  da garra, o seu eixo  $x$  pode ser facilmente obtido, de forma que o sistema da garra siga a regra da mão direita, ou seja,

$$x = y \times z \Rightarrow \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 0 \cdot \mathbf{i} \pm 1 \cdot \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k}.$$

Obviamente que para pegar o objeto a posição da garra deve ser igual à posição do objeto. Assim, pode-se escrever a posição e orientação da garra em relação ao sistema da base do robô, como a seguinte transformação homogênea:

$$\mathbf{A}_{base}^{garra} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 11 \\ 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ou, } \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 11 \\ -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$