

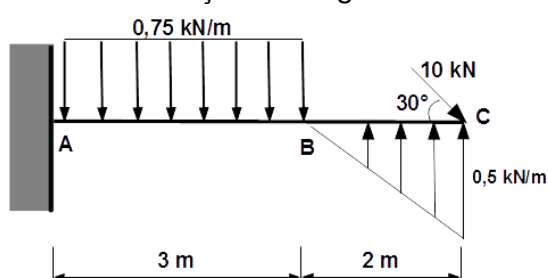
São Paulo, março de 2018.

“Exercícios complementares de apoio aos alunos que cursam as disciplinas de “Introdução a Mecânica das Estruturas” para os cursos da Engenharia Civil ou de “Resistência dos Materiais” para demais cursos de engenharia. Dizem respeito aos conteúdos de cálculo de esforços em estruturas isostáticas.

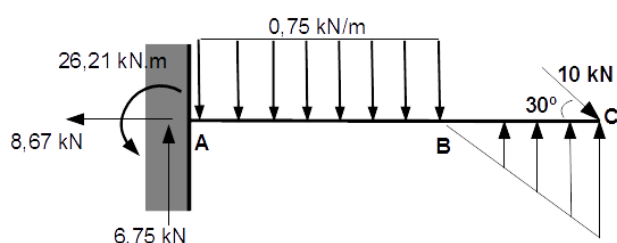
Foram desenvolvidos pelo prof. Valério S. Almeida, quando não indicado o autor no início do exercício. Abrange estruturas do tipo: vigas, pórticos, pórticos-triarticulados, treliças planas, pórtico espacial, pórticos associados e linha de influencia.

CÁLCULO DE REAÇÕES

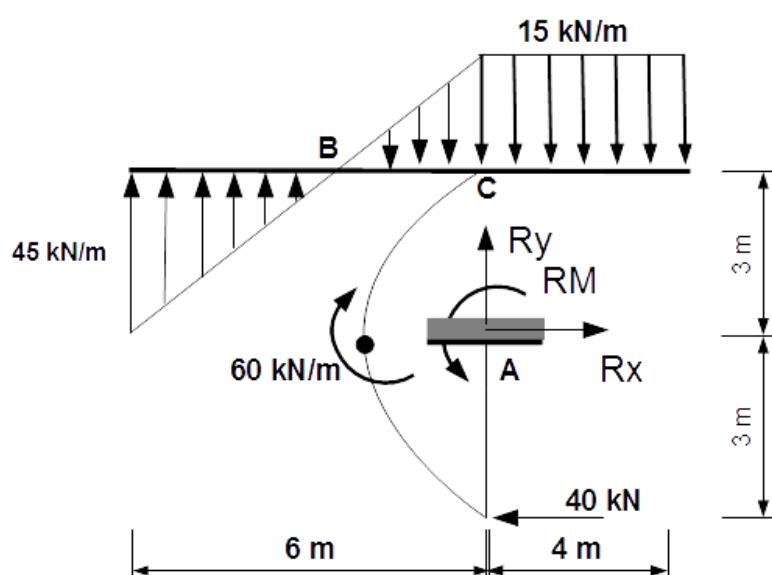
R1) Calcular as reações a seguir.



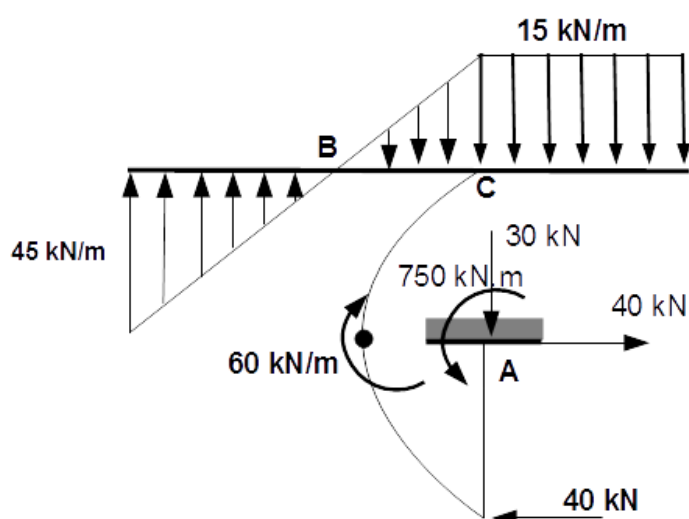
Resposta: $R_x = -8,67 \text{ kN}$
 $R_y = 6,75 \text{ kN}$
 $R_M = 26,21 \text{ kN.m}$



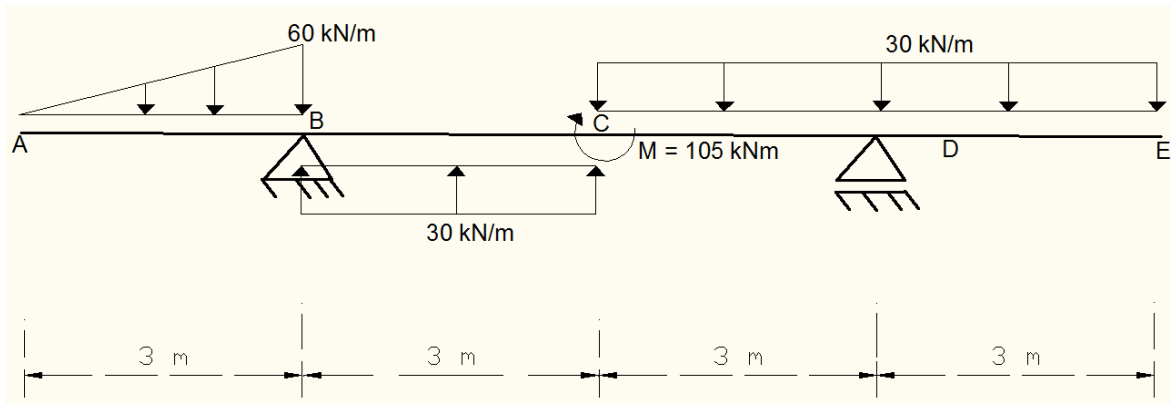
R2) Calcular as reações a seguir.



Resposta: $R_x = 40 \text{ kN}$
 $R_y = -30 \text{ kN}$
 $R_M = 750 \text{ kN.m}$

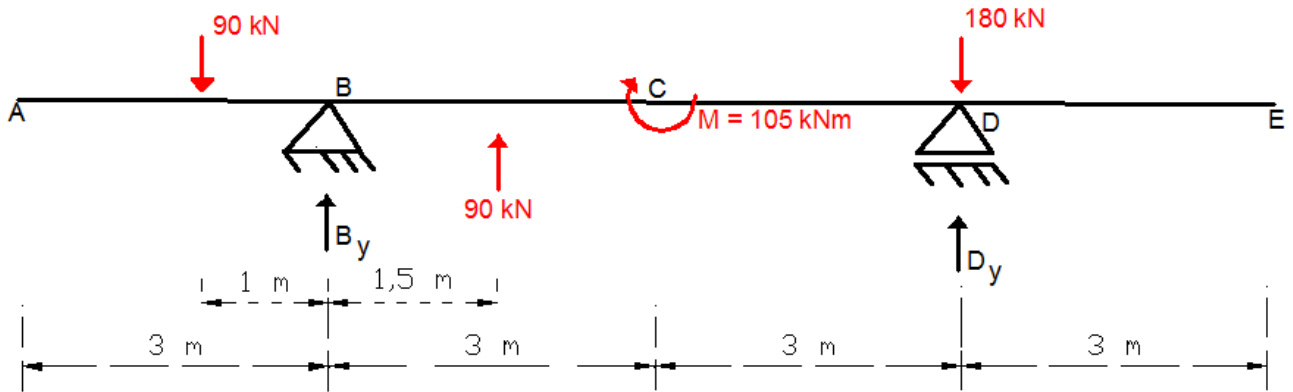


R3) Determinar as reações da viga a seguir.



Resposta:

$$B_x = 0; \quad B_y = 20 \text{ kN } (\uparrow); \quad D_y = 160 \text{ kN } (\uparrow)$$

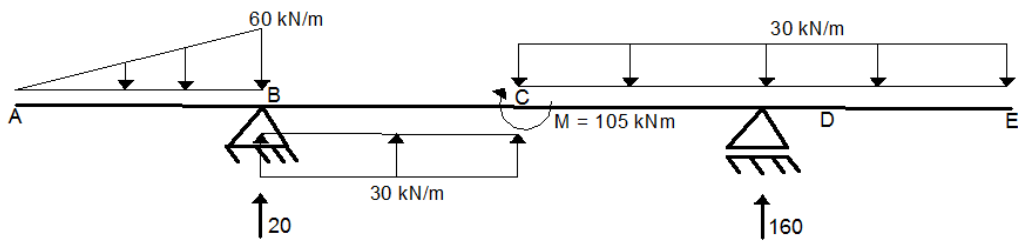


$$\sum F_x = 0 \rightarrow B_x = 0$$

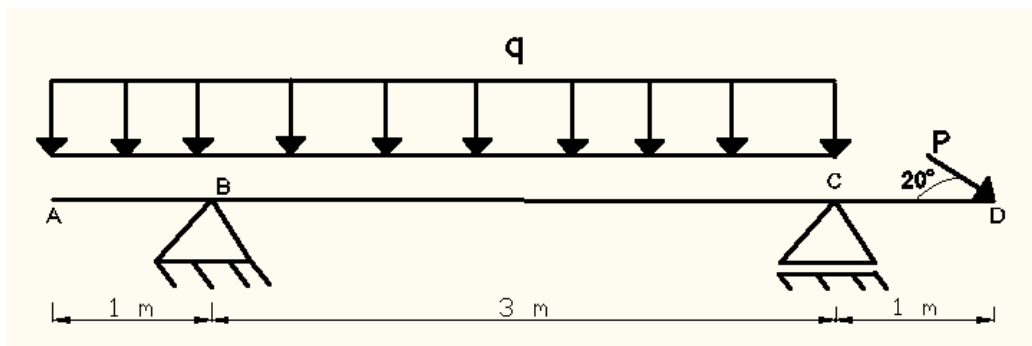
$$\sum F_y = 0 \rightarrow B_y + D_y = 180$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow 6.D_y + 90.1 + 90.1,5 = 105 + 180.6 \rightarrow D_y = 160 \text{ kN } (\uparrow)$$

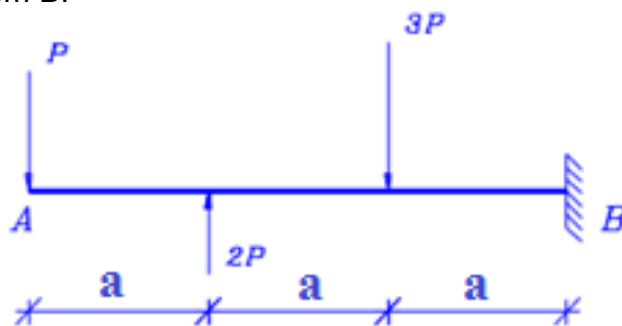
$$\therefore B_y = 20 \text{ kN } (\uparrow)$$



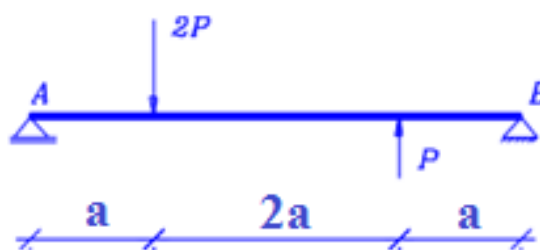
R4) Determinar as reações da viga a seguir. Dados $q = 18 \text{ kN/m}$ e $P = 15 \text{ kN}$.



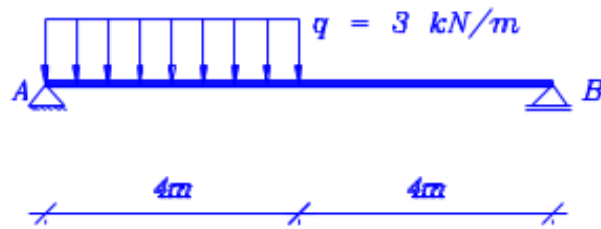
R5) Determinar as reações em B.



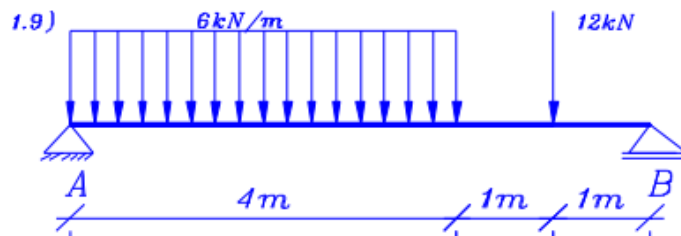
R6) Determinar as reações.



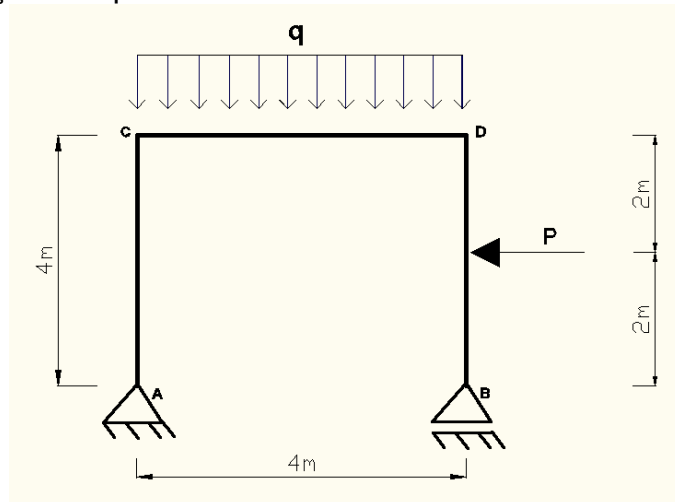
R7) Determinar as reações.



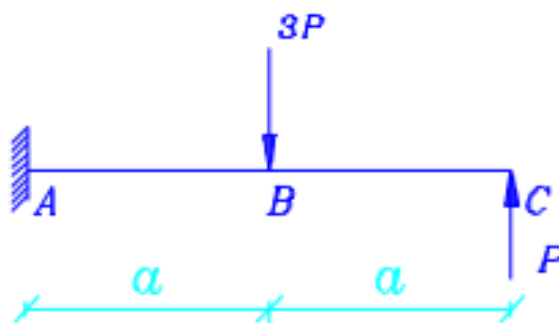
R8) Determinar as reações.



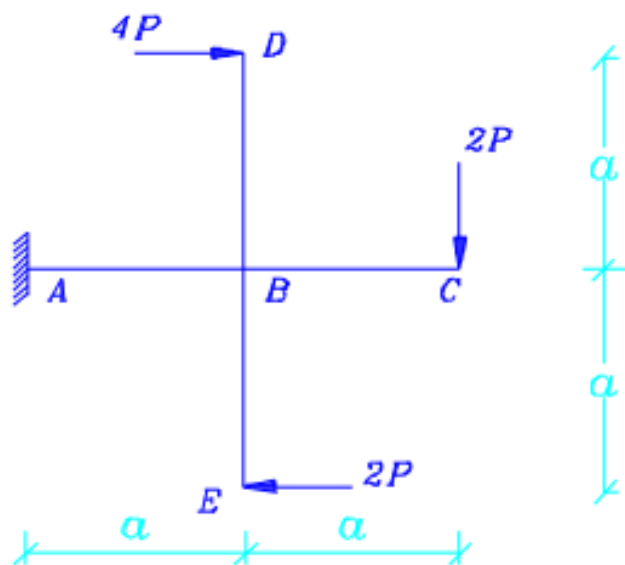
R9) Determinar as reações do pórtico.



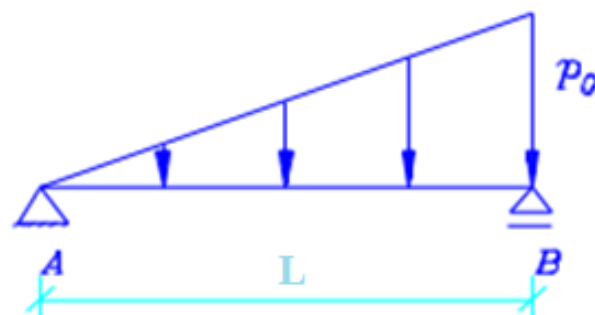
R10) Determinar as reações.



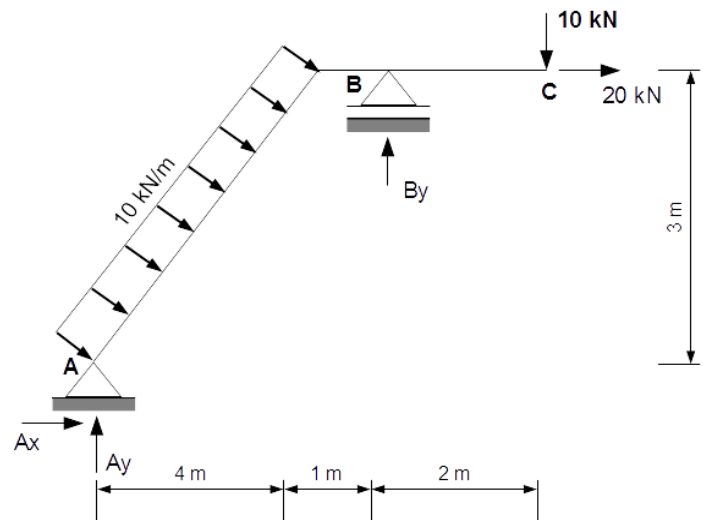
R11) Determinar as reações.



R12) Determinar as reações.

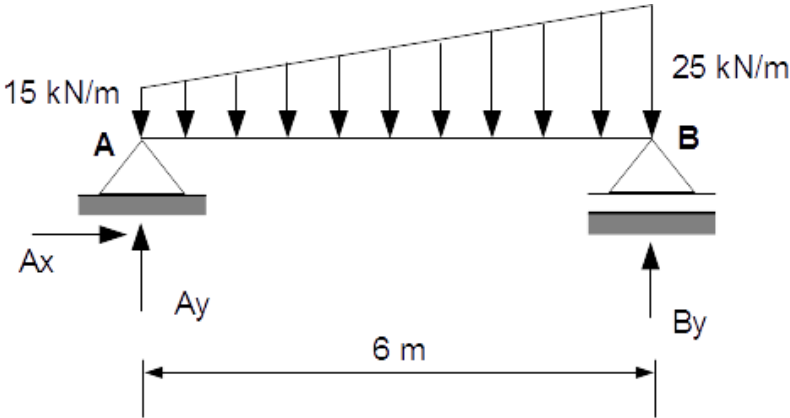


R13) Calcular as reações a seguir.



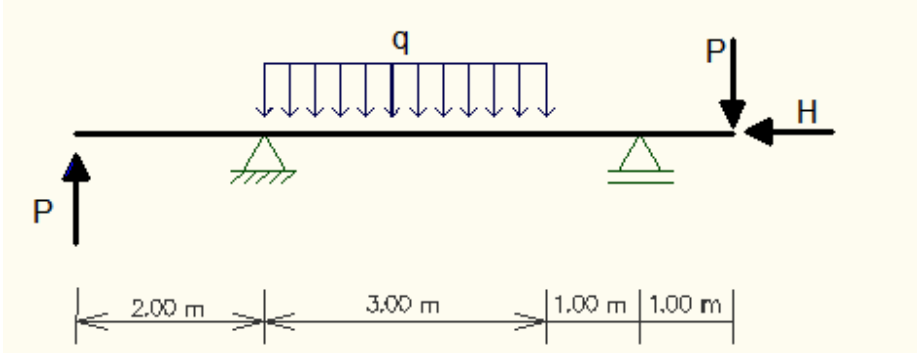
Resposta: $A_x = -50 \text{ kN}$
 $A_y = -1 \text{ kN}$
 $B_y = 51 \text{ kN}$

R14) Calcular as reações a seguir.

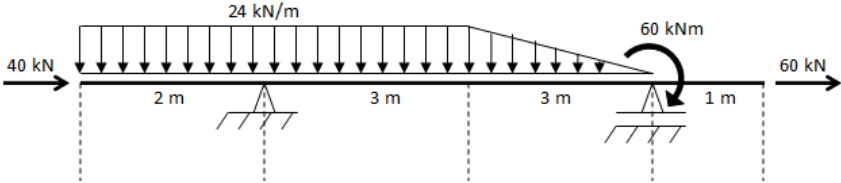


Resposta: $A_x = 0 \text{ kN}$
 $A_y = 55 \text{ kN}$
 $B_y = 65 \text{ kN}$

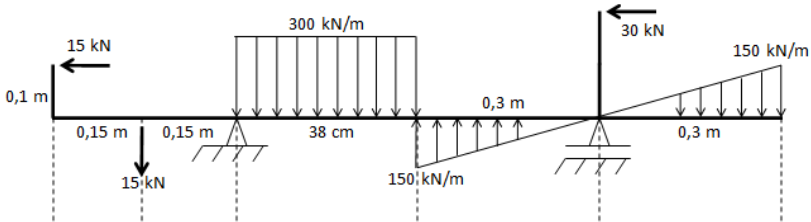
R15) Calcular as reações a seguir.



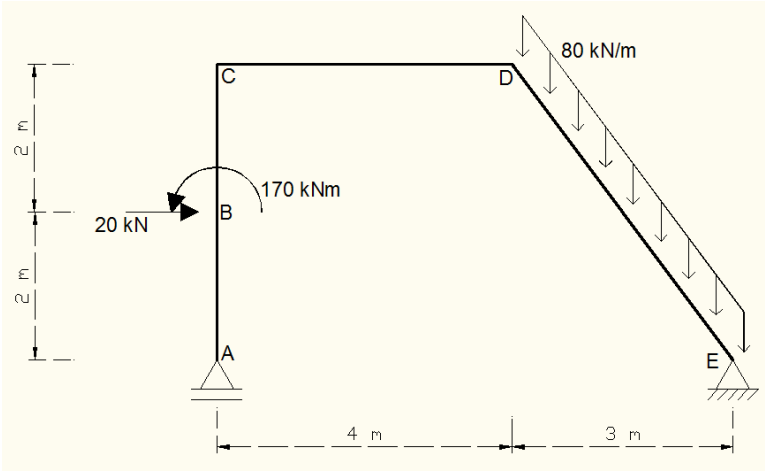
R16) Calcular as reações a seguir.



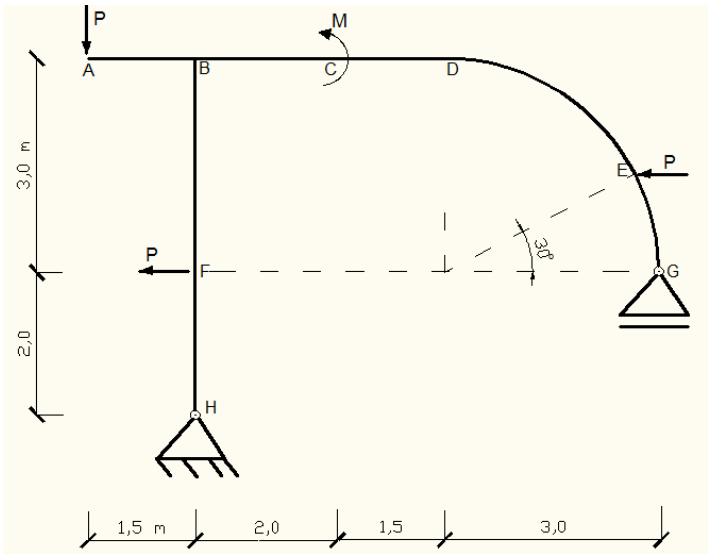
R17) Calcular as reações a seguir.



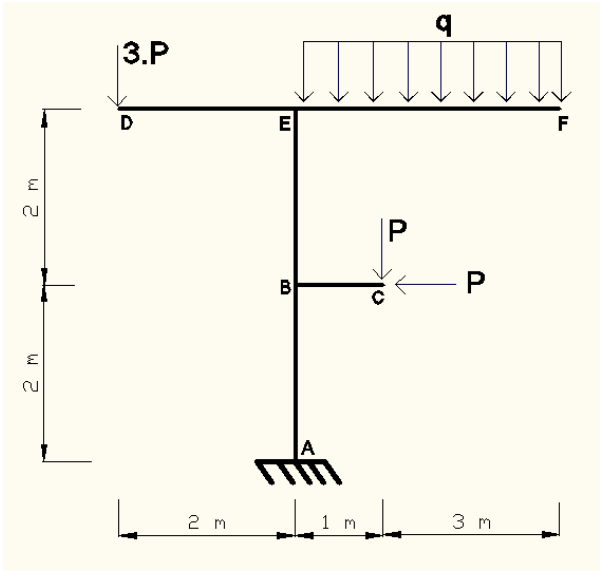
R18) Calcular as reações a seguir.



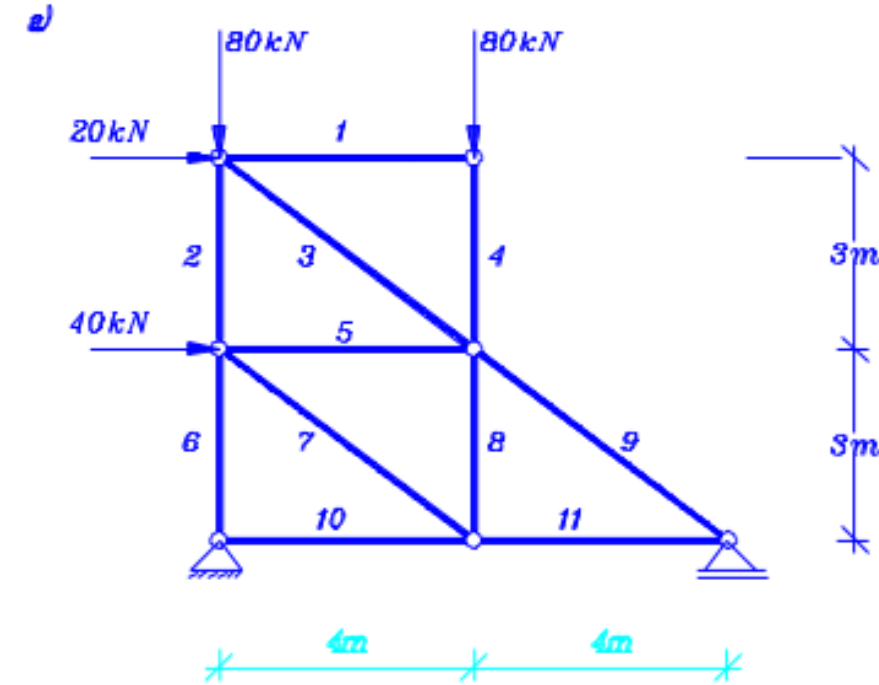
R19) Calcular as reações a seguir.



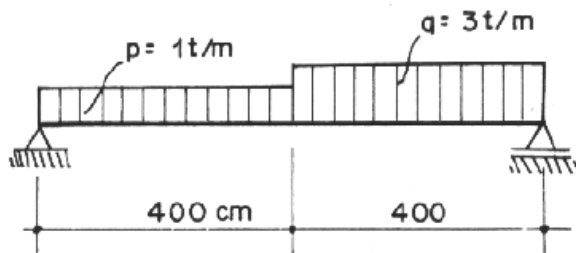
R20) Calcular as reações a seguir.



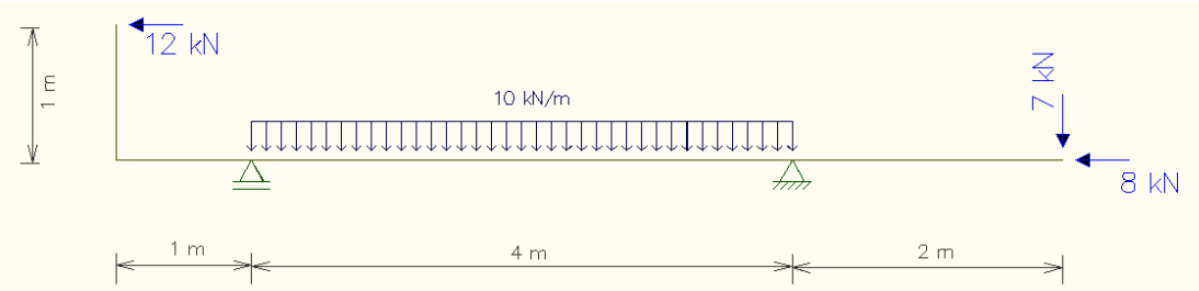
R21) Calcular as reações a seguir.



R22) Calcular as reações a seguir.



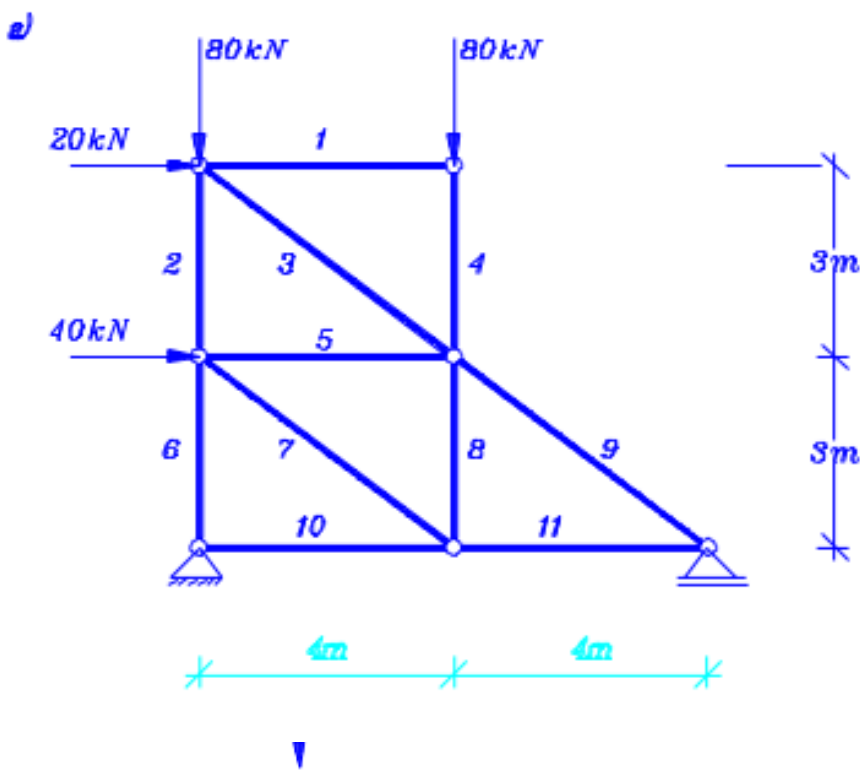
R23) Calcular as reações a seguir.



R24) Calcular as reações a seguir. Dados: $P = 10 \text{ kN}$; $F = P/10$; $q = 8 \text{ kN/m}$; $\alpha = 30^\circ$

CÁLCULO DE ESFORÇOS SOLICITANTES E DIAGRAMAS

E1) Na treliça a seguir, obtenha os esforços normais em todas as barras.



Respostas: Treliza (a)
 $N_1 = 0$
 $N_2 = -65kN$
 $N_3 = -25kN$
 $N_4 = -80kN$
 $N_5 = -73,33kN$
 $N_6 = -90kN$
 $N_7 = 41,67kN$
 $N_8 = -25kN$
 $N_9 = -116,67kN$
 $N_{10} = 60kN$
 $N_{11} = 93,33kN$

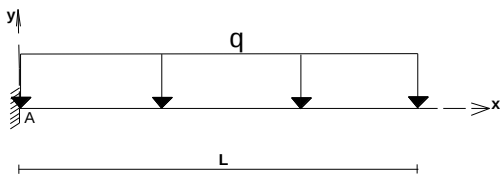
E2) Se num certo trecho da viga, a função de carregamento distribuído vertical, que é perpendicular a seu eixo, for uma função polinomial de grau 2, então o diagrama de momento fletor nesse trecho é uma função polinomial de grau:

- a. Um
- b. Dois
- c. Três
- d. Quatro

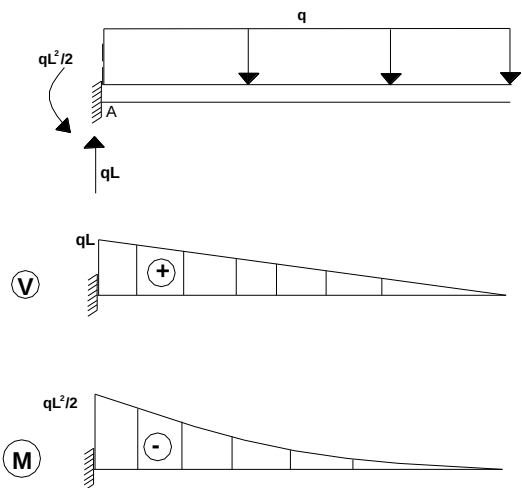
Como se sabe, a equação diferencial de equilíbrio que relaciona $q(x)$ e $M(x)$ é dada por:

$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q(x)$, assim, se $q(x)$ é do 2º. grau, integrando duas vezes , $M(x)$ é **um polinômio do quarto grau.**

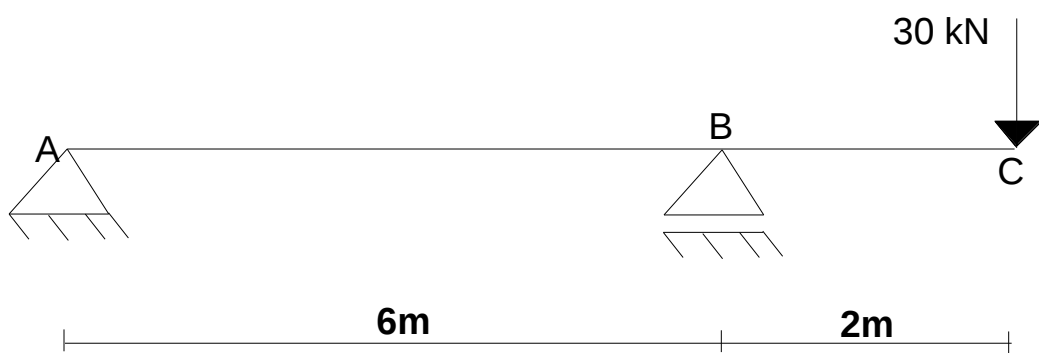
E3) Determinar os esforços solicitantes M e V para a viga.



Resp.

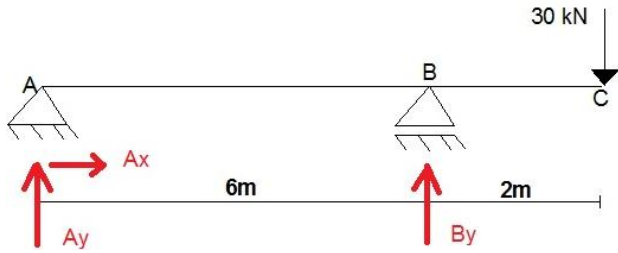


E4) Determinar os esforços solicitantes M e V para a viga.



Resposta:

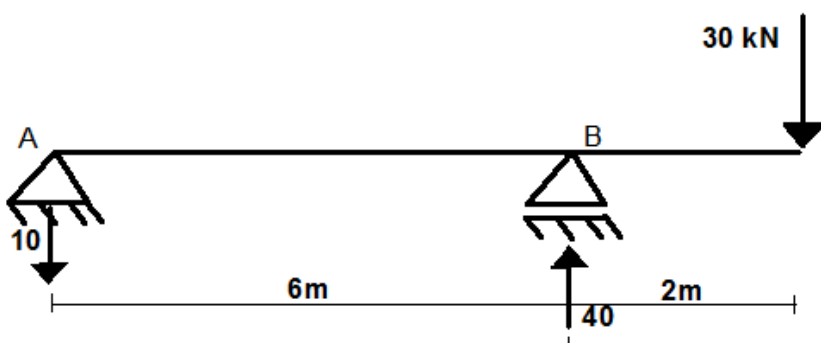
a. Cálculo das reações:



$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x = 0$$

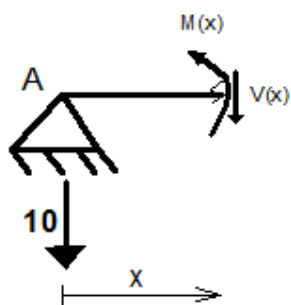
$$\sum M_A = 0 \rightarrow B_y \cdot 6 = 30 \cdot 8 \rightarrow B_y = 40 \text{ kN } (\uparrow)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y + 40 = 30 \rightarrow A_y = -10 \text{ kN } (\downarrow)$$



b. Dois trechos para realizar os cortes:

i. Trecho 1: $0 < x < 6$



$$\sum F_y = 0 \rightarrow V(x) + 10 = 0 \rightarrow V(x) = -10$$

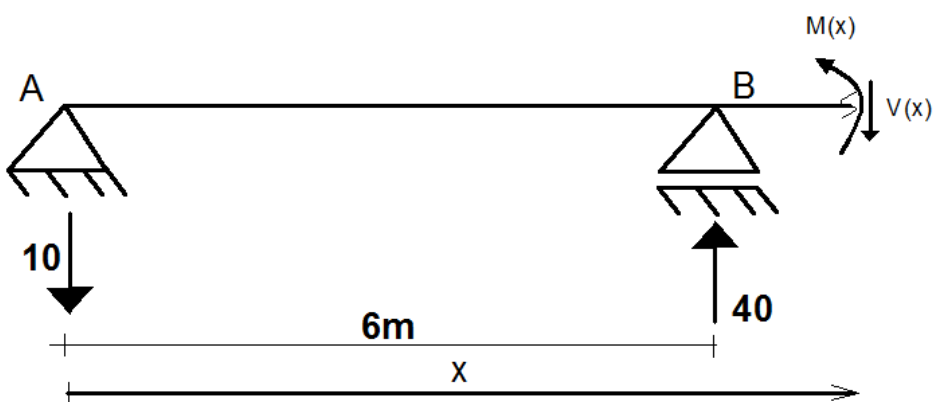
$$\sum M_s = 0 \rightarrow M(x) + 10 \cdot x = 0 \rightarrow M(x) = -10 \cdot x$$

Valores nos extremos do intervalo:

$$V(0) = V(6) = -10$$

$$M(0) = 0; \quad M(6) = -60$$

ii. Trecho 2: $6 < x < 8$



$$\sum F_y = 0 \rightarrow V(x) + 10 - 40 = 0 \rightarrow V(x) = 30$$

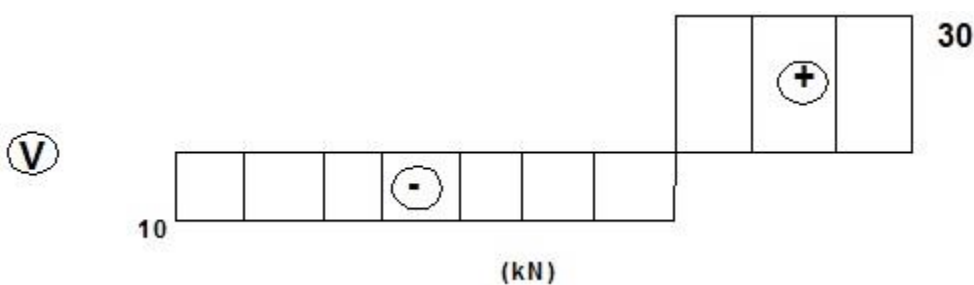
$$\sum M_s = 0 \rightarrow M(x) + 10 \cdot x - 40 \cdot (x - 6) = 0 \rightarrow M(x) = 30 \cdot x - 240$$

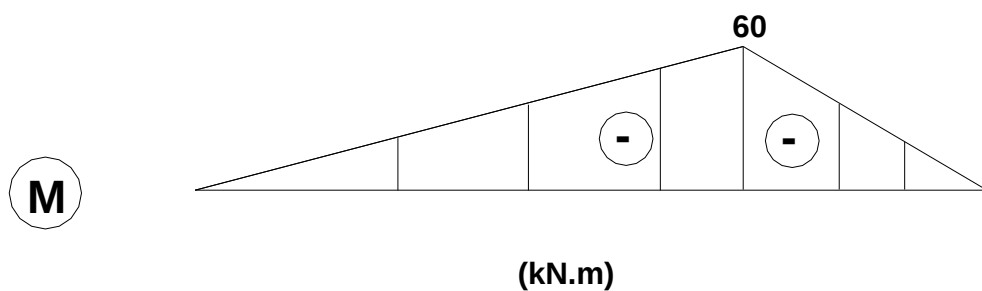
Valores nos extremos do intervalo:

$$V(6) = V(8) = 30$$

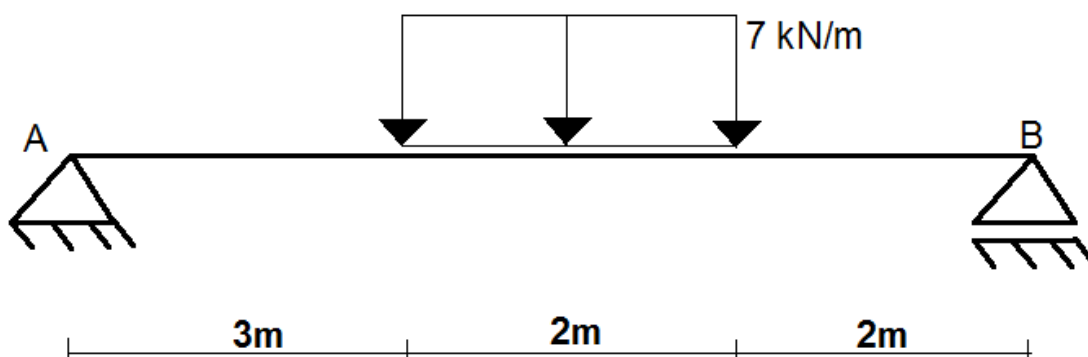
$$M(6) = -60; \quad M(8) = 0$$

c. Diagramas:



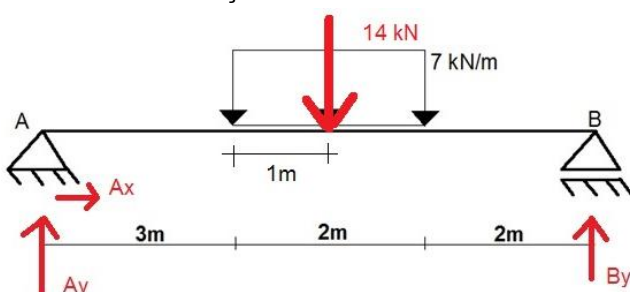


E5) Determinar os esforços solicitantes M e V para a viga.



Resposta:

a. Cálculo das reações:



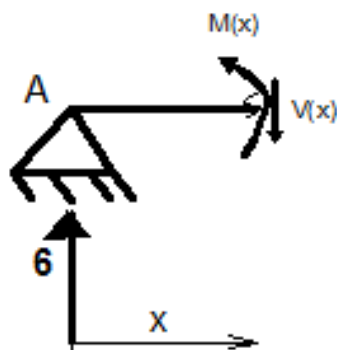
$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x = 0$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow B_y \cdot 7 = 14 \cdot 4 \rightarrow B_y = 8 \text{ kN } (\uparrow)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y + 8 = 14 \rightarrow A_y = 6 \text{ kN } (\uparrow)$$

b. Três trechos para realizar os cortes:

i. *Trecho 1:* $0 < x < 3$



$$\sum F_y = 0 \rightarrow V(x) - 6 = 0 \rightarrow V(x) = 6$$

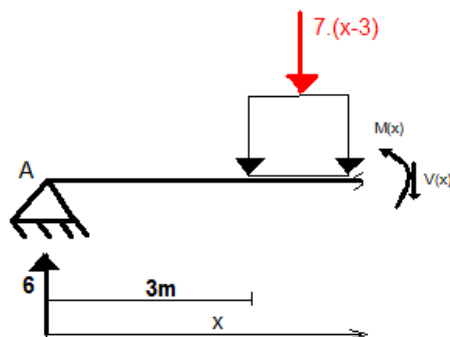
$$\sum M_s = 0 \rightarrow M(x) - 6 \cdot x = 0 \rightarrow M(x) = 6 \cdot x$$

Valores nos extremos do intervalo:

$$V(0) = V(3) = 6$$

$$M(0) = 0; \quad M(3) = 18$$

ii. *Trecho 2:* $3 < x < 5$



$$\sum F_y = 0 \rightarrow V(x) - 6 + 7 \cdot (x - 3) = 0 \rightarrow V(x) = 27 - 7 \cdot x$$

$$\sum M_s = 0 \rightarrow M(x) - 6 \cdot x + 7 \cdot (x - 3) \frac{(x - 3)}{2} = 0 \rightarrow M(x) = 6 \cdot x - 3,5 \cdot (x - 3)^2$$

Valores nos extremos do intervalo:

$$V(3) = 6; \quad V(5) = -8$$

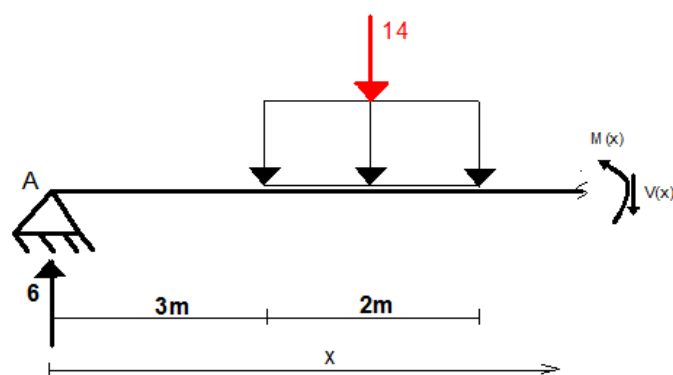
$$M(3) = 18; \quad M(5) = 16$$

Obter ponto de extremo de M, fazendo:

$$V(x) = 27 - 7 \cdot x = 0 \rightarrow x = 3,86 \text{ m}$$

$$M(x = 3,86) = 6,3,86 - 3,5.(3,86 - 3)^2 = 20,6$$

iii. *Trecho 3:* $5 < x < 7$



$$\sum F_y = 0: \rightarrow V(x) - 6 + 14 = 0 \rightarrow V(x) = -8$$

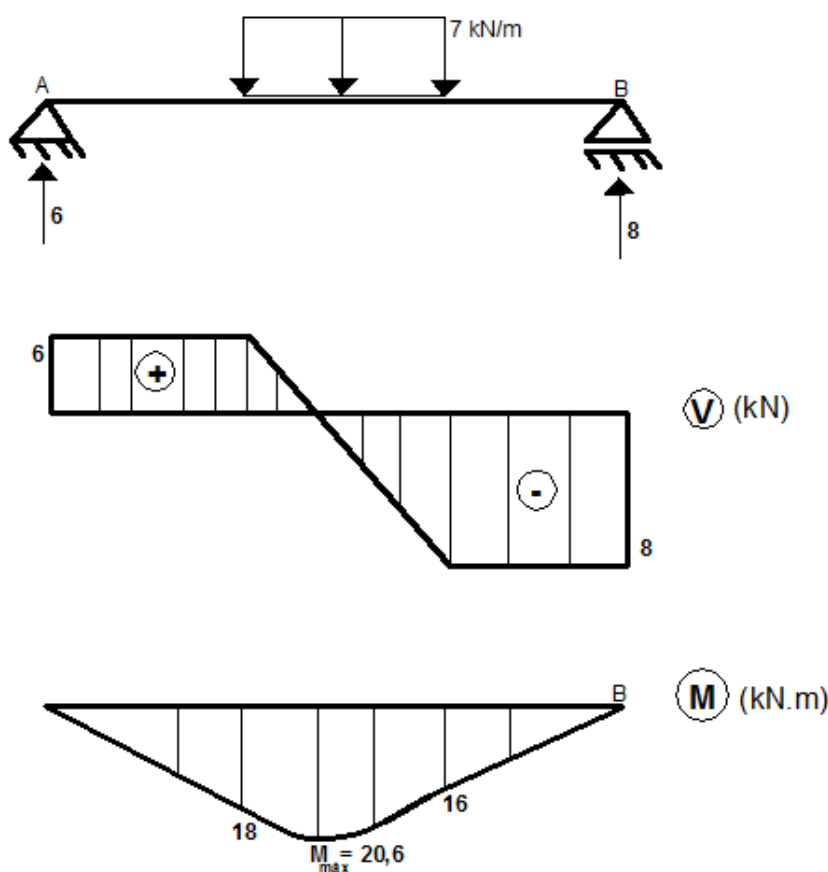
$$\sum M_s = 0: \rightarrow M(x) - 6.x + 14.(x - 4) = 0 \rightarrow M(x) = -8.x + 56$$

Valores nos extremos do intervalo:

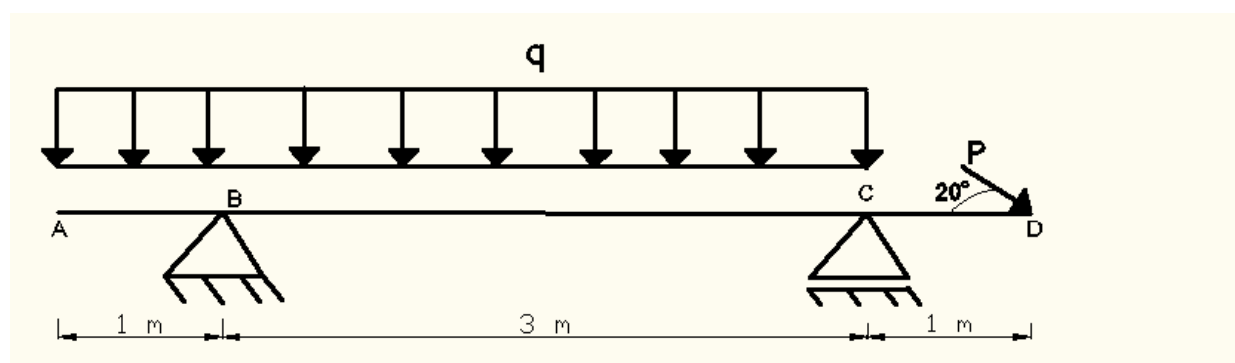
$$V(5) = V(7) = -8$$

$$M(5) = 16; \quad M(7) = 0$$

c. Diagramas

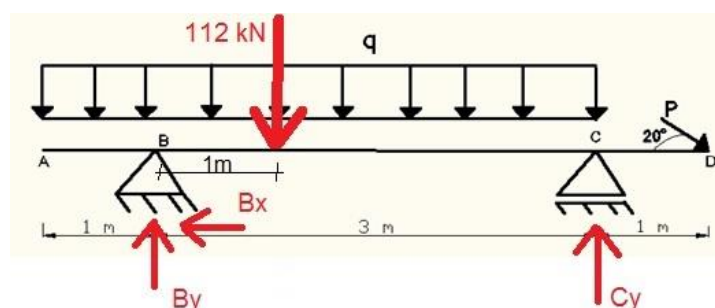


E6) Determinar os diagramas de esforços de toda a barra abaixo. Indicar explicitamente os valores e os pontos mais relevantes de esforços normais, cortantes e momentos fletores nos desenhos em destaque. Dados $q = 28 \text{ kN/m}$ e $P = 5 \text{ kN}$.



Respostas:

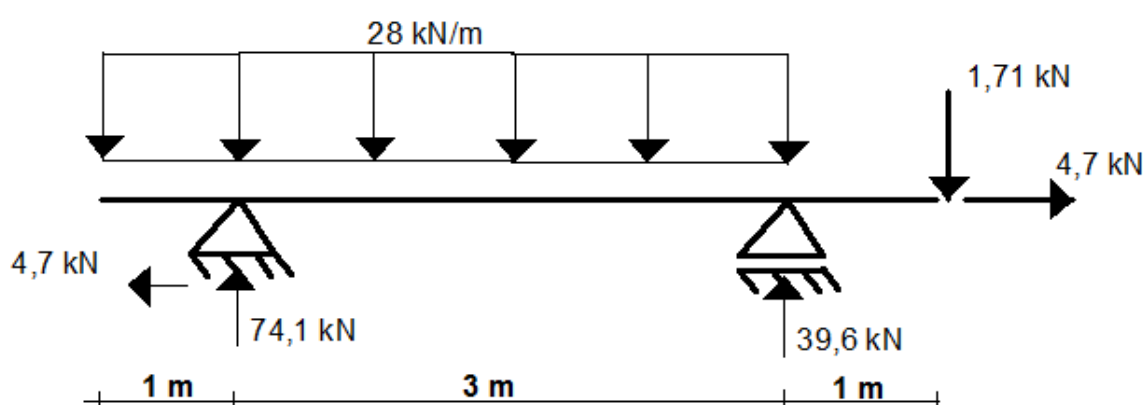
a. Calcular reações:



$$\sum F_x = 0: \rightarrow B_x = 4,7 \text{ kN} (\leftarrow)$$

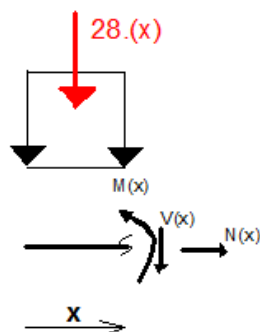
$$\sum M_B = 0: \rightarrow 3.C_y = 112.1 + 1,71.4 \rightarrow C_y = 39,6 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\sum F_y = 0: \rightarrow B_y = 112 + 1,71 - 39,6 = 74,1 \text{ kN} (\uparrow)$$



b. Três trechos para realizar os cortes:

i. *Trecho 1:* $0 < x < 1$



$$\sum F_x = 0: \rightarrow N(x) = 0 \rightarrow N(x) = 0$$

$$\sum F_y = 0: \rightarrow V(x) + 28.x = 0 \rightarrow V(x) = -28.x$$

$$\sum M_s = 0: \rightarrow M(x) + 28.x \cdot \frac{x}{2} = 0 \rightarrow M(x) = -14.x^2$$

Valores nos extremos do intervalo:

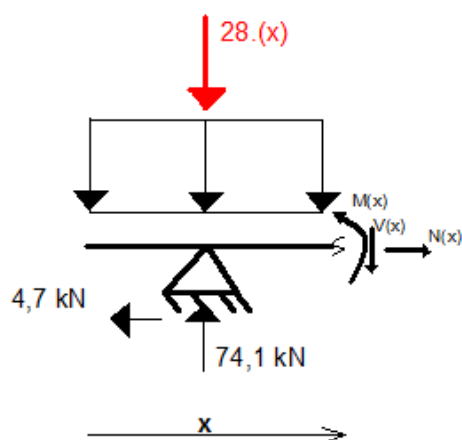
$$N(0) = N(1) = 0$$

$$V(0) = 0; V(1) = -28$$

$$M(0) = 0; M(1) = -14$$

Não tem derivada nula nesse intervalo para construir M(x)

ii. *Trecho 2:* $1 < x < 4$



$$\sum F_x = 0: \rightarrow N(x) - 4,7 = 0 \rightarrow N(x) = 4,7$$

$$\sum F_y = 0: \rightarrow V(x) + 28.x - 74,1 = 0 \rightarrow V(x) = -28.x + 74,1$$

$$\sum M_s = 0: \rightarrow M(x) + 28.x \cdot \frac{x}{2} - 74,1.(x - 1) = 0 \rightarrow M(x) = -14.x^2 + 74,1.x - 74,1$$

Valores nos extremos do intervalo:

$$N(1) = N(4) = 4,7$$

$$V(1) = 46,1; V(4) = -37,9$$

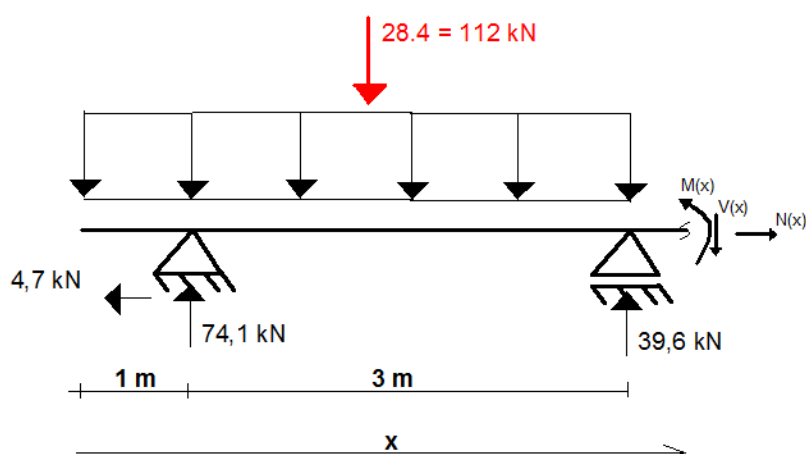
$$M(1) = -14; M(4) = -1,7$$

Obter ponto de extremo de M, fazendo:

$$V(x) = -28.x + 74,1 = 0 \rightarrow x = 2,65 \text{ m}$$

$$M(x = 2,65) = -14.(2,65^2) + 74,1.(2,65) - 74,1 = 23,9$$

iii. *Trecho 3:* $4 < x < 5$

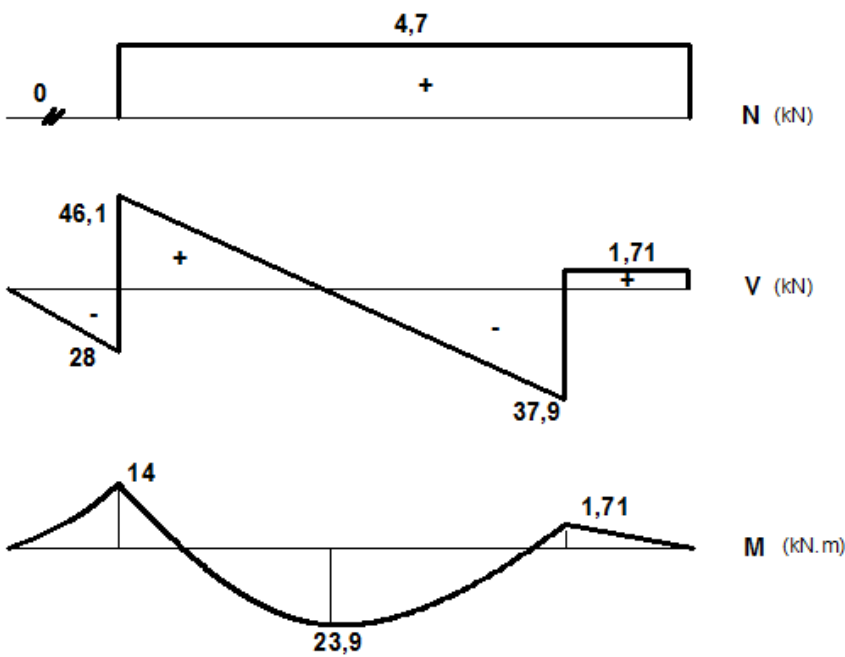


$$\sum F_x = 0 \rightarrow N(x) - 4,7 = 0 \rightarrow N(x) = 4,7$$
$$\sum F_y = 0 \rightarrow V(x) + 112 - 74,1 - 39,6 = 0 \rightarrow V(x) = 1,71$$
$$\sum M_s = 0 \rightarrow M(x) + 112.(x - 2) - 74,1.(x - 1) - 39,6.(x - 4) = 0 \rightarrow$$
$$M(x) = 1,71.x - 8,55$$

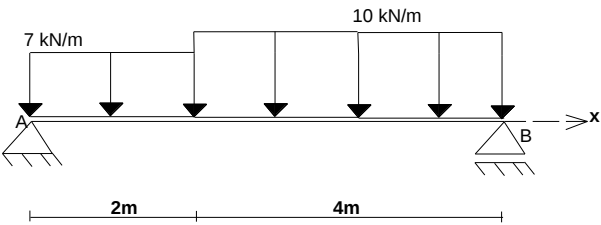
Valores nos extremos do intervalo:

$$N(4) = N(5) = 4,7$$
$$V(4) = V(5) = 1,71$$
$$M(4) = -1,71; \quad M(5) = 0$$

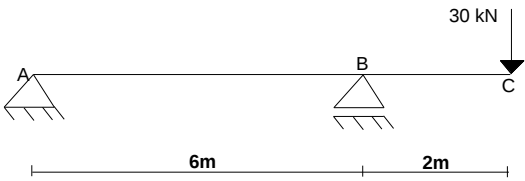
c. Diagramas:



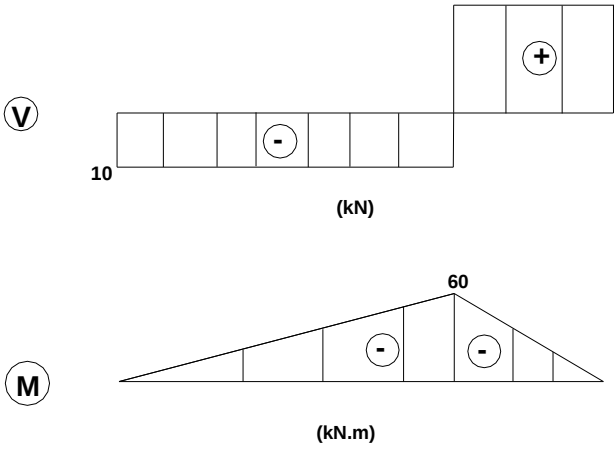
E7) Determinar os esforços solicitantes M e V para a viga.



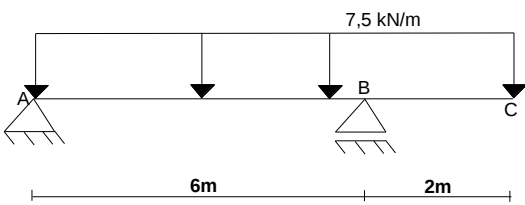
E8) Determinar os esforços solicitantes M e V para a viga.



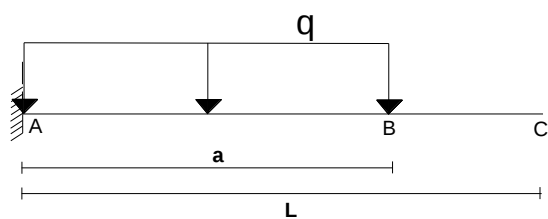
Resposta:



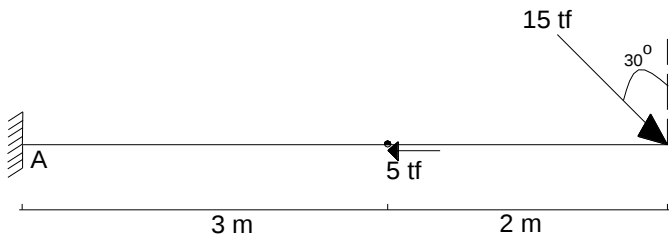
E9) Determinar os esforços solicitantes M e V para a viga.



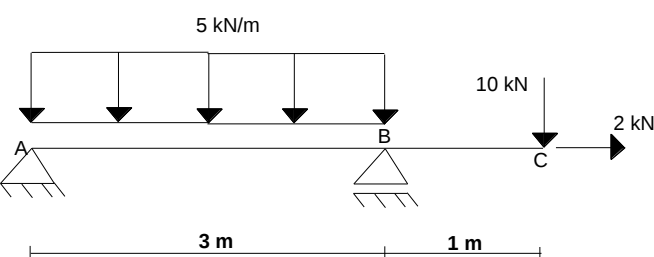
E10) Determinar os esforços solicitantes M e V para a viga.



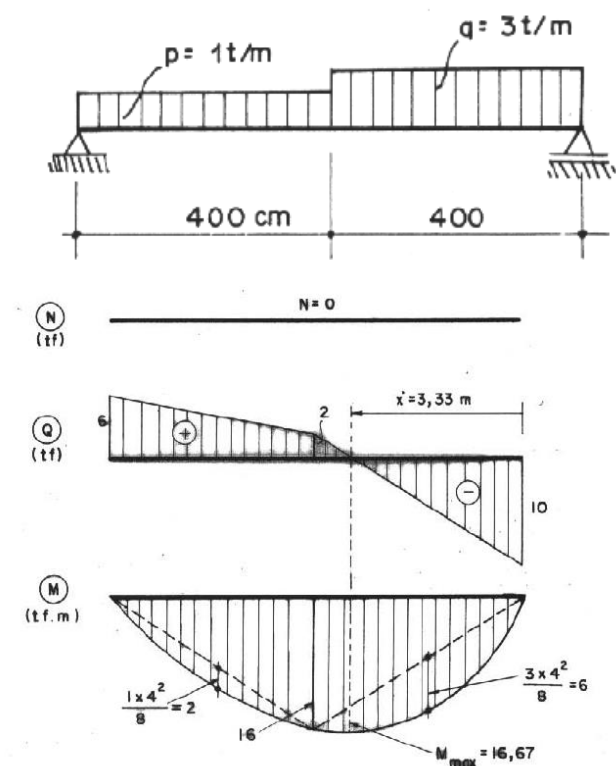
E11) Determinar os esforços solicitantes M e V para a viga.



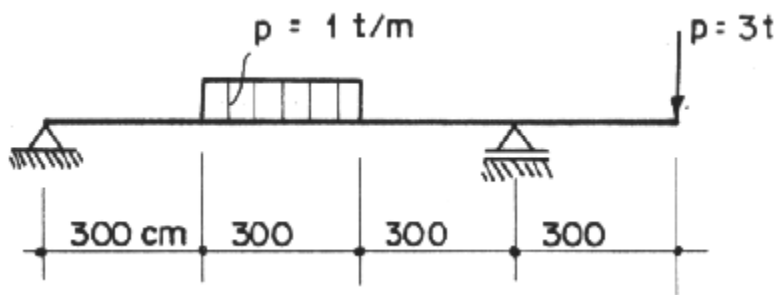
E12) Determinar os esforços solicitantes M e V para a viga.



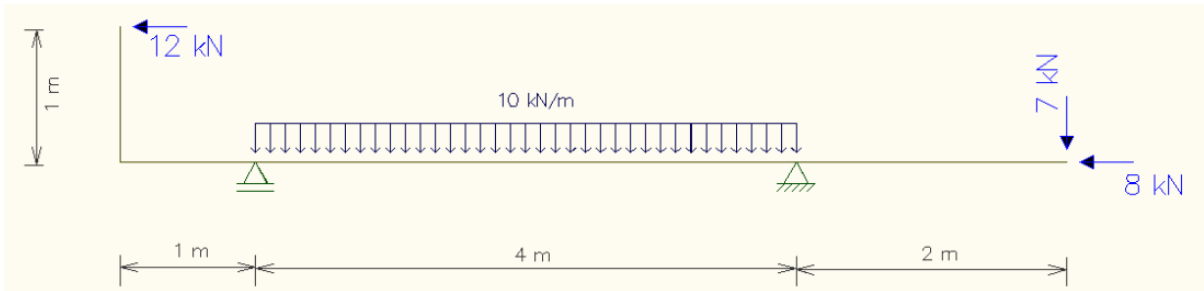
E13) Determinar os esforços solicitantes M e V para a viga.



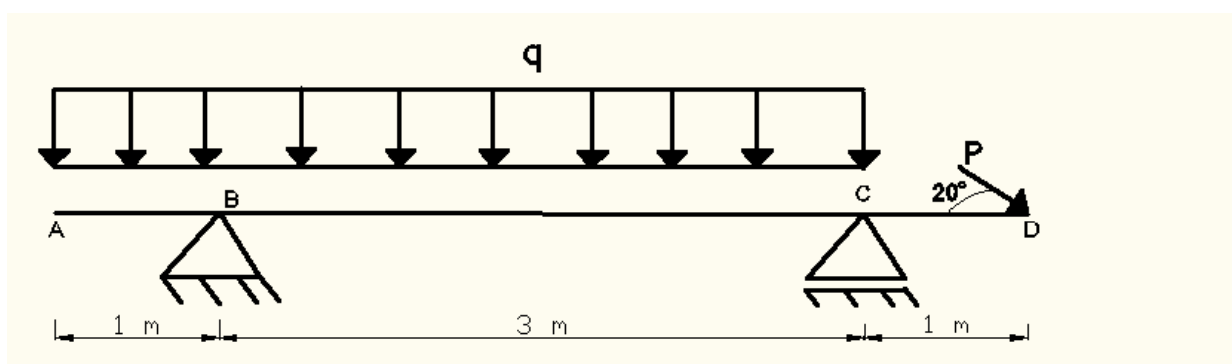
E14) Determinar os esforços solicitantes M e V para a viga.



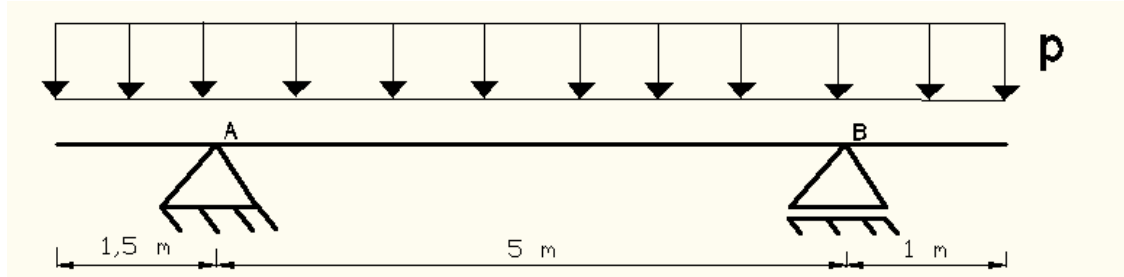
E15) Determinar os esforços solicitantes (M,V e N) na estrutura esquematizada a seguir, sob a ações das cargas indicadas. Indique explicitamente os valores e os pontos de momentos extremos.



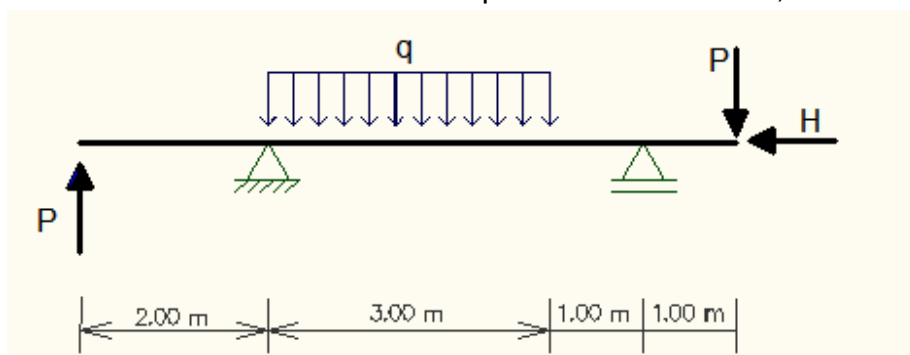
E16) Determinar os diagramas de esforços de toda a barra abaixo. Indicar explicitamente os valores e os pontos mais relevantes de esforços cortantes e momentos fletores nos desenhos em destaque. Dados $q = 18 \text{ kN/m}$ e $P = 15 \text{ kN}$.



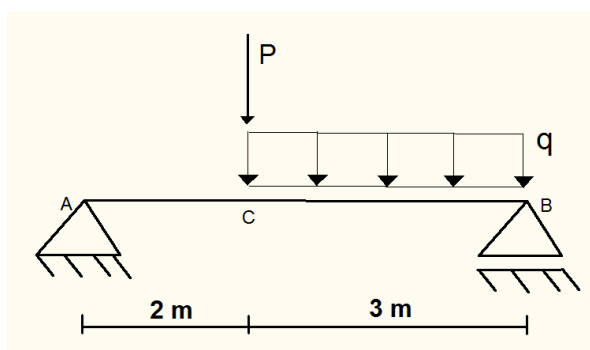
E17) Determinar os diagramas de esforços de toda a viga abaixo. Indicar explicitamente os valores e os pontos mais relevantes de esforços cortantes e momentos fletores nos desenhos em destaque. Dado $p = 16 \text{ kN/m}$.



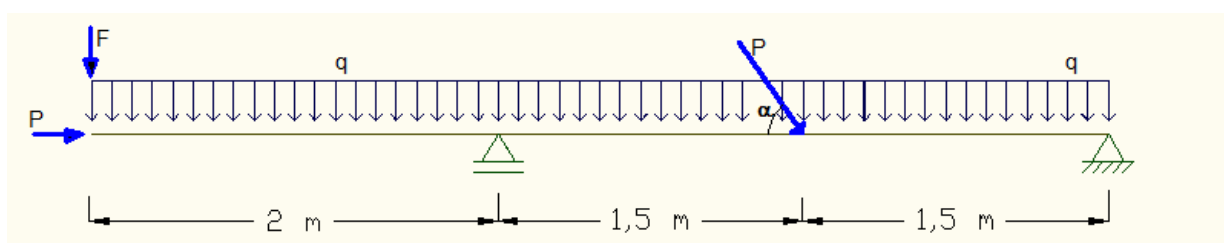
E18) Determinar os esforços solicitantes (M, V e N) na estrutura esquematizada a seguir, sob a ações das cargas indicadas. Indique explicitamente os valores e os pontos de momentos extremos no desenhos em destaque. Dados: $P = 6 \text{ kN}$; $H = 9 \text{ kN}$; $q = 12 \text{ kN/m}$



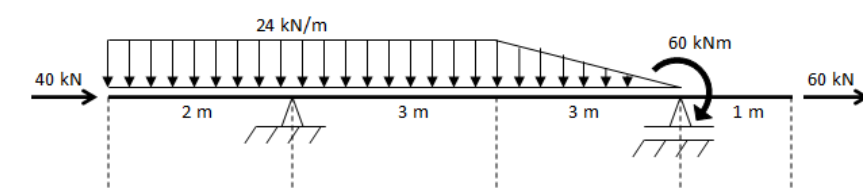
E19) Para a viga mostrada na figura, adote $P = 40 \text{ kN}$ e $q = 40 \text{ kN/m}$, determine os diagramas de momento fletor e esforço cortante.



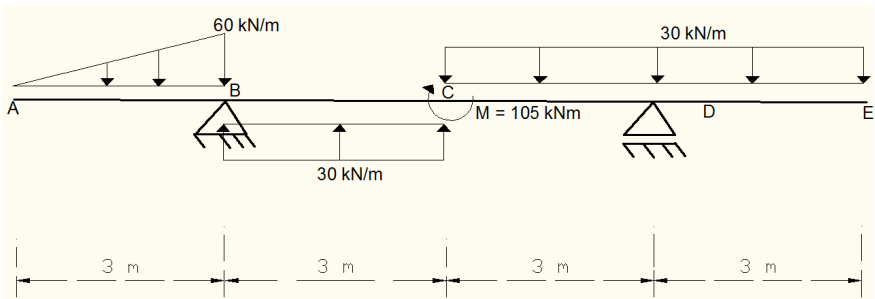
E20) Determinar os esforços solicitantes (M, V e N) na estrutura esquematizada a seguir, sob a ações das cargas indicadas. Indique explicitamente os valores e os pontos de momentos extremos no desenhos em destaque. Dados: $P = 10 \text{ kN}$; $F = P/10$; $q = 8 \text{ kN/m}$; $\alpha = 30^\circ$



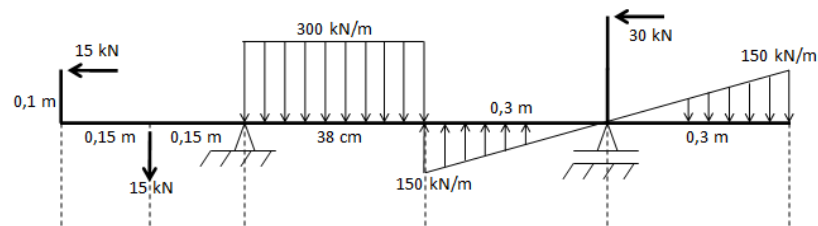
E21) Considere a estrutura representada na figura abaixo. Pede-se obter o diagrama de esforços normais (N em kN), de esforços cortantes (V em kN) e de momentos fletores (M em kNm). Devem ser obedecidos os critérios de sinal definidos em sala de aula. Indicar os valores máximos e mínimos com sua posição e o grau do polinômio em cada trecho.



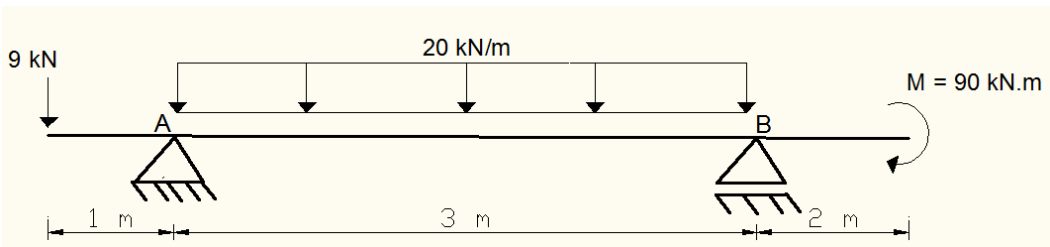
E22) Traçar os esforços solicitantes da estrutura a seguir.



E23) Considere a estrutura representada na figura abaixo. Pede-se obter o diagrama de esforços normais (N em kN), de esforços cortantes (V em kN) e de momentos fletores (M em kNm). Devem ser obedecidos os critérios de sinal definidos em sala de aula. Indicar os valores máximos e mínimos e o grau do polinômio em cada trecho.

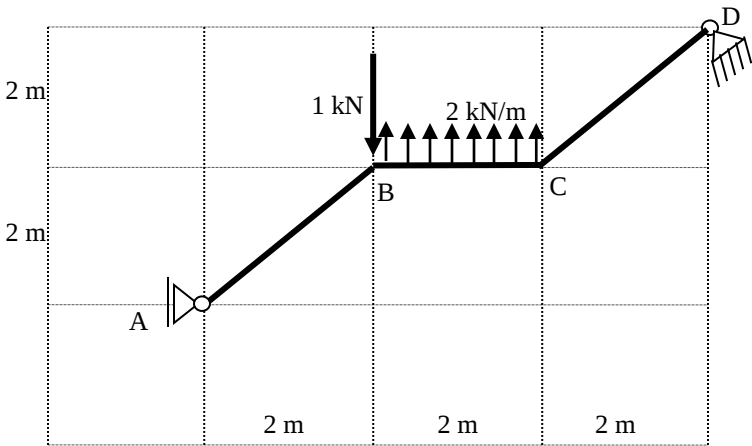


E24) Determinar para a viga a seguir, os diagramas de esforço cortante e momento fletor, explicitando os pontos relevantes. Represente as respostas dos diagramas nos espaços indicados.

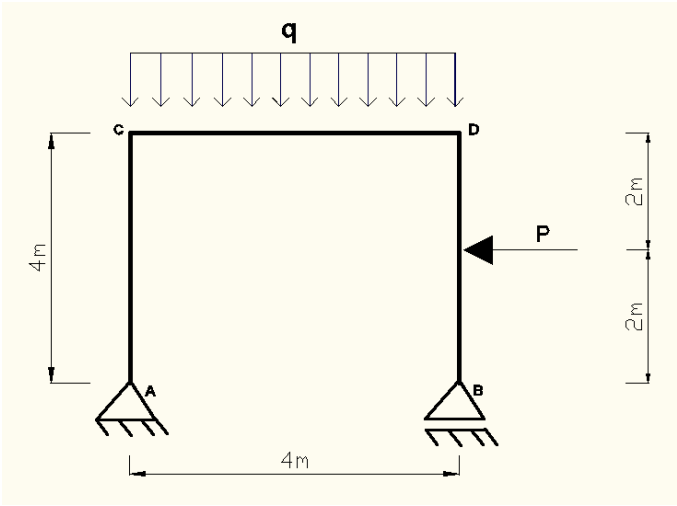


E25) (Nakao, 2014) Na estrutura plana ABCD da figura, a força concentrada em B é de 1 kN e a força uniformemente distribuída de B até C é de 2 kN/m. Determine:

- a- Diagramas da força cortante e do momento fletor do trecho BC, indicando todos os valores relevantes;
- b- Momento fletor máximo do trecho BC.

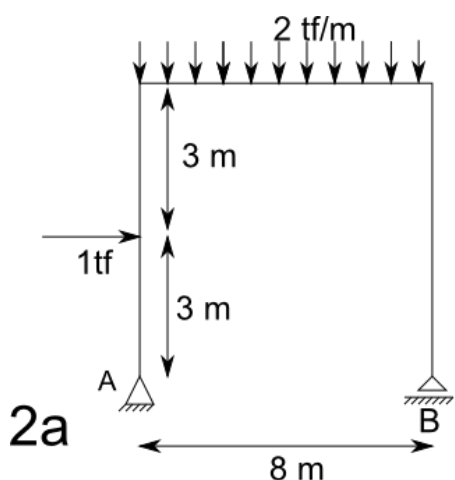


E26) Determine os diagramas de momento fletor, esforço cortante e normal, explicitando os pontos relevantes de cada diagrama. Indique os diagramas nos desenhos abaixo. Dados: $q = 15 \text{ kN/m}$; $P = 30 \text{ kN}$

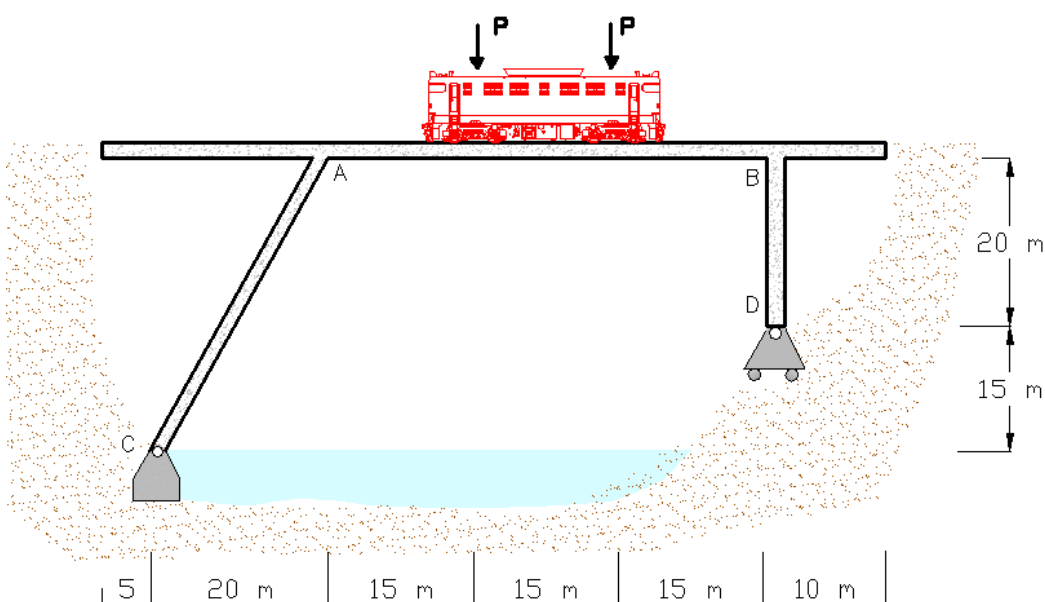


E27) (Franzini, 2014)

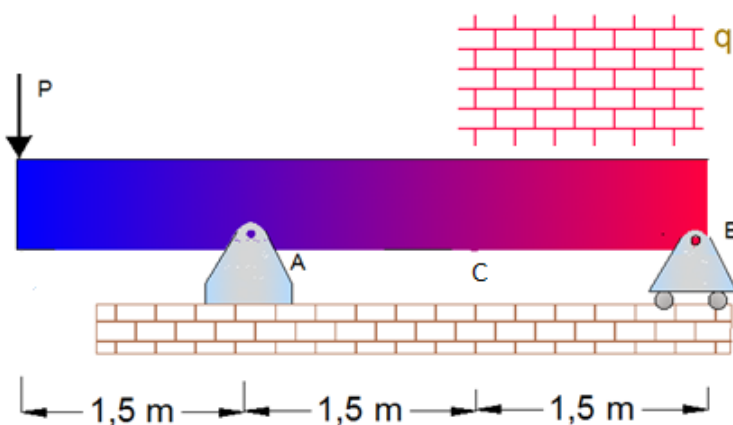
Considere o pórtico plano representado na Figura 2a. Traçar os diagramas de força normal, força cortante e momento fletor nos espaços correspondentes.



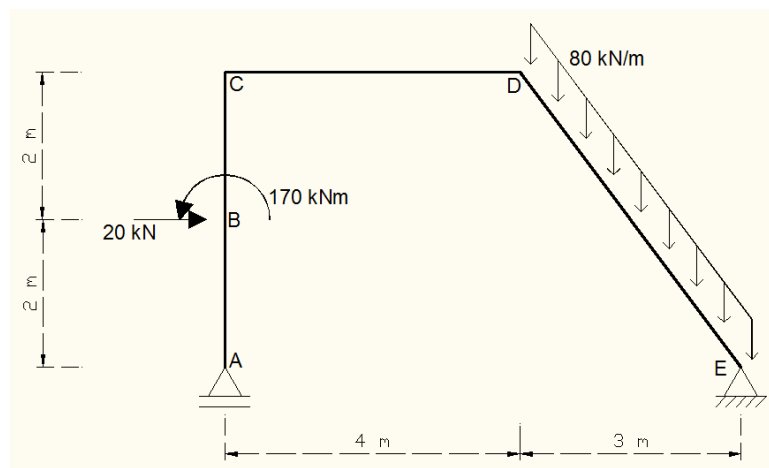
E28) A ponte de concreto armado está sujeita ao peso da locomotiva considerado como duas forças concentradas de valor $P = 400 \text{ kN}$. Sua geometria, posição de ações e restrições estão indicados na figura. Obtenha os diagramas de esforços normal, cortante e momento fletor em todos os trechos.



E29) Para a viga a seguir: a) determine a razão entre q e P de modo que o valor do momento fletor em A seja em módulo numericamente igual ao momento em C ; b) com essa razão obtida em (a), represente os diagramas de esforços de toda a viga em função de P , indicando valores e posições dos extremos. Considere “ P ” uma força concentrada e “ q ” um carregamento distribuído constantemente no trecho CB .

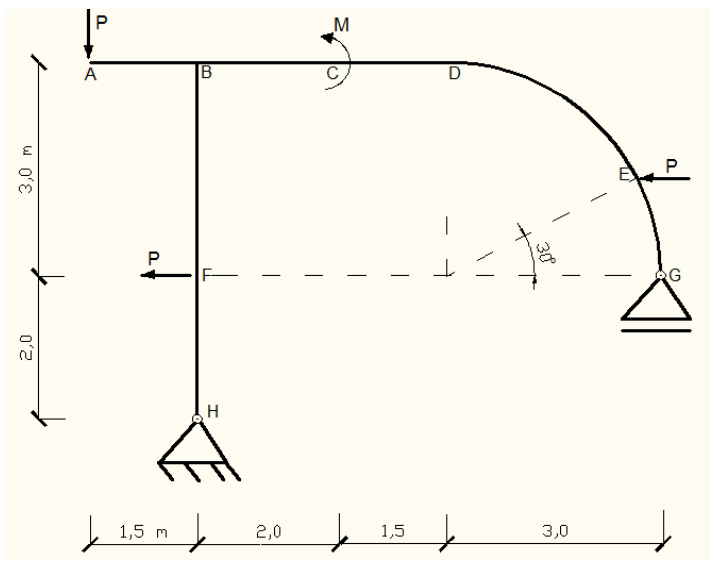


E30) Determinar os diagramas de esforços solicitantes de toda a estrutura plana da figura a seguir. Indicar também a seção em se tem o máximo momento fletor e indicar no diagrama o seu valor.

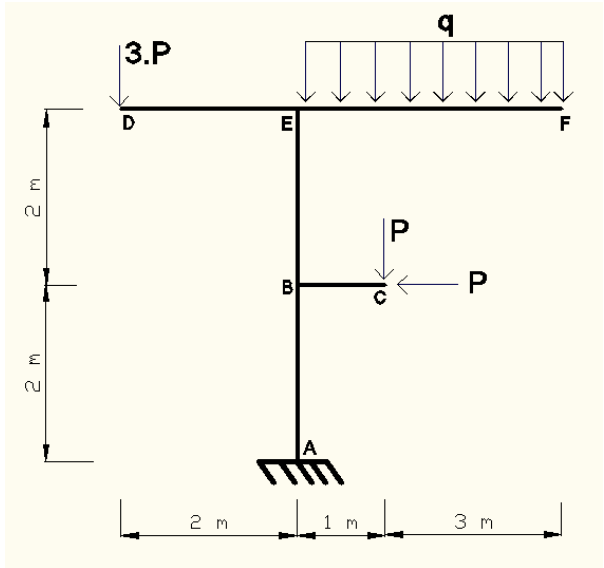


E31) Para a estrutura da figura a seguir, onde o trecho DG é circular de raio 3 m, sabendo-se que a força concentrada vale $P = 40 \text{ kN}$ e o momento concentrado aplicado no ponto C tem valor de $M = 20 \text{ kNm}$, pedem-se:

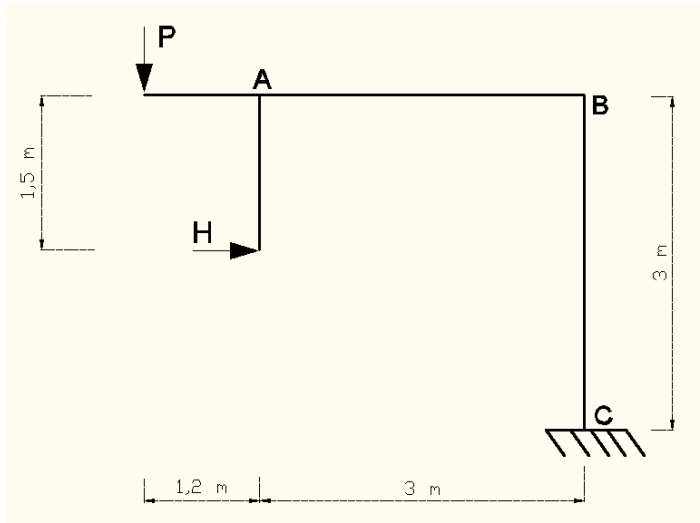
- Diagramas de esforços normal, cortante e momento fletor para os trechos $ABCD$ e BFH , desenha-los nas figuras indicadas;
- Para a seção E_+ (imediatamente abaixo de E), calcular seus esforços normal, cortante e momento fletor.



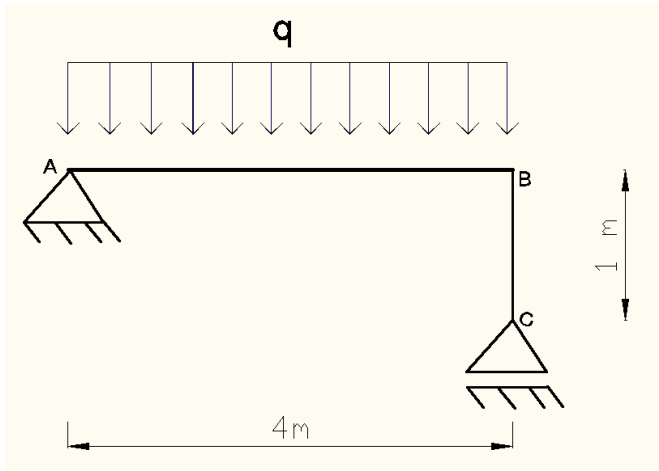
E32) Para a estrutura plana a seguir, obtenha os esforços solicitantes para os trechos ABE e DEF. Sabe-se que $P = 1 \text{ kN}$ e $q = 1 \text{ kN/m}$. Indicar os diagramas nos desenhos em destaque.



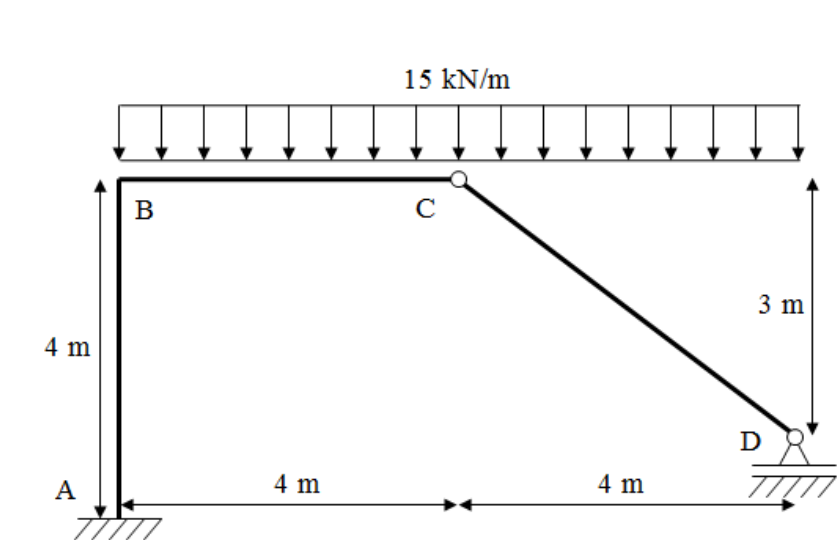
E33) Determinar os esforços solicitantes (N, V e M) na estrutura esquematizada a seguir, sob as ações das cargas indicadas. Indique explicitamente os valores e os pontos de momentos extremos nos desenhos em destaque. Dados: $P = 8 \text{ kN}$; $H = 20 \text{ kN}$.

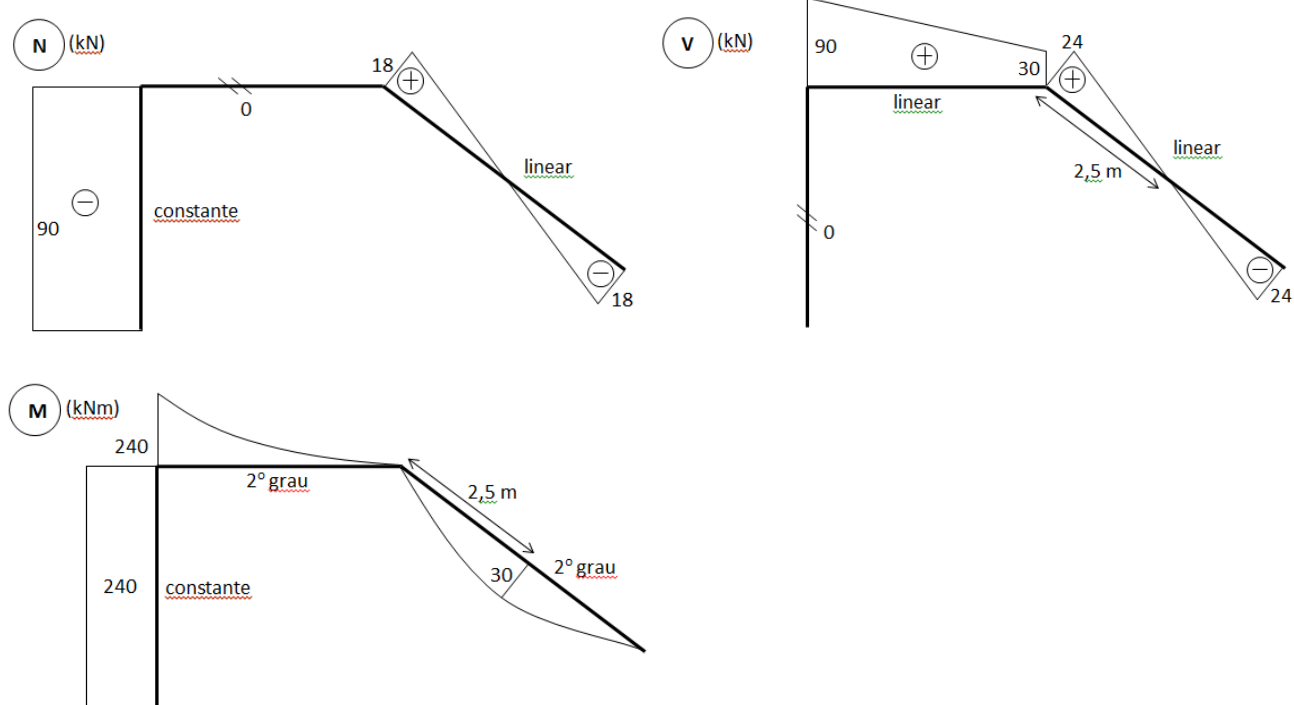


E34) Sabendo-se que $q = 40 \text{ kN/m}$, determine os diagramas de esforço normal, cortante e momento fletor.

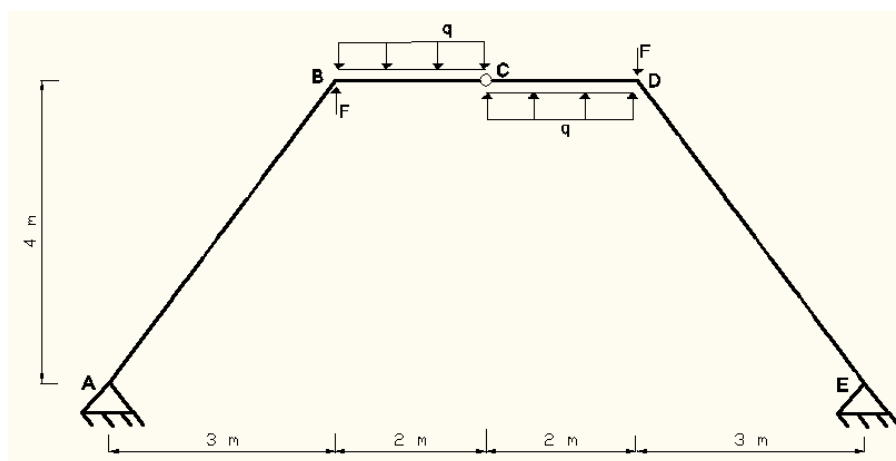


E35) (Dimas, 2013) Esboçar os diagramas de esforços solicitantes da estrutura abaixo.



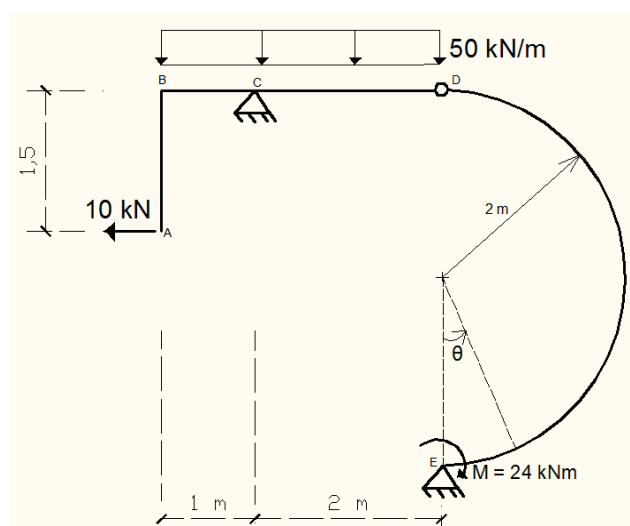


E36) Determinar os esforços solicitantes (M, V e N) no pórtico triarticulado, sob a ações das cargas indicadas. Adote $q = 30 \text{ kN/m}$ e $F = 50 \text{ kN}$. Indique explicitamente os valores e os pontos de momentos extremos. Apresente os diagramas nos desenhos indicados na resposta.



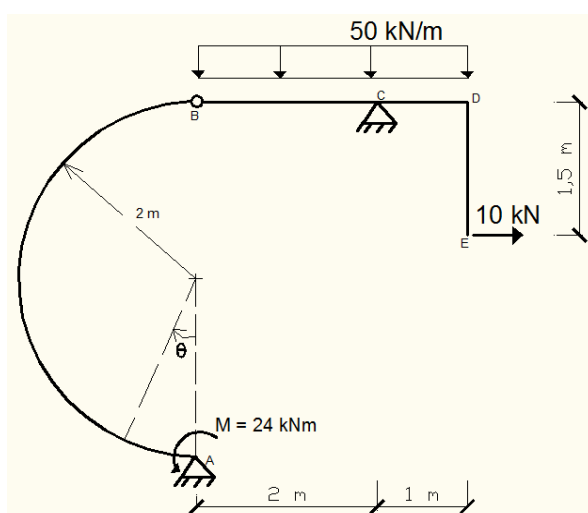
E37) A figura representa uma estrutura rotulada em D e apoios fixos em C e E. Sob os carregamentos indicados, carga distribuída constante no trecho BD, força concentrada em A e momento concentrado (M) em E, obtenha:

- Reações de apoio;
- Diagramas dos esforços solicitantes para o trecho ABCD;
- As expressões dos esforços solicitantes, em função de θ , do trecho circular DE.

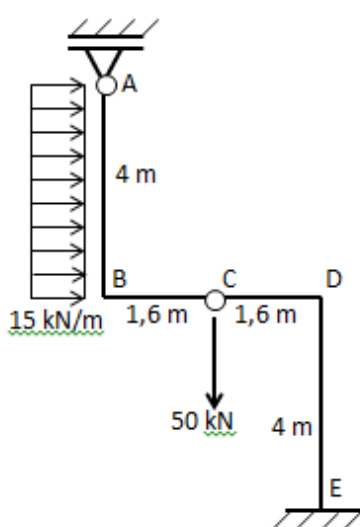


E38) A figura representa uma estrutura rotulada em B e apoios fixos em A e C. Sob os carregamentos indicados, carga distribuída constante no trecho BD, força concentrada em E e momento concentrado (M) em A, obtenha:

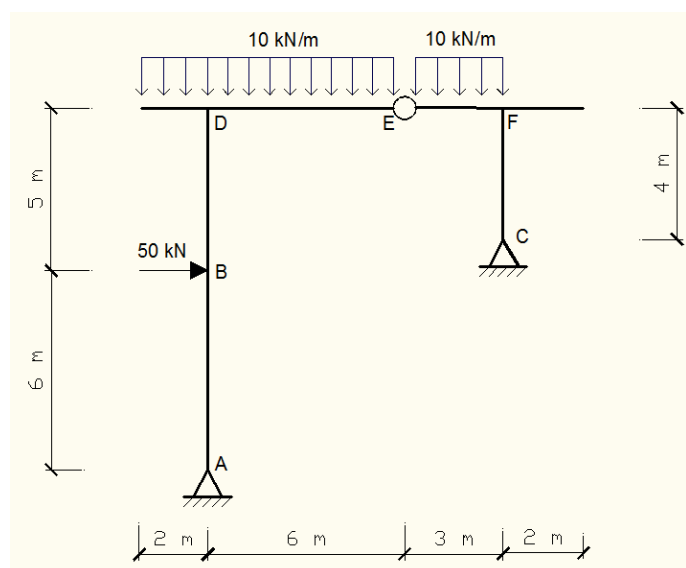
- Reações de apoio;
- Diagramas dos esforços solicitantes para o trecho BCDE;
- As expressões dos esforços solicitantes, em função de θ , do trecho circular AB.



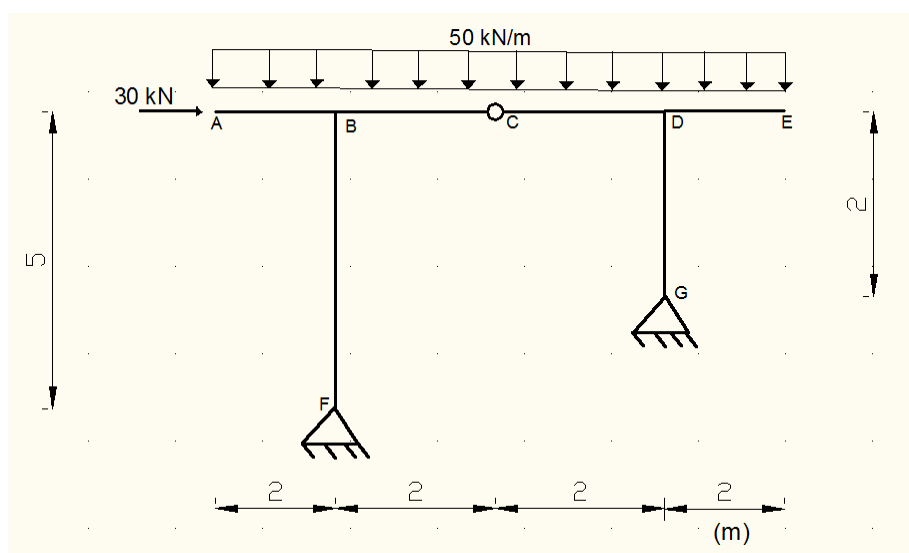
E39) (Dimas, 2012) Considere a estrutura isostática da figura abaixo. Pede-se determinar os diagramas de esforços normais (N), esforços cortantes (V) e momentos fletores (M). Devem ser utilizados os critérios de sinal definidos em sala de aula.



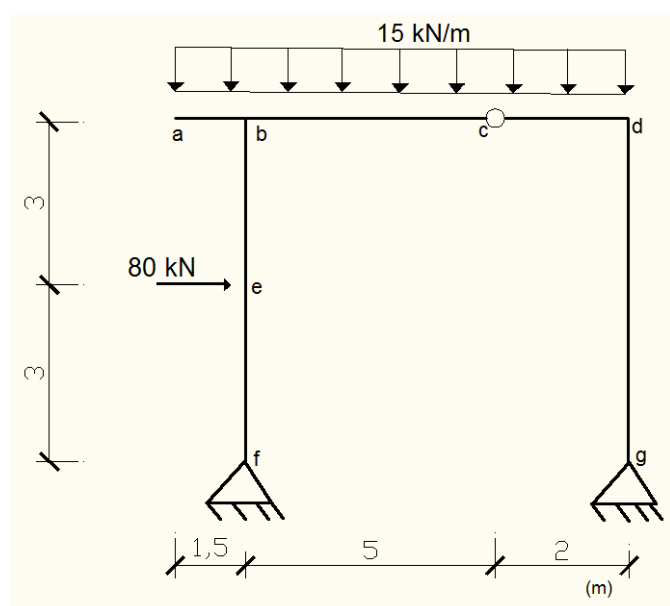
E40) Para o pórtico triarticulado abaixo, determinar os diagramas de momentos fletores, normal e cortante *de todo o pórtico*. Indicar os valores mais relevantes em cada barra.



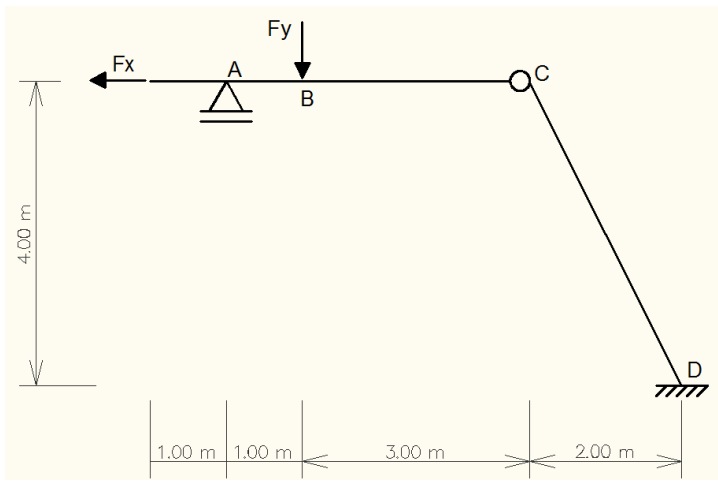
E41) Para o pórtico triarticulado abaixo, calcular os diagramas de esforços solicitantes N, V e M, indicando todos os valores relevantes.



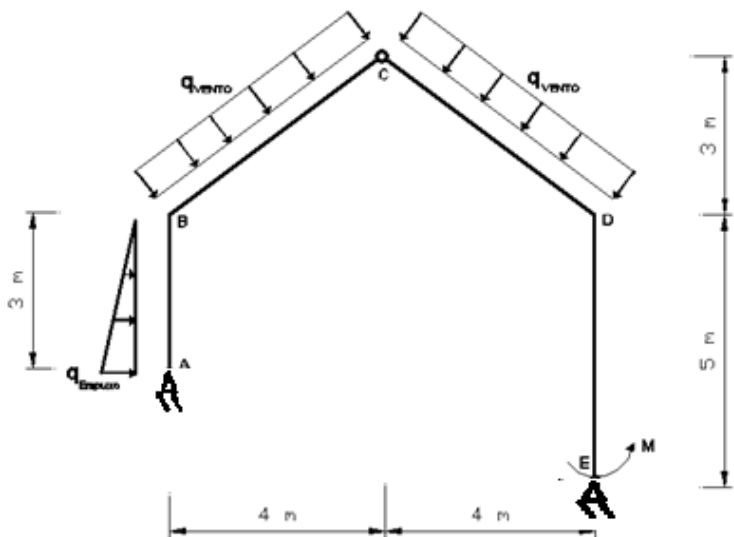
E42) Para o pórtico triarticulado abaixo, calcular os diagramas de esforços solicitantes N, V e M, indicando todos os valores relevantes.



E43) Determinar os esforços solicitantes *das normais e momento fletores* de todo o pórtico a seguir. Dados: $F_x = 10$ kN; $F_y = 15$ kN. Esboçar os diagramas nas figuras indicadas.

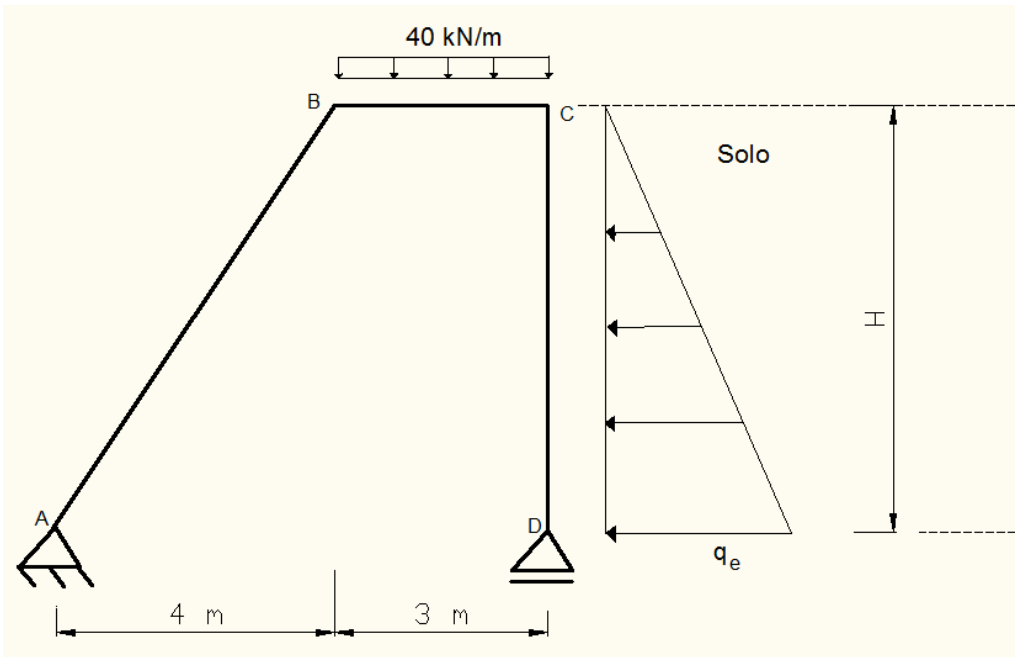


- E44) No galpão a seguir, o pilar AB serve também como contenção de terra, sendo a carga do solo atuante uniformemente variável de valor 0 a $q_{\text{empuxo}} = 2 \text{ kN/m}$. Nos telhados BC e CD atuam cargas de vento perpendiculares a seus eixos, com valor de $q_{\text{vento}} = 4 \text{ kN/m}$. Na base do pilar DE, em uma seção imediatamente acima do apoio E, há um momento aplicado de valor $M = 5 \text{ kN.m}$. Escrever as respostas nos espaços indicados, determinando:
- a) Reações nos apoios A e E;
 - b) Os diagramas apenas nos trechos CDE, indicando os sinais e pontos relevantes de cada esforço.

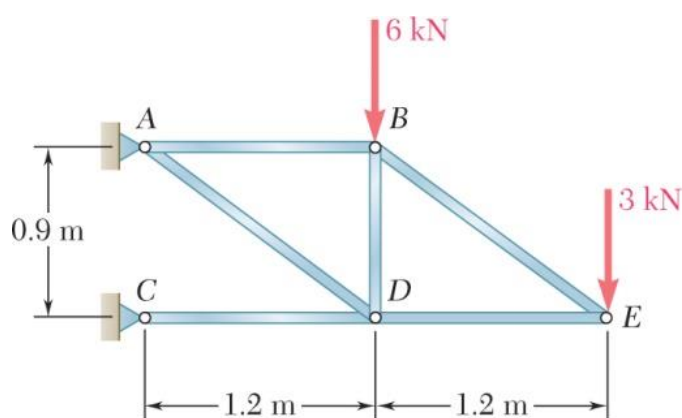


- Respostas:
- a) Reações: $A_x = -0,43$ $A_y = 15,61$; $E_x = 2,57$; $E_y = 16,39$
- b) Diagramas:
- $M_d = -7,85$; $M_{\text{max}_{cd}} = 8,8$;

- E45) O pórtico plano ABCD serve como contenção de terra. O solo exerce uma carga no muro CD conforme indicado no desenho e seu valor máximo é dado pela relação $q_e = \gamma_{\text{solo}} \cdot H \cdot b \cdot k_0$, onde γ_{solo} é o peso específico, k_0 é o coeficiente de empuxo do solo, H a altura do muro e b sua largura. Sobre a viga BC age uma carga constantemente distribuída devido a uma ação permanente de 40 kN/m . **Determinar os diagramas de esforço normal, cortante e momento fletor apenas no trecho BC**, indicando os diagramas, seus valores e posições de extremos nos desenhos da resposta. Considere: $\gamma_{\text{solo}} = 22 \text{ kN/m}^3$, $H = 6 \text{ m}$, $b = 1 \text{ m}$, $k_0 = 0,33$.

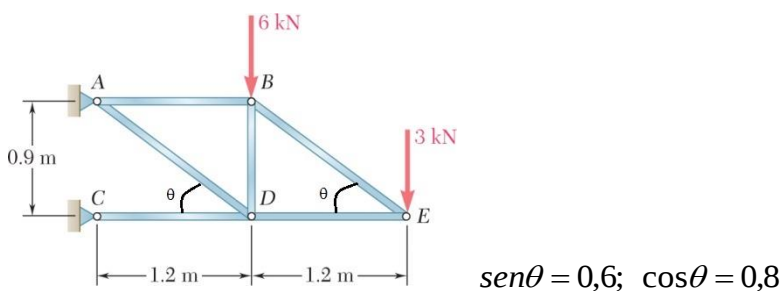


- E46) Para a treliça a seguir, determinar seus esforços em cada barra. Indique as barras que estão tracionadas ou comprimidas.



Resposta:

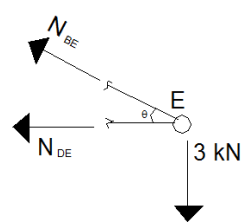
$N_{BE} = 5,0 \text{ kN (T)}$; $N_{DE} = 4,0 \text{ kN (C)}$; $N_{AB} = 4,0 \text{ kN (T)}$; $N_{BD} = 9,0 \text{ kN (C)}$;
 $N_{AD} = 15,0 \text{ kN (T)}$; $N_{CD} = 16,0 \text{ kN (C)}$



nó E:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow 3 = N_{BE} \cdot 0,6 \rightarrow N_{BE} = 5 \text{ kN (T)}$$

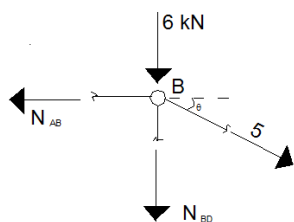
$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_{DE} + 5 \cdot 0,8 = 0 \rightarrow N_{DE} = -4 \text{ kN (C)}$$



nó B:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow 5 \cdot \text{cos}\theta = N_{AB} \rightarrow N_{AB} = 4 \text{ kN (T)}$$

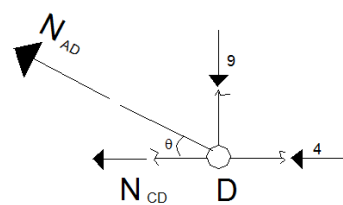
$$\sum F_y = 0 \rightarrow 6 + 5 \cdot \text{sen}\theta + N_{BD} = 0 \rightarrow N_{BD} = -9 \text{ kN (C)}$$



nó D:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_{AD} \cdot \text{sen}\theta = 9 \rightarrow N_{AD} = 15 \text{ kN (T)}$$

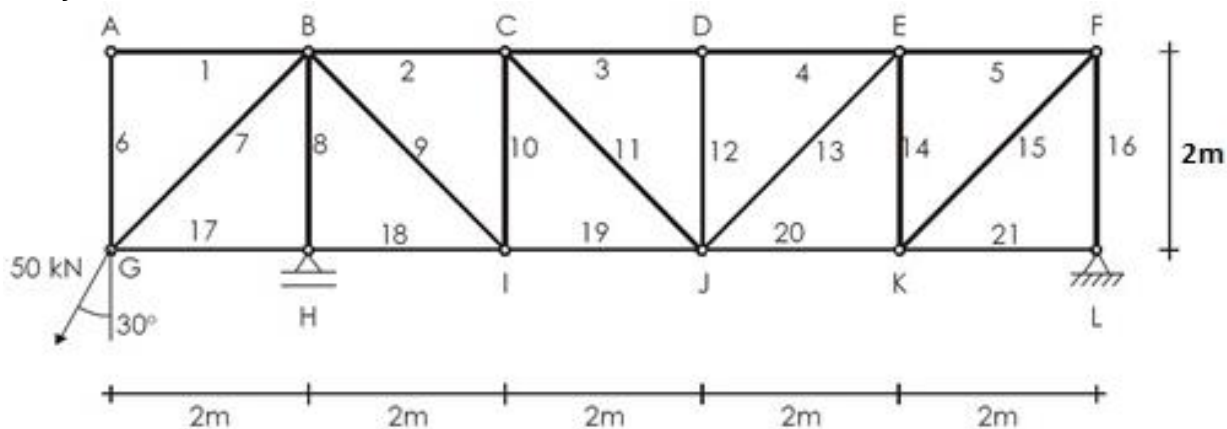
$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_{AD} \cdot \text{cos}\theta + N_{CD} + 4 = 0 \rightarrow N_{CD} = -16 \text{ kN (C)}$$



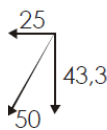
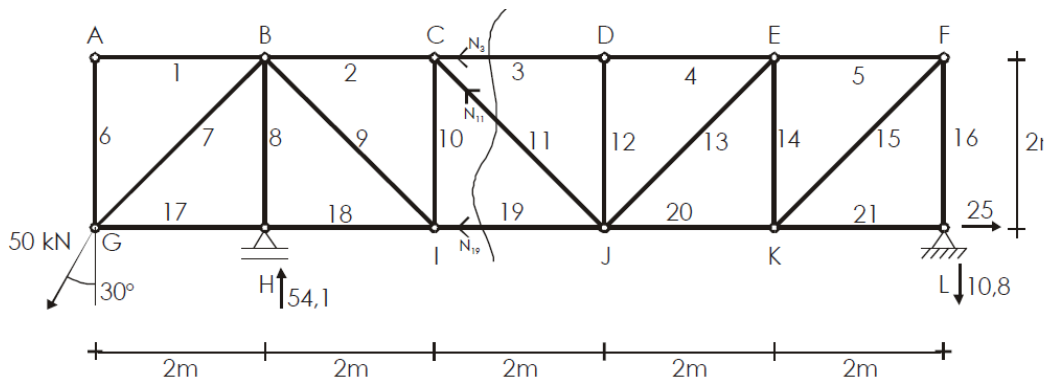
E47) Para a treliça seguir, onde atua somente uma força de 50 kN no nó G, na direção indicada, pedem-se:

a) as reações de apoio;

b) esforços normais nas barras 1, 6, 7 e 17.



Resposta:



$$\begin{aligned} 1. (1,0) \quad \Sigma M_L = 0 &\Rightarrow 43,3 \cdot 10 - V_H \cdot 8 = 0 \Rightarrow V_H = 54,1 \text{ kN} \\ \Sigma V = 0 &\Rightarrow 54,1 - 43,3 + V_L = 0 \Rightarrow V_L = -10,8 \text{ kN} \\ \Sigma H = 0 &\Rightarrow -25 + H_1 = 0 \Rightarrow H_L = 25 \text{ kN} \end{aligned}$$

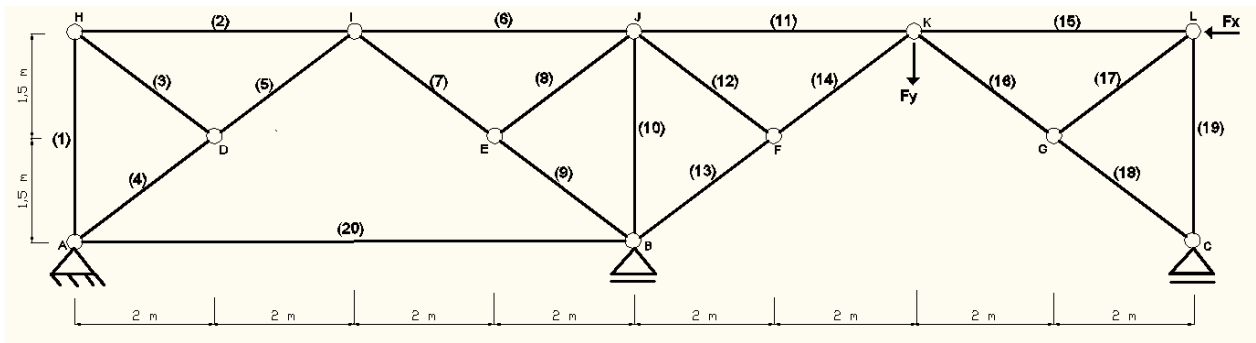
Equilíbrio Nó A:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 &: N_1 = 0 \\ \Sigma F_y = 0 &: N_6 = 0 \end{aligned}$$

Equilíbrio Nó G:

$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 &: N_7 \cdot \sin 45^\circ = 50 \cdot \cos 30^\circ \rightarrow N_7 = 61,2 \text{ kN (T)} \\ \Sigma F_x = 0 &: 61,2 \cdot \cos 45^\circ - 50 \cdot \sin 30^\circ + N_{17} = 0 \rightarrow N_{17} = -18,3 \text{ kN (C)} \end{aligned}$$

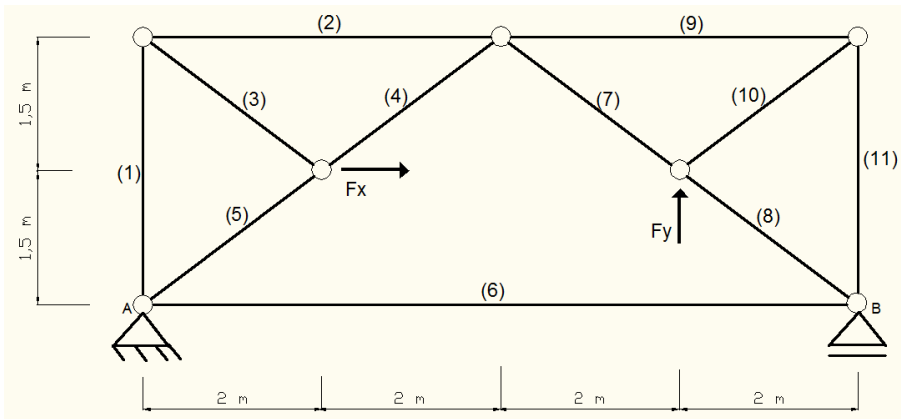
E48) Para a treliça a seguir, determine os esforços normais nas barras (3), (6), (9), (15) e (17).
Dados: $F_x = 10 \text{ kN}$; $F_y = 18 \text{ kN}$. Indicar cada valor com seu respectivo sinal no quadro de respostas.



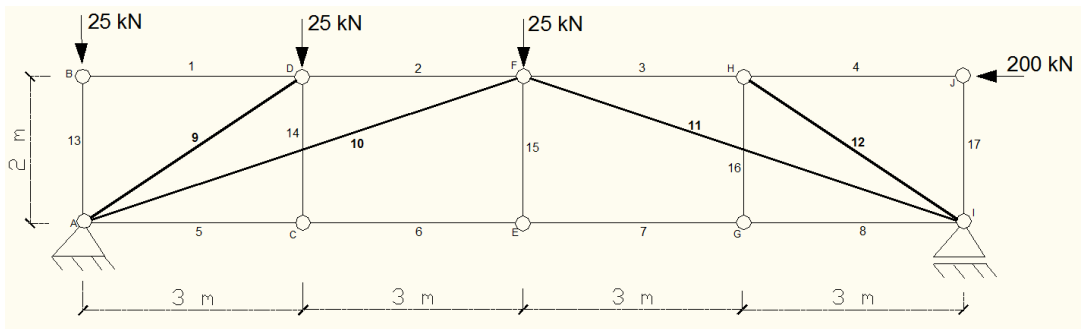
Respostas:

$N_3 = 0$	$N_6 = 14 \text{ kN}$	$N_9 = -8,75 \text{ kN}$	$N_{15} = -10 \text{ kN}$	$N_{17} = 0$
-----------	-----------------------	--------------------------	---------------------------	--------------

E49) Determinar os esforços normais nas barras (3), (6) e (11). Dados: $F_x = 160 \text{ kN}$; $F_y = 0$.



E50) Empregando necessariamente o processo do equilíbrio dos nós e/ou o processo de Ritter (ou das seções), determinar as forças normais nas barras 9, 10, 11 e 12 da treliça da figura, indicando claramente se essas forças são de tração ou de compressão. No final, escreva essas normais obtidas no espaço indicado.



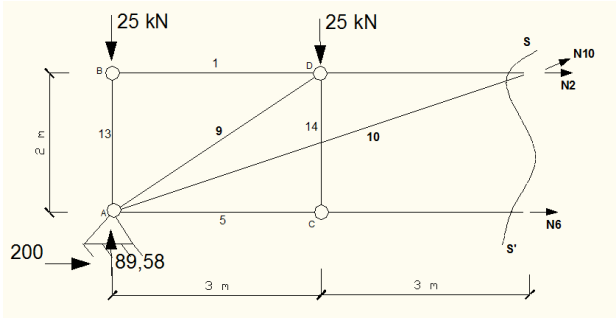
Respostas:

$$\begin{aligned} N_9 &= -45,1 \text{ kN (C)} & N_{11} &= +46,1 \text{ kN (T)} \\ N_{10} &= -125,17 \text{ kN (C)} & N_{12} &= 0 \end{aligned}$$

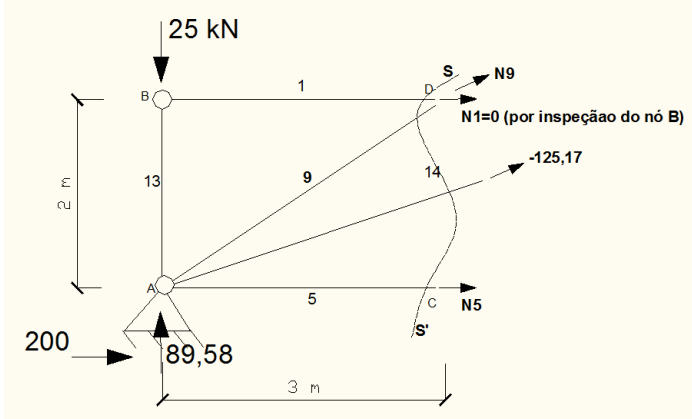
$$\Sigma M_A = 0: 12 \cdot R_b + 2 \cdot 200 = 3 \cdot 25 + 6 \cdot 25 \rightarrow R_b = -14,58 \text{ kN} \downarrow$$

$$\Sigma F_y = 0: R_a - 14,58 = 75 \rightarrow R_a = 89,58 \text{ kN} \uparrow$$

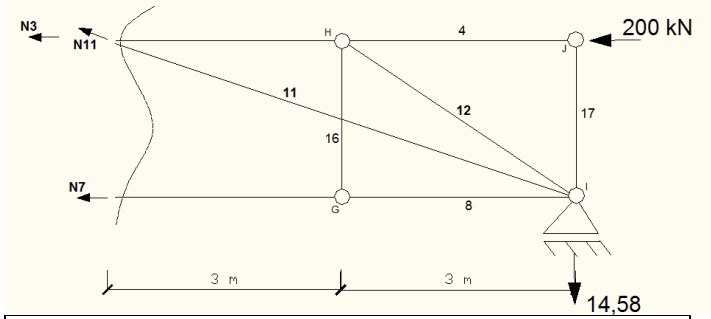
$$\sum F_x = 0: \quad R_{Ax} = 200kN \quad \rightarrow$$



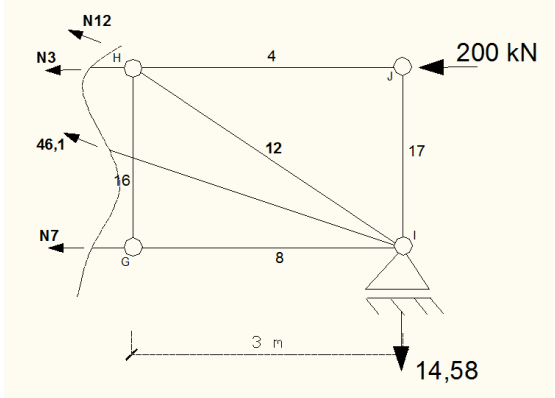
$$\sum F_y = 0: \quad N_{10}.\text{sen}\theta + 89,58 = 50 \rightarrow N_{10} = -125,17kN \text{ (C)}$$



$$\sum M_c = 0: \quad N_9.\cos\alpha.2 + 89,58*3 = 125,17*\cos\theta.1 + 25.3 \rightarrow N_9 = -45,1kN \text{ (C)}$$

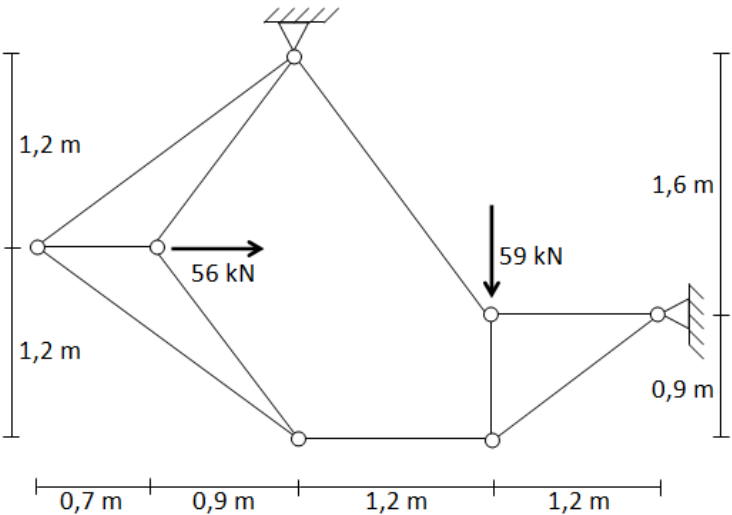


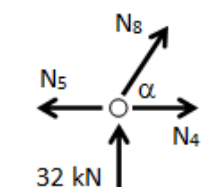
$$\sum F_y = 0: \quad N_{11}.\text{sen}\theta = 14,58 \rightarrow N_{11} = 46,1 \text{ kN (T)}$$



$$\sum F_y = 0: \quad N_{11}.\text{sen}\theta + N_{12}\text{sen}\alpha = 14,58 \rightarrow N_{12} = 0$$

E51) (Dimas, 2012) Considere a treliça isostática da figura abaixo. Calcule o valor do esforço normal de todas as barras, indicando-o junto à barra correspondente em kN. Deve ser obedecido o critério de sinal apresentado em sala de aula.

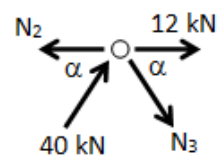




$sen \alpha = 0,8 ; cos \alpha = 0,6$

$\sum F_V = 0 \rightarrow N_8 sen \alpha = -32 \rightarrow N_8 = -40 \text{ kN}$

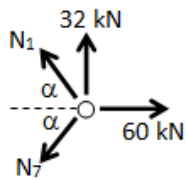
$\sum F_H = 0 \rightarrow N_4 - N_5 - 40 cos \alpha = 0 \rightarrow N_4 = N_5 + 24$



$sen \alpha = 0,8 ; cos \alpha = 0,6$

$\sum F_V = 0 \rightarrow N_3 sen \alpha - 40 sen \alpha = 0 \rightarrow N_3 = 40 \text{ kN}$

$\sum F_H = 0 \rightarrow N_2 - 12 - 2(40 cos \alpha) = 0 \rightarrow N_2 = 60 \text{ kN}$

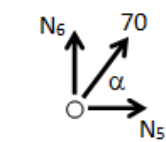


$sen \alpha = 0,8 ; cos \alpha = 0,6$

$\sum F_V = 0 \rightarrow -32 + (N_7 - N_1) sen \alpha = 0 \rightarrow N_7 = N_1 + 40$

$\sum F_H = 0 \rightarrow (N_7 + N_1) cos \alpha - 60 = 0 \rightarrow N_1 = 100 - N_7$

$N_1 = 100 - N_1 - 40 \rightarrow N_1 = 30 \text{ kN} ; N_7 = 70 \text{ kN}$



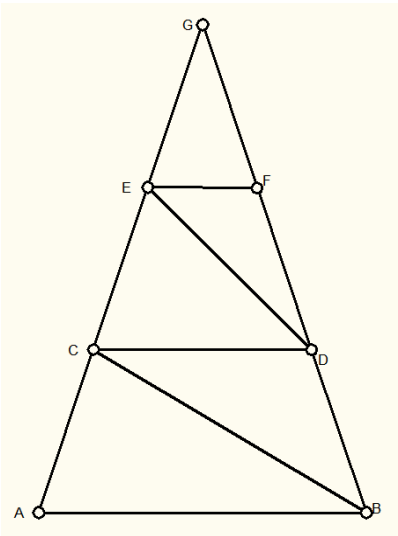
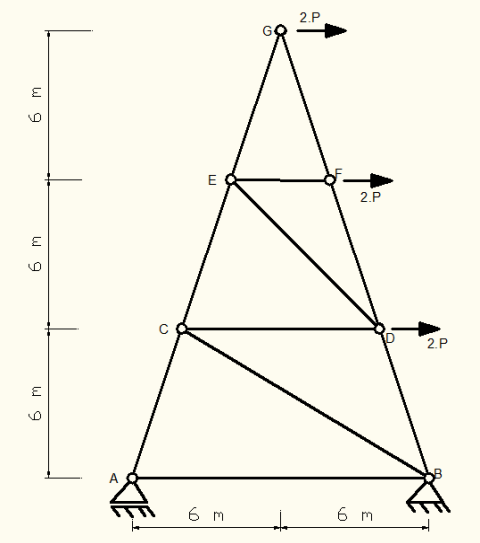
$sen \alpha = 0,8 ; cos \alpha = 0,6$

$\sum F_V = 0 \rightarrow N_6 = -70 sen \alpha = -56 \text{ kN}$

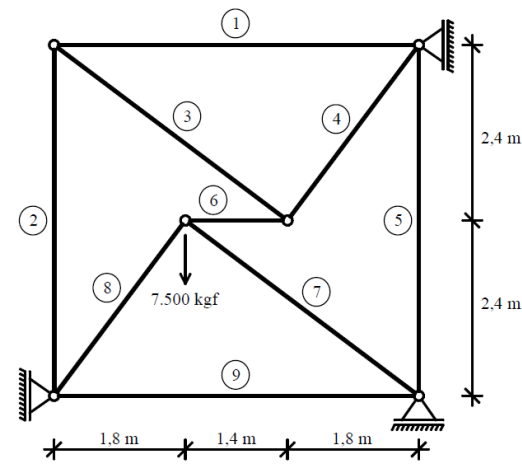
$\sum F_H = 0 \rightarrow N_5 = -70 cos \alpha = -42 \text{ kN}$

$N_4 = N_5 + 24 = -18 \text{ kN}$

- E52) a) Determinar os esforços em todas as barras da treliça a seguir, em função de P . Indicar seus valores no desenho à direita.
- b) Com base nos valores do item a) e sabendo-se que as barras são de mesmo material e área, e que resistem, no máximo, a forças normais de 96 kN à tração e 60 kN à compressão, obtenha o máximo valor de P que possa ser aplicado ($P_{\max}$), para que nenhuma barra tenha valores maiores que os limites indicados.

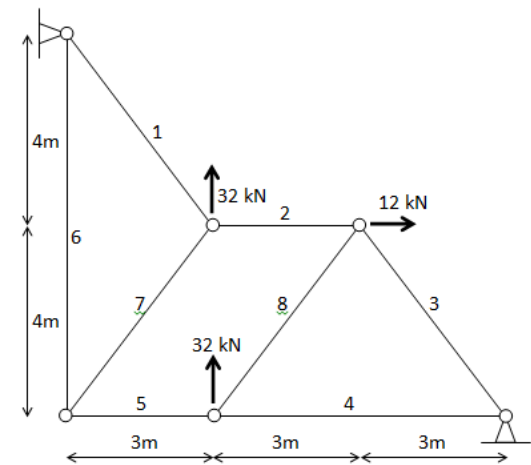


- E53) (Brito) Para a treliça a seguir, determine os esforços normais de todas as barras.



Barra	N (kgf)
1	3.200
2	2.400
3	-4.000
4	3.000
5	-2.400
6	5.000
7	-8.500
8	-3.000
9	6.800

- E54) Considere a treliça isostática da figura abaixo. Calcule o valor do esforço normal de todas as barras, indicando-o junto à barra correspondente em kN.

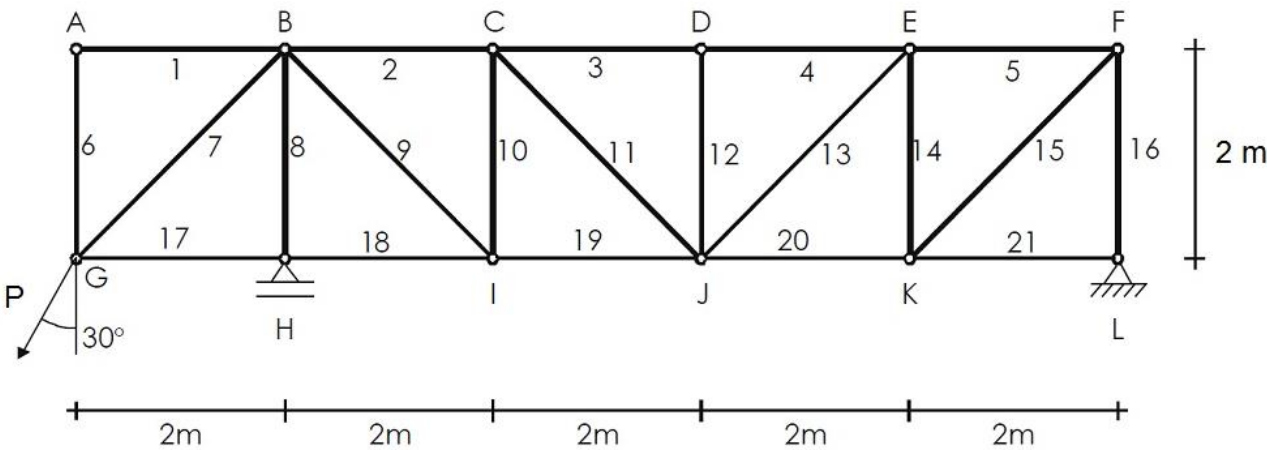


Barra	N(kN)
1	30
2	60
3	40
4	-18
5	-42
6	-56
7	70
8	-40

E55) Um engenheiro estrutural foi contratado para avaliar a treliça que é usada numa ponte em atividade no norte de Minas Gerais. Ele tem que apresentar um relatório sobre as restrições de uso da ponte com base na análise **apenas das barras 3, 11 e 19**. Isto, pois elas estão em processo adiantado de deterioração, conforme observado numa avaliação técnica realizada *a priori*. Todavia, por questões de logística, essas barras não podem ser substituídas, tendo-se que limitar seu uso nas ações. Assim:

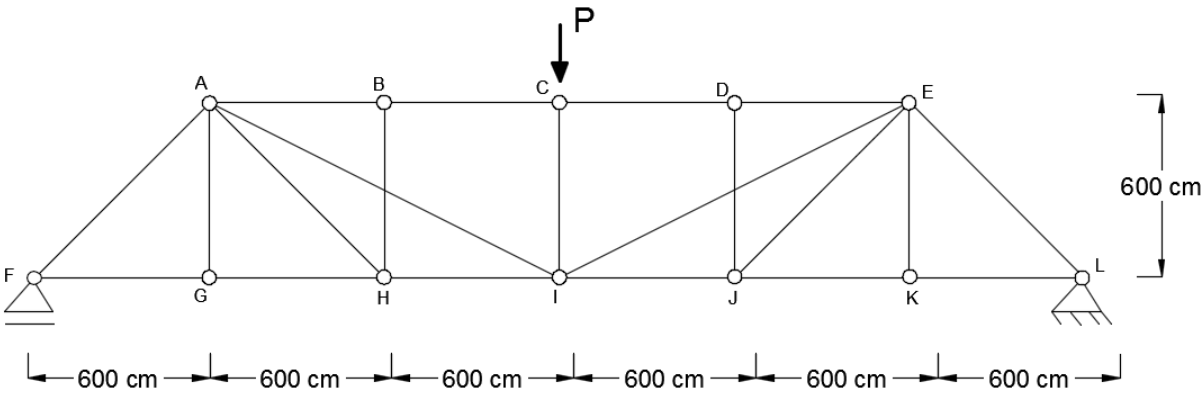
- Determine seus esforços normais em função de P;
- Após um ensaio destrutivo realizado em outras barras com o mesmo grau de deterioração, estabeleceu-se um valor máximo de esforço normal de tração e compressão para essas barras. Esses valores limites são de 10 kN para tração e 6 kN para compressão. **Obtenha o maior valor de P** que pode ser aplicado para que os valores solicitantes nessas barras não ultrapassem esses limites de projeto.

Escreva os valores obtidos nos espaços indicados na resposta.

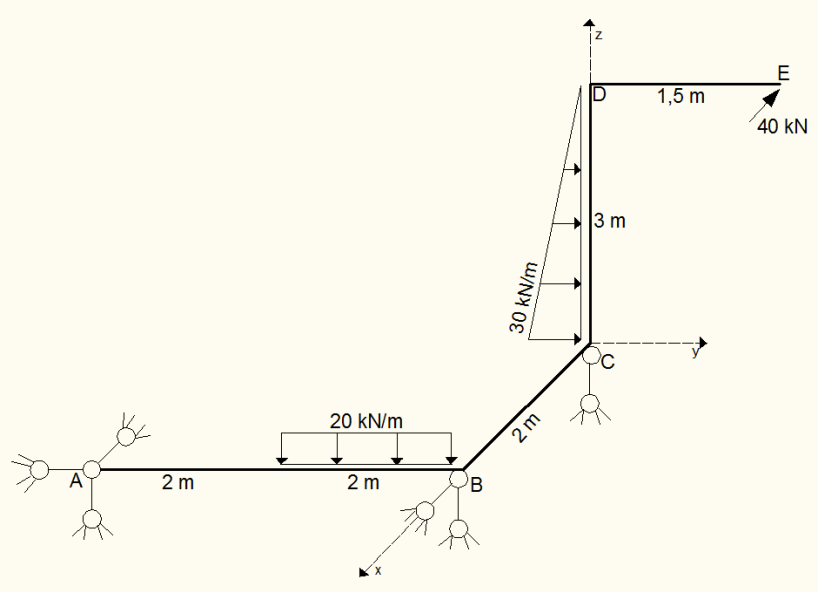


E56) Para a treliça a seguir:

- Obtenha os esforços normais de todas** as barras em termos de P;
- Sabendo-se que todas as barras são de aço e aferiu-se que, por análise experimental, o máximo valor admissível de força a tração delas é de 1100 kN e 900 kN a compressão, **determine o máximo valor de P** que não leve a que esses limites sejam ultrapassados, por segurança estrutural.



E57) Determine as reações de apoio da estrutura a seguir. O trecho AB é paralelo ao eixo y, com a força distribuída constante atuando na metade dessa barra e linha de ação da sua resultante é paralela ao eixo z. O trecho BC está contido no eixo x. O trecho CDE está no plano yz, com o carregamento distribuído linearmente atuando em toda a barra CD e resultante paralela ao eixo y. A força concentrada no ponto E possui direção paralela ao eixo x.



Resolução:

$$\sum F_x = 0: \quad A_x + B_x = 40 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0: \quad A_y = 45 \text{ kN} \quad (\leftarrow)$$

$$\sum F_z = 0: \quad A_z + B_z + C_z = 40 \quad (2)$$

$$M_x = d_y \cdot F_z - d_z \cdot F_y$$

$$M_y = d_z \cdot F_x - d_x \cdot F_z$$

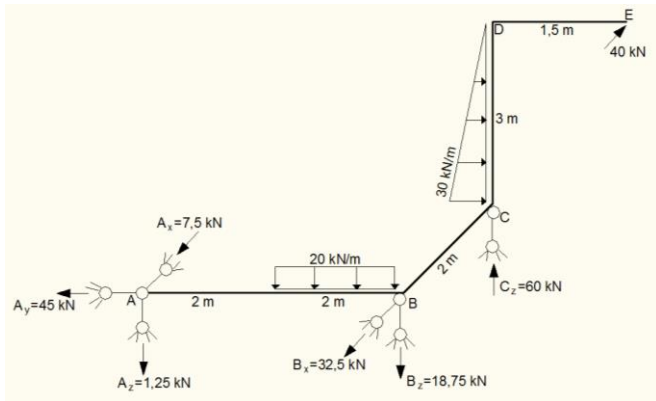
$$M_z = d_x \cdot F_y - d_y \cdot F_x$$

$$\sum M_x = 0: \quad -40 \cdot (-1) + A_z \cdot (-4) - (45) \cdot (1) = 0 \quad \rightarrow A_z = -1,25 \text{ kN}$$

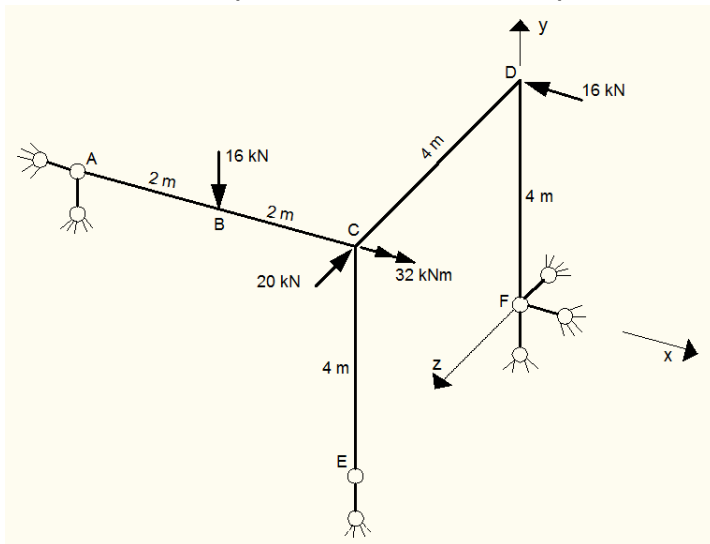
$$\sum M_y = 0: \quad -40 \cdot (3) - [(-40) \cdot (2) + B_z \cdot (2) + A_z \cdot (2)] = 0 \quad \rightarrow B_z = -18,75 \text{ kN}$$

$$\sum M_z = 0: \quad -45 \cdot (2) - [(-40) \cdot (1,5) + A_x \cdot (-4)] = 0 \quad \rightarrow A_x = 7,5 \text{ kN}$$

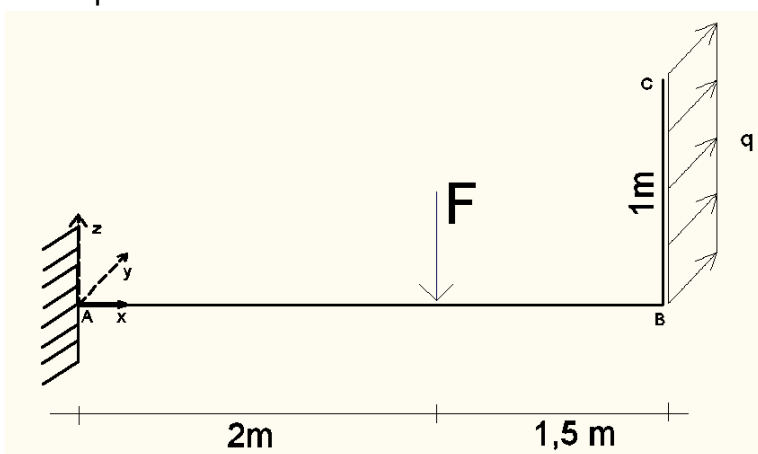
$$\text{Portanto: } B_x = 40 - 7,5 = 32,5 \text{ kN}$$



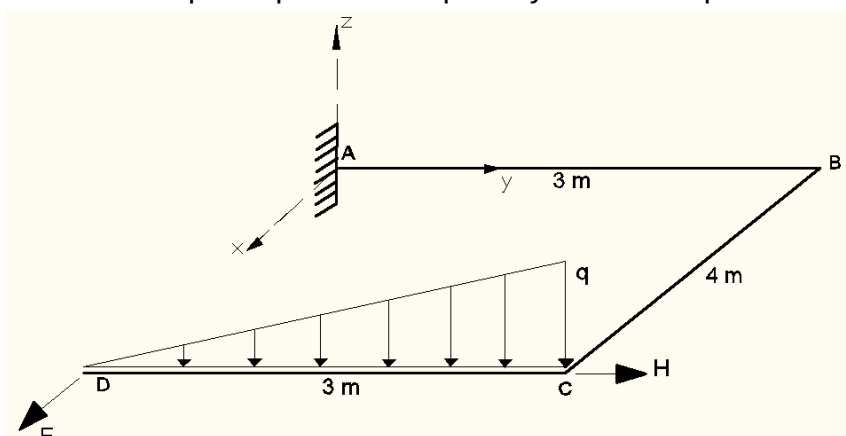
E58) Traçar os esforços solicitantes (N, T, V e M) do pórtico tridimensional nos eixos indicados. As forças concentradas estão aplicadas no ponto B, C e D, bem como o momento concentrado no ponto C e todas estão paralelas aos eixos do sistema xyz, conforme desenho.



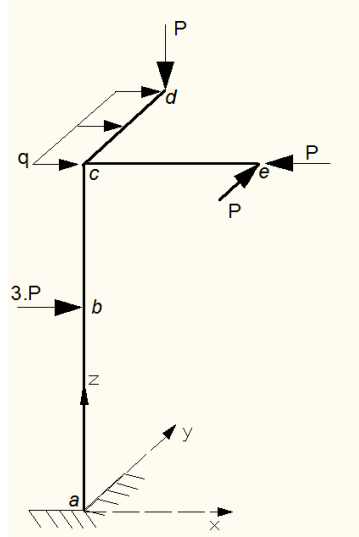
E59) Determine os diagramas de esforços solicitantes da estrutura apenas no trecho AB. Os trechos AB e BC são paralelos, respectivamente, aos eixos x e z. Adote a força $F = 30 \text{ kN}$ que atua na direção z e $q = 12 \text{ kN/m}$, paralelo ao eixo y. Indicar os diagramas nos desenhos em destaque.



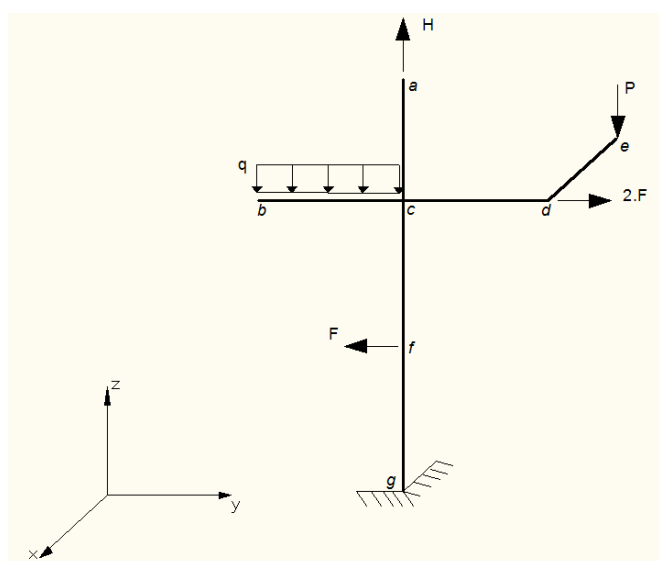
E60) Determine os diagramas de esforços solicitantes da estrutura apenas nos trechos AB e BC. Os trechos AB e DC são paralelos ao eixo y, bem como a força $H = 50 \text{ kN}$. A barra BC e a força $F = 70 \text{ kN}$ são paralelas ao eixo x. Na barra DC atua uma carga distribuída linearmente contida num plano paralelo ao plano yz de valor $q = 25 \text{ kN/m}$, conforme indicado.



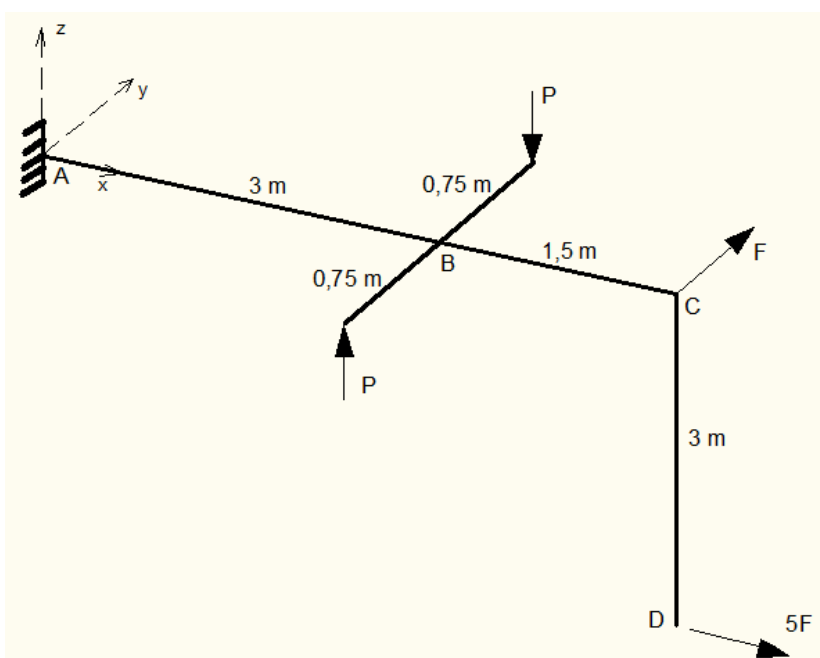
E61) Determinar os esforços solicitantes (M,V, T e N) no pórtico tridimensional. As forças são paralelas aos eixos do sistema xyz, conforme indicado. Dados: As coordenadas dos pontos são, em metros: a(0;0;0), b(0;0;4), c(0;0;8), d(0;3;8), e(2;0;8). $P = 20 \text{ kN}$; $q = 10 \text{ kN/m}$.



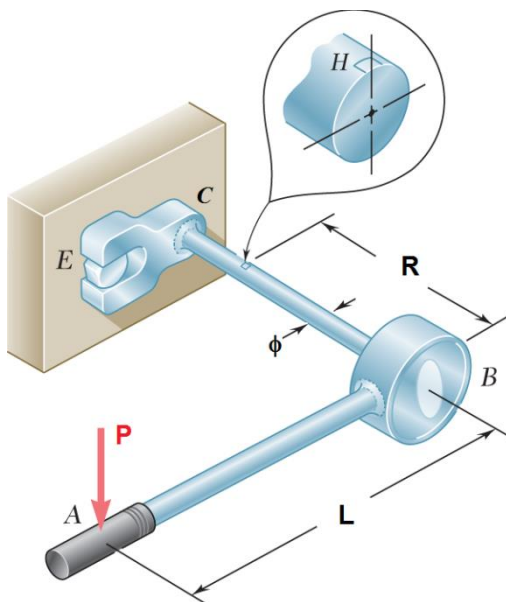
E62) Determinar os esforços solicitantes (M,V, T e N) no pórtico tridimensional. As forças são paralelas aos eixos do sistema xyz, conforme indicado. Dados: As coordenadas dos pontos são, em metros: a(0;0;30), b(0;-12;24), c(0;0;24), d(0;12;24), e (-10;12;24), f(0;0;12) e g(0;0;0). $H = P = 180 \text{ kN}$; $F = 120 \text{ kN}$; $q = 12 \text{ kN/m}$.



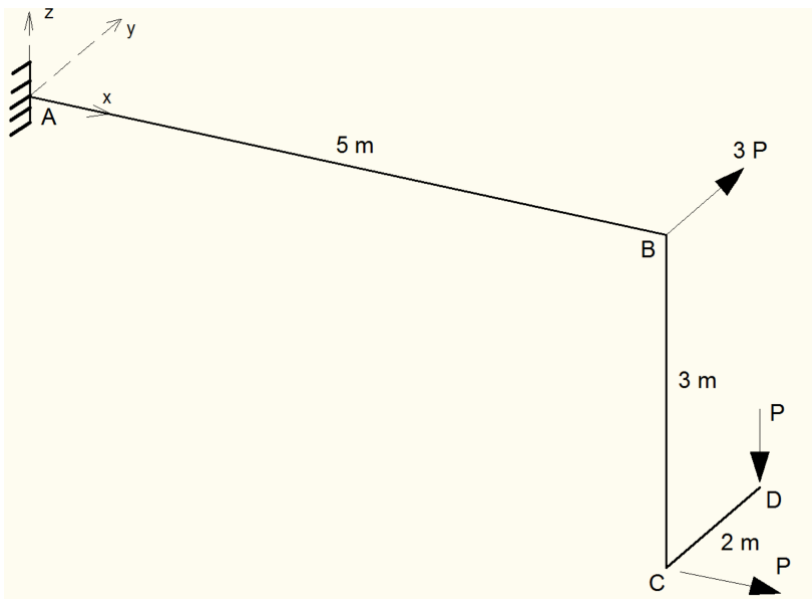
E63) Para o pórtico tridimensional, **determine os diagramas de esforços apenas na barra ABC**. Todas as forças estão paralelas aos eixos indicados. Os comprimentos das barras estão descritos no desenho. Apresentar os diagramas nos desenhos da resposta, seguindo a convenção de aula.



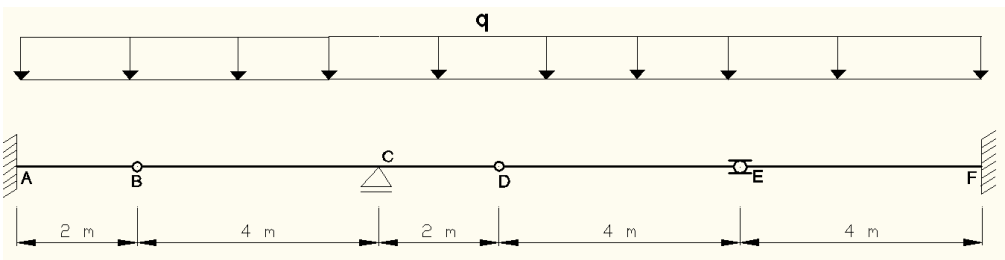
E64) Uma chave de aranha é usada para desapertar um parafuso que representa um engaste, conforme figura. Sabendo que a força P exercida é de 1 kN , e suas dimensões sejam de $L = 30 \text{ cm}$, $R = 20 \text{ cm}$, distância BC de 25 cm e seu eixo maciço BC tem diâmetro $\phi = 2 \text{ cm}$. Determine todos os diagramas de esforços nos trechos ABC.



E65) Seja a estrutura formada pelas barras AB, BC e CD, engastada em A. Considere que as barras e as ações atuem paralelos aos respectivos eixos indicados no desenho e admita $P = 500 \text{ kN}$. Determine os diagramas de esforços de toda a estrutura.

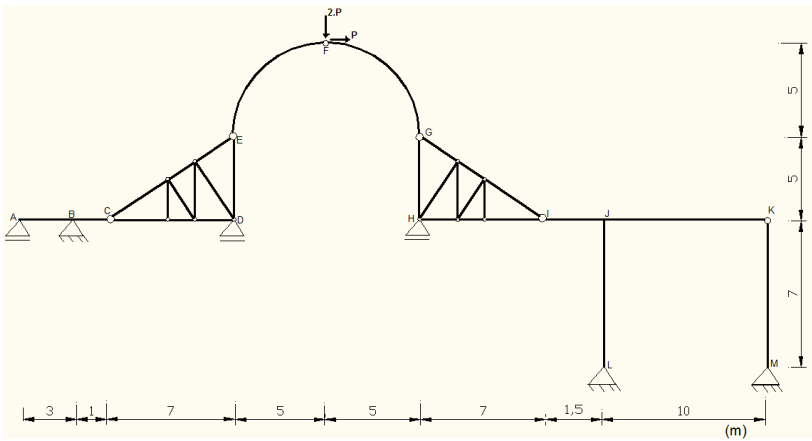


E66) Para a viga Gerber a seguir, sabendo-se que a carga distribuída é igual a 2 kN/m , determine as reações de apoio e os diagramas de esforços cortante e momento fletor de toda a viga. Indique os valores de extremos dos momentos. Esquematize os valores no desenho da resposta.



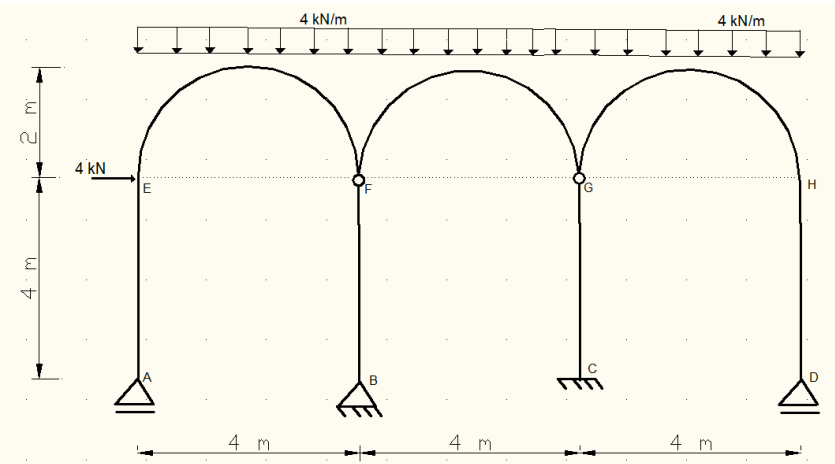
E67) Para a estrutura associada a seguir, pedem-se:

- Decompor a estrutura associada nas subestruturas que a compõem;
 - Obtenha os carregamentos que atuam em cada subestrutura;
 - Diagramas de forças normais e de momentos fletores nos pilares LJ e MK e na viga IK.
- Dado: $P = 10 \text{ kN}$.

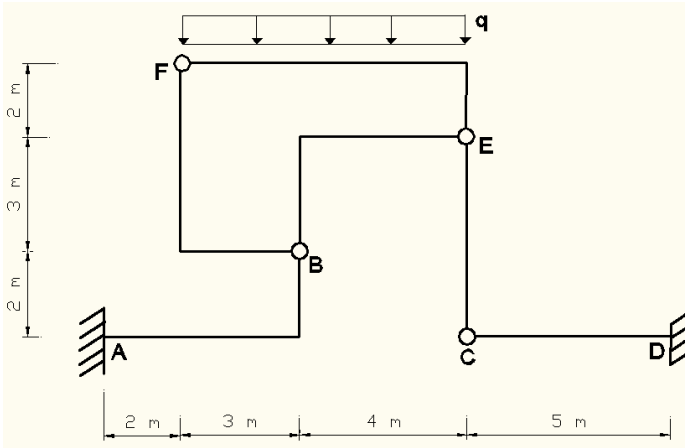


E68) Para a estrutura associada abaixo, determinar:

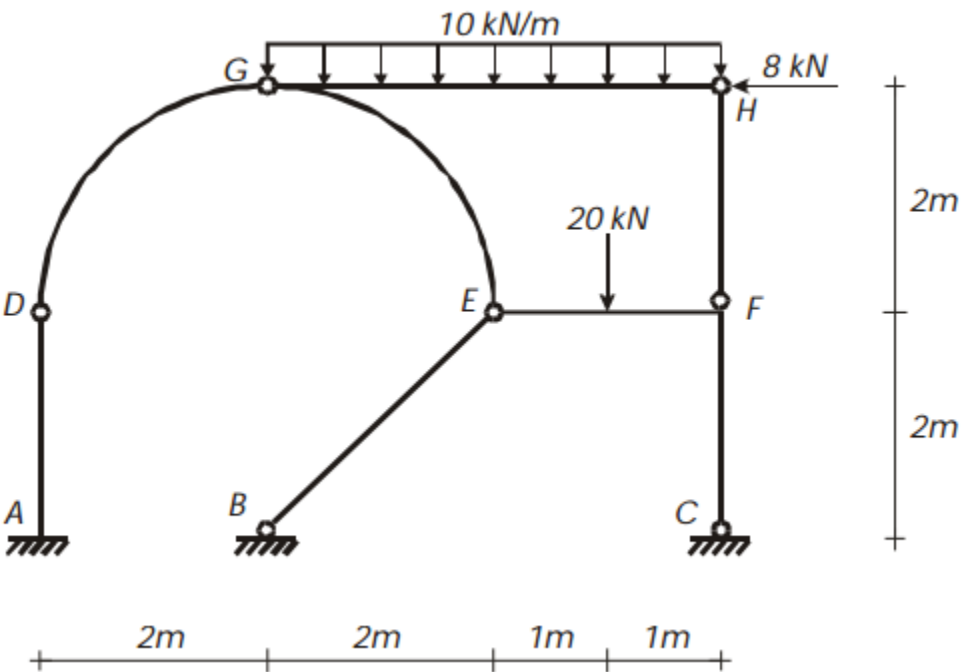
- As subestruturas que a compõem com seus respectivos nomes;
- As reações em A, B, C e D;
- Diagramas de esforços normais e de momentos fletores dos pilares AE, BF, CG e DH.



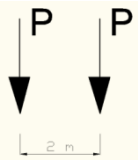
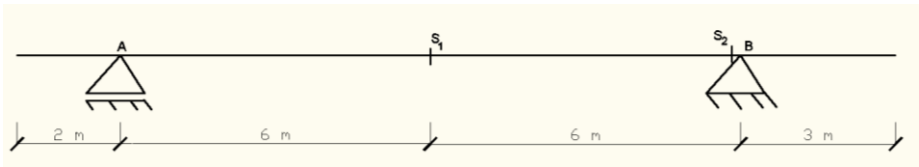
- E69) Na estrutura associada da figura, com a força uniformemente distribuída de 10 kN/m aplicada conforme indicado, determine:
- a) as subestruturas e as suas denominações;
 - b) o diagrama de esforço normal e de momento fletor nos trechos AB e CD.
 - c)



- E70) Para a estrutura associada a seguir, com os carregamentos indicados, determine:
- a) Reações em A, B e C;
 - b) Esforços apenas no trecho EFC.



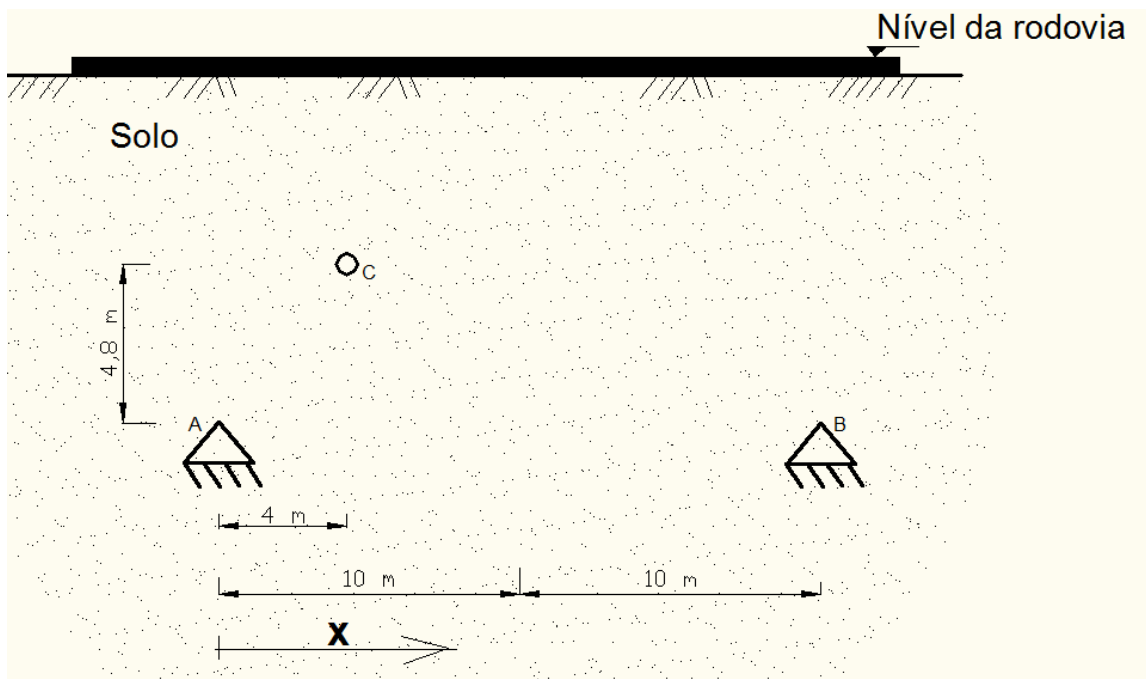
- E71) A viga de uma ponte possui peso próprio de $g = 25 \text{ kN/m}$, carga móvel de $p = 15 \text{ kN/m}$ e um veículo-tipo indicado a seguir. Ela deve ser dimensionada para a passagem do veículo-tipo com segurança. Sabe-se que a ponte deve resistir a um cortante máximo em módulo de 350 kN, e que o momento máximo e mínimo não devem exceder a 1000 kN.m e 450 kN.m, respectivamente, ambos indicados em módulo. Obtenha o máximo valor da carga por eixo – $P_{\max}$ - para que ela trabalhe com segurança. Avalie apenas o cortante máximo em módulo e o momento mínimo na seção S_2 e o momento máximo em S_1 . Indicar explicitamente todas as passagens de cálculo e o valor de $P_{\max}$ no espaço indicado na resposta.



- E72) Um arco deve ser construído sob uma rodovia que está apoiado no maciço de solo, conforme indicado na figura. Ele deve estar submetido apenas a esforços de compressão, mediante a forma de linha de pressões. Por simplicidade, considere apenas a carga sobre o arco advinda do conjunto rodovia-lâmina de solo e que seja um carregamento vertical de cima

para baixo distribuído constantemente de valor 50 kN/m. A rótula em C deve ser posicionada a 4 metros do seu apoio A, e a uma altura de 4,8 m. As fundações dos apoios do arco - pontos A e B - devem ser posicionadas no mesmo nível. Para essa situação:

- Esquematize no desenho abaixo a (i) **geometria desse arco**; (ii) indique a **cota da maior altura do arco**, bem como (iii) **explícite a(s) função (ões) que rege sua linha de pressões**;
- Determine os **esforços normais** do arco em $x = 4$ m; $x = 10$ m e $x = 15$ m.



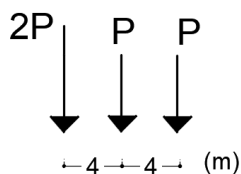
E73) Para a viga a seguir, com sua seção transversal quadrada de lado h :

- Determine as linhas de influência de esforço cortante nas seções S_2 , S_3 e S_4 ;
- Determine as linhas de influência de momento fletor nas seções S_1 , S_3 e S_4 ;
- Obtenha os máximos valores positivos e negativos de momento fletor nas seções S_3 e S_4 , em kN.m, adotando;

Peso próprio: $g = 20$ kN/m

Carga de multidão: $p = 30$ kN/m

Veículo-tipo com $P = 60$ kN (ver figura ao lado)



- Com os extremos obtidos no item (c), obtenha a menor dimensão admissível de h , usando as seguintes condições de dimensionamento a tração e compressão:

$$h^3 \geq \frac{6 \cdot |M|}{20.000} \quad (\text{para momentos fletores positivos})$$

$$h^3 \geq \frac{6 \cdot |M|}{30.000} \quad (\text{para momentos fletores negativos})$$

Onde M é o momento extremo, o qual deve ser empregado em (kN.m) e h resulta em metros.

