
PRINCÍPIOS FUNDAMENTAIS DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR

Apresentado para:

Hélio Morishita
Professor
Dept. de Engenharia Naval e Oceânica

Preparado por:

Marcelo Rosário da Barrosa
Aluno de Graduação
Dept. de Engenharia Naval e Oceânica

2 Agosto 2004



ÍNDICE

A. INTRODUÇÃO	4
B. OBJETIVO.....	5
C. DEFINIÇÕES.....	6
a. Calor;.....	6
b. Condução;	8
c. Radiação;.....	10
D. DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES GERAIS	16
a. Transmissão de Calor por Convecção;.....	16
<i>a.1 Coordenadas Cartesianas:</i>	<i>17</i>
<i>a.2 Coordenadas Cilíndricas:</i>	<i>19</i>
b. Transmissão de Calor por Radiação;	22
c. Transmissão de Calor por Convecção;.....	25
<i>c.1 Métodos de Avaliação do Coeficiente de Transmissão de Calor por Convecção;</i>	<i>26</i>
c.1.i Análise dimensional combinada com experiências:	26
c.1.ii Soluções matemáticas exatas da equação da camada limite:.....	27
c.1.iii Análise aproximada da camada limite por métodos integrais:	37
c.1.iv Analogia entre transferência de calor, de massa e de quantidade de movimento. .	41
<i>c.2 Papel das Aletas na Transmissão de Calor por Convecção;</i>	<i>46</i>
BIBLIOGRAFIA	48

FIGURAS E TABELAS

Figura 1: Elemento material de corpo sólido, na forma de paralelepípedo, a partir do qual serão deduzidas as equações da transmissão de calor por condução para coordenadas cartesianas..... 17

Figura 2: Representação de um ponto no espaço a partir das coordenadas cilíndricas..... 19

Figura 3: Gráfico de $E_{b\lambda_{\max}} \times \lambda, T$ 24

Figura 4: Gráfico $E_{b\lambda_{\max}} \times T$ 24

Figura 5: Gráfico $E_{b\lambda}/E_{b\lambda_{\max}} \times \lambda T$ 24

Figura 6: Gráfico $E_{0-\lambda}/E_{0-\infty} \times \lambda T$ 24

Figura 7: Gráfico da solução numérica obtida para a Eq. D.c.1.ii.9..... 31

Figura 8: Variação do coeficiente de arrasto em função do número de Reynolds..... 32

Figura 9: Gráfico da razão de temperatura em função de η , para os diversos valores do número de Prandtl, $Pr = \mu c_p/k$ 35

Figura 10: Volume de controle para análise aproximada da quantidade de movimento de uma camada limite..... 37

Figura 11: Volume de controle para balanço aproximado de energia dentro de uma camada limite..... 39

Figura 12: Variação da velocidade instantânea com o tempo. Observa-se que os valores aqui apresentados são bastante intuitivos..... 42

Figura 13: Comprimento de mistura para transferência de energia..... 44

A. INTRODUÇÃO

Este trabalho destina-se principalmente aos alunos que iniciam suas atividades no ramo de *Transferência de Calor*. Porém, sua formatação clara e concisa permite que o mesmo sirva de fonte de pesquisa rápida e elementar para profissionais que atuem no setor. Nele, serão apresentados e discutidos conceitos básicos da disciplina supra citada, através das definições dos seus termos mais comuns e do equacionamento das três formas em que o calor pode ser transferido entre os corpos. Primeiramente, serão apresentadas as definições dos termos *calor*, *condução*, *radiação* e *convecção*, junto à introdução de algumas fórmulas básicas que auxiliarão no entendimento destes termos. Em seguida, serão deduzidas as fórmulas gerais destes três métodos de transferência de calor. Para a condução, serão deduzidas as fórmulas gerais para coordenadas cartesianas e cilíndricas, representadas pelas Eq. D.a1.6 e Eq. D.b1.6, respectivamente. Para a radiação, será deduzida a equação geral desta forma de transferência de calor, representada pela Eq. D.b.2, e será explicado como a radiação pode ocorrer. Para a convecção, será deduzida a fórmula geral de transferência de calor desta forma, representada pela Eq. C.d.1, e serão explicados os quatro métodos de obtenção do coeficiente de transmissão de calor por convecção. Por último, será explicado o papel das *aletas* neste método de transmissão de calor.

B. OBJETIVO

O objetivo deste trabalho é introduzir os conceitos básicos fundamentais da disciplina *Transferência de Calor*, a qual é lecionada na maioria dos cursos de graduação em engenharia. Seu texto é dedicado principalmente aos alunos que estejam passando por uma primeira abordagem sobre o tema, pois os assuntos aqui apresentados são elementares no estudo da disciplina supra citada. Isto não diminui, porém, a importância dos conceitos aqui apresentados, pois estes representam a base para um estudo mais aprofundado de Transferência de Calor. Sendo assim, este texto pode perfeitamente servir como fonte de consulta para profissionais do ramo que desejem fazê-la de forma rápida e direta.

Também é um objetivo deste texto introduzir as informações descritas acima de forma clara, direta e concisa, com apenas algumas deduções matemáticas que possam esclarecer a origem de algumas das fórmulas mais importantes da Transferência de Calor.

C. DEFINIÇÕES

Nesta seção serão introduzidos alguns termos de vital importância para o bom entendimento deste trabalho. Serão, também, explicados seus significados e suas aplicações mais usuais. Os termos aqui apresentados são: Calor, Condução, Radiação, Convecção.

a. Calor;

Segundo definição do dicionário Aurélio, calor é “... a forma de energia que se transfere de um sistema para o outro em virtude de uma diferença de temperatura existente entre os dois, e que se distingue das outras formas de energia porque, como o trabalho, só se manifesta num processo de transformação”.¹ Desta definição de calor pode-se observar que o calor nada mais é do que uma forma de energia. A maneira com que esta energia altera as propriedades (dependentes ou independentes) de um sistema no estado de equilíbrio é escopo do estudo da Termodinâmica Clássica. Já os efeitos que ocorrem durante o processo da transmissão da energia em forma de calor é escopo da Transferência de Calor. Dentre estes efeitos, exalta-se a variação da taxa temporal de transmissão de calor (variável não considerada na termodinâmica). Os principais princípios da Termodinâmica devem estar bem assimilados a fim de se absorver o conteúdo deste trabalho da forma mais efetiva.

¹ Ferreira, Aurélio Buarque de Holanda, *Novo Dicionário Aurélio*, Editora Nova Fronteira, Rio de Janeiro, Brasil. p. 258.

Além disso, a definição supra citada sugere a Primeira Lei da Termodinâmica, que, simplificada, diz que a energia (na forma de calor ou trabalho) não é criada, e sim, transformada. Matematicamente, considerando um sistema fechado (i.e. $m'=0$), pode-se escrever este princípio pela equação que segue (aplicada a um volume de controle):²

$$\sum_i \frac{dQ_i}{dt} - \sum_j \frac{dW_j}{dt} = \Delta E \quad \text{Eq C.a.1}$$

Na equação acima, W simboliza Energia *na forma de Trabalho*, Q simboliza a *energia na forma de calor* e ΔE simboliza a *variação de energia de um sistema*. Como se pode notar, as duas grandezas estão aplicadas à razão d/dt . Porém, esta formulação deve ser aplicada ao estado de equilíbrio do sistema termodinâmico. Seus resultados indicam somente que a somatória das taxas de variação de calor e de trabalho, dentro de um volume de controle em um sistema fechado, são constantes, e podem ser transformadas de uma forma para a outra. Os valores da variação temporal destas taxas, assim como sua dependência do tipo de meio e da superfície de absorção/emissão de calor, não são aqui consideradas. Como citado anteriormente, estes são aspectos abordados pela *Transferência de Calor*.

² Moran, Michael J. e Howard N. Shapiro, Fundamentals of Engineering Thermodynamics, 2000, John Wiley & Sons Inc., New York City, USA.

b. Condução;³

“A condução é um processo pelo qual o calor flui de uma região de temperatura mais alta para outra de temperatura mais baixa, dentro de um meio (sólido, líquido ou gasoso) ou entre meios diferentes em contato físico direto”.⁴ Essa explicação abrange tanto a apresentação da Segunda Lei da Termodinâmica, quando se diz que a transmissão de calor parte de uma região de temperatura mais alta para outra de temperatura mais baixa, quanto a definição específica do processo de transmissão de calor por *Condução*: “...em contato físico direto.”. Portanto, a transmissão de calor por *Condução* ocorre quando corpos em diferentes temperaturas estão literalmente “encostados” um no outro. A energia (calor) do corpo de temperatura mais alta agita as moléculas do corpo de temperatura mais baixa, fazendo com que a energia cinética média das moléculas deste último se eleve, aumentando, assim, sua energia interna. Conseqüentemente, a temperatura do corpo que está “recebendo” a energia em forma de calor se eleva até o estado de equilíbrio. Para ilustrar este fenômeno, imagina-se um bule com água fervendo ao fogão. O fogo aquece o bule, o qual, por condução, aquece a parcela de líquido que está em contato direto com o mesmo. Esta transmissão de calor por condução é a única maneira de que o calor pode ser transmitido entre corpos sólidos opacos. Já em meios líquidos, a condução também apresenta grande importância, embora esteja, quase sempre, relacionada com outros meios de transmissão de calor.

³ Kreith, F. e Bohn, MS., *Princípios de Transferência de Calor*, 1977, Editora Edgard Blücher, São Paulo p. 1 a 21.

⁴ Kreith, F. e Bohn, MS., *Princípios de Transferência de Calor*, 1977, Editora Edgard Blücher, São Paulo p. 3.

Segundo definição do cientista francês J.B.J. Fourier, em 1882, a quantidade de calor transmitida por condução segue a seguinte lei:

$$q_k = -kA \frac{dT}{dx} \quad \text{Eq. C.b.1}$$

Na formulação acima, k representa a *condutividade térmica* do material, A representa a *área da seção através da qual o calor flui por condução* (medida perpendicularmente à direção do fluxo), e dT/dx representa o *gradiente de temperatura na seção*. Nesta formulação, toma-se como convenção a direção de aumento na coordenada x como fluxo positivo de calor. Sabendo-se que, pela segunda lei da termodinâmica, o calor flui da região de maior temperatura para a região de menor temperatura, deve-se adotar o sinal negativo para o produto acima, conforme mostra a equação C.b.1.

Como se pode observar pelo balanço de unidades da fórmula acima, q_k é medido em quantidade de calor por unidade de tempo. Usualmente, esta grandeza é expressa em kilocalorias por hora, ou kcal/h.

O valor da condutividade térmica varia de aproximadamente 6×10^{-3} kcal/hm°C, para os gases, até $3,6 \cdot 10^2 \frac{\text{kcal}}{\text{h} \cdot \text{m} \cdot ^\circ \text{C}}$, para o cobre. Os materiais que têm alta condutibilidade térmica são chamados *condutores*, enquanto os de baixa condutibilidade são chamados *isolantes*.

Aplicando a fórmula acima a uma parede plana, em regime permanente, pode-se facilmente chegar ao seguinte resultado:

$$q_k = Ak \frac{\Delta T}{L} \quad \text{Eq. C.b.2}$$

Onde L é a espessura da parede.

Dividindo os dois termos pelo fator $A \cdot k$, teremos que a quantidade de calor transmitida por unidade de tempo será igual à diferença de temperatura entre os dois lados da parede, sobre o fator $\frac{L}{A \cdot k}$. A este último fator, dá-se o nome de *Resistência Térmica à*

Condução. Portanto, defini-se *Resistência Térmica à Condução* como segue:

$$R_k = \frac{L}{A \cdot k} \quad \text{Eq. C.b.3}$$

Portanto, a quantidade de calor por unidade de tempo transmitida em regime permanente por uma parede plana pode ser escrita simplesmente como:

$$q_k = \frac{\Delta T}{R_k} \quad \text{Eq. C.b.4}$$

Esta equação é bastante usada para simplificar problemas de Transmissão de Calor.

c. Radiação;⁵

“A radiação é um processo pelo qual o calor é transmitido de um corpo a alta temperatura para um de mais baixa quando tais corpos estão separados no espaço, ainda que exista vácuo entre eles”.⁶ Por esta definição, vê-se que não há necessidade de um contato físico entre os corpos para que a energia (na forma de calor) seja transmitida entre eles. Ao calor transmitido desta forma dá-se o nome de *calor radiante*. Esta forma de energia se assemelha fenomenologicamente à radiação da luz, diferindo-se apenas nos comprimentos de onda. A transmissão do calor radiante ocorre na forma de *quanta* (porções discretamente definidas) de energia. Para ilustrar este fenômeno, tenta-se imaginar como a energia solar é transmitida para os demais astros (a Terra, por exemplo), sendo que há praticamente vácuo entre eles. Nas nossas aplicações práticas, o calor radiante tem vital importância no projeto de, por exemplo, uma caldeira. Além da energia

⁵ Kreith, F. e Bohn, MS., *Princípios de Transferência de Calor*, 1977, Editora Edgard Blücher, São Paulo p.1 a 21.

⁶ Kreith, F. e Bohn, MS., *Princípios de Transferência de Calor*, 1977, Editora Edgard Blücher, São Paulo p. 4.

que é transmitida do combustível queimado para as paredes da caldeira, existe também uma parcela de calor radiante que é transmitido para seus demais componentes. Portanto, existem peças que devem ser adicionadas à caldeira de forma a proteger, por exemplo, os *superheaters* deste calor radiante excessivo.⁷ Todos os corpos que possuem temperatura absoluta diferente de zero emitem calor radiante, porém, dependendo da composição do corpo e de outros requisitos, esta quantidade pode ser maior ou menor. Para os corpos chamados *irradiadores perfeitos*, ou *corpos negros*, esta quantidade de calor emitida por irradiação por unidade de tempo pode ser escrita como segue:

$$q_k = \sigma \cdot A \cdot T^4 \quad \text{Eq. C.c.1}$$

Na equação acima, σ é chamada de *constante de Stefan-Boltzmann*, tendo o valor experimental de $\sigma = 4,88 \cdot 10^{-8} \frac{\text{kcal}}{\text{h} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{K}^4}$, A é a *área total da superfície em metros quadrados*, e T é a *temperatura absoluta do corpo (na área)*, medida em Kelvin.

Por esta formulação, nota-se que a quantidade de calor emitida por um corpo negro independe das condições dos arredores do corpo. Porém, para nossos casos práticos, é interessante conhecer a troca de calor entre dois corpos. Portanto, a energia que um corpo negro emite para um outro corpo negro que o envolve completamente pode ser dada pela formulação abaixo.

$$q_k = \sigma \cdot A_1 \cdot (T_1^4 - T_2^4) \quad \text{Eq. C.c.2}$$

Na fórmula acima, o termo T_2 representa a *temperatura do corpo que está posicionado externamente*, ou seja, que envolve, enquanto o termo T_1 representa a *temperatura do corpo que está posicionado internamente*, ou seja, que é envolvido. Obviamente, em casos práticos, não se utilizam muitos corpos com características de corpos negros. Portanto, para estes casos, adiciona-se um termo multiplicador que modifica

⁷ Li, K. W., e A. P. Priddy, Power Plant System Design. 1985. John Wiley & Sons Inc., New York City, USA. p. 138 a 142.

a equação acima. Este termo leva em conta as emissividades (frações de emissão de irradiação do corpo em relação aos corpos negros) e as geometrias dos corpos reais, sendo usualmente representado pelo símbolo F_{1-2} . Portanto, para casos reais, a Equação C.7 é escrita como segue:

$$q_r = F_{1-2} \cdot \sigma \cdot A_1 (T_1^4 - T_2^4) \quad \text{Eq. C.c.3}$$

Na maior parte das aplicações práticas, o calor transmitido por irradiação está em conjunto com outras formas de transmissão de calor. Portanto, usa-se a definição de *Condutância e Resistência térmica para irradiação*, K_r e R_r , respectivamente.

$$K_r = \frac{F_{1-2} \cdot \sigma \cdot A_1 (T_1^4 - T_2^4)}{(T_1 - \frac{dT_2}{dt})} \quad \text{Eq. C.c.4}$$

As unidades comuns de condutância térmica são $\frac{kcal}{h^\circ C}$. A resistência térmica é simplesmente o inverso da condutância, $R_r = \frac{1}{K_r}$. Portanto, a equação C.8 pode ser

reescrita, como usada na maior parte dos casos práticos, como segue:

$$q_r = \frac{(T_1 - \frac{dT_2}{dt})}{R_r} \quad \text{Eq. C.c.5}$$

Onde T_2 é qualquer temperatura de referência.

Uma outra definição importante na irradiação é o *coeficiente médio de transmissão de calor*, dado por:

$$h_r = \frac{K_r}{A_1} \quad \text{Eq. C.c.6}$$

As unidades do coeficiente médio de transmissão de calor mais comuns são $\frac{kcal}{h \cdot ^\circ C \cdot m^2}$.

d. Convecção;⁸

“A convecção é o processo de transporte de energia pela ação combinada da condução de calor, armazenamento de energia e movimento de mistura. A convecção é importante principalmente como mecanismo de transferência de energia entre uma superfície sólida e um líquido ou gás”.⁹ Em um fluido, onde a mobilidade das partículas é grande, as partículas aquecidas pelo contato direto com a superfície sólida tendem a migrar para locais onde as temperaturas são mais baixas. Esta movimentação de partículas acarreta uma transferência de energia de uma posição para a outra, caracterizando a *transmissão de calor por convecção*. Para exemplificar, toma-se novamente o exemplo do bule com água adotado para a condução. Inicialmente, o calor do bule (superfície sólida) é transmitido para as moléculas de água que estão em contato direto com o mesmo, por condução. Após estas moléculas possuírem uma certa quantidade de energia (calor), elas migrarão para outras posições do fluido onde a temperatura é menor, transmitindo o calor para outras partículas. Isto pode ser visivelmente constatado ao se observar este fenômeno. À medida que o líquido vai se esquentando, este começa a se movimentar cada vez mais rápido, transmitido o calor para as demais partículas. Neste caso, como o líquido se movimenta livremente devido à diferença de temperatura, diz-se que se trata de *convecção livre*. Em casos onde a mistura é causada por algum agente externo, como bombas ou ventiladores, por exemplo, diz-se que se trata de *convecção forçada*.

O calor, por unidade de tempo, transmitido de uma superfície sólida para um fluido, por convecção, pode ser calculado da seguinte forma:

$$q_c = h_c \cdot A \cdot \Delta T \quad \text{Eq. C.d.1}$$

⁸ Kreith, F. e Bohn, MS., *Princípios de Transferência de Calor*, 1977, Editora Edgard Blücher, São Paulo p. 1 a 21.

⁹ Kreith, F. e Bohn, MS., *Princípios de Transferência de Calor*, 1977, Editora Edgard Blücher, São Paulo p. 4.

Na fórmula acima, h_c representa o *coeficiente médio de transmissão de calor por convecção*, o qual depende da geometria da superfície, da velocidade do fluido e das propriedades físicas do fluido, incluindo sua temperatura. Em geral, h_c é medido em $\frac{kcal}{h^\circ C m^2}$. A grandeza A representa a *área de transmissão de Calor*, em m^2 , e ΔT é a *diferença de temperaturas entre a da superfície T_s e a do fluido em um local especificado T_∞* .

A Condutância térmica por convecção é definida como segue:

$$K_c = h_c \cdot A \quad \text{Eq. C.d.2}$$

Reciprocamente, a Resistência térmica por convecção é dada como $R_c = \frac{1}{K_c}$.

Portanto, a fórmula quantidade de calor transmitida por convecção por unidade de tempo pode ser escrita como segue:

$$q_c = \frac{\Delta T}{R_c} \quad \text{Eq. C.d.3}$$

Em geral, nas aplicações reais, os processos de transmissão de calor são dados não por um dos fenômenos acima, mas, como o simples exemplo do bule indica, por uma combinação destes fenômenos. Assim, a quantidade de calor total transmitida em um processo real deve ser escrita da seguinte forma:

$$q = \frac{\Delta T}{(R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n)} \quad \text{Eq. C.d.4}$$

O termo $(1/R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n)$ é usualmente substituído pelo chamado *coeficiente global de transmissão de calor, U* . Este coeficiente é calculado por unidade de área, portanto, para se expressar a quantidade de calor transmitida, deve-se tomar a seguinte formulação:

$$q = U \cdot A \cdot \Delta T \quad \text{Eq. C.d.5}$$

O coeficiente U pode ser baseado em qualquer área escolhida.

Por último, para se determinar o coeficiente combinado de transmissão de calor, h, deve-se tomar a seguinte relação:

$$h = h_c + h_r \qquad \text{Eq. C.d.6}$$

Todas estas formulações serão necessárias para se dar continuidade a este trabalho.

D. DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES GERAIS

Aqui serão deduzidas as equações gerais das três formas de transmissão de calor apresentadas na seção anterior: Condução, Radiação e Convecção. Especificamente, a equação da Transmissão de Calor por Condução será apresentada para coordenadas cartesianas e cilíndricas, a equação da Transmissão de Calor por Radiação será deduzida mais detalhadamente, seguindo as explicações já apresentadas e a equação da Transmissão de Calor por Convecção será deduzida junto à explicação dos modos de obtenção do *coeficiente de transmissão de calor por convecção*, h_c , além de ser discutido o papel das *aletas* nesta última situação. É importante ressaltar que todas as equações serão deduzidas para o regime permanente, tendo em vista que a maioria das situações práticas pode ser aproximada desta forma. Uma abordagem mais detalhada dos problemas de transmissão de calor para regimes não permanentes pode ser encontrada nas referências deste trabalho, mais especificamente nos livros de Kreith e Bohn e de Chapman.

a. Transmissão de Calor por Convecção;

Aqui serão deduzidas analiticamente as fórmulas da Transmissão de Calor por Condução nas coordenadas Cartesianas e Cilíndricas:

a.1 Coordenadas Cartesianas:¹⁰

Considere-se um pequeno elemento material de um corpo sólido, na forma de paralelepípedo, de volume $d_x d_y d_z$, conforme mostra a Figura 1.

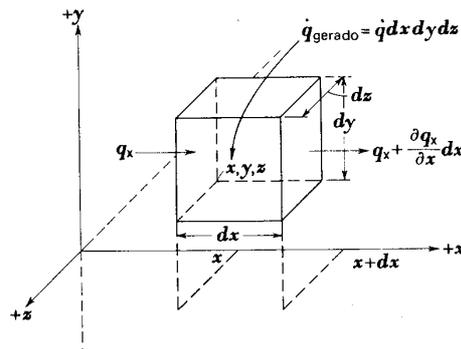


Figura 1: Elemento material de corpo sólido, na forma de paralelepípedo, a partir do qual serão deduzidas as equações da transmissão de calor por condução para coordenadas cartesianas.

O balanço de energia deste elemento pode ser calculado da seguinte forma:

Calor que entra no elemento por unidade de tempo	+	Calor gerado no elemento por unidade de tempo	=	Calor que Sai do elemento por unidade de tempo	+	Variação da energia interna com o tempo	Eq. D.a1.1
--	---	---	---	--	---	--	------------

Algebricamente, esta equação pode ser escrita da seguinte forma:

$$(q_x + q_y + q_z) + \frac{dq}{dt} \cdot (dx \cdot dy \cdot dz) = (q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz}) + c\rho(dx \cdot dy \cdot dz) \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta} \quad \text{Eq. D.a1.2}$$

Na equação acima, $\frac{dq}{dt}$ é o *calor gerado por unidade de tempo e por unidade de volume*, T é a *temperatura do corpo*, θ é o *tempo*, c é o *calor específico* do material e ρ é sua *densidade*.

¹⁰ Chapman, Alan J., *Fundamentals of Heat Transfer*, 1984, Macmillan Publishing Company, New York, p. 30 a 34.

Aplicando a equação C.2 a este problema, o calor transmitido por condução para dentro do corpo na direção x, mostrado na Figura 1, pode ser escrito como segue:

$$q_x = \left(-k \frac{\partial T}{\partial x}\right) \cdot dy \cdot dz \quad \text{Eq. D.a1.3}$$

Aplicando esta mesma equação C.2 ao calor que deixa o corpo, por condução, na direção x, pode-se escrever:

$$q_{x+dx} = \left[\left(-k \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(-k \frac{\partial T}{\partial x}\right) dx \right] d_y d_z \quad \text{Eq. D.a1.4}$$

Fazendo a subtração destes dois termos, temos:

$$(q_x) - (q_{x+dx}) = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) \right] d_x d_y d_z \quad \text{Eq. D.a1.5}$$

Aplicando, de forma análoga, a mesma equação C.b.1 para as direções y e z, e aplicando os resultados assim obtidos na equação D.a1.2, podemos facilmente chegar à seguinte equação:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z}\right) + \frac{dq}{dt} = c\rho \frac{\partial T}{\partial \theta} \quad \text{Eq. D.a1.6}$$

A equação D.a1.6 é a equação geral, obtida de forma analítica, para o problema de transmissão de calor por condução em três dimensões. Observe que esta equação pode ser bastante simplificada se assumido que a condutividade térmica do material, k, é uniforme, e se assumido que o calor específico, c, e a densidade, ρ , forem independentes da temperatura. A equação resultante, nestas condições, é chamada de *equação de Fourier*. Se, além disto, for admitido regime permanente, o termo da direita se anula. Adicionando-se esta condição à equação de Fourier, chega-se na *equação de Poisson*. Se, ainda mais, não for considerada a geração interna de calor, a equação D.a1.6 assume sua forma mais simplificada possível, à qual se dá o nome de equação de Laplace:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad \text{Eq. D.a1.7}$$

Para o problema unidimensional apresentado na secção C.a, sendo a segunda derivada da temperatura em relação à posição igual a zero, pode-se dizer que a primeira derivada da temperatura em relação à posição é constante. Portanto, $\frac{dT}{dx} = const.$, conforme sugerido na equação C.b.1.

a.2 Coordenadas Cilíndricas:

Considere-se o sistema de referência em coordenadas Cilíndricas apresentado na Figura 2.¹¹

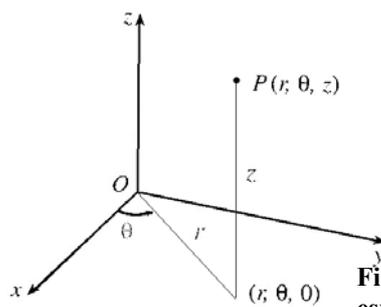


Figura 2: Representação de um ponto no espaço a partir das coordenadas cilíndricas.¹²

Para este sistema de coordenadas, valem as seguintes relações, comparando-se com o sistema de coordenadas cartesianas:

$$x = r \cos \phi \quad \text{Eq. D.a2.1}$$

$$y = r \sin \phi \quad \text{Eq. D.a2.2}$$

$$z = z \quad \text{Eq. D.a2.3}$$

Portanto, sendo a temperatura $T = T(x,y,z)$ para as coordenadas cartesianas, valerá a expressão $T = T(r\cos\Phi, r\sin\Phi, z)$ para as coordenadas cilíndricas mostradas na Figura 2.

¹¹ Na Figura 2, o sistema de coordenadas depende dos valores aplicados às grandezas r , θ e z . Como já estamos utilizando o símbolo θ para tempo, substituiremos o sistema de coordenadas para r , Φ , z , apenas para manter a consistência do trabalho.

¹² Figura extraída de Stewart, página 827.

Sendo assim, pode-se dizer que os termos independentes das coordenadas x e y apresentados na Eq. D.a1.6 são mantidos da mesma maneira para coordenadas cilíndricas e cartesianas. Já os dois primeiros termos desta mesma expressão, $k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ e $k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$, devem ser trabalhados. Como a constante k é independente do sistema de coordenadas, ela será desconsiderada aqui.

Inicialmente, será derivada a temperatura em relação a r, no sistema de coordenadas cilíndricas. Aplicando-se a regra da cadeia a este problema, tem-se:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right) + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right) + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right) \quad \text{Eq. D.a2.4}$$

Sendo $\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \phi$, $\frac{\partial y}{\partial r} = \sin \phi$ e $\frac{\partial z}{\partial r} = 0$, tem-se o que segue:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) \cos \phi + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) \sin \phi \quad \text{Eq. D.a2.5}$$

Aplicando a segunda derivada de T em função de r, tem-se:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) \cos \phi + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) \sin \phi \right] \quad \text{Eq. D.a2.6}$$

Portanto,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \cos^2 \phi + 2 \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} (\cos \phi \sin \phi) + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \sin^2 \phi \quad \text{Eq. D.a2.7}$$

Esta equação será guardada, por enquanto, da maneira em que está apresentada.

Agora, realizando o mesmo procedimento para a derivada de T em relação a Φ , tem-se:

$$\frac{\partial T}{\partial \phi} = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right) + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right) + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right) \quad \text{Eq. D.a2.8}$$

Sendo $\frac{\partial x}{\partial \phi} = -r \sin \phi$, $\frac{\partial y}{\partial \phi} = r \cos \phi$, e $\frac{\partial z}{\partial \phi} = 0$, tem-se o que segue:

$$\frac{\partial T}{\partial \phi} = -\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)(r \sin \phi) + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)(r \cos \phi) \quad \text{Eq. D.a2.9}$$

Agora, fazendo-se a segunda derivada de T em relação a ϕ , tem-se¹³:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} = & \left[\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)(r^2 \sin^2 \phi) - \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}\right)(r^2 \sin \phi \cos \phi) - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)(r \cos \phi) \right] + \\ & \left[\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)(r^2 \cos^2 \phi) - \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}\right)(r^2 \sin \phi \cos \phi) - \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)(r \sin \phi) \right] \end{aligned} \quad \text{Eq. D.a2.10}$$

Somando-se os dois termos da direita da Eq. D.a2.10, tem-se (ver Eq. D.a2.5):

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)(r \cos \phi) + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)(r \sin \phi) = r \frac{\partial T}{\partial r} \quad \text{Eq. D.a2.11}$$

Com a Eq. D.a2.11 e fazendo as devidas contas, pode-se reescrever a Eq. D.a2.10 como segue:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)(r^2 \sin^2 \phi) - 2 \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}\right)(r^2 \sin \phi \cos \phi) + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)(r^2 \cos^2 \phi) - r \frac{\partial T}{\partial r} \quad \text{Eq. D.a2.12}$$

Dividindo-se a Eq. D.a2.12 por r^2 , e somando-a à Eq. D.a2.7, tem-se o que segue:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) - \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \quad \text{Eq. D.a2.13}$$

Então, pode-se reescrever a Eq. D.a2.13 como segue:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \quad \text{Eq. D.a2.14}$$

Aplicando-se a Eq. D.a2.14 na Eq. D.a1.6, pode-se chegar na equação geral de transmissão de calor por condução em coordenadas cilíndricas, como segue:

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + k \left(\frac{1}{r}\right) \frac{\partial T}{\partial r} + k \left(\frac{1}{r^2}\right) \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{dq}{dt} = c\rho \frac{\partial T}{\partial \theta} \quad \text{Eq. D.a2.15}$$

Esta equação coincide com aquela encontrada na literatura.

¹³ Observe que a passagem da Eq. D.a2.9 para a Eq. D.a2.10 abrange uma combinação de regra da cadeia com regra do produto, pois os dois fatores dos termos x e y, quando representados em coordenadas cilíndricas, são dependentes de Φ .

b. Transmissão de Calor por Radiação;¹⁴

Como citado anteriormente, a natureza da maneira com a qual o calor radiante se transmite de um corpo para outro ainda não é totalmente conhecida. Existem hipóteses que dizem que o calor radiante é transmitido da mesma forma das ondas eletromagnéticas, porém existem outras hipóteses que dizem que o calor radiante é transmitido por fótons. Nenhuma das duas hipóteses está totalmente certa, porém ambas têm seus lados corretos. Da mesma forma que podem ser definidos os comprimentos de onda da energia emitida por radiação térmica, entre 0,1μm e 100μm, também pode-se dizer que esta forma de energia é quantizada. Os diferentes comprimentos de onda da radiação térmica dependem da maneira como a energia foi emitida. Esta faixa de comprimentos citada acima abrange desde a luz ultravioleta (nociva à pele), passando pela luz visível até a região do infravermelho. De qualquer maneira, sabe-se que a transmissão de energia por radiação existe, e que ela varia com a temperatura do corpo.

Cada corpo, dependendo de sua composição química e de outros parâmetros, possui um certo *poder de radiação*. Como já citado, os *corpos negros*, ou *irradiadores perfeitos*, são aqueles corpos capazes de emitir a máxima quantidade de radiação para uma dada temperatura. Este conceito é teórico, e estabelece um limite máximo para a radiação de calor, conforme Segunda Lei da Termodinâmica. A quantidade de energia de radiação por unidade de tempo e por unidade de área transmitida por um corpo é chamada de *poder emissivo espectral* (ou *monocromático*). Este termo sugere que a quantidade de energia transmitida por um corpo na forma de radiação térmica varia com o comprimento de onda. De fato, a relação que fornece o poder emissivo espectral de um corpo negro é a seguinte:

$$E_{b\lambda}(T) = \frac{A}{\lambda^5} (e^{\frac{B}{\lambda T}} - 1) \quad \text{Eq. D.b.1}$$

¹⁴ Kreith, F. e Bohn, MS. *Princípios de Transferência de Calor*, 1977, Editora Edgard Blücher, São Paulo. p.174 a 180.

Na equação acima, $E_{b\lambda}$ representa o *poder emissivo monocromático de um corpo negro*, como função da temperatura, em kcal/hm²μm, A é uma *constante* que vale $3,22 \times 10^8$ kcalμm⁴/hm², B é uma *constante* que vale 1,4388 μmK, λ é o *comprimento de onda emitido pelo corpo*, em μm, e T é a *temperatura absoluta do corpo*, em Kelvin.

Como apresentado na secção C.c.1, o calor total por unidade de tempo emitido por radiação por um corpo pode ser calculado da seguinte forma:

$$E_b(T) = \frac{q_r}{A} = \sigma T^4 \quad \text{Eq. D.b.2}$$

O produto, σT^4 , desta equação pode ser calculado a partir da integração da equação D.b.1 em $d\lambda$ de 0 a ∞ .

Para as aplicações na engenharia, é comum precisar calcular a quantidade de calor radiante emitida por um corpo em uma determinada faixa de comprimentos de onda. Para tanto, basta integrar a equação D.b.1 em $d\lambda$, definida entre o intervalo de comprimentos de onda com o qual se deseja trabalhar.

Existe um valor de comprimento de onda para a qual o valor de $E_{b\lambda}(T)$ é máximo, em uma dada temperatura. A relação entre este comprimento de onda, batizado de λ_{\max} , e a temperatura do corpo pode ser dada pela equação empírica que segue:

$$\lambda_{\max} = \frac{2898}{T} \quad \text{Eq. D.b.3}$$

Nesta equação, λ aparece em μm e T em K.

Para facilitar a resolução dos problemas que envolvem transmissão de calor por radiação, geralmente baseia-se nos seguintes gráficos:

- 1) $E_{b\lambda_{\max}} \times \lambda, T$;
- 2) $E_{b\lambda_{\max}} \times T$;
- 3) $E_{b\lambda}/E_{b\lambda_{\max}} \times \lambda T$;
- 4) $E_{0-\lambda}/E_{0-\infty} \times \lambda T$.

As figuras 3, 4, 5 e 6, abaixo, apresentam estes gráficos, extraídos do livro de Kreith e Bohn, páginas 176 a 179.

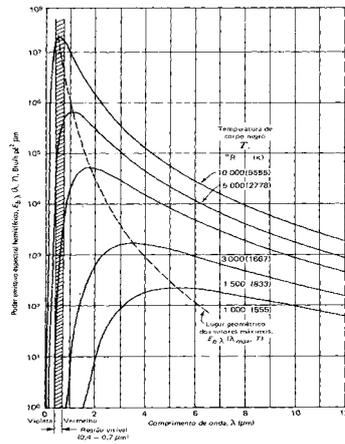


Figura 3: Gráfico de $E_{b\lambda_{max}} \times \lambda, T$.

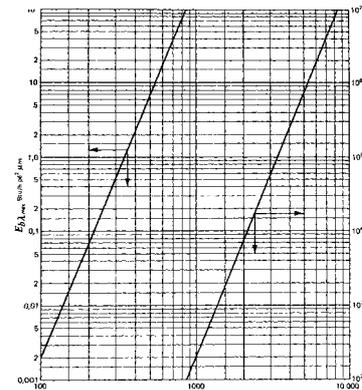


Figura 4: Gráfico $E_{b\lambda_{max}} \times T$.

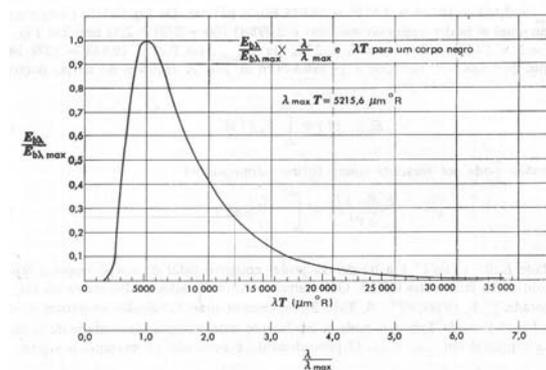


Figura 5: Gráfico $E_{b\lambda} / E_{b\lambda_{max}} \times \lambda T$.

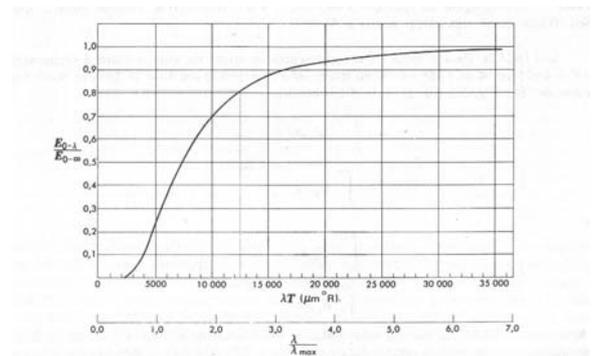


Figura 6: Gráfico $E_{0-\lambda} / E_{0-\infty} \times \lambda T$.

As figuras apresentadas acima, devido à má resolução, apresentam apenas uma análise qualitativa do problema. Para uma análise quantitativa, sugere-se a procura destes gráficos na referência supra citada.

c. Transmissão de Calor por Convecção;

A Transmissão de Calor por Convecção não é puramente um modo de transmissão de calor, mas sim uma combinação de transmissão de calor com movimentos mecânicos de fluidos. Assim, a fim de se entender mais a fundo os conceitos abordados nesta seção, é importante conhecer bem alguns aspectos abordados em mecânica dos fluidos. Em particular, os conceitos de escoamento em regime laminar e turbulento, assim como os conceitos de camada limite e separação da mesma, têm vital importância no entendimento de Transmissão de Calor por Convecção. Os aspectos aqui abordados foram obtidos do livro de Fox e McDonald, p. 12 a 28, e 326 a 347.

A equação C.d.1 apresentada anteriormente é freqüentemente usada pelos engenheiros para o cálculo da Transmissão de Calor por Convecção, porém ela nada mais é do que a definição do *coeficiente de transmissão de calor por convecção*, h_c . A fim de se entender melhor a transmissão de calor por convecção, serão aqui abordados os métodos de avaliação do coeficiente de transmissão de calor por convecção e será explicado o papel das *aletas* neste método de transmissão de calor.

c.1 Métodos de Avaliação do Coeficiente de Transmissão de Calor por Convecção;

Há quatro métodos disponíveis para avaliar os coeficientes de transmissão de calor por convecção. São eles:

- i. Análise dimensional combinada com experiências;
- ii. Soluções matemáticas exatas da equação da camada limite;
- iii. Análise aproximada da camada limite por métodos integrais;
- iv. Analogia entre transferência de calor, de massa e de quantidade de movimento.

c.1.i Análise dimensional combinada com experiências:¹⁵

Primeiramente, define-se o número de Nusselt, pois este é um importante adimensional a ser considerado na análise de transmissão de calor por convecção:

$$Nu = \frac{h_c \cdot L}{k} \quad \text{Eq. D.c.1.i.1}$$

Este adimensional sugere uma relação entre o calor que é transmitido por condução da superfície sólida para superfície líquida em contato direto e o calor que é transmitido por convecção para as demais posições do líquido.

A análise dimensional consiste em definir quais são as grandezas físicas que estão diretamente ligadas com o fenômeno que descreve a transmissão de calor por convecção em uma aplicação específica, e em determinar uma relação entre números adimensionais que descreva estas grandezas físicas e a relação entre elas, através do *teorema de Buckingham* ou *teorema π* .

¹⁵ Kreith, F. e Bohn, MS. *Princípios de Transferência de Calor*, 1977, Editora Edgard Blücher, São Paulo. p.249 a 262.

Uma vez definidas as grandezas que regem o fenômeno a ser estudado, faz-se uma análise dimensional sobre elas, a fim de se obter uma função geral que possua apenas números adimensionais. Esta função será do tipo:

$$F(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_n) = 0 \quad \text{Eq. D.c.1.i.2}$$

Onde $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_n$ são adimensionais.

Então, faz-se uma análise experimental sobre o fenômeno, a fim de se obter a relação entre o adimensional que se deseja determinar (neste caso, Nu) e os outros adimensionais. Por exemplo, aplicando-se o teorema de Buckingham para o escoamento transversal de um fluido sobre um corpo aquecido, encontra-se a seguinte relação:

$$Nu = f(\text{Re}_D, \text{Pr}) \quad \text{Eq. D.c.1.i.3}$$

Neste caso, calculou-se que o número de Nusselt é função do número de Reynolds e do número de Prandtl. Assim, aplicam-se experimentos a fim de se obter os gráficos que regem estas funções, para se determinar qual é o coeficiente de transmissão de calor por convecção (lembrando-se que o número de Nusselt oferece esta grandeza). Frequentemente, usam-se modelos para se obter estes gráficos, e se aplica a *lei da semelhança*. A aplicação do teorema π e da lei da semelhança é frequente em problemas que envolvem mecânica dos fluidos.

c.1.ii Soluções matemáticas exatas da equação da camada limite:¹⁶

Nesta seção, inicia-se uma análise puramente hidrodinâmica do problema de transmissão de calor por Convecção, tomando-se como exemplo o problema do escoamento fluido sobre uma placa plana. Após algumas definições de vital importância, migra-se para um balanço energético do problema. Então, faz-se uma comparação entre os resultados hidrodinâmicos e térmicos, apresentando suas semelhanças e diferenças. Por

¹⁶ Kreith, F. e Bohn, MS. *Princípios de Transferência de Calor*, 1977, Editora Edgard Blücher, São Paulo. p.262 a 274.

último, demonstra-se o método de obtenção do coeficiente de transmissão de calor por condução para este mesmo problema, o qual pode ser extrapolado para diversas situações práticas.

a) Equação da Continuidade:¹⁷

Segue abaixo a *Equação da Continuidade*:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \text{Eq. D.c.1.ii.1}$$

Esta equação também é conhecida como equação da conservação da massa. Nela, sugere-se que o gradiente de velocidade multiplicado pela massa específica do fluido se iguala à variação da massa específica com relação ao tempo. Para fluidos em escoamento permanente (i.e. $\rho = \rho(x,y,z)$), o termo do lado direito desta formulação se anula. Para fluidos incompressíveis (i.e. $\rho(x,y,z) = \text{constante}$), pode-se simplificar esta equação ainda mais, restando apenas que o gradiente da velocidade do fluido é nulo. Se o escoamento, assumindo todas as hipóteses acima, é bidimensional, esta formulação pode ser rescrita como segue:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{Eq. D.c.1.ii.2}$$

Esta situação é bem simplificada, porém sua análise pode ser extrapolada para inúmeras situações reais. Sendo assim, para se obter a solução matemática da camada limite, consideraremos fluidos escoando nas condições citadas acima.

¹⁷ Fox, Robert W. e Alan T. McDonald, Introdução à Mecânica dos Fluidos, 1998, LTC, Rio de Janeiro, Brasil. p. 151 a 177.

b) Equação da Força de Cisalhamento: ¹⁸

A definição de um fluido Newtoniano segue abaixo:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad \text{Eq. D.c.1.ii.3}$$

Esta relação sugere que a força de cisalhamento causada pelo escoamento de um fluido é diretamente proporcional à derivada da sua velocidade em relação à posição perpendicular ao escoamento. A constante de proporcionalidade, μ , é uma propriedade do fluido, chamada viscosidade dinâmica, de unidades comumente usadas $\frac{\text{kgf} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}$.

c) Equação da Quantidade de Movimento aplicada a uma Placa Plana: ¹⁹

Aplicando-se as relações acima sobre uma placa plana e usando-se um pouco de álgebra, pode-se facilmente chegar na seguinte relação:

$$\rho(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{Eq. D.c.1.ii.4}$$

Onde p é a pressão exercida pelo fluido.

Resolvendo-se esta equação simultaneamente à equação da continuidade, pode-se obter a *espessura da camada limite* e a *força de atrito na parede da placa plana*. Para tal, defini-se a *função de corrente*.

¹⁸ Fox, Robert W. e Alan T. McDonald, *Introdução à Mecânica dos Fluidos*, 1998, LTC, Rio de Janeiro, Brasil. p. 19 e 20.

¹⁹ Kreith, F. e Bohn, MS. *Princípios de Transferência de Calor*, 1977, Editora Edgard Blücher, São Paulo. p.265 a 269.

d) Função de Corrente:

A função de corrente, $\psi(x,y)$ é definida de forma que sejam válidas as duas relações abaixo:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{Eq. D.c.1.ii.5}$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{Eq. D.c.1.ii.6}$$

Observe que esta equação satisfaz automaticamente a equação da continuidade.

Para dar seqüência ao estudo, introduz-se uma nova variável, η , como segue:

$$\eta = y \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} \quad \text{Eq. D.c.1.ii.7}$$

Então, pode-se dizer o seguinte:

$$\psi = f(\eta) \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} \quad \text{Eq. D.c.1.ii.8}$$

Onde $f(\eta)$ designa uma função de corrente adimensional.

Obtendo-se as componentes de velocidade em função de $f(\eta)$, e exprimindo $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial^2 u/\partial y^2$, podemos facilmente chegar à equação diferencial ordinária, de terceira ordem e não-linear, como segue:

$$f(\eta) \frac{d^2[f(\eta)]}{d\eta^2} + 2 \frac{d^3[f(\eta)]}{d\eta^3} = 0 \quad \text{Eq. D.c.1.ii.9}$$

Sujeita a três condições de contorno em $\eta = 0$ e $\eta = \infty$. A solução numérica para esta equação é apresentada na figura 7.

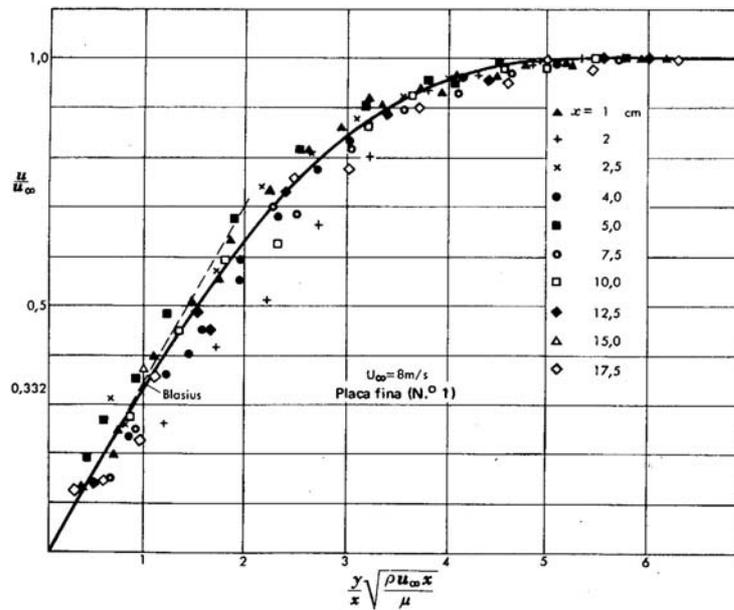


Figura 7: Gráfico da solução numérica obtida para a Eq. D.c.1.ii.9.²⁰

e) Obtenção da Espessura da Camada Limite e da Velocidade de Escoamento:

Através da Figura 7, pode-se observar que a velocidade do fluido atinge 99% de seu valor máximo para $(\frac{y}{x})\sqrt{\frac{\rho u_{\infty} x}{\mu}} = 5,0$. Portanto, pode-se aproximar o valor da espessura da camada limite como segue:

$$\delta = \frac{5x}{\sqrt{Re_x}} \quad \text{Eq. D.c.1.ii.10}$$

Onde x é a distância entre o bordo de ataque da placa plana e a posição onde se deseja determinar a espessura da camada, e $Re_x = \frac{\rho v x}{\mu}$ é o número de Reynolds aplicado à velocidade do fluido longe da placa, u_{∞} .

Para se determinar a *força de cisalhamento do fluido sobre a placa plana*, deve-se primeiramente definir o coeficiente de arrasto, como segue:

²⁰ Figura extraída de Kreith, 1977, página 267.

$$C_{fx} = \frac{\tau}{\frac{\rho u_{\infty}^2}{2g}} = \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}} \quad \text{Eq. D.c.1.ii.11}$$

A figura 8 apresenta a variação deste coeficiente de arrasto como função do número de Reynolds.

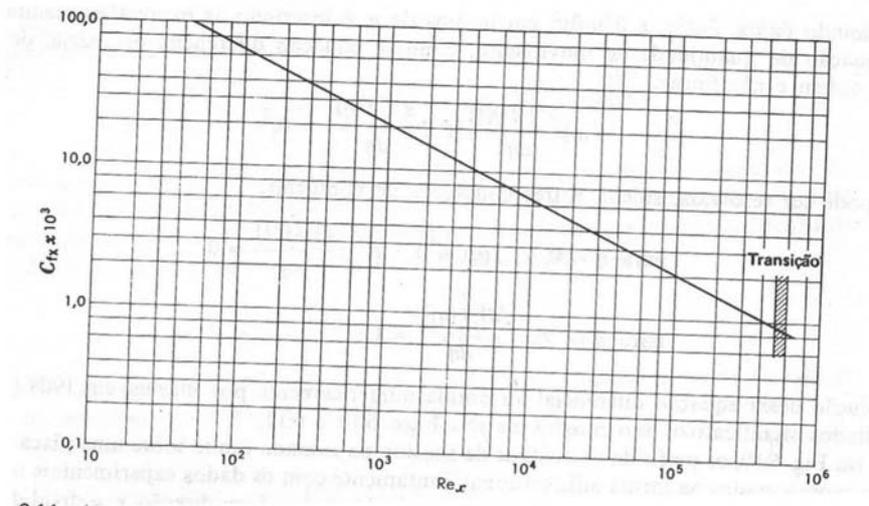


Figura 8: Variação do coeficiente de arrasto em função do número de Reynolds.²¹

²¹ Figura extraída de **Kreith**, 1977, página 268.

f) Equação da Energia:

Analisando o escoamento sob as hipóteses simplificadoras apresentadas anteriormente (fluido incompressível, escoamento em regime permanente e escoamento bidimensional), podemos assumir um volume de controle dentro da camada limite, por onde se pode fazer o balanço energético.

Semanticamente, podemos expressar a equação de energia para o sistema como segue:

Fluxo de entrada de Entalpia e Energia Cinética	+ Calor, por unidade de tempo, que entra por condução	+ Trabalho, por un. de tempo, efetuado por cisalhamento de atrito sobre o fluido no VC	=	Fluxo de saída de entalpia e energia cinética	+ Calor, por um. de tempo, que sai por condução	+ Trabalho, por unidade de tempo, efetuado por cisalhamento de atrito pelo fluido do VC	Eq. D.c.1.ii.12
---	---	--	---	---	---	---	-----------------

Simbolicamente, esta equação pode ser escrita como segue;

$$\rho \cdot u \cdot \left(h + \frac{(u^2 + v^2)}{2gJ} \right) dy + \rho \cdot v \cdot \left(h + \frac{(u^2 + v^2)}{2gJ} \right) dx - k \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{1}{J} \left[u \frac{\mu}{g} \frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\mu}{g} \frac{\partial u}{\partial y} dx \right) dy \right] =$$

$$\rho u \left(h + \frac{(u^2 + v^2)}{2gJ} \right) dy + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho u \left(h + \frac{(u^2 + v^2)}{2gJ} \right) dy \right] dx + \rho v \left(h + \frac{(u^2 + v^2)}{2gJ} \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho v \left(h + \frac{(u^2 + v^2)}{2gJ} \right) dx \right] dy -$$

$$- k \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} \left[-k \frac{\partial T}{\partial y} dx \right] dy + \frac{1}{J} \frac{u\mu}{g} \frac{\partial u}{\partial y} dx$$

Eq. D.c.1.ii.13

Observe que o termo $-k \frac{\partial T}{\partial x}$ foi desprezado, pois seu valor é insignificante quando

comparado com $-k \frac{\partial T}{\partial y}$.

O termo $h + \frac{(u^2 + v^2)}{2gJ}$ pode ser substituído por $c_p T_o$ para fluidos que têm calor específico constante, sendo T_o a temperatura de estagnação (temperatura do fluido quando este é desacelerado isentropicamente até a velocidade nula).

Resolvendo-se a equação Eq. D.c.1.ii.13, assumindo a simplificação sugerida, e desprezando os termos de ordem superior, chegamos na simplificação abaixo:

$$\rho \cdot c_p u \frac{\partial T_o}{\partial x} + \rho \cdot c_p v \frac{\partial T_o}{\partial y} = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left[u \left(\frac{\mu}{g} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \quad \text{Eq. D.c.1.ii.14}$$

O último termo à direita desta expressão representa o trabalho líquido por unidade de tempo efetuado pelas forças de cisalhamento sobre o fluido do VC. Para altas velocidades, a potência de atrito aumenta significativamente a energia interna do fluido, porém, para velocidades subsônicas, seu valor é desprezível quando comparado com as outras grandezas desta formulação. Com esta simplificação, a equação Eq. D.c.1.ii.14 pode ser reescrita como segue:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad \text{Eq. D.c.1.ii.15}$$

$$\text{Onde } a = \frac{k}{\rho \cdot c_p} \quad a = k/\rho c_p.$$

Observe que a equação apresentada acima é semelhante à equação Eq. C.1.ii.4.

Fixando-se a temperatura da superfície e assumindo que a variável T da equação Eq.

C.1.ii.15 seja $\frac{(T - T_s)}{(T_\infty - T_s)}$ temos as seguintes condições de contorno:

$$\text{Para } y = 0, \quad \frac{(T - T_s)}{(T_\infty - T_s)} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{u}{u_\infty} = 0;$$

$$\text{Para } y \rightarrow \infty, \quad \frac{(T - T_s)}{(T_\infty - T_s)} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{u}{u_\infty} = 1.$$

A Figura 9 apresenta um gráfico da razão de temperatura em função de η , para os diversos valores do número de Prandtl, $Pr = \frac{\mu \cdot c_p}{k}$. Pelos perfis de temperatura, pode-se observar que a camada limite térmica é maior que a camada limite hidrodinâmica para números de Prandtl inferiores a 1. Para $Pr > 1$, a situação se inverte.

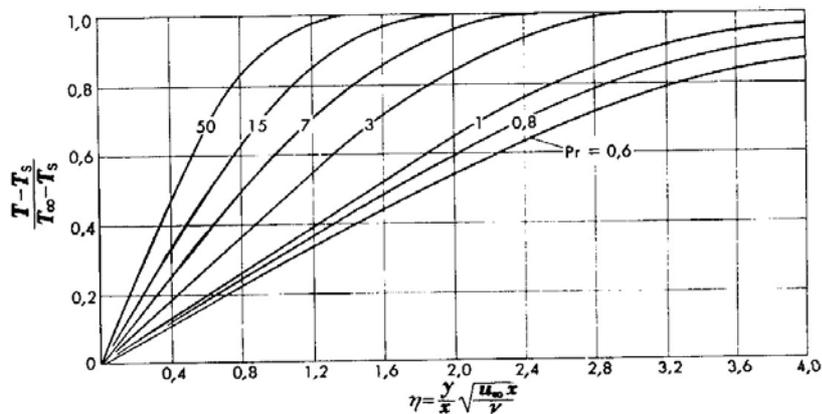


Figura 9: Gráfico da razão de temperatura em função de η , para os diversos valores do número de Prandtl, $Pr = \mu c_p / k$.²²

A relação entre a espessura da camada-limite térmica e a hidrodinâmica segue abaixo:²³

$$\delta_{th} = \frac{\delta}{\sqrt[3]{Pr}} \quad \text{Eq. D.c.1.ii.16}$$

g) Avaliação do Coeficiente de Transmissão de Calor por Convecção:

O gradiente de temperatura adimensional na superfície de contato entre o corpo sólido e o fluido (i.e. $y = 0$) é dada pela seguinte relação (ver Eq. C.1.ii.11):

²² Figura extraída de **Kreith**, 1977, página 272.

²³ Pohlhausen, E., *Der Wärmeaustausch zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten mit kleiner Reibung und Kleiner Wärmeleitung*, 1921, ZAMM, Vol. 1. p. 115.

$$\frac{\partial \frac{(T - T_s)}{(T_\infty - T_s)}}{\partial \frac{y}{x} \sqrt{\text{Re}} \sqrt[3]{\text{Pr}}} = 0,332 \quad \text{Eq. D.c.1.ii.17}$$

Portanto, para qualquer x , ainda sobre a superfície de contato, vale o seguinte:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0,332 \cdot \frac{\sqrt{\text{Re}} \cdot \sqrt[3]{\text{Pr}}}{x} \cdot (T_\infty - T_s) \quad \text{Eq. D.c.1.ii.18}$$

Já que, no contato da superfície sólida com a superfície líquida, o fluido é transmitido por condução, podemos substituir a Eq. C.b.1 na Eq. D.c.1.ii.18, temos os seguinte:

$$\frac{q}{A} = -k \frac{\partial T}{\partial y} = 0,332 \frac{\sqrt{\text{Re}} \cdot \sqrt[3]{\text{Pr}}}{x} \cdot (T_\infty - T_s) \quad \text{Eq. D.c.1.ii.19}$$

Integrando-se a Eq. D.c.1.ii.19 para uma placa de largura b e comprimento L , tem-se:

$$q = 0,664 \cdot k \cdot \sqrt{\text{Re}_L} \cdot \sqrt[3]{\text{Pr}} \cdot b (T_\infty - T_s) \quad \text{Eq. D.c.1.ii.20}$$

$$\text{Onde } \text{Re}_L = \frac{u_\infty L}{\nu}.$$

O coeficiente de Transmissão de Calor por Convecção é:

$$h_{cx} = \frac{q}{A} (T_\infty - T_s) = 0,332 \frac{k}{x} \sqrt{\text{Re}_L} \cdot \sqrt[3]{\text{Pr}} \quad \text{Eq. D.c.1.ii.21}$$

E assim extrai-se o valor do coeficiente de Convecção. Na prática, as propriedades físicas usadas na formulação acima variam com a Temperatura. Entretanto, nesta análise, as propriedades foram tomadas como contantes. Os resultados da Eq. D.c.1.ii.21 são satisfatórios se considerado o valor da temperatura média entre a temperatura da parede sólida e do fluido ao longe.

c.1.iii Análise aproximada da camada limite por métodos integrais:²⁴

A fim de se evitar toda a manipulação matemática apresentada na secção c.1.ii, pode-se fazer uma aproximação da camada limite por métodos integrais. A experiência mostra que os resultados assim obtidos apresentam valores satisfatórios quando comparados com os resultados obtidos analiticamente.

A princípio, considera-se o volume de controle apresentado na Figura 10.

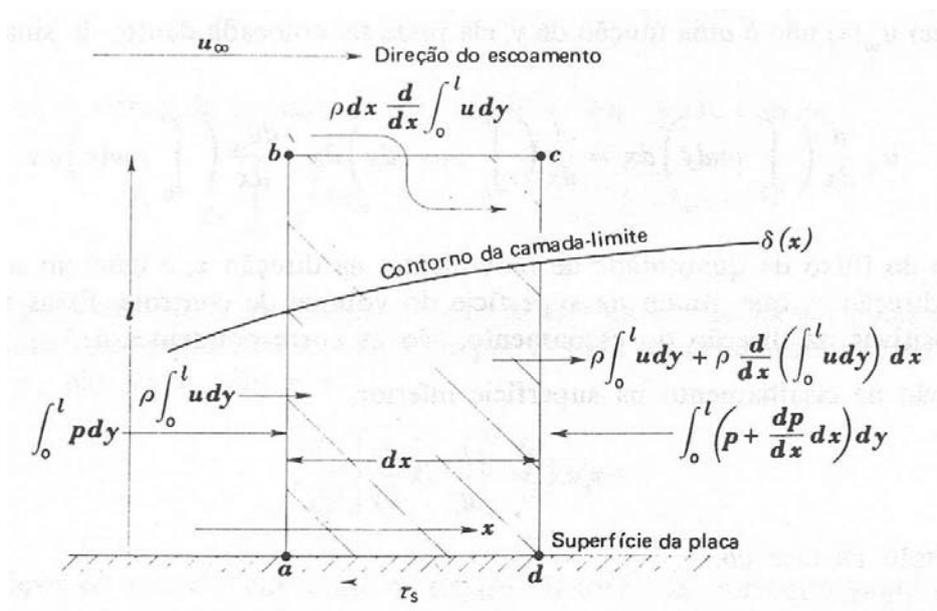


Figura 10: Volume de controle para análise aproximada da quantidade de movimento de uma camada limite.²⁵

Observa-se que uma das faces do VC é a própria parede do corpo sólido, enquanto a parede paralela a esta é tomada ao longe. As duas paredes perpendiculares ao corpo sólido são separadas pela distância dx.

²⁴ Kreith, F. e Bohn, MS. *Princípios de Transferência de Calor*, 1977, Editora Edgard Blücher, São Paulo. p.275 a 282.

²⁵ Figura extraída de **Kreith**, 1977, página 275.

A equação da quantidade de movimento das partículas fluidas que atravessam as paredes deste VC, em sua forma integral, é conhecida como *Equação da Quantidade de Movimento de Von Karman*, e está representada abaixo:

$$\tau_s + \frac{d}{dx} \int_0^L p dy = \frac{d}{dx} \int_0^L \frac{\rho}{g} \cdot u \cdot (u_\infty - u) dy - \frac{du_\infty}{dx} \int_0^L \frac{\rho}{g} \cdot u dy \quad \text{Eq. D.c.1.iii.1}$$

Como a camada limite é muito fina, pode-se admitir que a pressão seja constante ao longo da direção x (fato que pode ser provado pela aplicação da equação de Bernoulli). Portanto, vale a seguinte relação:

$$\int_0^L \frac{dp}{dx} dy = \int_0^L \frac{dp_\infty}{dx} dy = -\frac{\rho}{g} \frac{du_\infty}{dx} \int_0^L u_\infty dy \quad \text{Eq. D.c.1.iii.2}$$

Substituindo a Eq. D.c.1.iii.2 na Eq. D.c.1.iii.1, temos o seguinte:

$$\tau_s = \frac{d}{dx} \int_0^L \frac{\rho}{g} \cdot u \cdot (u_\infty - u) dy + \frac{\rho}{g} \frac{du_\infty}{dx} \int_0^L u_\infty dy \quad \text{Eq. D.c.1.iii.3}$$

Para $y > \delta$, o limite superior das integrais ao lado direito da Eq. D.c.1.iii.3 é igual a δ , pois ambas as integrais são nulas nestas posições. Portanto, pode-se assumir o que segue:

$$\frac{du_\infty}{dx} = 0 \quad \text{Eq. D.c.1.iii.4}$$

Para a condição de pressão constante, podemos, então, reescrever a Eq. D.c.1.iii.1 como segue:

$$\frac{g\tau_s}{\rho} = \frac{d}{dx} \int u \cdot (u_\infty - u) dy \quad \text{Eq. D.c.1.iii.5}$$

Com esta equação, pode-se determinar a espessura da camada limite e o atrito entre o escoamento e a parede sólida. Para tanto, é necessário que se admita uma distribuição de velocidade dentro da camada limite. Quanto mais próxima esta distribuição for da

realidade, mais precisos serão os resultados. Assumindo-se uma distribuição parabólica cúbica, pode-se chegar a seguinte solução:

$$\delta = \frac{4,64x}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad \text{Eq. D.c.1.iii.6}$$

Para se determinar o calor que é transmitido por convecção, adiciona-se, como na secção c.1.ii, o calor que é transmitido por condução entre a placa sólida e a superfície fluida. A Figura 11 mostra um balanço energético dentro do VC.

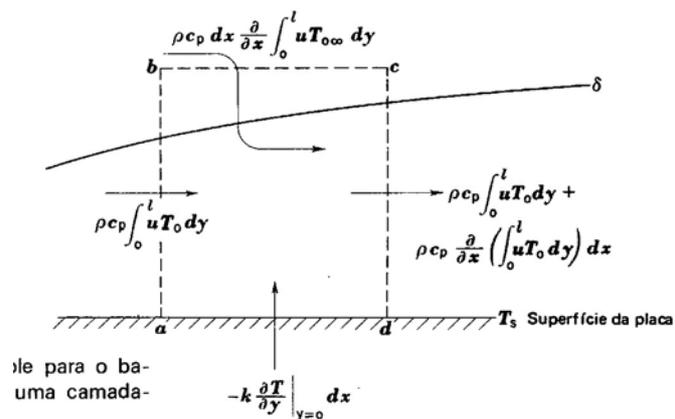


Figura 11: Volume de controle para balanço aproximado de energia dentro de uma camada limite.²⁶

O fluxo de calor que entra no VC por condução deve ser igual ao fluxo que sai por convecção. Assim, podemos tomar a seguinte relação.

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^L (T_{0-\infty} - T_0) \cdot u dy = \frac{k}{\rho \cdot c_p} \frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{Eq. D.c.1.iii.7}$$

Para $y > \delta_{th}$, o valor da integral é nulo. Portanto, o limite superior da integral, L, pode ser substituído por δ_{th} . Para escoamentos com velocidade lenta, a energia cinética passa a ser desprezível. Portanto, as temperaturas da Eq. D.c.1.iii.7 podem ser tomadas como as temperatura estáticas (i.e. $T_0 = T$, e $T_{0-\infty} = T_\infty$).

²⁶ Figura extraída de Kreith, 1977, página 279.

Para a determinação do coeficiente de transmissão de calor por convecção, deve-se selecionar uma forma apropriada para distribuição de temperatura, satisfazendo as condições de contorno (i.e. para $y=0$ a temperatura deve se igualar à temperatura da placa sólida, e para $y= \delta_{th}$ a temperatura deve se igualar à temperatura do fluido ao longe. Toma-se, então, uma parábola cúbica, conforme a equação abaixo:

$$T - T_s = C_1 y + C_2 y^3 \quad \text{Eq. D.c.1.iii.8}$$

As condições de contorno para $y = 0$ são satisfeitas automaticamente, para qualquer C_1 e C_2 (i.e. $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$ e $T - T_s = 0$). Para $y = \delta_{th}$ temos:

$$T_\infty - T_s = C_1 \delta_{th} + C_2 \delta_{th}^3 \quad \frac{\partial(T - T_s)}{\partial y} = C_1 + 3C_2 \delta_{th}^2$$

Calculando-se os coeficientes chega-se, então, na seguinte expressão:

$$\frac{T - T_s}{T_\infty - T_s} = \frac{3y}{2\delta_{th}} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_{th}}\right)^3 \quad \text{Eq. D.c.1.iii.9}$$

Efetando-se a integral da Eq. D.c.1.iii.7, aplicando-se os cálculos devidos e definindo-se $\xi = \frac{\delta_{th}}{\delta}$, chega-se na seguinte solução:

$$\int_0^{\delta_{th}} (T_\infty - T) \cdot u dy = (T_\infty - T_s) \cdot u_\infty \delta \left(\frac{3}{20} \xi^2 - \frac{3}{280} \xi^4 \right) \quad \text{Eq. D.c.1.iii.10}$$

Para fluidos que têm o número de Prandtl maior ou igual a 1, tem-se ξ com valor igual ou inferior a 1, portanto o termo entre parêntesis da expressão acima pode ser ignorado. Substituindo esta aproximação na equação Eq. D.c.1.iii.7, tem-se o seguinte:

$$\frac{1}{10} u_\infty \xi^3 \delta \frac{\partial \delta}{\partial x} = \frac{k}{\rho \cdot c_p} \quad \text{Eq. D.c.1.iii.11}$$

Usando-se a equação Eq. D.c.1.iii.6, tem-se o que segue:

$$\delta_{th} = 0,9\delta \text{Pr}^{-\frac{1}{3}} \quad \text{Eq. D.c.1.iii.12}$$

Pelas Eq. C.b.1 e Eq. D.c.1.iii.9, e usando-se as Eq. D.c.1.iii.6 e Eq. D.c.1.iii.12, podemos chegar no seguinte resultado:

$$Nu_x = \frac{q}{A}(T_s - T_\infty) \frac{x}{k} = 0,33\sqrt{\text{Re}_x} \cdot \sqrt[3]{\text{Pr}} \quad \text{Eq. D.c.1.iii.12}$$

Sendo $Nu = \frac{h_c \cdot L}{k}$, calcula-se o coeficiente de transmissão de calor por convecção

h_c . Os resultados assim obtidos concordam com os resultados da análise exata.

c.1.iv Analogia entre transferência de calor, de massa e de quantidade de movimento.²⁷

Nesta secção estudaremos a transferência de calor por convecção em escoamentos em regime turbulento. Devido à existência de turbilhões e ao complexo movimento das partículas líquidas em escoamentos turbulentos (que se sobrepõe e se misturam com facilidade), tanto o coeficiente de transmissão de calor quanto o coeficiente de atrito são maiores nesta situação, quando comparada com o regime laminar. Ainda devido à complexidade do escoamento em regime turbulento, é de comum prática se usar as propriedades e velocidades médias em um ponto qualquer do escoamento, a fim de se fazer um estudo mais detalhado. No nosso caso, usaremos a velocidade em termos de um *valor médio*, contante com o tempo, e de uma *componente flutuante*, a qual varia com o tempo. Por simplicidade, consideraremos o escoamento bi-dimensional, onde a velocidade média de escoamento é paralela à direção x. Tem-se, então:

²⁷ Kreith, F. e Bohn, MS. *Princípios de Transferência de Calor*, 1977, Editora Edgard Blücher, São Paulo. p.282 a 287.

$$u = \bar{u} + \frac{du}{dt} \quad \text{Eq. D.c.1.iv.1}$$

$$v = \frac{dv}{dt} \quad \text{Eq. D.c.1.iv.2}$$

Onde u é a velocidade na direção x , v é a velocidade na direção y e \bar{u} é a velocidade média do escoamento em x . A Figura 12 mostra, graficamente o significado da Eq. D.c.1.iv.1. Estes resultados parecem bastante intuitivos.

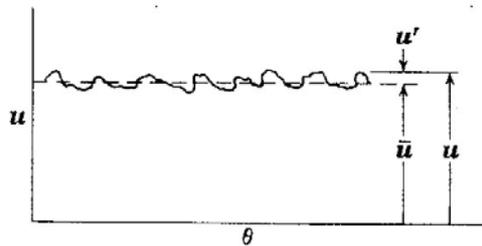


Figura 12: Variação da velocidade instantânea com o tempo. Observa-se que os valores aqui apresentados são bastante intuitivos.²⁸

A Figura 12 mostra nitidamente que a derivada da velocidade média com relação ao tempo é nula. Analogamente, pode-se dizer que a derivada da velocidade média na direção y , com relação ao tempo, também é nula, assim como a quantidade de movimento média nesta mesma direção.

As componentes flutuantes da velocidade transportam continuamente massa e, conseqüentemente, quantidade de movimento, através de um plano normal à direção y . O fluxo instantâneo da quantidade de movimento, segundo x , na direção y , em qualquer ponto, é:

$$-\frac{d\rho v}{dt} \left(\bar{u} + \frac{du}{dt} \right)$$

A transferência média, em relação ao tempo, da quantidade de movimento segundo x origina uma tensão de cisalhamento turbulenta aparente, definida como segue:

²⁸ Figura extraída de **Kreith**, 1977, página 283.

$$g\tau_t = -\frac{1}{\theta^*} \cdot \int_0^{\theta^*} \frac{d\rho v}{dt} \left(\bar{u} + \frac{du}{dt} \right) d\theta \quad \text{Eq. D.c.1.iv.3}$$

Resolvendo esta integral, assumindo que a média de $(\rho v)'$ é nula em relação ao tempo, e que u_m é uma constante, temos, para ρ constante:

$$g\tau_t = \rho \left(\frac{d\bar{u}}{dt} \frac{d\bar{v}}{dt} \right) \quad \text{Eq. D.c.1.iv.4}$$

Não se deve confundir a tensão de cisalhamento aparente (apresentada acima), que é nada mais que um conceito introduzido para se considerar efeitos de quantidade de movimento pelas flutuações turbulentas, com a tensão de cisalhamento laminar, que é um valor real de tensão. O conceito de tensão aparente permite exprimir a tensão total de cisalhamento no escoamento turbulento como segue:

$$\tau = \frac{\text{ForçaViscosa}}{\text{UnidadedeÁrea}} + \frac{1}{g} \text{Fluxo}Q \quad \text{Eq. D.c.1.iv.5}$$

Onde Q é a quantidade de movimento.

Segundo postulado por Prandtl, as flutuações macroscópicas de fluido no escoamento turbulento são, em média, semelhantes ao movimento de moléculas num gás. Ou seja, elas percorrem, em média, uma distância perpendicular à sua velocidade média antes de atingir o repouso em outro plano y. Essa distância é conhecida como comprimento de mistura de Prandtl, e é comumente denotada por l. Esta postulado relaciona a quantidade de movimento turbulento ao gradiente de velocidade média com relação ao tempo. Além disso, Prandtl sugeriu que as partículas retinham suas propriedades durante o movimento cruzado, e que a flutuação turbulenta resulta das diferenças nas propriedades médias. Assim, se uma partícula de movimenta da uma camada y para uma camada y + l, tem-se:

$$\frac{du}{dt} = l \frac{d\bar{u}}{dy} \quad \text{Eq. D.c.1.iv.6}$$

Portanto, pode-se reescrever a Eq. D.c.1.iv.4 numa fórmula análoga à da tensão de cisalhamento laminar, com segue abaixo:

$$g\tau_t = \rho \frac{d\bar{u}}{dt} \frac{d\bar{v}}{dt} = \rho \varepsilon_M \frac{d\bar{u}}{dy} \quad \text{Eq. D.c.1.iv.7}$$

Onde ε_M é chamado *coeficiente de troca turbulenta da quantidade de movimento*. Esta grandeza é análoga à viscosidade cinemática, porém, enquanto esta última é uma propriedade física, a primeira depende da dinâmica do escoamento. Combinando a Eq. D.c.1.iv.6 com a Eq. D.c.1.iv.7, temos que $\varepsilon_M = -(v'l)_m$. Substituindo a Eq. D.c.1.ii.3 e a Eq. D.c.1.iv.7 na Eq. D.c.1.iv.5, temos o que segue:

$$\tau = \frac{\rho}{g} (\nu + \varepsilon_M) \frac{d\bar{u}}{dy} \quad \text{Eq. D.c.1.iv.8}$$

No escoamento turbulento, o termo viscoso, ν , pode ser desprezado.

A transferência de calor por unidade de tempo, no escoamento turbulento, pode ser ilustrada de maneira análoga. Consideremos a distribuição bi-dimensional segundo a Figura 13.

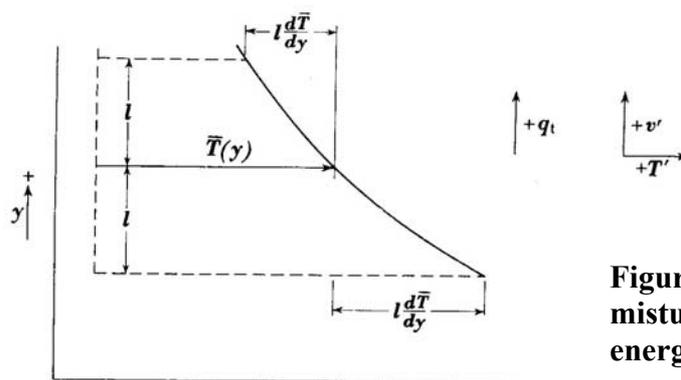


Figura 13: Comprimento de mistura para transferência de energia.²⁹

O fluxo instantâneo de energia, em qualquer ponto na direção y , é dado como segue:

²⁹ Figura extraída de **Kreith**, 1977, página 286.

$$\frac{dE}{dT} = \rho \cdot \bar{v} \cdot c_p \cdot T \quad \text{Eq. D.c.1.iv.9}$$

Onde $T = \bar{T} + \frac{dT}{dt}$. A transferência média de calor por unidade de tempo devido às

flutuações, chamada *transferência turbulenta de calor*, é dada por:

$$q_t = A \cdot \rho \cdot c_p \cdot \frac{d\bar{T}}{dt} \frac{d\bar{v}}{dt} \quad \text{Eq. D.c.1.iv.10}$$

Aplicando-se o raciocínio análogo àquele aplicado para se obter a Eq. D.c.1.iv.6,

tem-se:

$$\frac{q_t}{A} = \rho \cdot c_p \cdot \frac{d\bar{T}}{dt} \frac{d\bar{v}}{dt} = -\rho \cdot c_p \cdot \frac{d\bar{v}}{dt} \cdot \bar{l} \cdot \frac{d\bar{T}}{dy} \quad \text{Eq. D.c.1.iv.11}$$

Definindo-se o *coeficiente de troca turbulenta de temperatura* como $\varepsilon_H = v_m' l_m$, tem-

se:

$$\frac{q_t}{A} = -\rho \cdot c_p \cdot \varepsilon_H \cdot \frac{d\bar{T}}{dy} \quad \text{Eq. D.c.1.iv.12}$$

Usando a definição de *difusidade térmica molecular*, $a = \frac{k}{c_p \cdot \rho}$, podemos

reescrever a Eq. D.c.1.iv.12 como segue:

$$\frac{q_t}{A} = -\rho \cdot c_p \cdot (a + \varepsilon_H) \cdot \frac{d\bar{T}}{dy} \quad \text{Eq. D.c.1.iv.13}$$

Esta fórmula sugere que a condução total de calor por unidade de área é dada pela condução molecular de calor por unidade de área somada à transferência turbulenta de calor por unidade de área.

Juntando-se a Eq. D.c.1.iv.12 à definição de ε_H , pode-se obter o valor do coeficiente de transmissão de calor por convecção.

c.2 Papel das Aletas na Transmissão de Calor por Convecção;³⁰

As aletas podem ser entendidas como superfícies estendidas de um corpo sólido. Seu papel é, fundamentalmente, aumentar a transmissão de calor entre a superfície sólida e líquidos que fluem ao seu redor. Este aumento da transmissão de calor é conveniente quando se deseja resfriar a superfície sólida, por meio de um líquido refrigerante, e quando se deseja aquecer ou resfriar um líquido, por meio do contato com a superfície sólida.

Como visto anteriormente, a condutância térmica de uma superfície sólida em contato direto com um líquido, pode ser aproximada por $h_c A$, onde o primeiro termo é o coeficiente de transmissão térmica por convecção, e A é a área de contato. Com o acréscimo das aletas, esta grandeza pode ser aumentada consideravelmente. Por exemplo, o calor transmitido por aletas finitas de forma cilíndrica é dado pela equação que segue:³¹

$$q_{aleta} = \sqrt{h_c P k A} \cdot (T_s - T_\infty) \quad \text{Eq. D.c.2.1}$$

Onde h_c é o coeficiente de transmissão de calor por convecção, P é o perímetro da aleta, k é o coeficiente de transmissão de calor por condução e A é a área da secção transversal. Os índices das duas temperaturas se referem à superfície (s) e ao longe (∞).

Para ilustrar o acréscimo de calor transmitido em função da adição de aletas, considere um problema onde existe um cilindro metálico a 300° C em um ambiente a 20° C, e o coeficiente equivalente de transmissão de calor entre o cilindro e meio é $k = 120$ kcal/hm²°C. O calor dissipado por unidade de tempo e área da superfície é calculado por $120 \times (300 - 20) = 33600$ kcal/hm². Se adicionarmos 6400 aletas a este cilindro, com forma de pino circular, tendo cada um 5mm de diâmetro e 30mm de altura, podemos recalcular a transmissão de calor entre os dois corpos como sendo $(Ph_c Ak)(T_s - T_\infty) \cosh(mL) =$

³⁰ Kreith, F. e Bohn, MS. *Princípios de Transferência de Calor*, 1977, Editora Edgard Blücher, São Paulo. p.42 a 62.

³¹ A Eq. D.c.2.1 é usada quando o comprimento da aleta é muito grande em comparação com a área da secção transversal. Se não for este o caso, e se a extremidade da barra for isolada, deve-se multiplicar o fator $\tanh(mL)$ à Eq. D.c.2.1, onde $m^2 = h_c P / k A$, e L é o comprimento da aleta.

$0,081 \times (300 - 20) \times 0,602 = 13,65 \text{ kcal/h}$ para cada aleta. Para 6400 aletas, o calor dissipado seria de 87360 kcal/h. O calor dissipado da superfície restante da parede seria aproximadamente igual à área não-ocupada por aletas vezes o produto do coeficiente de transmissão de calor e o potencial de temperatura. Assim, o calor transmitido total para a parede com aletas é $q/A = 87360 + 33600 \times (1 - 6400(1,96 \times 10^{-5})) = 116745 \text{ kcal/hm}^2$. Portanto, nota-se que o uso das aletas aumentou o calor dissipado em aproximadamente 250%.

O aumento da transmissão de calor devido às aletas ocorre principalmente pelo aumento de área no corpo sólido. Porém, no projeto de aletas, deve-se considerar que o aumento de área devido ao seu acréscimo é seguido de uma resistência à condução térmica na porção da superfície original onde as aletas foram posicionadas. Na prática, observa-se que as aletas têm maior eficiência quanto menor for o fator $h_c P/kA$. Além disto, uma aleta só é eficiente quanto este mesmo fator for menor que a unidade. Tal consideração depende tanto da geometria da aleta quanto dos coeficientes de transmissão de calor, depende, assim, do meio de operação do equipamento em estudo.

A efetividade de transmissão de calor de uma aleta é um importante parâmetro a ser considerado no caso de seu projeto. Teoricamente, tal grandeza é dada pela equação abaixo:

$$\eta_a = \frac{\text{calor real transmitido pela aleta}}{\text{calor que seria transmitido se toda a aleta eivesse à temperatura base.}} \quad \% \quad \text{Eq. D.c.2.2}$$

Para a situação proposta no problema acima, a eficiência das aletas seria dada por:

$$\eta_a = \frac{\tanh\left(\sqrt{\frac{4L^2 h_c}{kD}}\right)}{\frac{4L^2 h_c}{kD}} \quad \text{Eq. D.c.2.3}$$

BIBLIOGRAFIA

- Chapman, Alan J., *Fundamentals of Heat Transfer*, 1984, Macmillan Publishing Company, New York.
- Ferreira, Aurélio Buarque de Holanda, *Novo Dicionário Aurélio*, Editora Nova Fronteira, Rio de Janeiro, Brasil.
- Fox, Robert W. e Alan T. McDonald, *Introdução à Mecânica dos Fluidos*, 1998, LTC, Rio de Janeiro, Brasil.
- Harrington, R. L., *Marine Engineering*, 1992, The Society of Naval Architecture and Marine engineering, Jersey City.
- Kreith, F. e Bohn, MS. *Princípios de Transferência de Calor*, 2003, Editora Edgard Blücher, São Paulo.
- Kreith, F. e Bohn, MS. *Princípios de Transferência de Calor*, 1977, Editora Edgard Blücher, São Paulo.
- Li, K. W., e A. P. Priddy, *Power Plant System Design*, 1985. John Wiley & Sons Inc., New York City, USA.
- Moran, Michael J. e Howard N. Shapiro, *Fundamentals of Engineering Thermodynamics*, 2000, John Wiley & Sons Inc., New York City, USA.
- Pohlhausen, E., *Der Wärmeaustausch zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten mit kleiner Reibung und Kleiner Wärmeleitung*, 1921, ZAMM, Vol. 1.
- Stewart, James, *Cálculo*, Vol. II, 1999, Ed. Pioneira, 4ª. Edição, São Paulo, Brasil.