



ESCOLA POLITÉCNICA DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnicas

**NOTAS DE AULA DE
RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS E ESTRUTURAS**

**Prof. Valério S.Almeida
2015**

SUMÁRIO

1 REAÇÕES E ESFORÇOS	7
2. ESFORÇOS SOLICITANTES GERAIS	13
3. TRELIÇAS PLANAS SIMPLES	23
4. TRAÇÃO E COMPRESSÃO	27
5. CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRIAS DAS SEÇÕES	35
6. ESTUDO DE FLEXÃO EM VIGAS DE SEÇÃO SIMÉTRICA	41
7. ESTUDO DE ESFORÇO CORTANTE EM VIGAS DE SEÇÃO SIMÉTRICA	49
8. FLEXÃO COMPOSTA – TRAÇÃO E COMPRESSÃO CENTRADA	55
9. ESTUDO DE TORÇÃO (TORQUE)	59
10. ESTUDO DE TENSÕES	66
11. CRITÉRIOS DE RESISTÊNCIA	76
12. INTRODUÇÃO AO ESTUDO DA INSTABILIDADE	80
13. VIGAS COMPOSTAS DE DIFERENTES MATERIAIS	83

São Paulo, dezembro de 2015.

Muito ousado da minha parte querer desenvolver um material teórico que aborde de forma adequada e precisa os conceitos da mecânica estática dos corpos rígidos e deformáveis, mais especificamente com ênfase a esse último item nos temas da resistência dos materiais.

De modo que o presente material não tem a intenção e não deve em nenhum momento substituir os assuntos aqui abordados daqueles desenvolvidos com maestria, didatismo e com rigor matemático e físico pelos livros existentes. Destaco para estudo dos conceitos da análise das estruturas as seguintes bibliografias:

- Introdução à Isostática, Eloy Ferraz Machado Jr., EESC-USP, São Carlos, 1999.
- Curso de Análise Estrutural, v.1, José Carlos Sussekind, Ed. Globo.

E para o campo de estudos da resistência dos materiais, referencio:

- Estática e mecânica dos materiais. Ferdinand P. Beer; E. Russell Johnston Jr.; John T. DeWolf; David F. Mazurek. Mc GrawHill, 2013.
- Resistência dos Materiais, Hibbeler, Pearson, Prentice-Hall.
- Mecânica dos Sólidos,(2v), Timoshenko & Gere, LTC, 1994.

Destarte, essa apostila é apenas uma coletânea de notas resumidas que são apresentadas em aula para os alunos de cursos de resistência dos materiais para os cursos de engenharia de materiais, metalúrgica, produção, de minas, etc.. Em paralelo, foi confeccionado outro conjunto de material onde está contido uma série de exercícios complementares sobre os tópicos aqui apresentados.

Bom divertimento.

Valério S. Almeida
Universidade de São Paulo

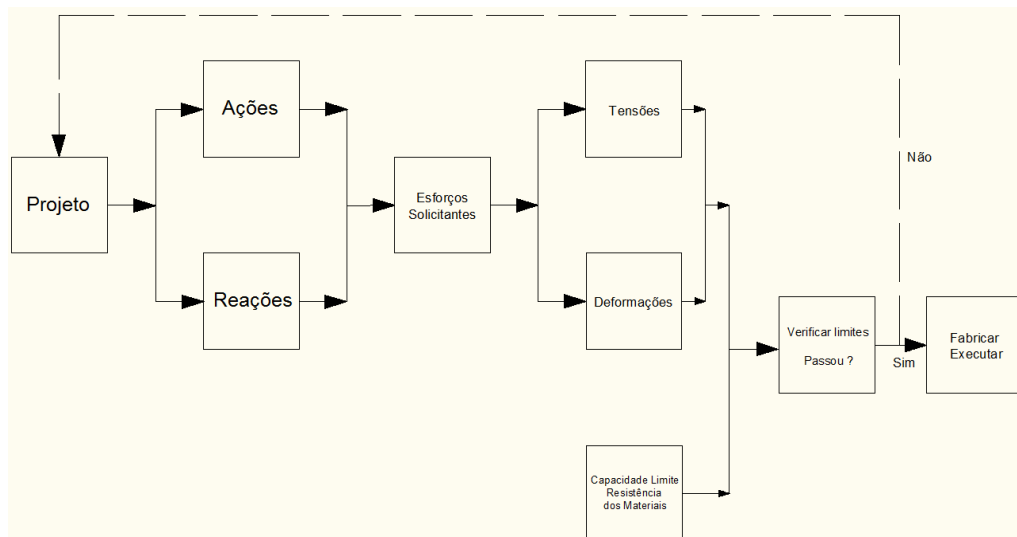
1. Escopo da Resistência dos Materiais

É um ramo da mecânica que estuda as relações entre as ações externas (forças, temperatura, deslocamento imposto) aplicadas aos corpos deformáveis e a intensidade das forças que atuam em seu interior. Procura avaliar o comportamento das diversas partes da estrutura sob essas ações correntes, realizando - numa primeira etapa - a determinação das reações, tensões, deformações e de sua estabilidade. Numa segunda etapa, procede-se e verifica-se o dimensionamento da estrutura frente esses efeitos atuantes, comparando com a capacidade limite de tensões e deformações.

As tensões limites dependem diretamente do tipo de material empregado que são obtidos por ensaios experimentais adequados e estatisticamente tratados. Dessa forma, comparam-se essas tensões limites com as tensões atuantes, dimensionando a peça estrutural/máquina de maneira a garantir que em nenhum ponto esta se rompa.

A limitação de deformações é necessária em face da função estrutural que a peça esteja em uso. Pois mesmo que ela não tenha perigo de ruína, ela pode ter deformações excessivas que comprometa sua utilização na prática.

A resistência dos materiais trata principalmente de estruturas lineares, ou estruturas reticuladas, sendo que a análise de estruturas planas e sólidas é mais comum dentro da teoria da elasticidade. Destaca-se que muitos princípios de projeto preconizados pelas diversas normas na engenharia são baseados nos fundamentos da resistência dos materiais.



Fluxograma de análise/dimensionamento de um problema da mecânica dos corpos deformáveis

Classificação das estruturas:

É comum dentro da mecânica dos corpos deformáveis dividir o estudo dos elementos estruturais em três casos, quanto a sua geometria, figuras 1a e 1b:

- Estruturas lineares (reticuladas): onde uma dimensão é bem superior as outras duas: Eixo de transmissão, postes e pilares.
- Estruturas de superfície (bidimensionais): duas dimensões são superiores a uma terceira: Placas e cascas.
- Estruturas sólidas (tridimensionais): as dimensões possuem a mesma ordem de grandeza: o solo, túneis, blocos de fundação.

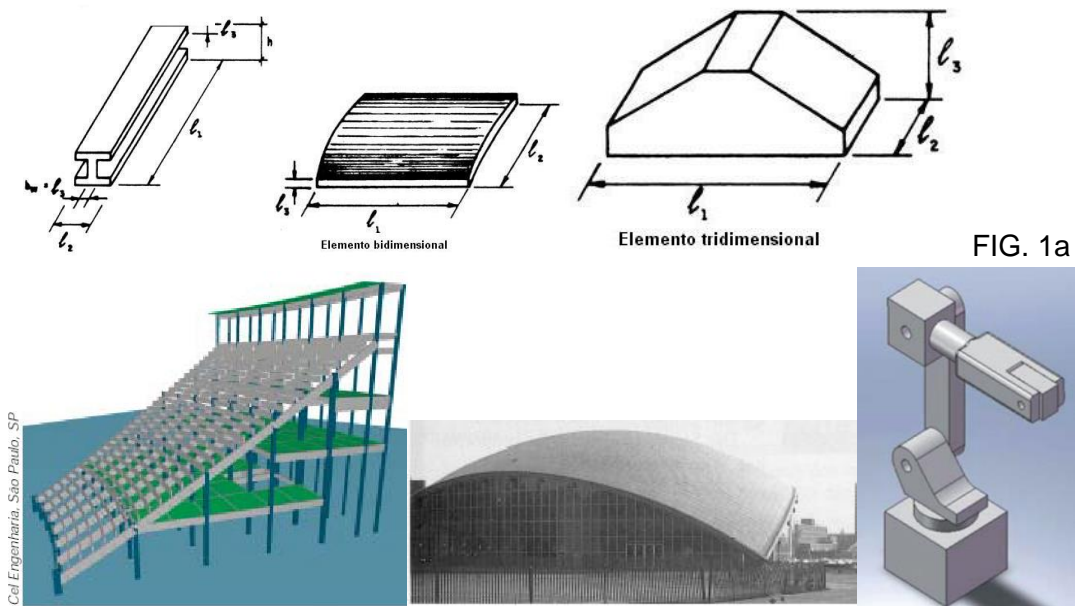


FIG. 1b

O segundo e terceiro tipo de estruturas serão estudados em tópicos específicos devido a sua maior complexidade. Neste curso, será abordado apenas estruturas do primeiro caso, ou seja, formada por elementos lineares, formando as estruturas reticuladas. Assim, se tem as estruturas denominadas de pórticos, vigas, treliças, grelhas, cabos, etc., ou por combinação destes; relacionadas conforme a sua configuração geométrica, tipo de forças atuantes e/ou de suas propriedades mecânicas. Essas estruturas reticuladas serão representadas apenas pela indicação de seus eixos, veja fig.2.

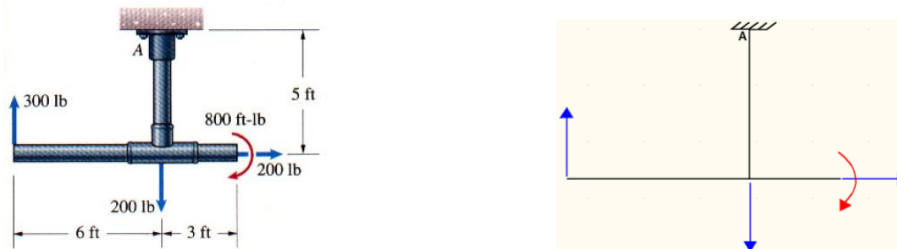


FIG. 2

Equilíbrio dos corpos rígidos

Considere apenas ações que gere estruturas estáticas, de forma a estarem presas, ou melhor, vinculadas em certos pontos que garantam essas condições, portanto, não há acelerações e velocidades, assim pela segunda (2ª.) lei de Newton, o equilíbrio estático deve ser atendido, ou seja:

$$R = m \cdot a = 0 \xrightarrow{a=0} R = 0; \quad \sum R = 0 \quad (\text{Forças}); \quad \sum M = 0 \quad (\text{Momento}),$$

Essas condições de equilíbrio, chamada de Equações Universais da Estática, podem ser decompostas no sistema cartesiano como:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0, & \sum F_y &= 0, & \sum F_z &= 0 \\ \sum M_x &= 0, & \sum M_y &= 0, & \sum M_z &= 0 \end{aligned}$$

Ou caso todas as forças estejam contidas num único plano, bem como as suas reações surgidas devido aos vínculos, também pertencentes ao mesmo plano, é possível então aplicar apenas três dessas equações, levando as equações de equilíbrio no plano:

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum M_A = 0$$

Onde A é um ponto qualquer do plano da estrutura.

Graus de liberdade e apoios (plano)

Um volume infinitesimal no espaço possui seis movimentos ortogonais possíveis: três translações e três rotações. Para o caso plano, reduz-se a duas translações e uma rotação. Os vínculos ou apoios são dispositivos que servem para impedir esses movimentos na estrutura. Os quatro mais comuns tipos de apoios são:

- a) 1º. Gênero ou articulação móvel ou apoio simples: impede uma translação no plano, **nos dois sentidos**, surgindo assim uma força reativa nessa direção;

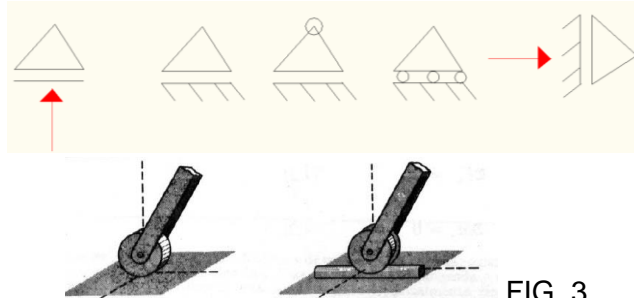


FIG. 3

- b) 2º. Gênero ou articulação fixa/apoiio fixo: impedem duas translações perpendiculares no plano, surgindo duas forças reativas;

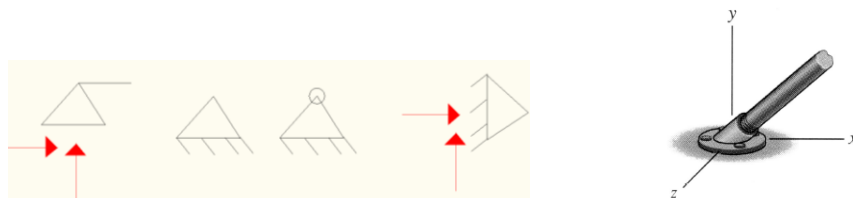


FIG. 4

- c) 3º. Gênero ou engaste: impedem duas translações e uma rotação no plano, surgindo duas reações de forças e uma de momento.

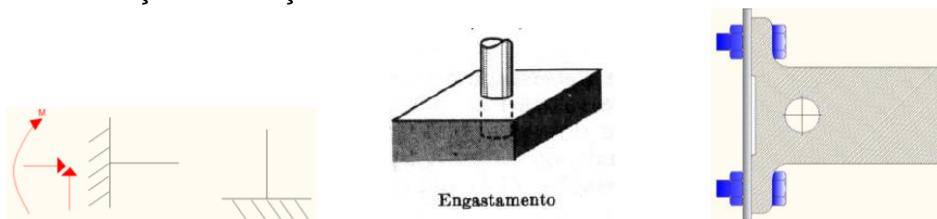


FIG. 5

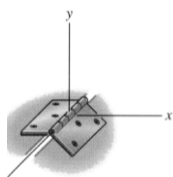


FIG. 6

- d) Rótulas: restringe os deslocamentos perpendiculares, permitindo os giros relativos, dessa forma não surge reação de momento nesse ponto, sendo empregada essa condição como equação complementar, figura 6.

Classificação das estruturas quanto à estaticidade e estabilidade

As estruturas reticuladas com seus apoios podem ser indicadas conforme fig. 2. As equações de equilíbrio fornecem ambas as condições necessárias e suficientes para as condições de equilíbrio. Quando todas as forças em uma estrutura podem ser determinadas estritamente por essas equações, a estrutura é considerada estaticamente determinada. Caso contrário, a estrutura é considerada estaticamente indeterminada, e para sua resolução são necessárias equações adicionais. Assim, três casos podem ocorrer:

- i) $Nr. \text{reações } (r) < Nr. \text{eq. estática } (eq) \rightarrow \text{Estrutura Hipostática} \rightarrow \text{Equilíbrio instável}$
- ii) $Nr. \text{reações } (r) = Nr. \text{eq. estática } (eq) \rightarrow \text{Estrutura Isostática} \rightarrow \text{Equilíbrio estável}$
- iii) $Nr. \text{reações } (r) > Nr. \text{eq. estática } (eq) \rightarrow \text{Estrutura Hiperstática} \rightarrow \text{Equilíbrio estável}$

Essas condições descritas anteriormente além de apenas valerem para estruturas abertas são condições necessárias, mas não suficientes para determinar a estabilidade e estaticidade da estrutura. É necessário certificar-se que os apoios estão restringindo de fato todos os graus de liberdade da estrutura. Veja contra - exemplo:

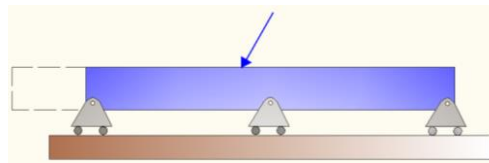
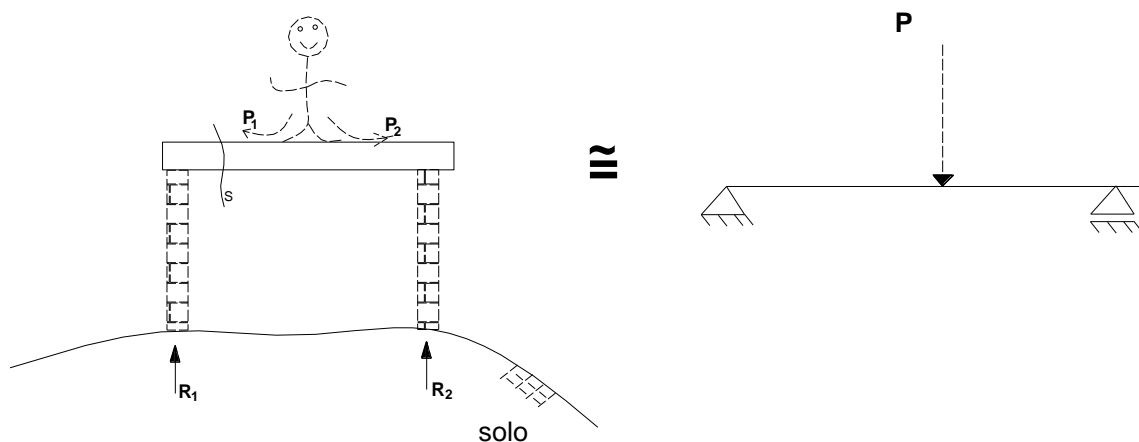


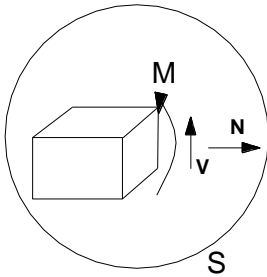
FIG. 7

1.1 REAÇÕES E ESFORÇOS

As noções de força (concentradas ou distribuídas), momentos e tensão são genericamente designados por ESFORÇO, que podem ser:

- i) EXTERNOS: ativos (cargas) e reativos (reações de apoio);
- ii) INTERNOS: esforços solicitantes, tensões.





1.2. CARGAS:

Todas as forças aplicadas à estrutura.

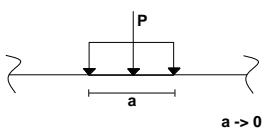
Classificação das cargas.

Quanto à sua ocorrência em relação à frequência:

- i) Cargas permanentes: peso próprio, revestimento, enchimento, etc.
- ii) Cargas acidentais: sobrecargas (móveis, pessoas sentadas), ações de vento, carros percorrendo, etc.

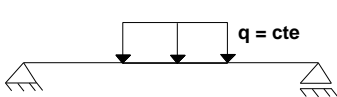
Quanto à forma de distribuição:

- i) Concentradas:

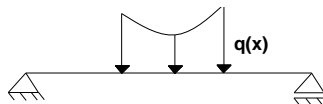


força concentrada

- ii) Distribuídas:

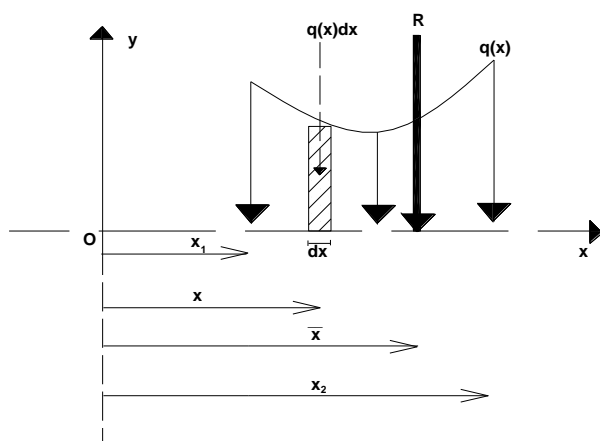


carga distribuída
uniforme



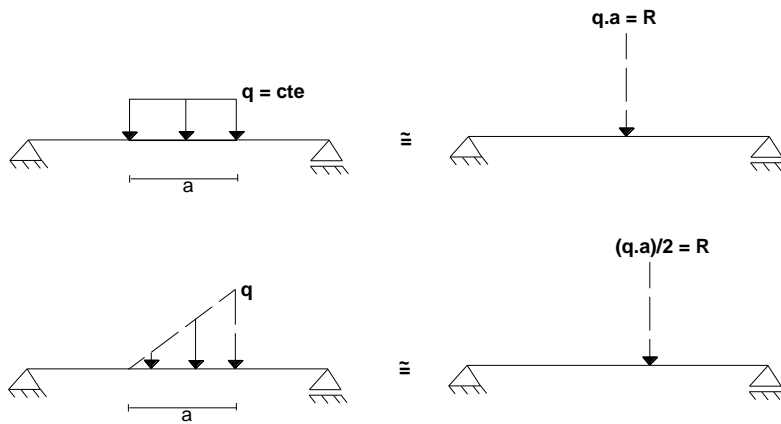
carga distribuída
variável

Como calcular a resultante da carga distribuída?



$$R = \int_{x_1}^{x_2} q(x) \cdot dx = \int dF = \text{Área} \quad (1.1)$$

Ou seja, a resultante é a área formada pela função $q(x)$ e o comprimento $(x_2 - x_1)$.



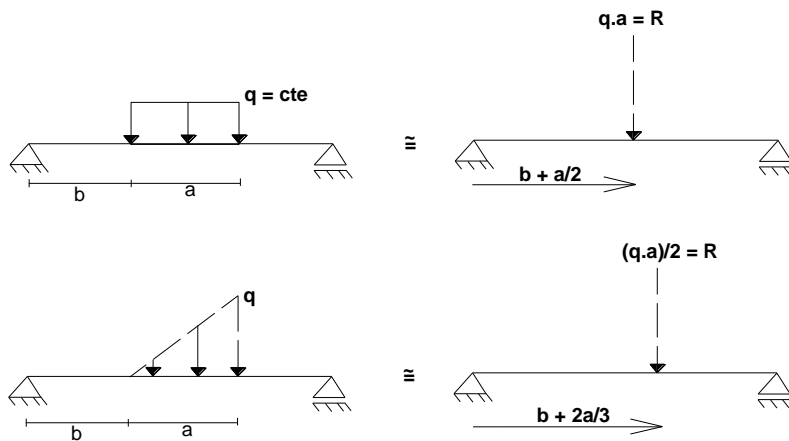
E qual é a posição da resultante (R)?

$$R \cdot \bar{x} = \int_{x_1}^{x_2} q(x) \cdot x \cdot dx \quad (1.2)$$

$$\bar{x} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} q(x) \cdot x \cdot dx}{R} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} q(x) \cdot x \cdot dx}{A} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} q(x) \cdot x \cdot dx}{\int_{x_1}^{x_2} q(x) \cdot dx} \quad (1.3)$$

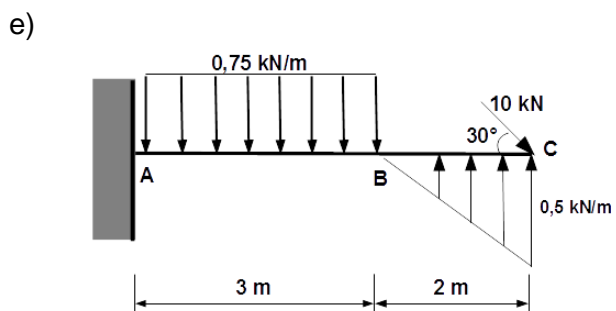
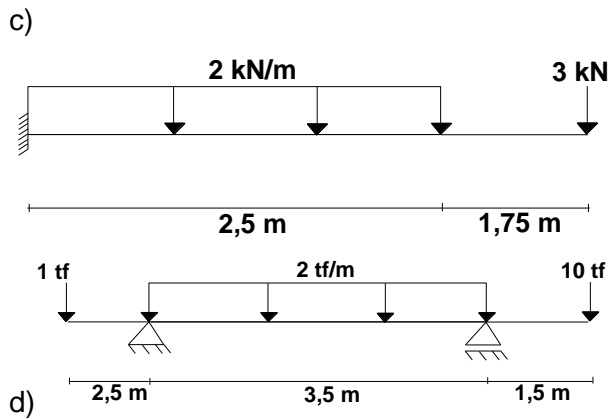
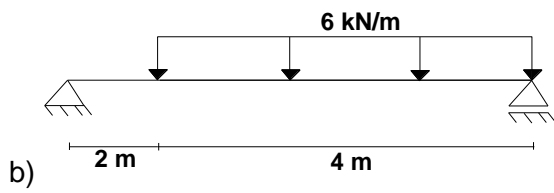
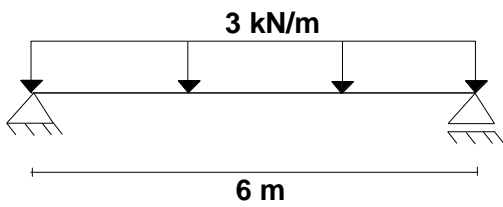
Onde sabemos que é o centro de gravidade (em x) da área.

Por exemplo:

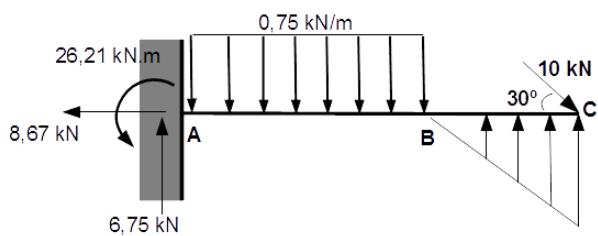


1.3 Exemplos: Calcule as reações das estruturas abaixo:

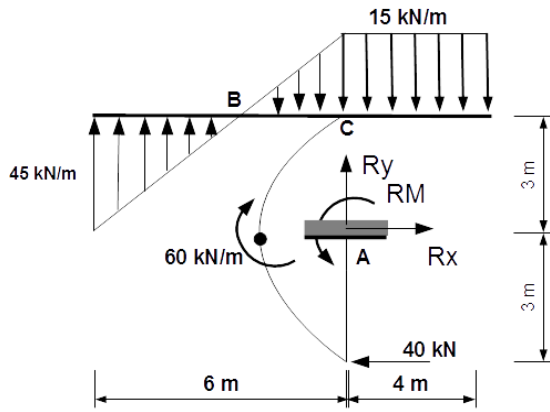
a)



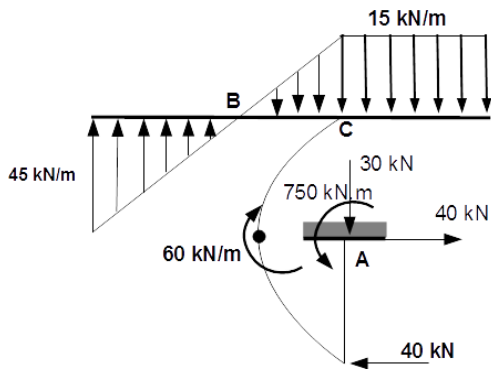
Resposta: $R_x = -8,67 \text{ kN}$
 $R_y = 6,75 \text{ kN}$
 $RM = 26,21 \text{ kN.m}$



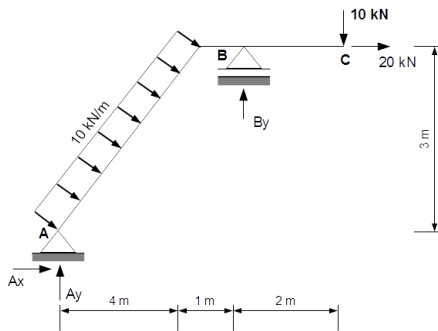
f)



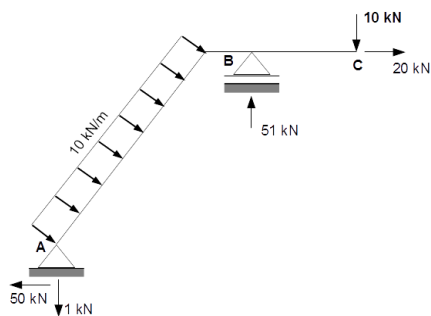
Resposta: $R_x = 40 \text{ kN}$
 $R_y = -30 \text{ kN}$
 $RM = 750 \text{ kN.m}$



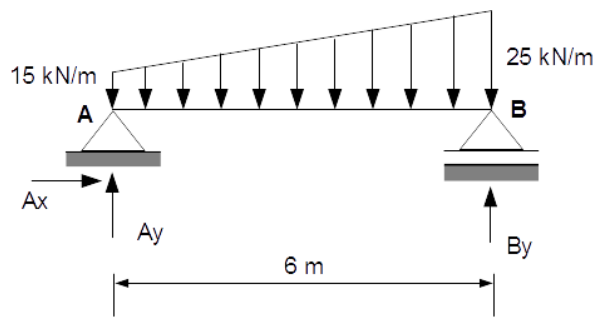
g)



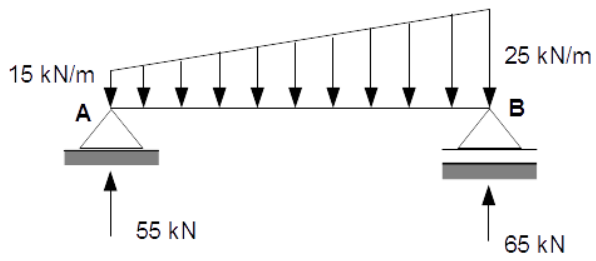
Resposta: $A_x = -50 \text{ kN}$
 $A_y = -1 \text{ kN}$
 $By = 51 \text{ kN}$



h)



Resposta: $A_x = 0$ kN
 $A_y = 55$ kN
 $B_y = 65$ kN



2. ESFORÇOS SOLICITANTES GERAIS

São quatro (4) os esforços solicitantes:

- ESFORÇO NORMAL (N);
- MOMENTO TORÇOR (T).
- ESFORÇO CORTANTE (V);
- MOMENTO FLETOR (M);

Seja então um corpo em equilíbrio sobre a ação de forças externas:

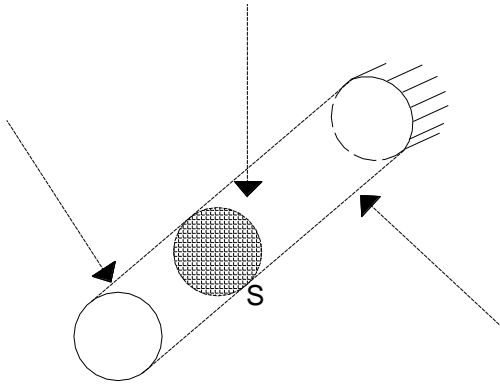


FIG. 1

Façamos um corte S e separemos o corpo pela parte direita:

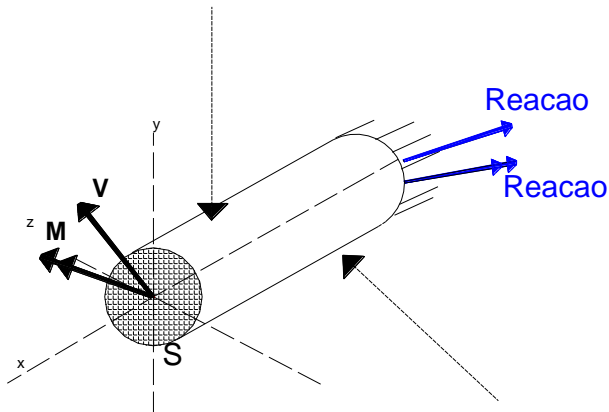


FIG. 2

Podem-se decompor as forças e o momento que aparecem na seção S nos três eixos ortogonais:

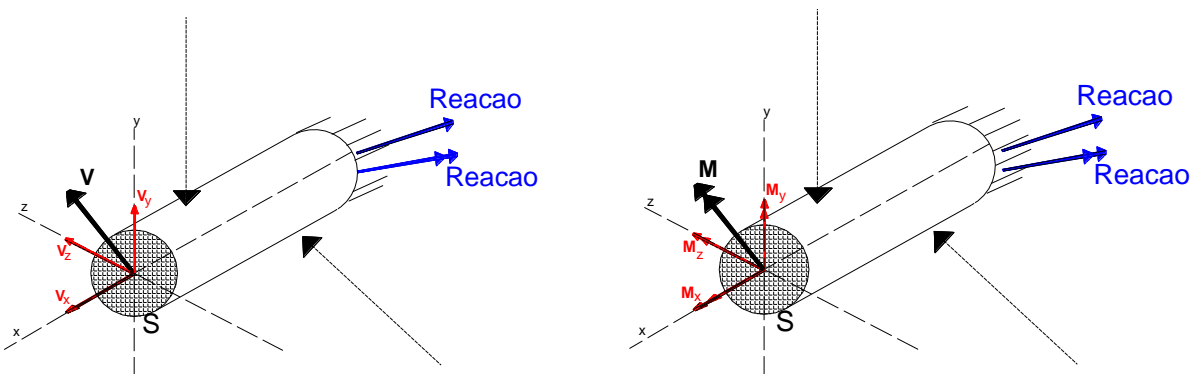


FIG. 3

a) Esforço normal:

A força V_x é denominada por Esforço Normal N , pois ela atua normal (ortogonal) à seção S , e está relacionada ao alongamento ou diminuição do elemento.

b) Momento de Torção:

O momento M_x é denominado de Momento Torçor T . Ele age no sentido de torcer a seção em relação ao eixo.

c) Esforço Cortante:

As componentes V_y e V_z são paralelas à seção S , “cortando” esta, ou melhor, cisalhando-a, por isso recebem o nome de Esforço Cortante ou Cisalhante.

d) Momento Fletor:

As componentes M_y e M_z indicam os esforços de flexionam (“giram”) a seção no eixo de referência.

2.1 ESFORÇOS SOLICITANTES – SISTEMAS PLANOS

Para o caso de cargas somente aplicadas ao plano da estrutura, tem-se somente 3 componentes: M , V e N , dispensando os índices.

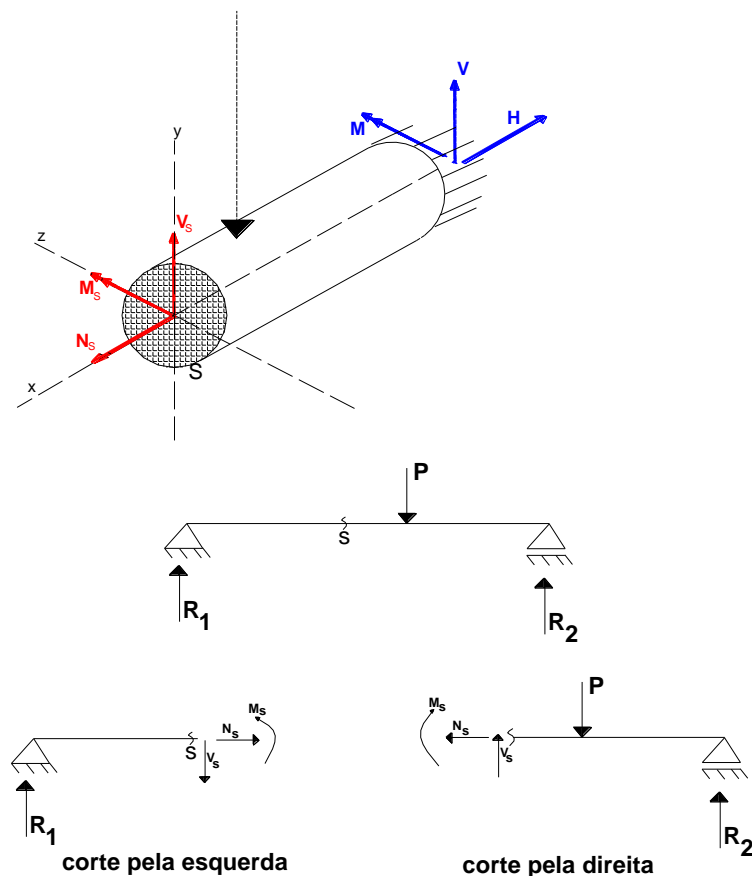


FIG. 4

2.2 CONVENÇÕES DE SINAIS**2.2.1. Esforço normal**

É convenção que o esforço normal é positivo quando o seu sentido é o de sair da seção, ou seja, alongando-a, que se chama na estática de tração.

Caso o esforço esteja entrando na seção, ou seja, diminuindo-a, se chama na estática de compressão e o sinal do esforço normal é negativo. (Fig. 5)

2.2.2. Momento Fletor

O sinal do momento fletor está relacionado com a curvatura da peça fletida e o sentido dos eixos xy. (Fig. 6)

2.2.3. Esforço Cortante

Se a força cortante provoca tendência de rotação horária em relação à seção, a cortante é positiva. Se ela provoca tendência de rotação anti-horária, ela é negativa. (Fig. 7)

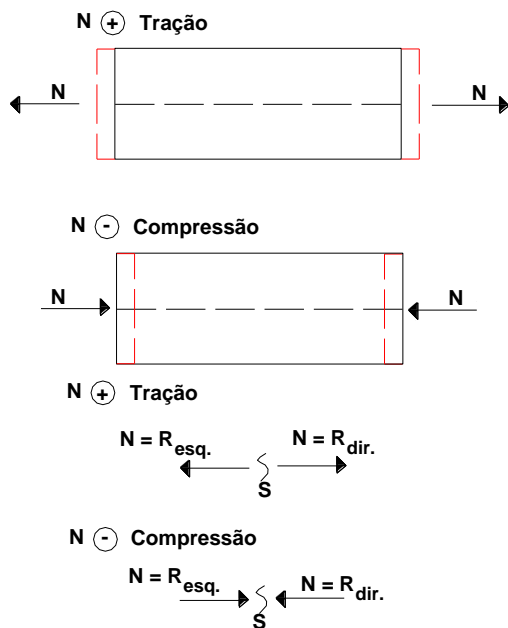


FIG. 5

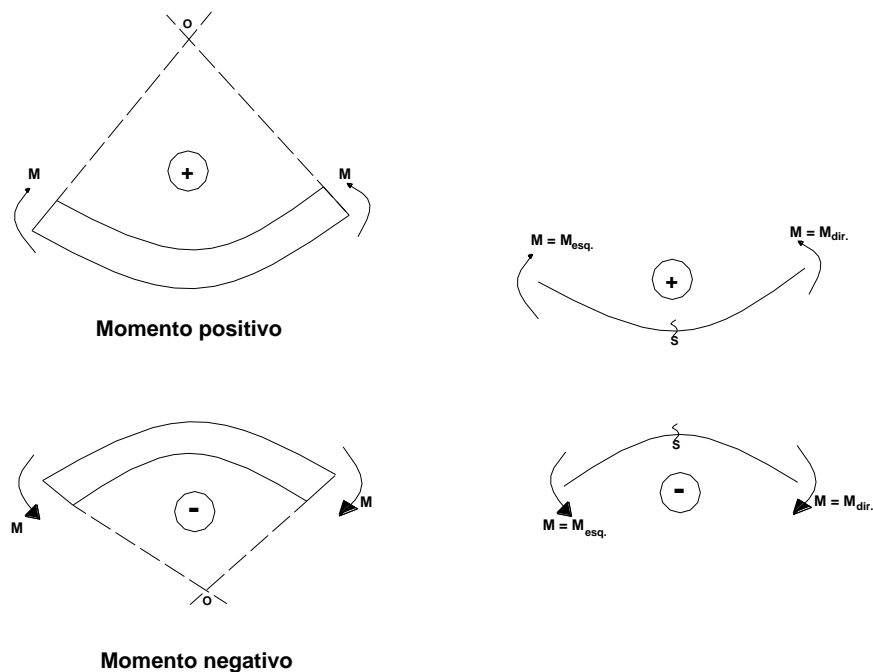


FIG. 6

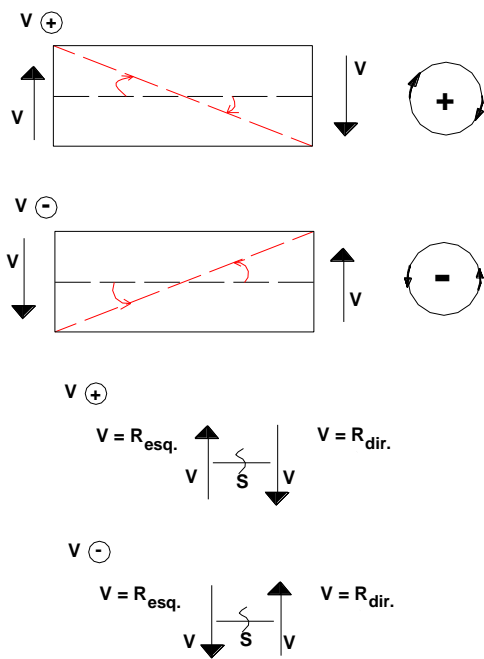
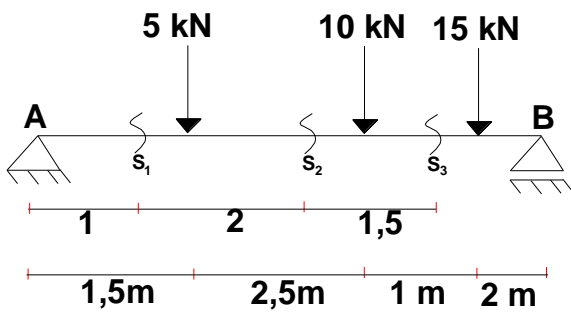


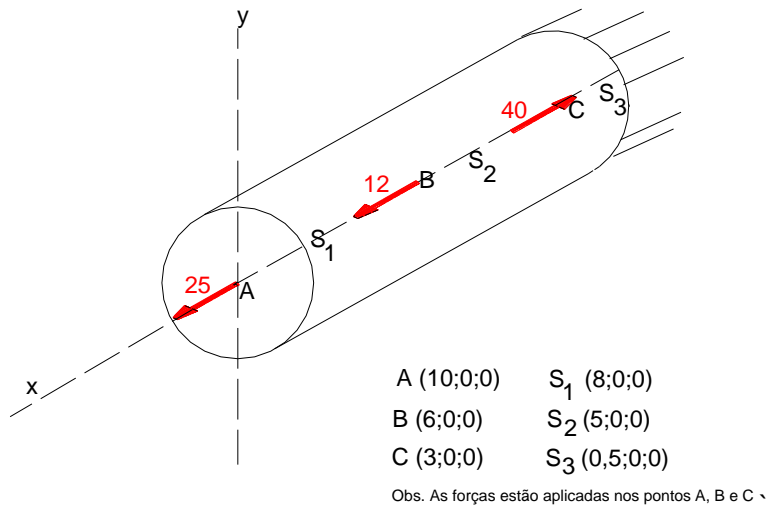
FIG. 7

2.3 Calcule os esforços solicitantes para o carregamento dado nas seções indicadas.

a)



b)



2.4 DIAGRAMA DE ESFORÇOS

Os esforços solicitantes que ocorrem nos elementos estruturais variam de módulo e de sentido ao longo de cada seção transversal. É conveniente expressar esta variação ao longo do eixo mediante uma representação gráfica.

Assim, têm-se os diagramas de esforços internos os quais são desenvolvidos neste item.

Um primeiro estudo que deve ser feito neste sentido é para os elementos estruturais denominados de vigas, onde aparecem apenas esforços internos de momento e cortante (M e V).

2.4.1 Vigas - Relações entre carga, força e momento e Equação Diferencial

Seja um elemento infinitesimal de viga apresentado na figura 8.

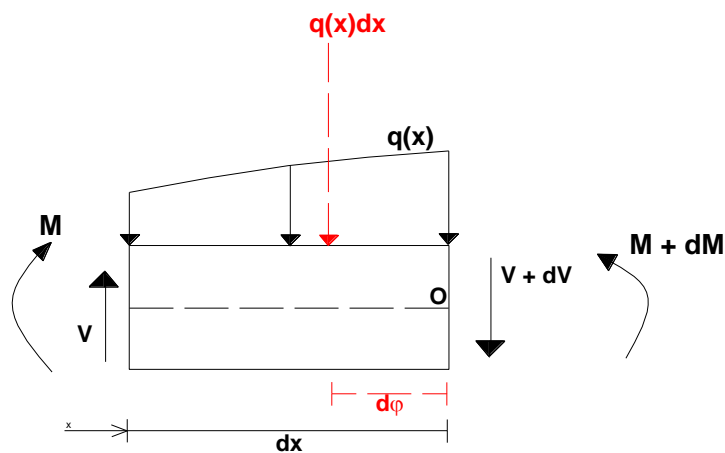


FIG. 8

Com as equações universais de equilíbrio, tem-se:

$$\sum F_y = 0$$

$$V - q(x) \cdot dx - (V + dV) = 0$$

(2.1)

Ou

$$\frac{dV(x)}{dx} = -q(x) \quad (2.2)$$

$$\sum M_o = 0$$

$$(M + dM) + [q(x) \cdot dx] \cdot d\xi - M - V \cdot dx = 0 \quad (2.3)$$

Ou

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x) \quad (2.4)$$

Derivando a relação (2.4):

$$\frac{dV(x)}{dx} = \frac{d^2M(x)}{dx^2} \quad (2.5)$$

Confrontando (2.5) com (2.2), chega-se a equação diferencial que relaciona momento com carga:

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = -q(x) \quad (2.6)$$

Mediante duas integrações sobre a equação (2.6), obtém-se:

$$M(x) = -q(x) \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 \cdot x + C_2 \quad (2.7)$$

E para a cortante:

$$V(x) = -q(x) \cdot x + C_1 \quad (2.8)$$

Onde as constantes C_1 e C_2 são obtidas mediante as condições de contorno de cada problema.

Observações:

a) Caso $q(x) = 0$

Sem carga distribuída no trecho $x_1 \leq x \leq x_2$

$V(x) = C_1 = cte \rightarrow$ Diagrama de esforço cortante (DEC) constante

$M(x) = C_1 \cdot x + C_2 \rightarrow$ Diagrama de momento fletor (DMF) linear

b) Caso $q(x) = q = cte$

Carga distribuída uniforme no trecho $x_1 \leq x \leq x_2$

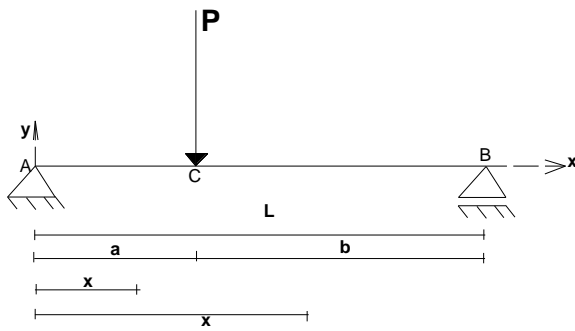
$V(x) = -q \cdot x + C_1 \rightarrow$ Diagrama de esforço cortante (DEC) linear

$M(x) = -q \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 \cdot x + C_2 \rightarrow$ Diagrama de momento fletor (DMF) é uma

parábola

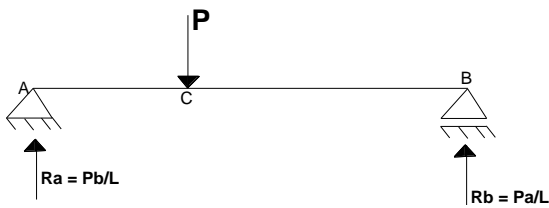
2.4.2 Exemplos

a) Viga com carga concentrada



Solução:

Obtenção das reações:



Determinação das equações nos cortes de cada trecho:

trecho 1: $0 \leq x \leq a$

$$\sum F_y = 0$$

$$R_a - V(x) = 0 \rightarrow V(x) = R_a$$

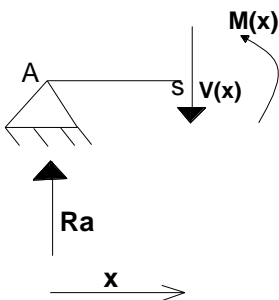
$$V(x) = P \cdot b / L \text{ (constante)}$$

$$\sum M_s = 0$$

$$M(x) - R_a \cdot x = 0 \rightarrow M(x) = R_a \cdot x$$

$$M(x) = P \cdot b \cdot x / L \text{ (reta)}$$

$$\text{Para } x = a : M(a) = P \cdot b \cdot a / L$$



trecho 2: $a < x \leq L$

$$\sum F_y = 0$$

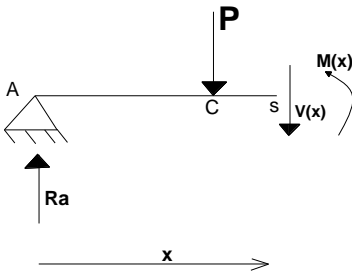
$$R_a - P - V(x) = 0 \rightarrow V(x) = R_a - P = P \cdot b / L - P = P(b/L - 1) = -P \cdot a / L$$

$$V(x) = -P \cdot a / L \text{ (constante)}$$

$$\sum M_s = 0$$

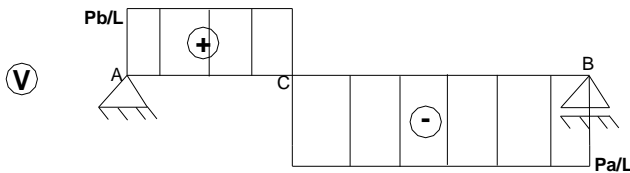
$$M(x) + P \cdot (x - a) - R_a \cdot x = 0 \rightarrow M(x) = P \cdot b \cdot x / L - P(x - a)$$

$$M(x) = P \cdot a - (P \cdot a / L) \cdot x \quad (\text{reta})$$

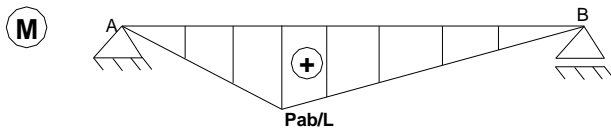


Desenho dos diagramas de cortante e momento fletor.

DEC:



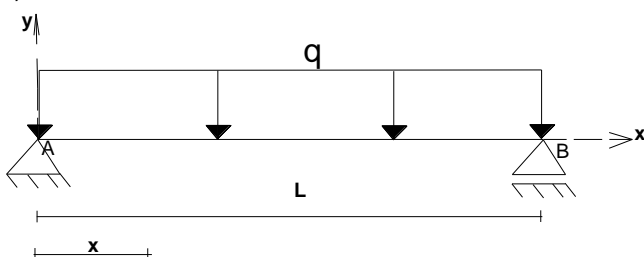
DMF:



Observações:

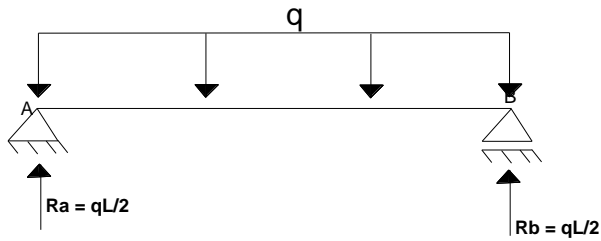
- a.1) Sob uma carga concentrada, o DMF apresenta um ponto anguloso e o DEC apresenta uma descontinuidade igual ao valor da carga;
- a.2) No ponto C, não se define esforço cortante, ele é definido à esquerda e a direita da seção.

b)



Solução:

Obtenção das reações



Determinação das equações nos cortes de cada trecho:

trecho único: $0 \leq x \leq L$

$$\sum F_y = 0$$

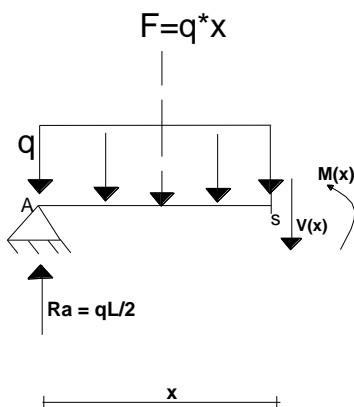
$$R_a - q \cdot x - V(x) = 0 \rightarrow V(x) = R_a - q \cdot x$$

$$V(x) = q \cdot L/2 - q \cdot x \text{ (linear)}$$

$$\sum M_s = 0$$

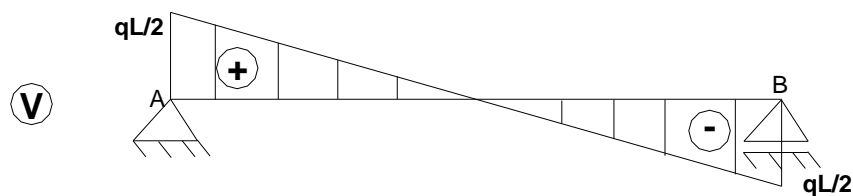
$$M(x) + (q \cdot x) \cdot x/2 - R_a \cdot x = 0 \rightarrow M(x) = R_a \cdot x - q \cdot x^2 / 2$$

$$M(x) = (q \cdot L/2) \cdot x - q \cdot x^2 / 2 \text{ (parábola)}$$

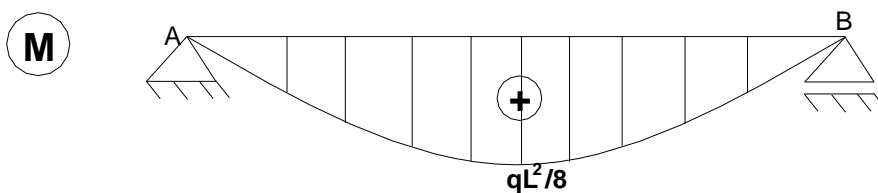


Desenho dos diagramas de cortante e momento fletor.

DEC:



DMF:

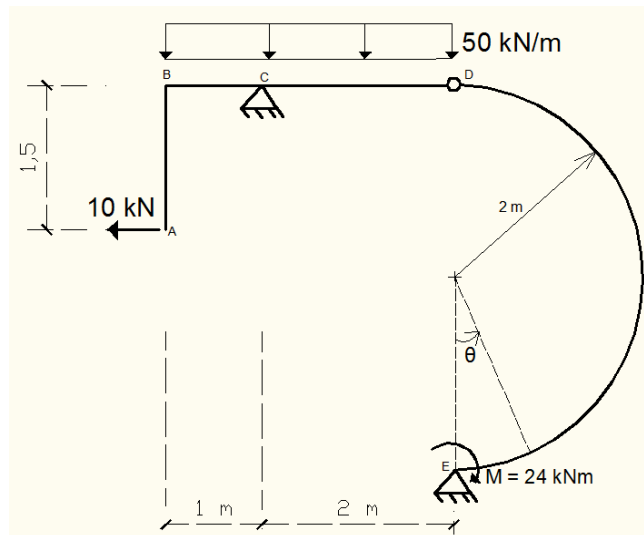


O momento fletor máximo ocorre onde a força cortante se anula, ou seja:

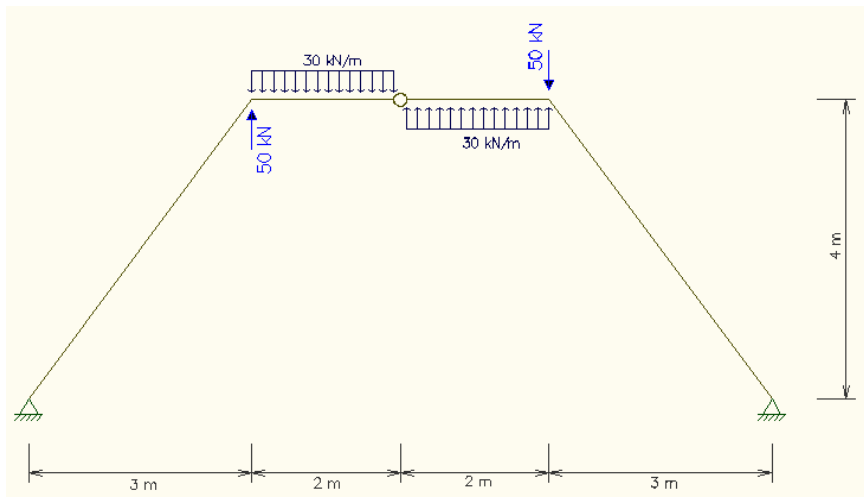
$$\frac{dM(x)}{dx} = 0.$$

2) (Valério, 2013) A figura representa uma estrutura rotulada em D e apoios fixos em C e E. Sob os carregamentos indicados, carga distribuída constante no trecho BD, força concentrada em A e momento concentrado (M) em E, obtenha:

- Reações de apoio;
- Diagramas dos esforços solicitantes para o trecho ABCD;
- As expressões dos esforços solicitantes, em função de θ , do trecho circular DE.



3) (Valério, 2011) Determinar os esforços solicitantes (M, V e N) no pórtico, sob a ações das cargas indicadas. Indique explicitamente os valores e os pontos de momentos extremos.



3. TRELIÇAS PLANAS SIMPLES

As treliças planas são estruturas muito importantes e como principal característica é conseguir vencer grandes vãos (fig. 3.1).

As treliças são formadas por barras retilíneas ligadas entre si nas extremidades, por pontos denominados de **nós**. As treliças simples são formadas a partir da ligação por articulações de três barras formando um triângulo rígido. Assim, adicionam-se mais duas barras a um dos lados do triângulo formado, gerando um novo triângulo com outros dois nós, podendo-se fazer isso sucessivamente. É necessário fixar o conjunto formado para que impeça pelo menos os três movimentos de corpo rígido do sistema, levando assim, as treliças simples isostáticas.

A função estática da barra da treliça é transmitir uma única força na direção de seu eixo, portanto, os **esforços de momento fletor e força cortante são nulos nas barras**.

Assumem-se como hipóteses de cálculo para a treliça (figura 3.2):

- 1) os nós são ligações entre as barras e não geram atrito entre elas;
- 2) estão sujeitas apenas as forças concentradas aplicadas somente nos nós;
- 3) os eixos das barras coincidem com a reta que une os centros das articulações;
- 4) cada barra apresenta apenas esforços normais;



Figura 3.1 – Arco treliçado 3D

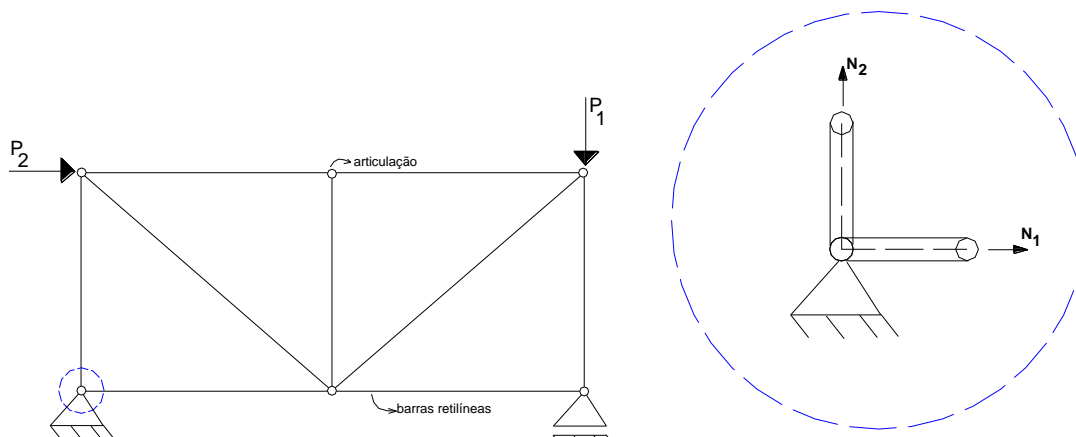


Figura 3.2 – Esquema das hipóteses para treliça plana

3.1 Método do equilíbrio dos nós

Em função das hipóteses admitidas, cada nó se constitui em um ponto material submetido a um sistema de forças de equilíbrio, onde se podem usar as seguintes equações para cada nó:

$$\sum F_x^i = 0 \text{ e } \sum F_y^i = 0.$$

Assim, o procedimento de cálculo das forças normais de cada barra da treliça fica:

- 1) Determinar as reações ($\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ e $\sum M_s = 0$);
- 2) Aplicar as duas equações de equilíbrio em cada nó.

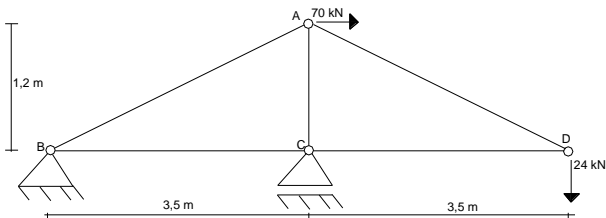
3.2 Método de Ritter ou das seções

O método é mais empregado quando se queira determinar os esforços normais apenas em determinadas barras. Baseia-se pela aplicação de um corte numa seção imaginária que separe a treliça em duas partes. De modo que as três equações da estática possa ser aplicada no diagrama de corpo livre de cada uma das partes, levando a determinação dos esforços nas seções cortadas, quando possível.

Obs. Empregam-se a convenção de sinal do esforço normal conforme já descrito.

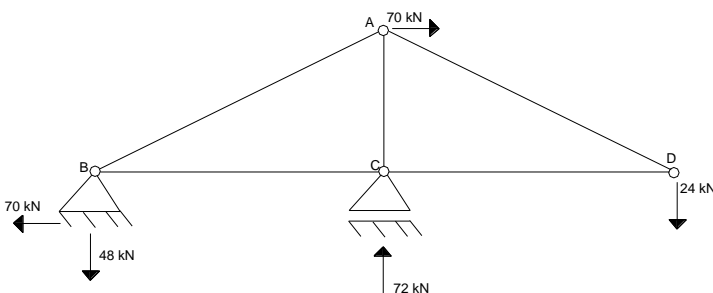
Exemplos – lousa e exercícios propostos.

- 1) Calcule as forças e desenhe o diagrama de esforços normais das barras da treliça abaixo:



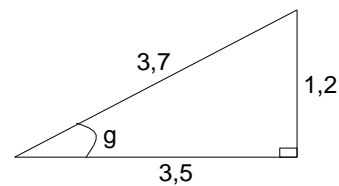
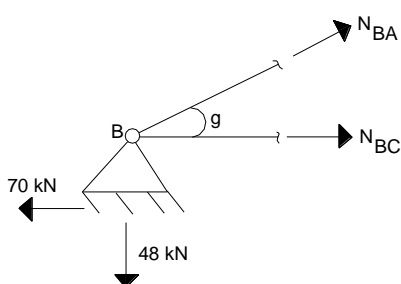
Solução

- a) cálculo de reações:



- b) equilíbrio dos nós:

- b.1) nó B:



$$\cos(g) = 3,5/3,7 = 0,9459$$

$$\text{sen}(g) = 1,2/3,7 = 0,3243$$

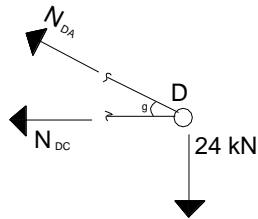
$$\sum F_y = 0$$

$$N_{BA} \cdot \sin(\alpha) - 48 = 0 \rightarrow N_{BA} = 148 \text{ kN (tração)}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$N_{BC} + N_{BA} \cdot \cos(\alpha) - 70 = 0 \rightarrow N_{BC} = -70 \text{ kN (compressão)}$$

b.2) nó D:



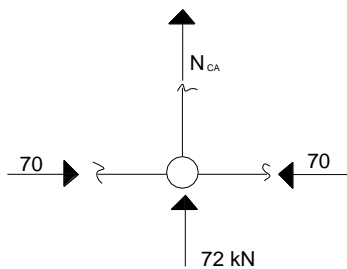
$$\sum F_y = 0$$

$$N_{DA} \cdot \sin(\alpha) - 24 = 0 \rightarrow N_{DA} = 74 \text{ kN (tração)}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$N_{DC} + N_{DA} \cdot \cos(\alpha) = 0 \rightarrow N_{DC} = -70 \text{ kN (compressão)}$$

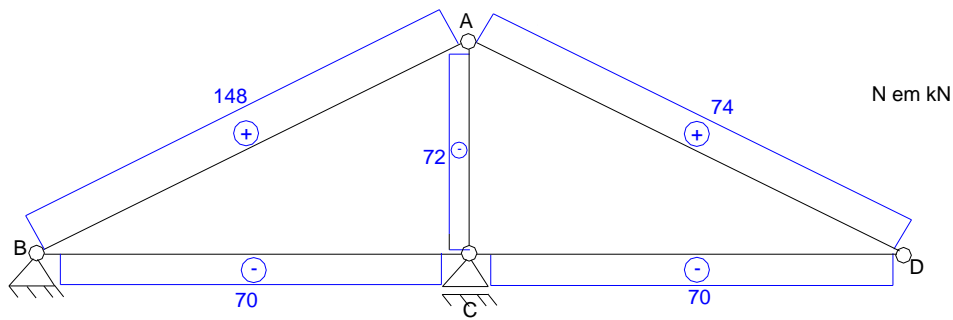
b.3) nó C:



$$\sum F_y = 0$$

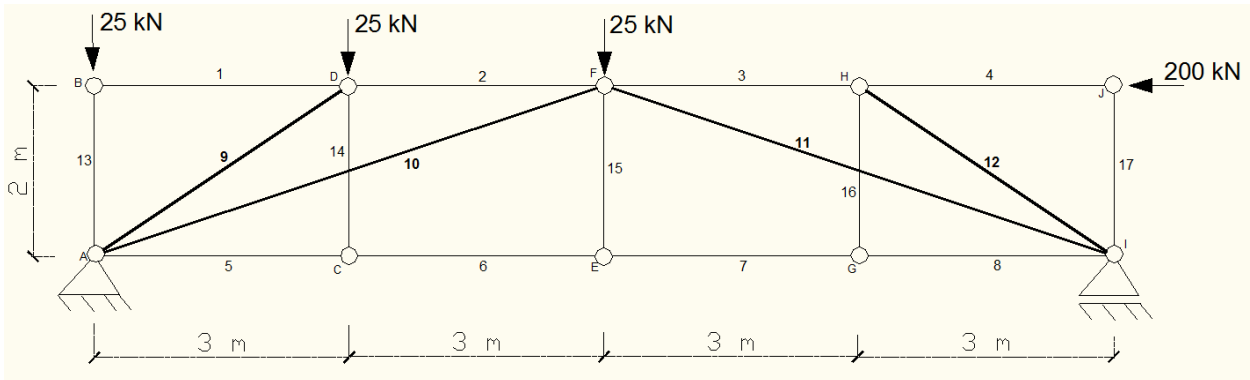
$$N_{CA} + 72 = 0 \rightarrow N_{CA} = -72 \text{ kN (compressão)}$$

c) diagrama de esforços normais:



2) (Valério, 2012)

Empregando necessariamente o processo do equilíbrio dos nós e/ou o processo de Ritter (ou das seções), determinar as forças normais nas barras 9, 10, 11 e 12 da treliça da figura, indicando claramente se essas forças são de tração ou de compressão. No final, escreva essas normais obtidas no espaço indicado.



Respostas:

$$N_9 = -45,1 \text{ kN (C)}$$

$$N_{10} = -125,17 \text{ kN (C)}$$

$$N_{11} = +46,1 \text{ kN (T)}$$

$$N_{12} = 0$$

4. TRAÇÃO E COMPRESSÃO

Relações entre tensões-deformações

4.1 Definição de Tensão Normal (σ)

Para as barras que estão sujeitas as forças *normais centradas*, para certa seção genérica, define-se uma grandeza denominada de tensão normal (σ) que é indicada por:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (4.1)$$

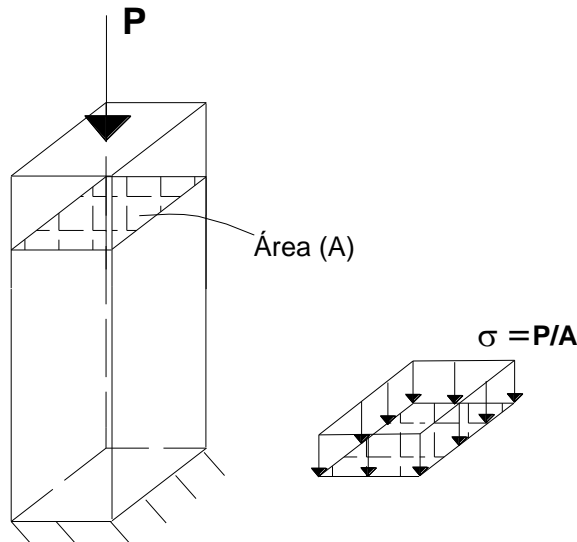


FIG. 4.1 Tensão Normal em uma seção genérica

Onde

F: força normal axial;

A: área da seção transversal;

Admite-se que a distribuição das forças ao longo da seção transversal seja constante.

Este tipo de problema ocorre principalmente em estruturas do tipo treliça e em barras que são conectadas por pino que só existam forças axiais centradas.

Caso a força aplicada na seção não esteja centrada, ou seja, excêntrica, então aparece também o efeito de flexão, levando a um caso que não será estudado neste item.

Unidade de tensão:

$$N/m^2 \text{ (Pa)}$$

$$kN/m^2 = 1.10^3 N/m^2 = 1 \text{ kPa}$$

$$MN/m^2 = 1.10^6 N/m^2 = 1 \text{ MPa}$$

$$GN/m^2 = 1.10^9 N/m^2 = 1 \text{ GPa}$$

$$kgf/cm^2 = 1.10^{-3} tf/cm^2 = 1.10^{-1} \text{ MPa}$$

O sinal da tensão acompanha o sinal do esforço axial, assim, caso negativo é tensão de compressão, do contrário, é tensão de tração.

4.2 Definição de Deformação Específica (ε)

A barra sujeita a uma tensão normal de tração ou compressão sofre um alongamento ou encurtamento. Esta grandeza é designada pela letra grega (δ).

O valor de δ é dado por:

$$\delta = L - L_0 \quad (4.2)$$

Onde L_0 é o comprimento inicial da barra e L é o comprimento final, após a aplicação de P .

Define-se também uma grandeza que relaciona esta variação de tamanho em função do seu tamanho inicial, denominada de deformação específica (ε), a qual é uma grandeza adimensional.

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\delta}{L_0} \quad (4.3)$$



FIG. 4.2 Alongamento e encurtamento de uma barra

4.3 Definição de Lei de Hooke

Para cada material, determina-se experimentalmente (ensaio de tração) uma curva característica que relaciona a tensão com a deformação específica, de modo que se pode representá-la da seguinte forma para um tipo de material dúctil.

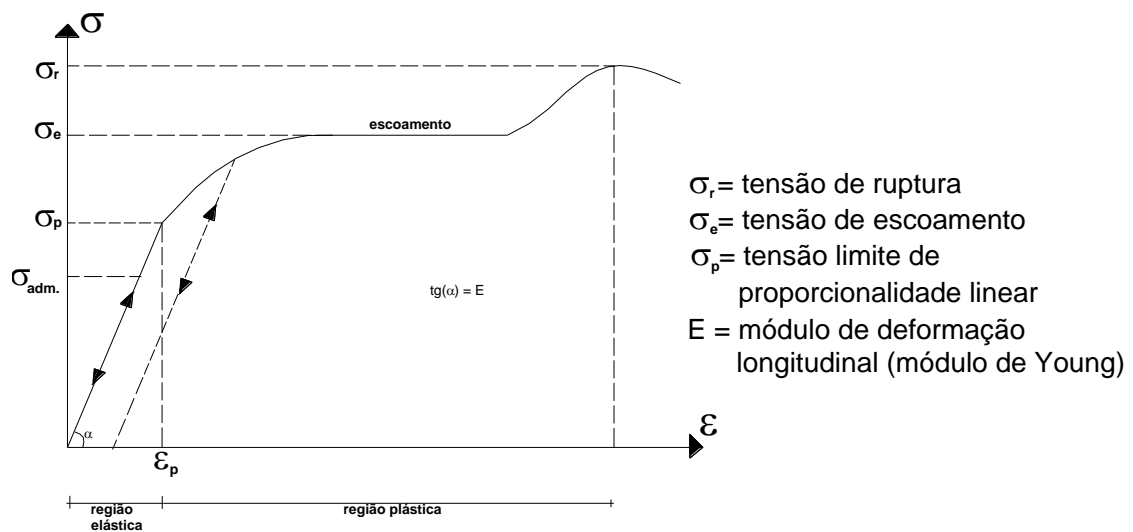


FIG. 4.3 Diagrama tensão-deformação de um material dúctil

Os projetos das estruturas são feitos de modo geral para suportar deformações específicas que não ultrapassem o trecho reto da sua curva tensão-deformação (Fig. 4.3), denominado de região ou regime elástico.

Deste modo define-se uma relação linear entre essas grandezas, conhecida como Lei de Hooke:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (4.4)$$

Onde E é denominado de módulo de elasticidade longitudinal do material, ou Módulo de Young, e tem a unidade de tensão (força por unidade de área).

4.4 Exemplo

a) Para a barra da figura 4.5, calcule a tensão nos pontos A e B e o alongamento sofrido no ponto A para o caso da força P ter o valor de 200 kN.

b) Qual a maior força P que pode ser aplicada para que nenhum trecho fique fora do trecho linear (elástico)?

O material formado pela barra é um alumínio que tem sua curva tensão-deformação dada pelo diagrama da figura 4.4.

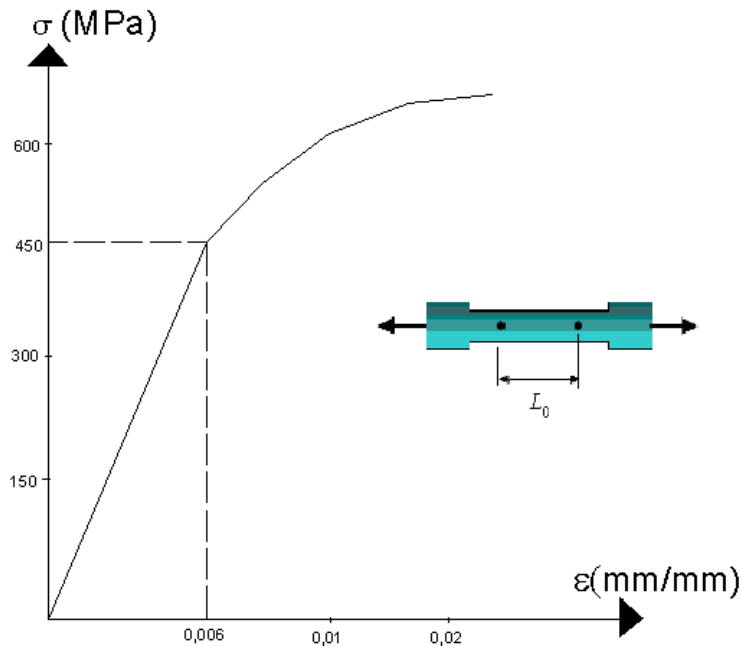


FIG. 4.4 Curva tensão-deformação do material

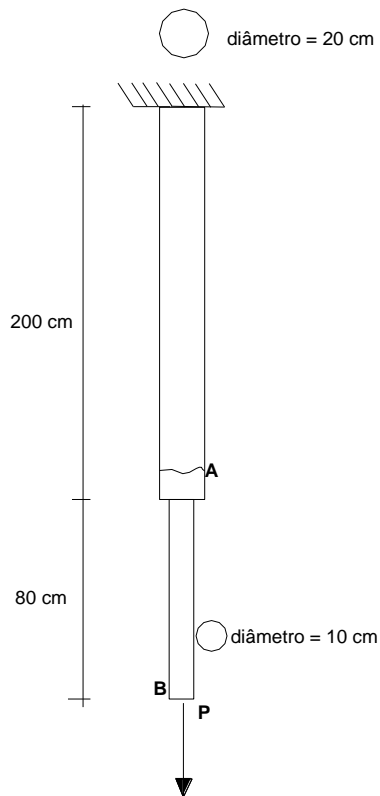
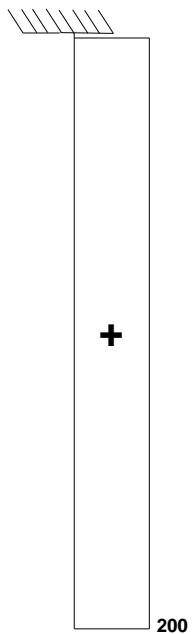


FIG. 4.5 Barra sujeita a força concentrada na extremidade

Resposta:

a)

i- diagrama de esforços



ii- cálculo das tensões na barra:
trecho do engaste até pto A

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0,2^2}{4} = 0,0314 \text{ m}^2$$

$$\sigma_1 = \frac{F}{A} = \frac{200}{0,0314} = 6,3662 \cdot 10^3 \text{ kPa} = 6,3662 \text{ MPa}$$

trecho do pto A até pto B

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0,1^2}{4} = 0,007854 \text{ m}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{F}{A} = \frac{200}{0,0079} = 25,4650 \cdot 10^3 \text{ kPa} = 25,4650 \text{ MPa}$$

iii – alongamento do pto A

Sabemos que:

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\delta}{L_0} \text{ (relação deslocamento – deformação específica)}$$

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \text{ (relação tensão-deformação)}$$

Como as tensões calculadas na barra estão no regime linear, então podemos usar a lei de Hooke, então:

$$\sigma = E \cdot \frac{\delta}{L_0} \rightarrow \delta = \frac{\sigma \cdot L_0}{E} = \frac{P \cdot L_0}{A \cdot E}$$

O alongamento do ponto A é apenas o alongamento da barra do engaste até o ponto A, assim

$$L_0 = 200 \text{ cm} = 2 \text{ m}$$

$$\sigma = 6,3662 \text{ MPa}$$

Com a figura 4.4, no regime linear, calcula-se o módulo de elasticidade longitudinal

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{450}{0,006} = 75000 \text{ MPa}$$

Portanto:

$$\delta_A = \frac{6,3662 \cdot 2}{75000} = 0,17 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0,17 \text{ mm}$$

b) A maior força que pode ser aplicada na estrutura é aquela que pode causar, no máximo uma tensão de 450 MPa, conforme a fig. 4.4.

Assim, no 1º. trecho temos:

$$\sigma_1 = \frac{P}{A} = \frac{P}{0,0314} \leq 450 \text{ MPa} \rightarrow P \leq 450 \cdot 0,0314 \rightarrow P \leq 14,13 \text{ MN}$$

Assim, no 2º. trecho temos:

$$\sigma_1 = \frac{P}{A} = \frac{P}{0,007854} \leq 450 \text{ MPa} \rightarrow P \leq 450 \cdot 0,007854 \rightarrow P \leq 3,56 \text{ MN}$$

Neste caso, a maior força P que pode ser aplicado para que a estrutura não saia do regime linear é:

$$P = 3,56 \text{ MN}$$

4.5 Definição de Tensão Admissível (σ_{adm})

Na engenharia, é empregado no projeto de uma peça estrutural certo fator de segurança para as ações que devam agir na estrutura, isto em virtude das incertezas que possam ocorrer ao longo da vida útil da estrutura, quer com respeito às modificações que o material pode apresentar com respeito ao material testado e o efetivamente empregado, quer com respeito às ações não previstas em projeto que possam ocorrer na estrutura, etc.

Deste modo, define-se uma tensão admissível de projeto, da seguinte forma:

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_r}{C.S.} \quad (4.5)$$

$$C.S. > 1,0$$

Onde

C.S. é denominado de coeficiente de segurança, e variam de material para material e do tipo de carregamento e seus valores são estabelecidos pelas Normas Técnicas correntes.

4.6 Exercício

Para o exemplo do ponto 4.4, no item b), obtenha a força máxima P que possa atuar na barra para que ela se mantenha dentro do regime linear, sabendo que a tensão de ruptura seja $\sigma_r = 650 \text{ MPa}$ e empregue um $C.S. = 2,5$. Resposta: $P = 2,04 \text{ MN}$

4.7 Deformação total para barras de propriedades diferentes

Para o caso da barra ter propriedades diferentes em cada seção, como seções, módulo de elasticidade ou mesmo forças axiais distintos em cada ponto da barra, deve-se definir o alongamento ou encurtamento da barra, mediante uma análise diferencial, assim:

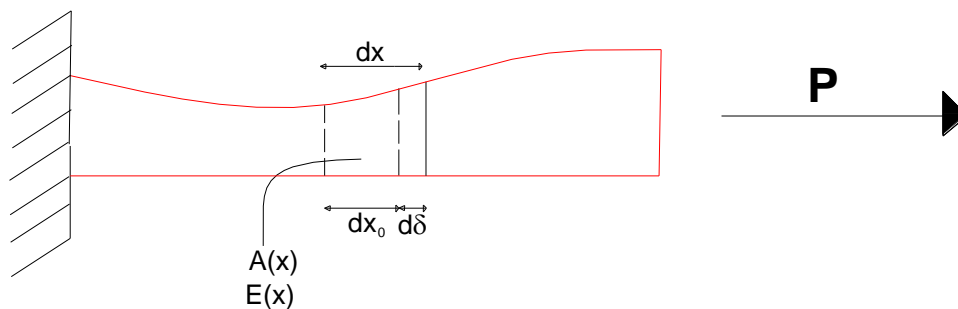


FIG. 4.6 Barra com variação de propriedades ao longo da seção

$$d\delta(x) = dx - dx_0 \quad (4.6)$$

$$\varepsilon(x) = \frac{dx - dx_0}{dx_0} = \frac{d\delta}{dx_0} \quad (4.7)$$

Ou

$$d\delta(x) = \varepsilon(x) \cdot dx_0 \rightarrow \delta(x) = \int_0^x \varepsilon(x) \cdot dx \quad (4.8)$$

A lei de Hooke, para cada ponto da barra é atendida, então:

$$\sigma(x) = E(x) \cdot \varepsilon(x)$$

$$\delta(x) = \int_0^x \frac{\sigma(x)}{E(x)} \cdot dx = \int_0^x \frac{N(x)}{A(x) \cdot E(x)} \cdot dx \quad (4.9)$$

Ou para o caso da barra estar dividida em n trechos com propriedades constantes (Fig. 4.7)

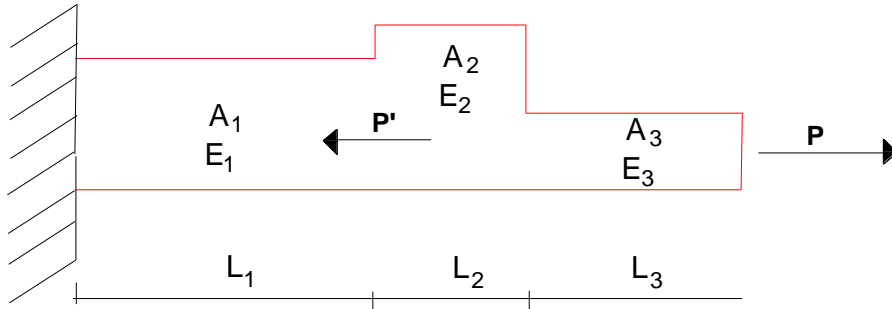


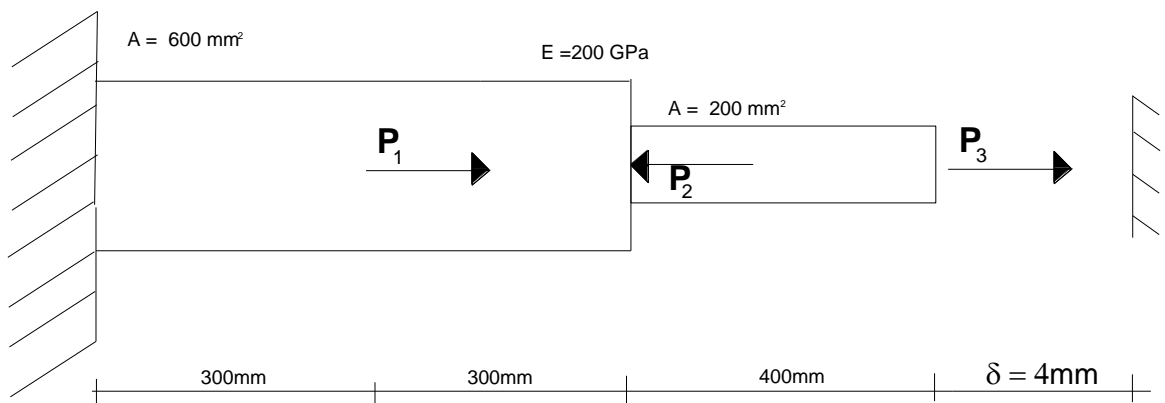
FIG. 4.7 Barra com variação de propriedades em trechos constantes

$$\delta_{TOTAL} = \sum_{i=1}^3 \frac{N_i \cdot L_i}{A_i \cdot E_i} \quad (4.10)$$

4.8 Exercício

a. Determine a deformação da barra de aço da figura sob a ação das forças indicadas na figura 4.8. Com $P_1 = 500$ kN, $P_2 = 300$ kN e $P_3 = 200$ kN.

b. Qual o máximo valor da força P_1 de modo que a barra fique na iminência de encostar-se ao anteparo rígido.

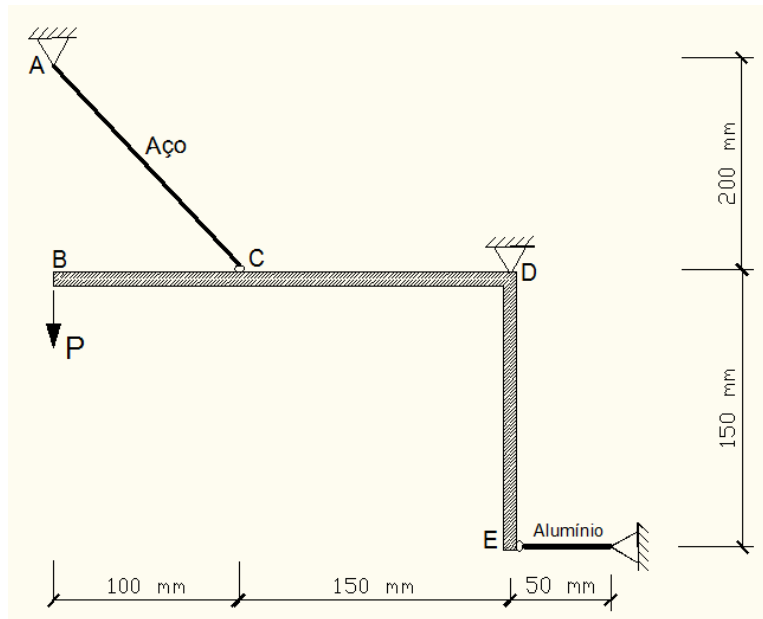


Resposta: a) $\delta = 2,75$ mm, b) $P_1 = 1000$ kN

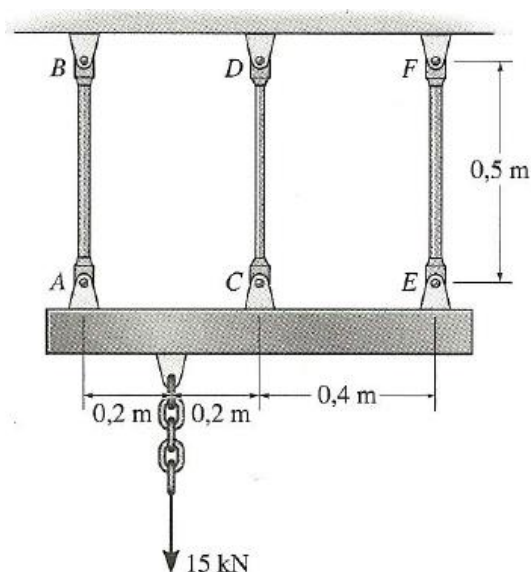
2) (Valério, 2013) Considere a barra BDE rígida apoiada em D e que em C está preso um arame de aço e em E uma barra de alumínio, conforme desenho abaixo. Determine a força máxima P admissível, considerando as seguintes restrições:

- $(\sigma_{adm})_{aço} = 350 \text{ MPa}$ (tração/compressão)
- $(\sigma_{adm})_{Alumínio} = 400 \text{ MPa}$ (tração/compressão)
- rotação máxima admissível em torno de D seja de $2 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$.

Dados: $A_{aço} = 22,5 \text{ mm}^2$; $A_{Alumínio} = 40,0 \text{ mm}^2$ (áreas das seções transversais);
 $E_{aço} = 200 \text{ GPa}$; $E_{Alumínio} = 70 \text{ GPa}$.



- 2) (Valério, 2011) Os três cabos de aço de mesmo material mostrados na figura são acopladas a um elemento rígido por pinos. Supondo que a carga aplicada ao elemento seja de 15 kN, determinar a força desenvolvida em cada cabo. Cada um dos cabos AB e EF tem área da seção transversal de 25 mm^2 , e o cabo CD tem área da seção transversal de 15 mm^2 .



5. CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRIAS DAS SEÇÕES

Para as análises de estruturas dos problemas de tração e compressão (forças centradas) foi necessário se determinar apenas a área da seção como característica geométrica.

Entretanto, para a análise de tensões em barras que aparecem esforços cortante, flexão, torção, flambagem, aparecem outras grandezas geométricas da seção. A seguir, são apresentados algumas destas grandezas que são relevantes para os estudos futuros.

5.1 Momento estático e centro de gravidade (baricentro)

Seja uma seção genérica A, definida no plano y-z. Tome-se uma área infinitesimal dA desta região, localizado a uma distância z e y do eixos, fig. 5.1.

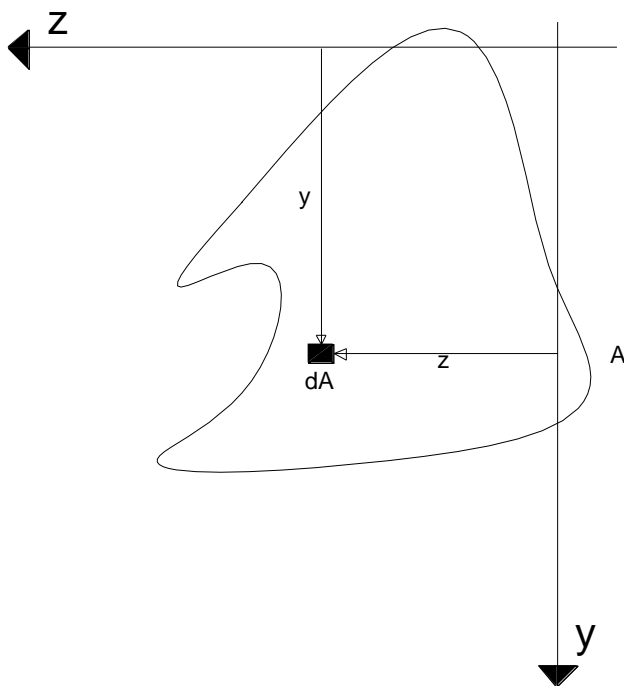


FIG. 5.1

Define-se momento estático de A em relação a z e y como, respectivamente:

$$M_{s_z} = \int_A y \cdot dA \quad (5.1)$$

$$M_{s_y} = \int_A z \cdot dA \quad (5.2)$$

Onde a unidade do momento estático é m^3 , cm^3 , etc, podendo ter valor negativo, positivo ou nulo, pois depende da posição da figura em relação ao eixo de referência.

O baricentro ou centro de gravidade (CG) da figura é definido como:

$$M_{s_z} = y_{CG} \cdot A \quad (5.3)$$

$$M_{s_y} = z_{CG} \cdot A \quad (5.4)$$

Ou seja:

$$y_{CG} = \frac{M_{s_z}}{A} = \frac{\int y \cdot dA}{\int_A dA} \quad (5.5)$$

$$z_{CG} = \frac{M_{s_y}}{A} = \frac{\int z \cdot dA}{\int_A dA} \quad (5.6)$$

Porém, muitas seções geométricas são formadas por áreas de geometria mais simples, sendo então que as relações (5.5) e (5.6) são ainda empregadas da seguinte maneira:

$$y_{CG} = \frac{M_{s_z}}{A} = \frac{\int_{A_1} y \cdot dA + \int_{A_2} y \cdot dA + \dots + \int_{A_n} y \cdot dA}{\int_{A_1} dA + \int_{A_2} dA + \dots + \int_{A_n} dA} \quad (5.7)$$

$$z_{CG} = \frac{M_{s_y}}{A} = \frac{\int_{A_1} z \cdot dA + \int_{A_2} z \cdot dA + \dots + \int_{A_n} z \cdot dA}{\int_{A_1} dA + \int_{A_2} dA + \dots + \int_{A_n} dA} \quad (5.8)$$

Ou de maneira discreta como:

$$y_{CG} = \frac{\sum_i^n (y_{CG})_i \cdot A_i}{\sum_i^n A_i} \quad (5.9)$$

$$z_{CG} = \frac{\sum_i^n (z_{CG})_i \cdot A_i}{\sum_i^n A_i} \quad (5.10)$$

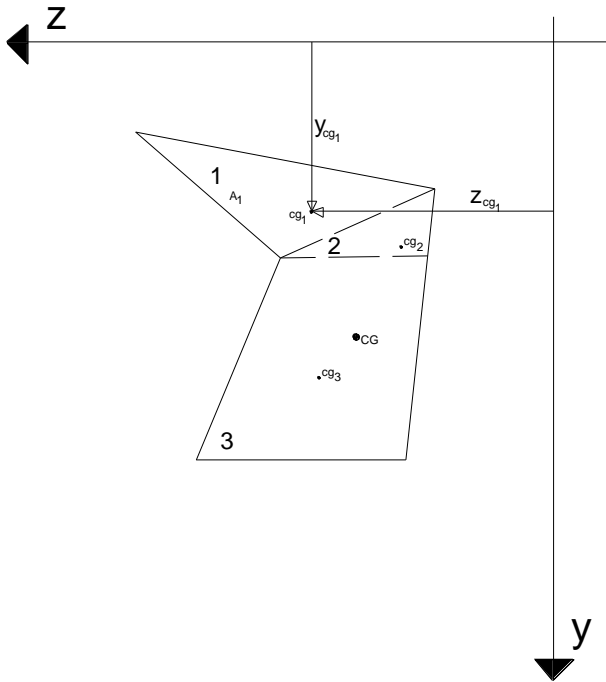
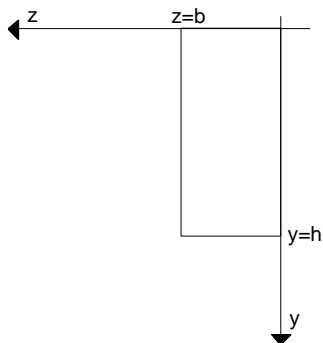


FIG. 5.2

5.2 Exemplo. Calcule os CGs das seguintes seções geométricas:

a)



Resposta:

$$y_{CG} = \frac{\int_A y \cdot dA}{\int_A dA}$$

$$M_{s_z} = \int_A y \cdot dA = \int_{z=0}^{z=b} \int_{y=0}^{y=h} y \cdot dz \cdot dy = \int_{z=0}^{z=b} \left(\frac{y^2}{2} \right)_0^h dz = \frac{h^2}{2} b$$

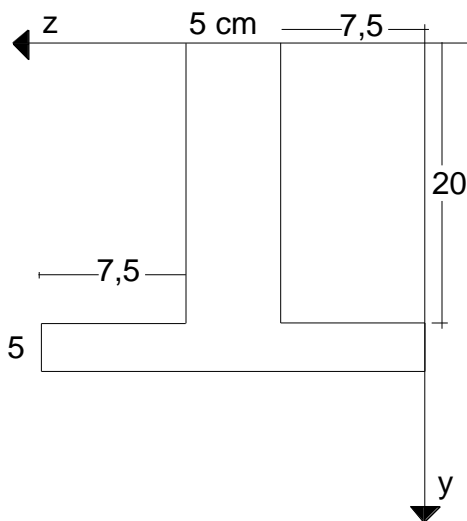
$$M_{s_y} = \int_A z \cdot dA = \int_{z=0}^{z=b} \int_{y=0}^{y=h} z \cdot dz \cdot dy = \int_{z=0}^{z=b} \left(\frac{z^2}{2} \right)_0^b dy = \frac{b^2}{2} h$$

$$A = b \cdot h$$

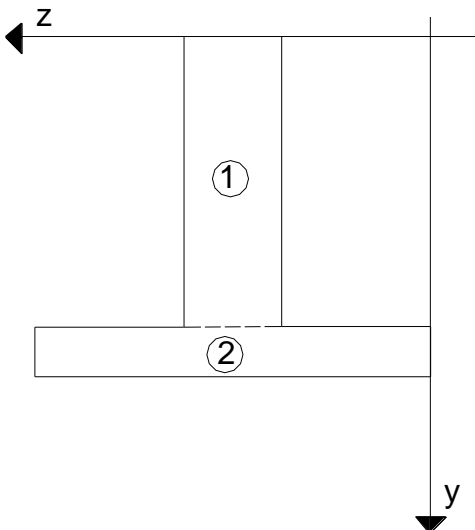
$$y_{CG} = \frac{\frac{h^2}{2} b}{b \cdot h} = \frac{h}{2}$$

$$z_{CG} = \frac{\frac{b^2}{2}h}{b \cdot h} = \frac{b}{2}$$

b)



Resposta:



região 1:

$$(y_{CG})_1 = 10 \text{ cm}; (z_{CG})_1 = 10 \text{ cm}; (A)_1 = 100 \text{ cm}^2$$

região 2:

$$(y_{CG})_2 = 22,5 \text{ cm}; (z_{CG})_2 = 10 \text{ cm}; (A)_2 = 100 \text{ cm}^2$$

$$y_{CG} = \frac{(y_{CG})_1 \cdot A_1 + (y_{CG})_2 \cdot A_2}{A_1 + A_2} = \frac{10 \cdot 100 + 22,5 \cdot 100}{100 + 100} = 16,25 \text{ cm}$$

$$z_{CG} = \frac{(z_{CG})_1 \cdot A_1 + (z_{CG})_2 \cdot A_2}{A_1 + A_2} = \frac{10 \cdot 100 + 10 \cdot 100}{100 + 100} = 10 \text{ cm}$$

5.3 Momento de segunda ordem

Para a mesma seção genérica da fig. 5.1, definem-se os momentos de 2ª. ordem como:

$$I_y = \int_A z^2 \cdot dA$$

(5.11)

$$I_z = \int_A y^2 \cdot dA$$

(5.12)

$$I_{yz} = \int_A z \cdot y \cdot dA$$

(5.13)

Onde I_y e I_z são denominados como momento de inércia em relação aos eixos y e z, respectivamente. I_{yz} é denominado de produto de inércia, onde as três grandezas tem unidade de m^4 , cm^4 , etc.

Para as figuras geométricas compostas por regiões mais simples, o cálculo dos momentos de 2ª. ordem é feito usando o teorema dos eixos paralelos, indicado pela relação:

$$I_y = \sum_{i=1}^n \left(I_{y_{CG}} + (\bar{z})^2 \cdot A \right)_i$$

(5.14)

$$I_z = \sum_{i=1}^n \left(I_{z_{CG}} + (\bar{y})^2 \cdot A \right)_i$$

(5.15)

$$I_{yz} = \sum_{i=1}^n \left(I_{yz_{CG}} + (\bar{z}) \cdot (\bar{y}) \cdot A \right)_i$$

(5.16)

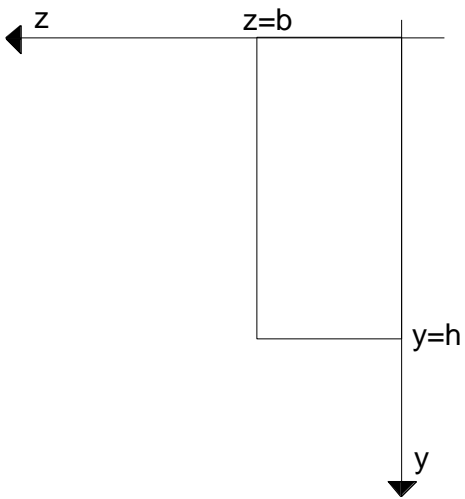
Onde:

$(I_{y_{CG}})_i$, $(I_{z_{CG}})_i$ e $(I_{yz_{CG}})_i$ são os momentos de 2ª. ordem obtidos no CG da região i ;

$(\bar{z})_i$ e $(\bar{y})_i$ são as diferenças de conta entre o CG da região i e o CG global da seção, podendo ser negativo.

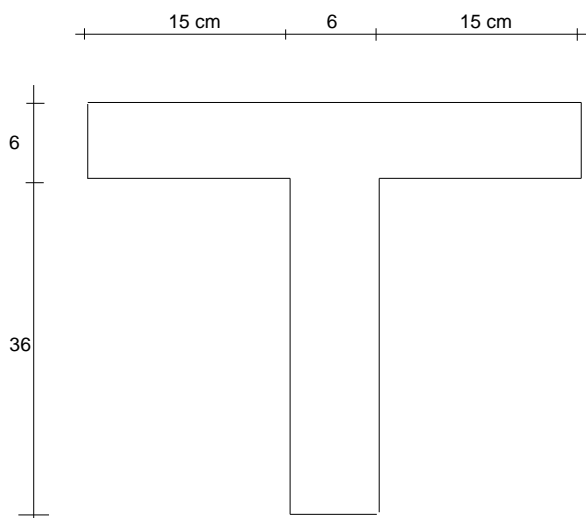
5.4 Exemplo. Calcule o momento de inércia I_z em relação o CG das seguintes seções geométricas:

a)



Resposta: $I_z = bh^3 / 12$

b)



Resposta: $I_z = 71604 \text{ cm}^4, y_{cg} = 13,5\text{cm}$ (a partir da face superior)

6. ESTUDO DE FLEXÃO EM VIGAS DE SEÇÃO SIMÉTRICA

6.1 Definição

Para as barras de eixo reto com um plano longitudinal de simetria, com carregamento externo contido neste plano e que possua componente transversal ao eixo, tem-se um comportamento particular dito de flexão. Pode-se resumir flexão como a mudança de curvatura do eixo.

Um outro comportamento que pode ocorrer na barra é o efeito de torção, o que pode ocorrer caso o carregamento não passe no plano de simetria da barra.



Fig 6.1. Exemplo prático de viga de seção simétrica

6.2 Tipos de Flexão

Para uma barra com seção simétrica e com carregamento transversal ao seu eixo, é possível classificar o fenômeno de flexão em função dos diferentes tipos de esforços internos que surgem na barra. Estes tipos podem ser divididos em: Flexão com Torção, Flexão Composta, Flexão Simples, Flexão Pura.

i) FLEXO - TORÇÃO

Neste caso os esforços solicitantes existentes são:

- Momento Fletor;
- Força Cortante;
- Momento de Torção;

Não havendo forças normais atuantes (fig. 6.2).

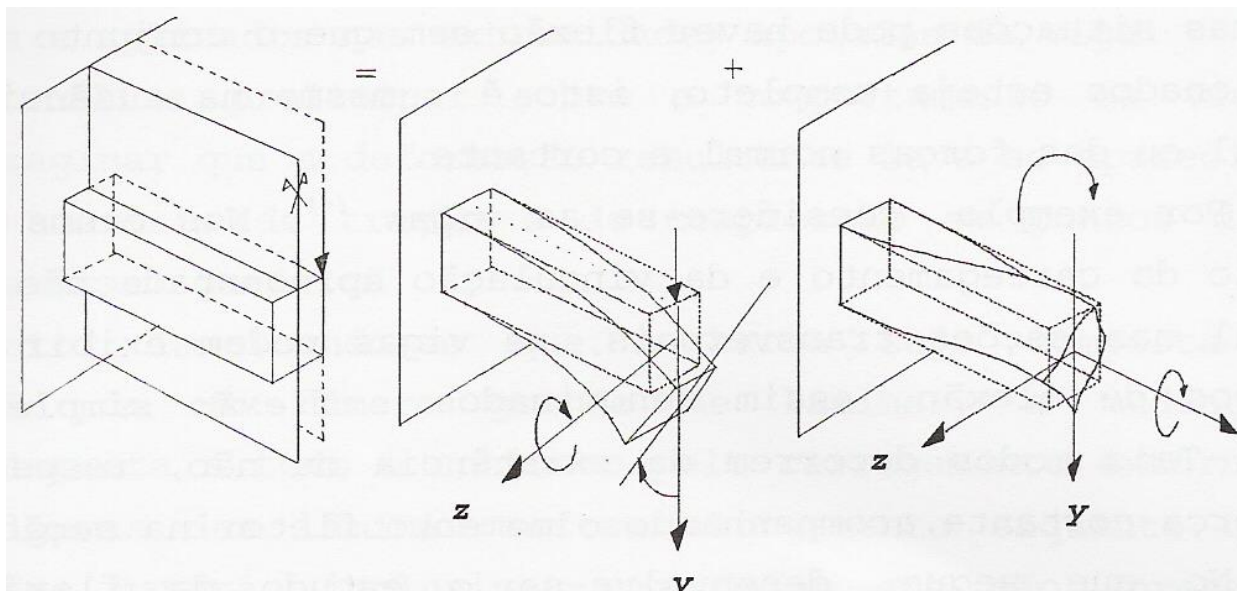


Fig 6.2 Comportamentos de flexão e de torção

ii) FLEXÃO COMPOSTA

Neste caso os esforços solicitantes existentes são:

- Momento Fletor;
- Força Cortante;
- Força Normal;

De forma que as ações externas são de dois tipos: as contidas no plano de simetria (x-y) e forças atuantes paralelamente ao eixo longitudinal, mas que a resultante esteja contida sobre o eixo y, vide figura 6.3.

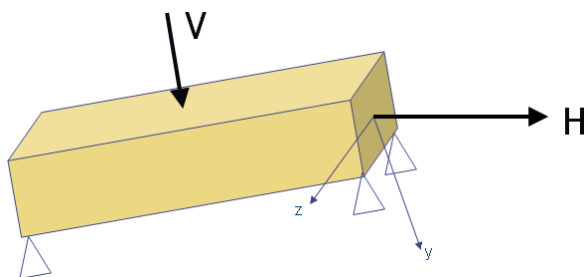


Fig. 6.3 Exemplo de flexão composta

iii) FLEXÃO SIMPLES

É um caso particular da flexão composta, pois não há forças normais, figuras 6.4. Onde resume-se este tipo de flexão em:

- Barras de eixo reto;
- Plano longitudinal de simetria;
- Forças neste plano e transversal a seção;

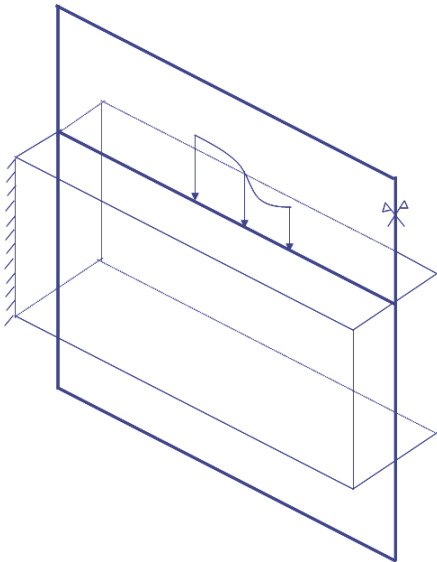


Fig. 6.4 Ações contidas no plano de simetria

iv) FLEXÃO PURA

Esforços solicitantes: apenas momento fletor, onde não surgem esforços cortantes.



Fig. 6.5 Exemplo de viga com flexão pura

6.3 Estudo da Flexão Pura

Não é comum estruturas submetidas a flexão pura. Mas, as deduções e conclusões obtidas serão empregadas no estudo da **Flexão Simples e Composta**.

Neste sentido, define-se um campo cinemático para o problema, onde se emprega a **Hipótese Cinemática de Bernoulli-Navier**, que é esquematizada na fig. 6.6 e equacionada como:

$$v(x) = v_0(x) \quad (6.1)$$

$$u(x) = -y \cdot \frac{dv(x)}{dx} = -y \cdot v'(x) \quad (6.2)$$

Lembrando que:

$$\varepsilon(x) = \frac{dx - dx_0}{dx_0} = \frac{d\delta}{dx_0} \quad (6.3)$$

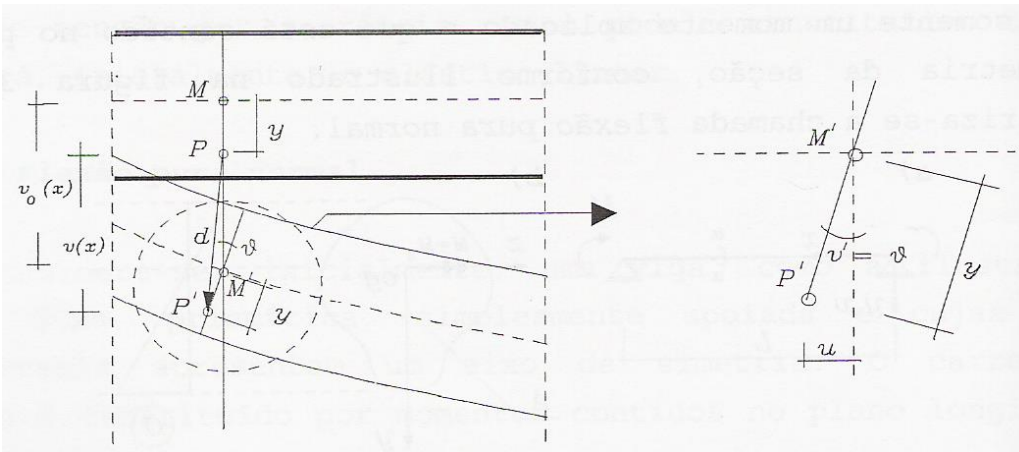
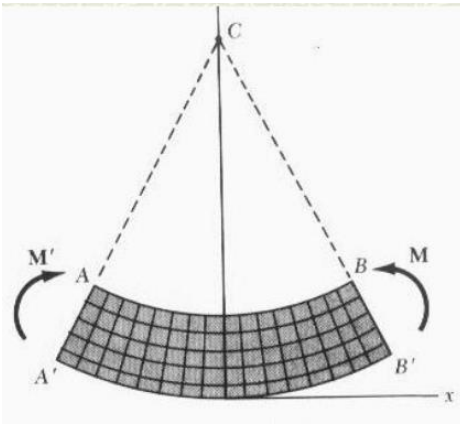


Fig. 6.6 Hipótese Cinemática de Bernoulli-Navier

Ou escrevendo a equação (6.3) da seguinte forma:

$$\varepsilon(x) = \frac{du}{dx} \quad (6.4)$$

Portanto, confrontando (6.4) com (6.2), chega-se a:

$$\varepsilon(x) = -y \cdot \frac{dv(x)}{dx} = -y \cdot v''(x) \quad (6.5)$$

Ou lembrando da Lei de Hooke

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (6.6)$$

É possível substituir (6.6) em (6.5) de modo a se ter:

$$\sigma_x(x) = [-E \cdot v''(x)] \cdot y \quad (6.7)$$

Despreza-se as tensões na direção z, ou seja, é considerado que:

$$\sigma_y(x) = 0 \quad (6.8)$$

E como a tensão de cisalhamento está relacionada com a força cortante, devido à inexistência deste último no estudo de flexão pura, então:

$$\tau_{xy}(x) = 0 \quad (6.9)$$

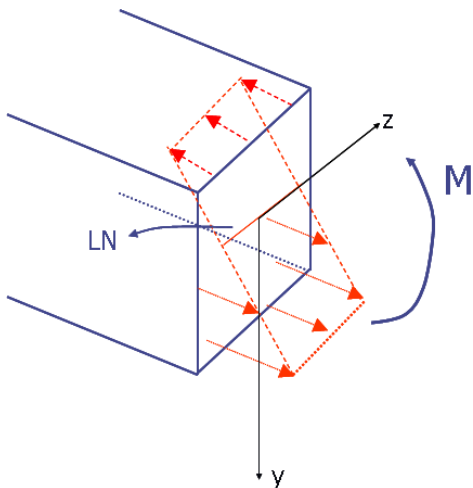


Fig. 6.7 Distribuição de tensão na viga

Como a parcela $[-E \cdot v''(x)]$ é constante para cada ponto da viga, na equação (6.7), pode-se resumir a distribuição de tensão como esquematizada na fig. 6.7 como:

- Variação linear da tensão normal (em y);
- A tensão normal independe de z ;
- $y = 0 \rightarrow \sigma_x = 0$: Linha Neutra (LN), tensões nulas na ordenada do centro de gravidade da seção;

6.4 Relações de Equilíbrio

As resultantes das distribuições das tensões normais e de cisalhamento em cada seção devem ser iguais aos esforços normais e cortante, oriundo do carregamento externo. Por outro lado, as tensões normais devem gerar um momento resultante em cada seção que é igual ao momento fletor (diagrama), assim, é válido escrever:

$$V = \int_A \tau_{xy} dA \quad (6.10)$$

$$N = \int_A \sigma_x dA \quad (6.11)$$

$$M_z = \int_A (\sigma_x \cdot y) dA \quad (6.12)$$

Para o caso de flexão pura, $V = 0$ e $N = 0$. Substituindo a relação (6.7) em (6.12):

$$M_z = \int_A \{[-E \cdot v''(x)] \cdot y\} \cdot y dA \quad (6.13)$$

Ou

$$M_z = [-E \cdot v''(x)] \cdot \int_A y^2 dA \quad (6.14)$$

Das relações geométricas das seções, sabe-se que a parcela da integral é o momento de inércia:

$$I_z = \int_A y^2 \cdot dA \quad (5.12)$$

Então:

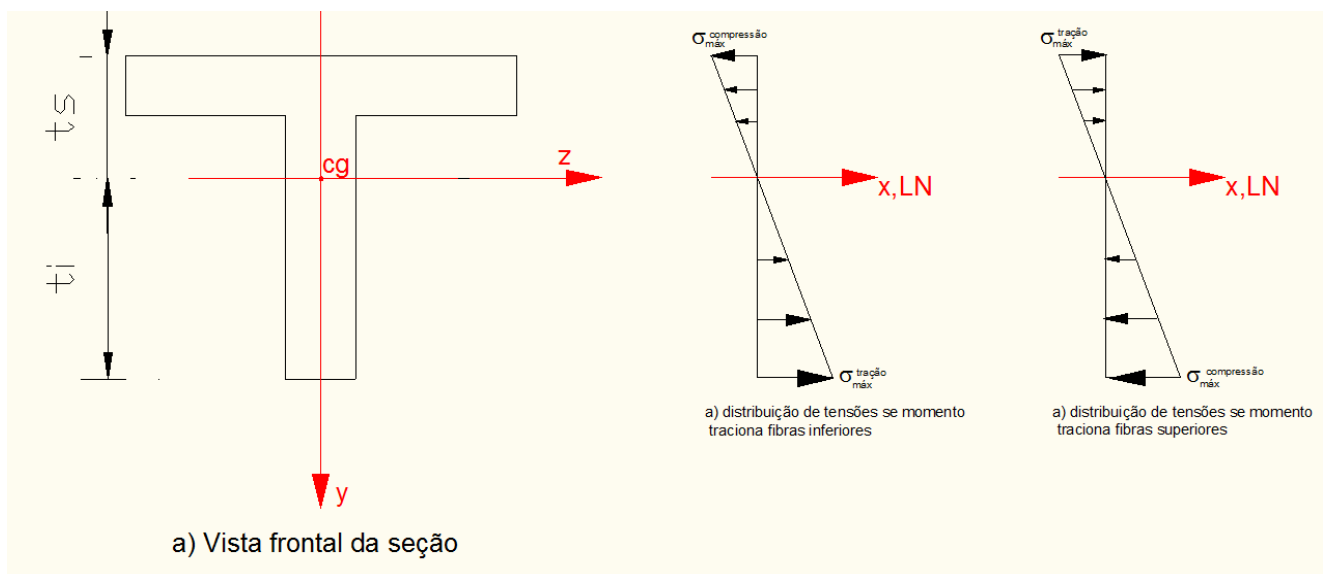
$$M_z = [-E \cdot v''(x)] \cdot I_z \quad (6.15)$$

E finalmente, comparando a eq. (6.15) com eq. (6.7), chega-se na equação que relaciona tensão axial com momento fletor em uma seção genérica:

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} \cdot y \quad (6.16)$$

Lembre-se que como M_z e I_z podem variar ao longo do eixo (x) da viga e y varia ao longo da seção, a equação de distribuição de tensão poderia ser escrito como:

$$\sigma_x(x, y) = \left[\frac{M_z(x)}{I_z(x)} \right] \cdot y \quad (6.17)$$



O dimensionamento da peça deve ser feito avaliando as tensões normais devido a flexão na seção crítica, onde se maxime a equação (6.17). Nessa equação, ha dois extremos a serem verificados em cada seção, o máximo positivo e negativo, onde representam, respectivamente, a tensão máxima de tração e compressão.

Compara-se então com as tensões admissíveis limites do material ($\bar{\sigma}$), ou seja:

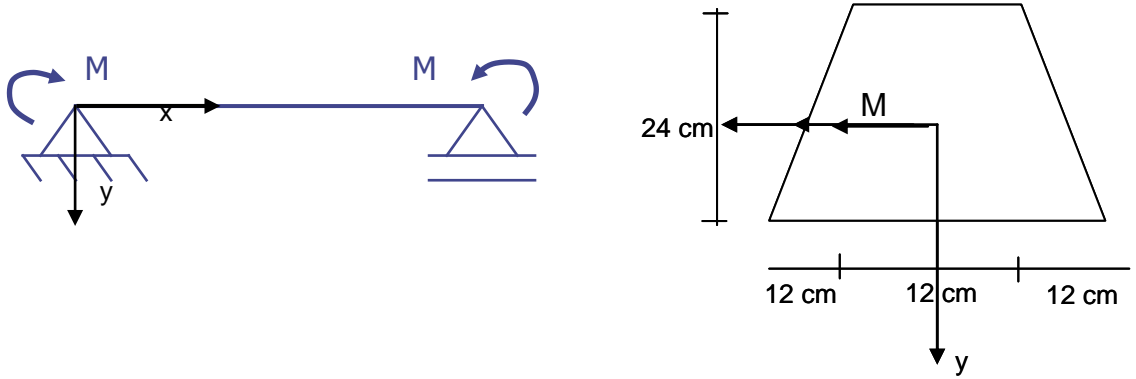
Calcular :

$$\sigma = \frac{M \cdot t_i}{I_z} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Se } \sigma \geq 0 \longrightarrow \sigma \leq \bar{\sigma}_{\text{tração}} \\ \text{Se } \sigma \leq 0 \longrightarrow \sigma \geq -\bar{\sigma}_{\text{compressão}} \end{array} \right\}$$

$$\sigma = \frac{M \cdot t_s}{I_z} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Se } \sigma \geq 0 \longrightarrow \sigma \leq \bar{\sigma}_{\text{tração}} \\ \text{Se } \sigma \leq 0 \longrightarrow \sigma \geq -\bar{\sigma}_{\text{compressão}} \end{array} \right\}$$

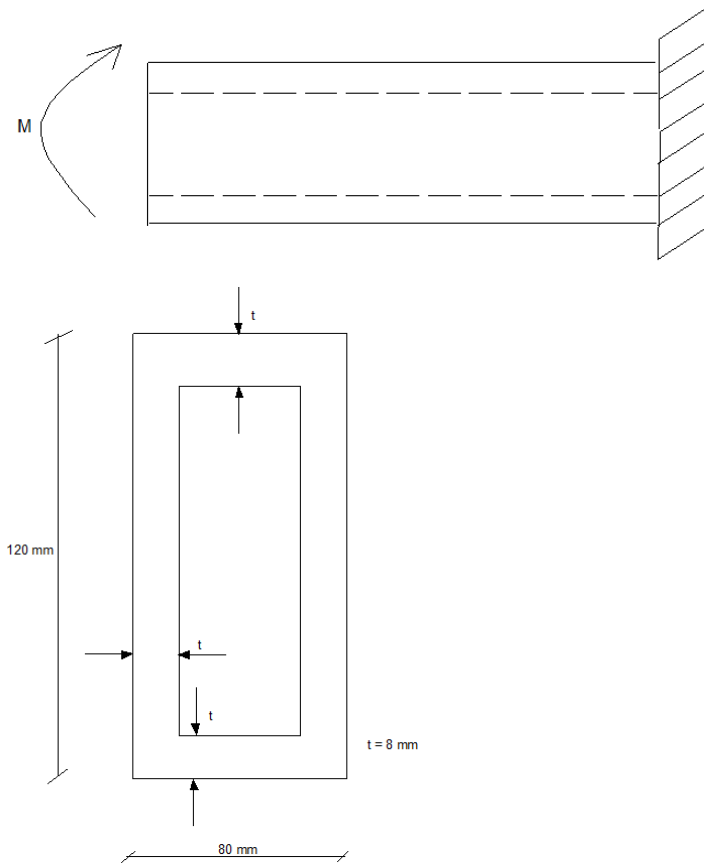
Exemplos

- 1) Admita-se que a viga da figura tenha seção transversal trapezoidal, com um eixo vertical de simetria e com as dimensões indicadas na figura. Pede-se determinar o maior valor do momento fletor que pode ser aplicado de modo que a tensão normal em módulo não exceda $5,0 \text{ kN/cm}^2$.

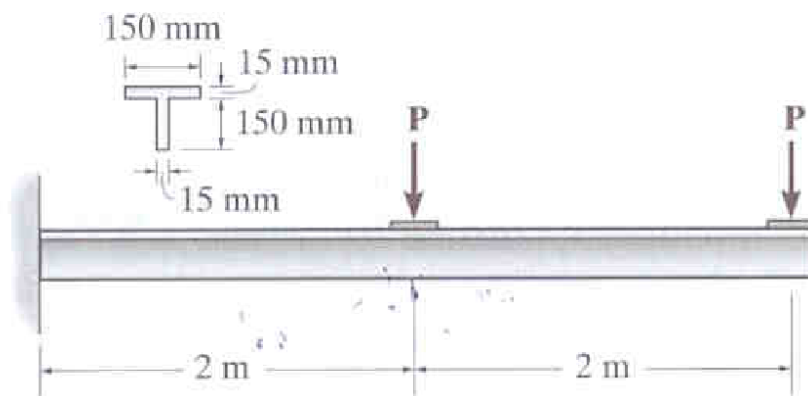


Resposta: $M \leq 9051,4 \text{ kN.cm}$, $Y_{cg} = 14 \text{ cm}$ (a partir do extremo superior), $I_z = 25\,344 \text{ cm}^4$

- 2) O tubo retangular é fabricado por extrusão, de uma liga de alumínio para a qual a tensão de ruptura seja 300 MPa , $\sigma_r = 300 \text{ MPa}$, e $E = 70 \text{ MPa}$. Desprezando o efeito dos frisos, determinar o momento fletor máximo para o qual o coeficiente de segurança é 3,0. Resposta: $M = 9,2 \text{ kNm}$



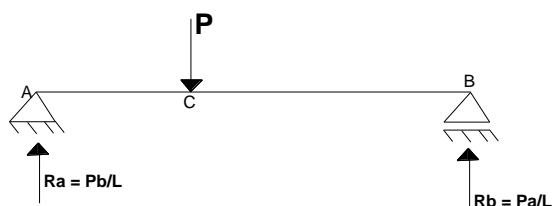
2) (Valério, 2011) Para a viga em balanço, determinar as cargas máximas P que podem ser suportadas com segurança pela viga, se a tensão de flexão admissível for 170 MPa para tração e 500 MPa para compressão. Esboce a distribuição das tensões normais na seção mais crítica.



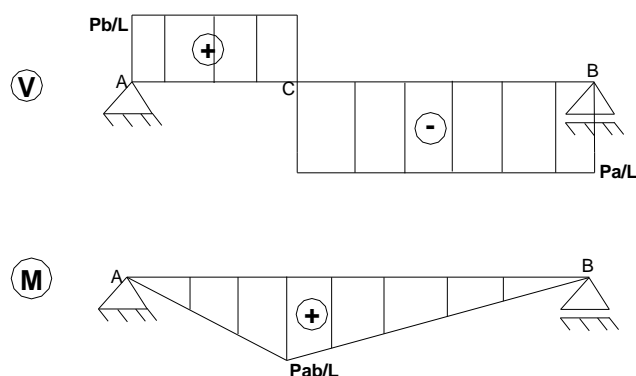
7. ESTUDO DE ESFORÇO CORTANTE EM VIGAS DE SEÇÃO SIMÉTRICA

7.1 Definição

Seja a barra biapoiada abaixo:



Já foi mostrado que os esforços solicitantes que a mobilizam são o esforço cortante e o momento fletor:



Assim, para uma dada seção genérica da barra, o momento fletor causa o aparecimento de tensões normais devido a flexão, já estudadas no item 6. Além disso, aparece também um outro tipo de tensão denominada de tensão de cisalhamento originada pela componente de força cortante.

Quando a tensão de cisalhamento é bastante inferior a tensão normal, é possível deduzir estas primeiras em função da última, mediante o uso de adequadas condições de equilíbrio. Neste caso, considerando esta hipótese, o problema a ser estudado na análise de tensões é a **flexão simples**.

Portanto, as relações obtidas da flexão pura continuam sendo empregadas na flexão simples, acrescidas de relações relativas ao efeito de cisalhamento.

Ressalta-se que as tensões de cisalhamento são responsáveis pelas distorções angulares (deformações angulares) que implicam em rotações em cada ponto na seção. Entretanto, devido a pouca influência destas tensões cisalhantes, conforme hipótese admitida, as rotações nas barras podem ainda serem equacionadas apenas como função da cinemática de Bernoulli-Navier empregada na dedução das relações tensão normal – momento fletor.

7.2 Equação da Tensão Cisalhante

Seja então um volume infinitesimal de uma barra carregada, com seção de plano vertical de simetria, conforme a figura 7.1.

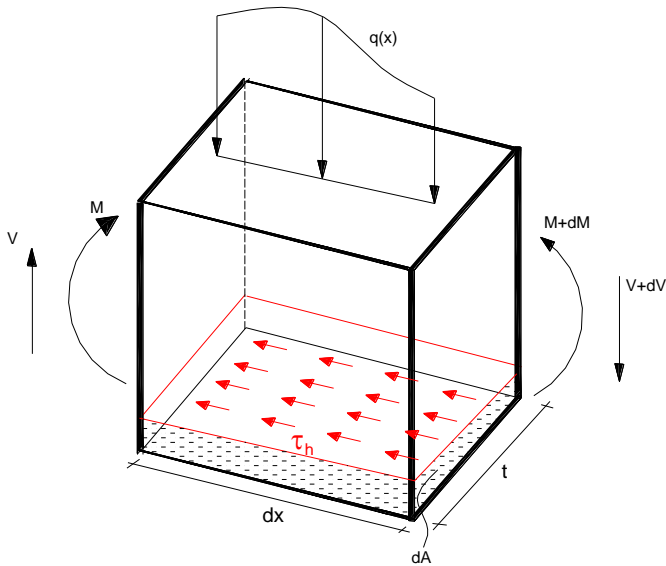


Figura 7.1

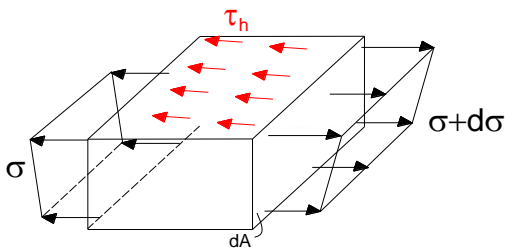


Figura 7.2

Já foi mostrado no item 3.8.1 que:

$$\frac{dV(x)}{dx} = -q(x) \quad (3.5)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x) \quad (3.7)$$

$$\sum F_x = 0 \text{ (figura 7.2)}$$

$$(d\sigma + \sigma)dA - \sigma dA - \tau_h \cdot t dx = 0 \quad (7.1)$$

$$d\sigma dA = \tau_h \cdot t dx \quad (7.2)$$

Sabe-se que:

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} \cdot y \quad (6.16)$$

Ou:

$$d\sigma = \frac{dM_z}{I_z} \cdot y \quad (7.3)$$

Substituindo (7.3) em (7.2):

$$\frac{dM_z}{I_z} \cdot y dA = \tau_h \cdot t dx \quad (7.4)$$

Ou

$$\int_A \frac{dM_z}{I_z} \cdot y \, dA = \tau_h \cdot t \, dx \quad (7.5)$$

Como M_z e I_z não variam na seção:

$$\frac{dM_z}{I_z} \cdot \int_A y \, dA = \tau_h \cdot t \, dx \quad (7.6)$$

Lembrando da definição de momento estático, item 5.1, eq. 5.1, chega-se a:

$$\frac{dM_z}{I_z} \cdot M_{S_z} = \tau_h \cdot t \, dx \quad (7.7)$$

Ou:

$$\tau_h = \frac{dM_z}{dx} \cdot \frac{M_{S_z}}{t \cdot I_z} \quad (7.8)$$

De (3.7), obtém-se:

$$\tau_h = V \cdot \frac{M_{S_z}}{t \cdot I_z} \quad (7.9)$$

Essa expressão foi primeiramente deduzida por Dmitri Ivánovich Zhuravski e leva seu nome.

7.2.1 Simetria das tensões cisalhantes

Para uma certa seção da barra, deve-se relacionar as tensões cisalhantes verticais (τ_v) com a correspondente força cortante. É possível relacionar a tensão horizontal τ_h com a τ_v mediante o equilíbrio de um volume infinitesimal – figura 7.3 - de modo que:

$$\tau_h \cdot (dz \cdot dx) \cdot dy = \tau_v \cdot (dz \cdot dy) \cdot dx \rightarrow \tau_h = \tau_v \quad (7.10)$$

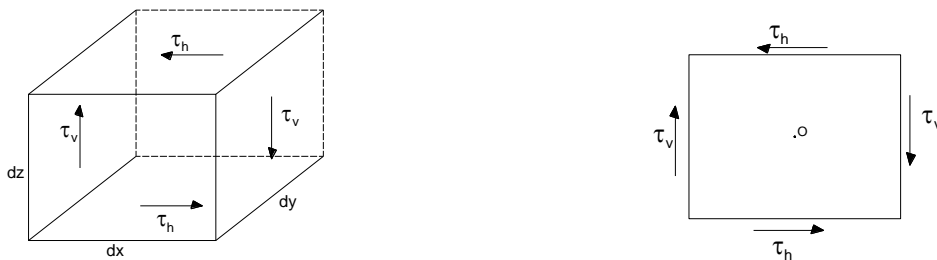


Figura 7.3

Assim,

$$\tau_v = \tau_{xy} = V \cdot \frac{M_{S_z}}{t \cdot I_z} \quad (7.11)$$

7.3 Definição de Tensão Admissível de Cisalhamento (τ_{adm})

Da mesma forma que fora definido tensão normal admissível, pode-se definir uma tensão de cisalhamento admissível em função do coeficiente de segurança da seguinte forma:

$$\tau_{adm} = \frac{\tau_r}{C.S.} \quad (7.12)$$

$$C.S. > 1,0$$

Assim, numa certa seção deve-se atender a condição de segurança a ruptura da forma:

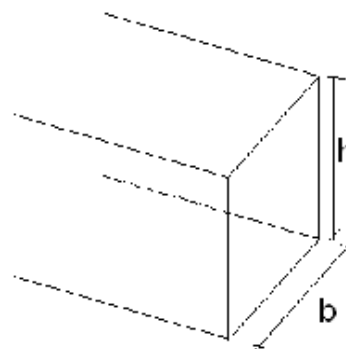
$$\tau \leq \tau_{adm} \rightarrow V \cdot \frac{M_{S_z}}{t \cdot I_z} \leq \frac{\tau_r}{C.S.} \quad (7.13)$$

7.4 Validade do uso das tensões cisalhantes médias

A tensão cisalhante expressa pela relação (7.11) é um valor médio, sendo que a distribuição real que ocorre na face indicada pela figura 7.1, não é constante. Entretanto, é sabido que esta simplificação para casos usuais de barras submetidas a flexão é suficiente.

Apenas por curiosidade, a medida que a relação b/h aumenta, a relação $\frac{\tau_{real}^{máx}}{\tau_{médio}^{máx}}$ aumenta, que leva a erros mais grosseiros do uso simplificado da média.

$$\begin{aligned} b/h = 0,5 &\rightarrow \frac{\tau_{real}^{máx}}{\tau_{médio}^{máx}} = 1,033 \quad (3,3\%) \\ b/h = 1,0 &\rightarrow \frac{\tau_{real}^{máx}}{\tau_{médio}^{máx}} = 1,126 \quad (12,6\%) \\ b/h = 2,0 &\rightarrow \frac{\tau_{real}^{máx}}{\tau_{médio}^{máx}} = 1,396 \quad (39,6\%) \\ b/h = 4,0 &\rightarrow \frac{\tau_{real}^{máx}}{\tau_{médio}^{máx}} = 1,988 \quad (98,8\%) \end{aligned}$$



7.5 Distribuição de Tensões Cisalhantes em seções com trechos retangulares

A expressão (7.11) indica que os valores das tensões cisalhantes variam para cada seção da barra, pois o esforço cortante (obtido no diagrama) e até o momento de inércia podem variar ao longo do eixo.

Entretanto, para uma seção genérica ($V = cte$ e $I = cte$), a tensão cisalhante varia em função da espessura (t) e do momento estático de cada ponto do eixo y . Isto implica que esta distribuição ao longo da seção depende de sua geometria.

Para o caso de seções formadas por regiões em forma de retângulo, mostra-se que esta distribuição é parabólico, com valor máximo no CG e nulos nas extremidades.

Seja a seção retangular:

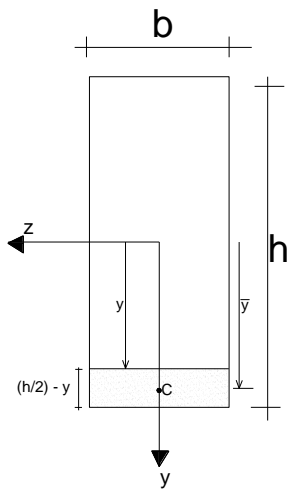


Figura 7.4

$$\tau_{xy} = V \cdot \frac{M_{S_z}}{t \cdot I_z} \quad (7.11)$$

$$M_{S_z} = \bar{y} \cdot \left[\left(\frac{h}{2} - y \right) \cdot b \right]$$

$$\bar{y} = y + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right)$$

$$M_{S_z} = \frac{b}{2} \cdot \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right]$$

$$\tau_{xy}^C = V \cdot \frac{M_{S_z}}{t \cdot I_z} = \frac{V}{t \cdot b \cdot \frac{h^3}{12}} \cdot \frac{b}{2} \cdot \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right]$$

$$\tau_{xy}(y) = \frac{3 \cdot V}{2 \cdot A} \cdot \left[1 - \left(\frac{2y}{h} \right)^2 \right]$$

Portanto a distribuição da tensão de cisalhamento ao longo da seção retangular é parabólico, com valor máximo no CG e valores nulos nos extremos, assim:

$$\tau_{xy}(y=0) = \frac{3 \cdot V}{2 \cdot A} \quad (\text{máximo})$$

$$\tau_{xy}(y = \pm h/2) = 0 \quad (\text{mínimo})$$

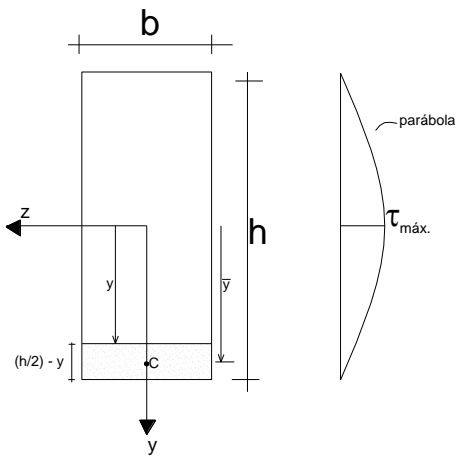
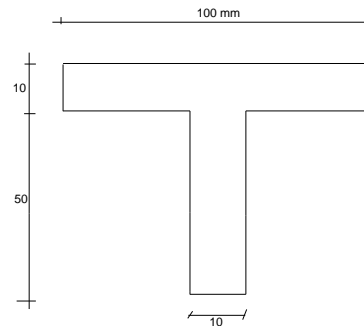
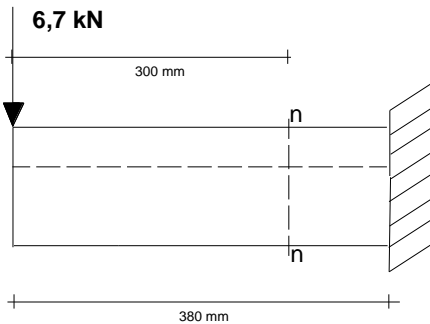


Figura 7.5

7.6 Exemplo

a) (Berr, pg. 281) Uma peça de máquina em forma de perfil T fica submetida a uma força atuante no seu plano de simetria. Determinar: i) a máxima tensão de compressão na seção $n-n$; b) a máxima tensão de cisalhamento.



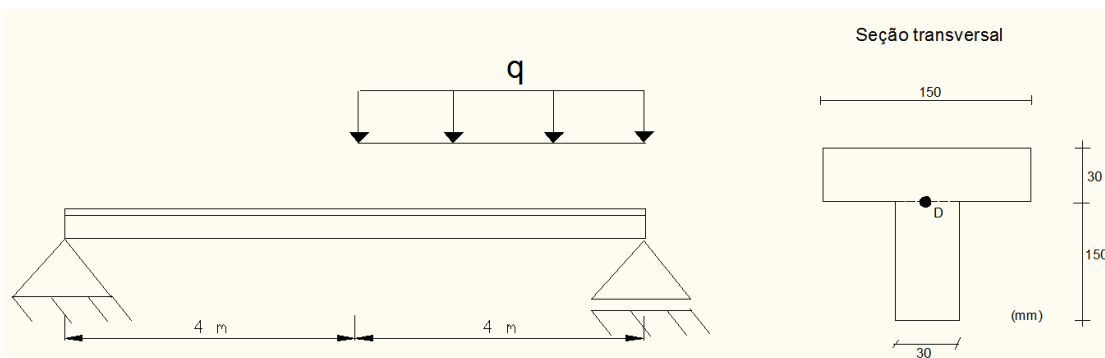
Respostas:

$I = 4,125 \text{ E } -7 \text{ m}^4$ a) $\sigma_c = 219,3 \text{ MPa}$; b) $\tau = 16,45 \text{ MPa}$;

$y_{cg} = 15\text{mm}$ (a partir da face superior), $M_S = 1,025\text{E}-5 \text{ m}^3$

2) (Valério, 2011) A viga mostrada a seguir é feita de duas tábuas coladas. Determine a tensão de cisalhamento máxima que ocorre na cola (ponto D).

Dados: $q = 13,0 \text{ kN/m}$.



8. FLEXÃO COMPOSTA – TRAÇÃO E COMPRESSÃO CENTRADA

8.1 Definição

Seja o caso da barra abaixo, onde a força P é aplicada sobre o eixo y do C_g da seção simétrica:

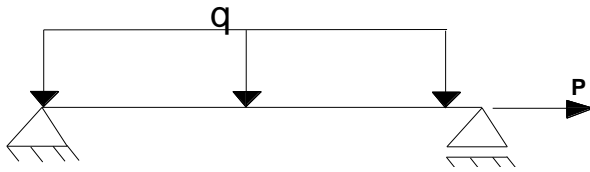
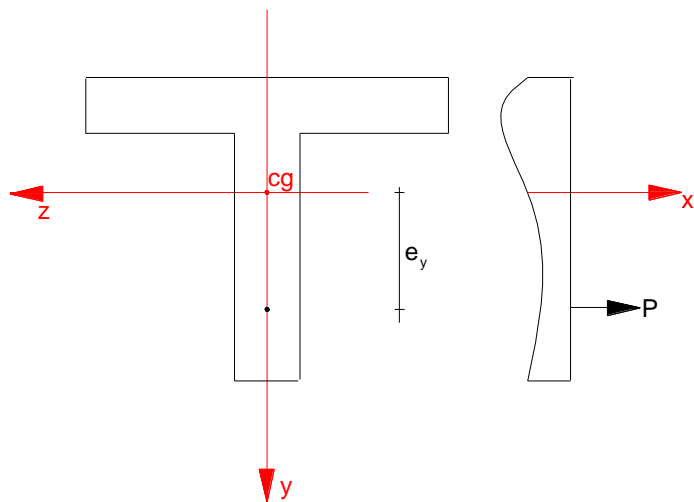


Fig. 8.1 – Barra sujeita a força vertical e longitudinal

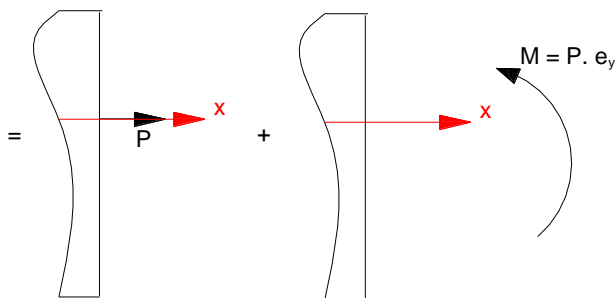
Já foi estudado os dois casos separadamente, ou seja, o estudo da flexão e o estudo de tração (ou compressão). É possível, sob certas hipóteses, admitir a combinação dos dois efeitos em conjunto.

Para o caso da flexão simples, a análise de tensões é obtida empregando a expressão já desenvolvida (6.16) para a consideração do efeito de momento fletor e a expressão (7.9) para o efeito de força cortante.

Para o caso da barra sujeito a forças normais, a tensão normal é dada pela expressão (4.1). Desta forma, é possível combinar o dois casos, chegando ao estudo da flexão composta, onde nesse tópico é apenas admitida a força normal centrada, ou que sua resultante esteja passando sobre o eixo de simetria vertical, veja figura 8.2. Por exemplo, considere a barra da figura 8.1, com a seção e a força P conforme figuras 8.2a, 8.2b, 8.2c, e 8.2d.



a) Vista frontal da seção b) Vista lateral da seção



c) Efeito de força normal d) Efeito de flexão

Fig. 8.2. a) Vista frontal da seção b) Vista lateral da seção; c) Transferência da força normal para o CG da seção; d) Transferência do efeito de momento fletor causado pela excentricidade de P .

Assim, a barra da figura 8.1 deve ser esquematizada de forma:

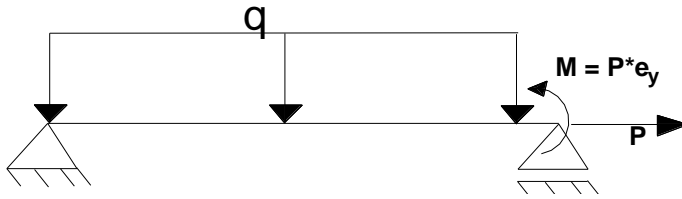


Fig. 8.3. Barra com momento concentrado, carga distribuída e força concentrada centrada.

Desta forma, é possível obter o diagrama de momento fletor, esforço cortante e normal, a partir da determinação das reações, conforme já visto.

Neste sentido, considerando a superposição do efeito das duas componentes de tensão normal, uma em virtude do efeito de flexão (diagrama de momento) e outra em função das força normal (diagrama de normal), , pode-se sobrepor o efeito de tensão normal de maneira que se tem:

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} \cdot y + \frac{P}{A} \quad (8.1)$$

É válido salientar que o M_z obtido indicado na eq. (8.1) já considera a influência da carga distribuída (q) e do momento concentrado (dado por $M = P \cdot e_y$).

E a expressão para o cálculo das tensões cisalhantes se mantem:

$$\tau_v = V \cdot \frac{M_{S_z}}{t \cdot I_z} \quad (7.11)$$

Destaca-se que a linha neutra (LN) fora definido como a reta paralela ao eixo y da seção em que a tensão normal é nula (fig. 6.8). Para o caso de flexão simples, isto ocorria no eixo y que passava pelo CG da seção, basta igualar a zero a eq. de flexão simples, eq. (6.16).

Entretanto para o caso da flexão composta, igualando a expressão (8.1) a zero, nota-se que a LN não mais passa em $y = 0$, ou seja, pelo Cg da seção.

Esquemáticamente, a distribuição de tensões em uma dada seção é indicada pela fig. 8.4:

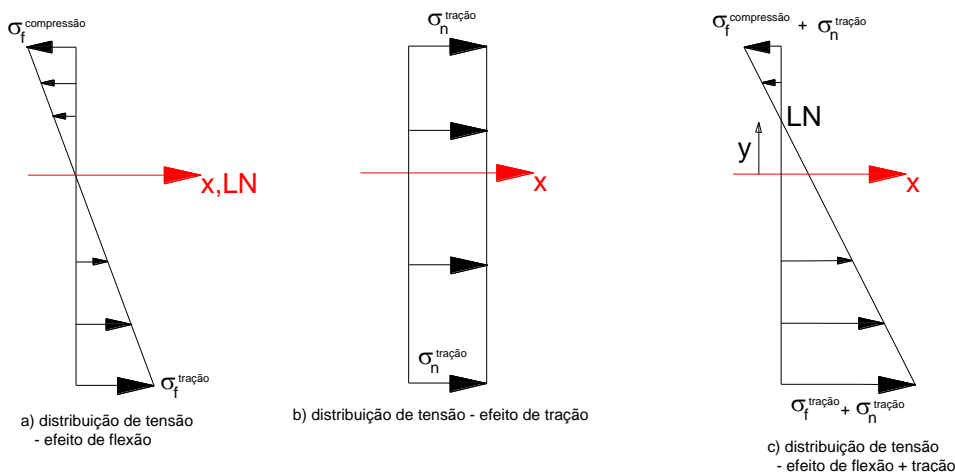


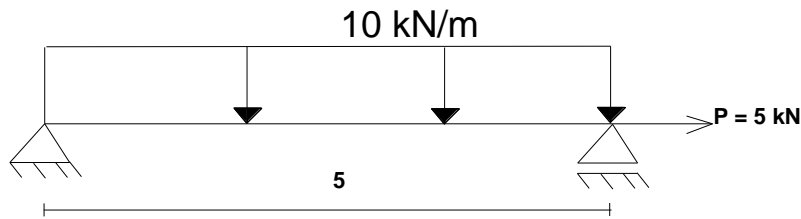
Fig. 8.4. Distribuição de tensão sob efeito de flexão e tração, linha neutra.

Duas observações podem ser feitas neste caso:

1. dependendo da ordem de grandeza dos dois efeitos, pode-se ter seções totalmente tracionada ou comprimida;
2. a posição da linha neutra é alterada, não passando mais pelo CG da seção.

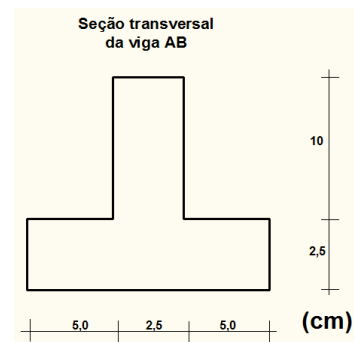
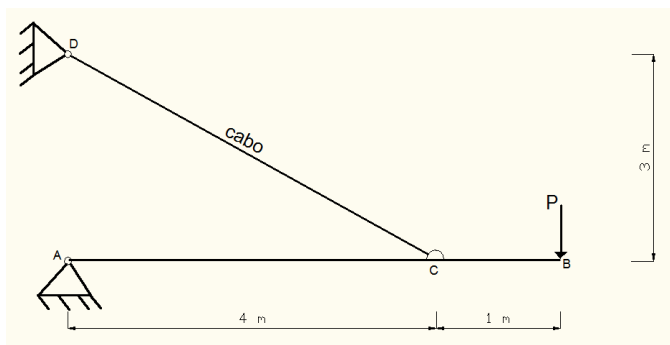
8.2. Exemplos

1) Determine as tensões máximas da barra abaixo, em como a posição da linha neutra. A seção é retangular de largura 5cm e altura 20 cm. A força P está aplicada no CG da seção.

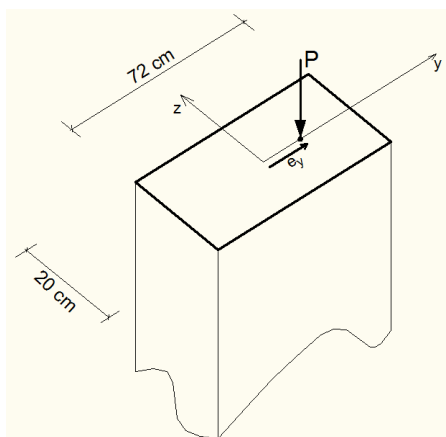


Resposta: Tração: $\sigma_{\max} = 94,25 \text{ MPa}$; Compressão: $\sigma_{\max} = -93,25 \text{ MPa}$;
 $y_{LN} = -0,0533 \text{ cm}$; $\tau_{\max} = 3,75 \text{ MPa}$, $I_z = 3333,33 \text{ cm}^4$; $M_S = 250 \text{ cm}^3$

2) (Valério, 2013) Obter o máximo valor admissível de P para a estrutura abaixo. Admita que o cabo CD esteja preso em C no CG da seção da viga AB. Dados para a viga AB: $\overline{\sigma}_T = 250 \text{ MPa}$, $\overline{\sigma}_C = 100 \text{ MPa}$. Dados para o cabo: $\overline{\sigma}_T = 500 \text{ MPa}$ e diâmetro = 10 mm.



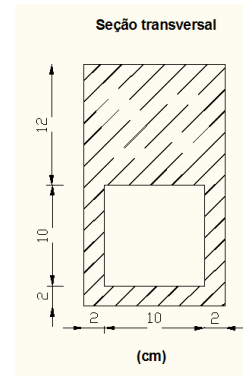
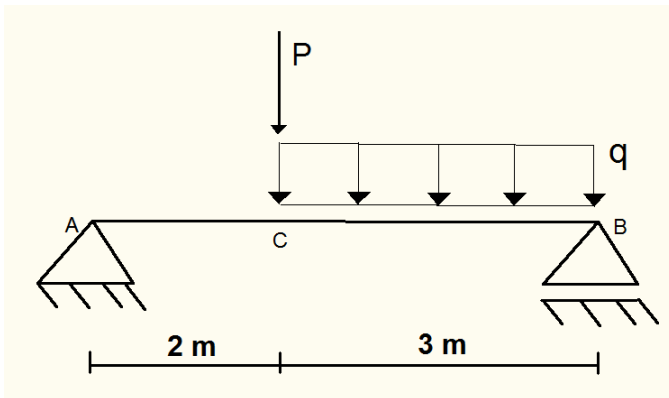
3) (Valério, 2013) Um bloco retangular tem o peso desprezível e está submetido a uma força vertical P. Determinar a faixa de valores da excentricidade e_y da carga ao longo do eixo y de modo que não provoque qualquer esforço de tração no bloco.



Resposta: $\leq e_y \leq$

4) (Valério, 2013) Para a viga mostrada na figura, adote $P = 40 \text{ kN}$ e $q = 40 \text{ kN/m}$, determine:

- Diagrama de momento fletor e esforço cortante;
- Posição do centro de gravidade (CG), os momentos de inércias e estáticos com relação ao CG;
- As tensões máximas normais e a tensão cisalhante no CG nas suas respectivas seções críticas;
- Esboce a distribuição das tensões obtidas no item c) ao longo de sua seção transversal.



9. ESTUDO DE TORÇÃO (TORQUE):

9.1 Definição

Nos tópicos anteriores foram estudados elementos estruturais de barras sujeitos a forças ou momentos concentrados ou distribuídos que geravam tensões normais ou cisalhantes. Um outro tipo de elemento estrutural de muita aplicação prática na engenharia é o eixo de transmissão (fig. 9.1), que é utilizado para transmitir potência de um ponto a outro através de engrenagens, ou aplicado em motores mecânicos ou em turbinas para transferência de energia, ou em virabrequim de automóvel, etc.

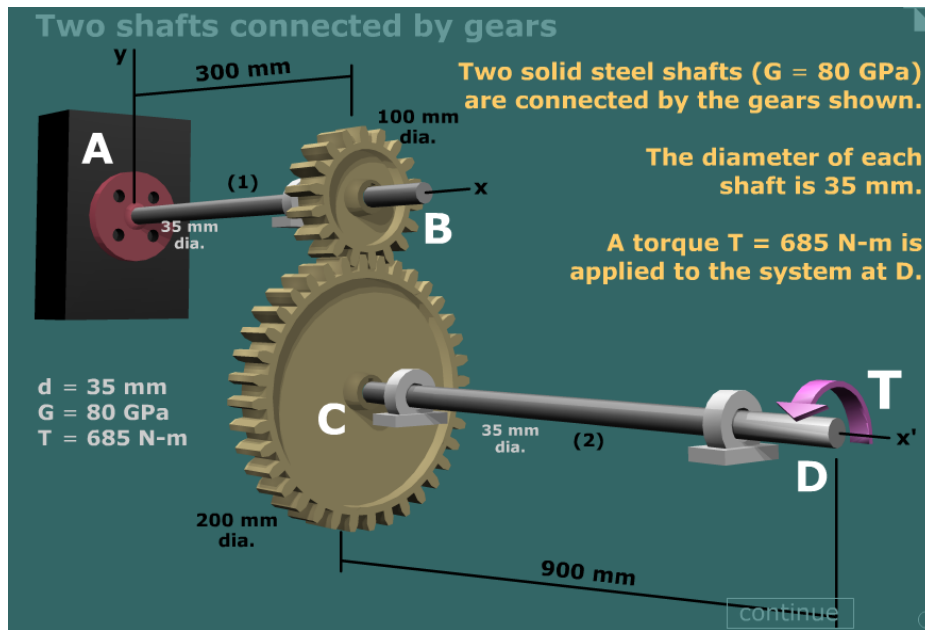


Fig. 9.1 Exemplo de um sistema de transmissão

Define-se eixo como um elemento estrutural cujo comprimento é bem maior que as dimensões da seção transversal. Será considerado apenas ações que originam torção das seções em torno da dimensão longitudinal.

9.2 Hipóteses admitidas

Vamos particularizar o estudo da torção apenas para o caso das seções circulares (cheias ou vazadas), sendo admitidas as seguintes hipóteses:

1. seções planas permanecem planas ao eixo longitudinal;
2. não há deformação longitudinal, a qual está presente em seções não-circulares gerando o fenômeno de empenamento;
3. as ações produzem uma rotação das seções transversais no eixo longitudinal (x);
4. toda seção sofre uma rotação constante e de pequenos valores;

9.3 Lei Cinemática

Seja o ponto P que sofre um giro no sentido anti-horário (considerado positivo) e se posicione numa posição P'. Com o auxílio das figuras 9.2, as coordenadas do ponto P e P' são dadas por:

$$y = r \cdot \cos(\beta), \quad z = r \cdot \sin(\beta) \quad (9.1)$$

$$y' = r \cdot \cos(\beta + \theta), \quad z' = r \cdot \sin(\beta + \theta) \quad (9.2)$$

$$c/ r = \sqrt{y^2 + z^2}$$

E os deslocamentos nas direções y e z, denominados de v e w, são indicados por:

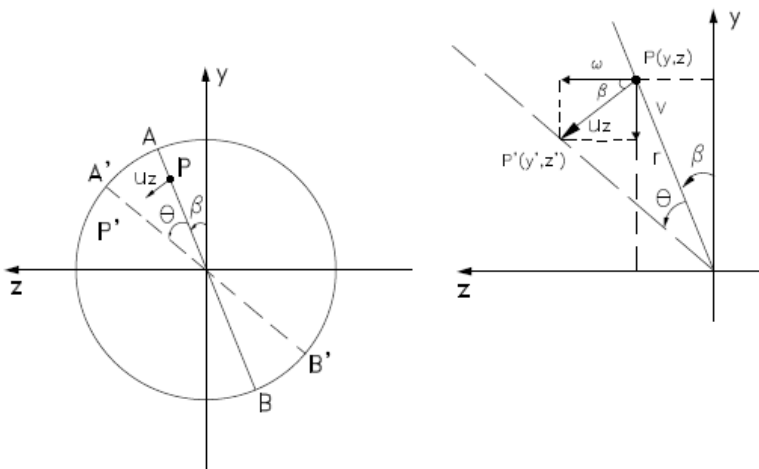


Fig. 9.2 Esquema de giro de uma seção genérica

$$v = y' - y = r \cdot \cos(\beta + \theta) - r \cdot \cos(\beta) = r \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\theta) - r \cdot \text{sen}(\beta) \cdot \text{sen}(\theta) - r \cdot \cos(\beta) \quad (9.3)$$

$$w = z' - z = r \cdot \text{sen}(\beta + \theta) - r \cdot \text{sen}(\beta) = r \cdot \text{sen}(\beta) \cdot \cos(\theta) + r \cdot \cos(\beta) \cdot \text{sen}(\theta) - r \cdot \text{sen}(\beta) \quad (9.4)$$

Admitindo pequenos giros, ou seja, $\cos(\theta) \cong 1$, $\text{sen}(\theta) \cong \theta$, e levando em conta as relações (9.1), se obtêm os deslocamentos de uma seção qualquer em função de sua rotação:

$$v(x, y, z) = -z \cdot \theta(x) \quad (9.5)$$

$$w(x, y, z) = y \cdot \theta(x) \quad (9.6)$$

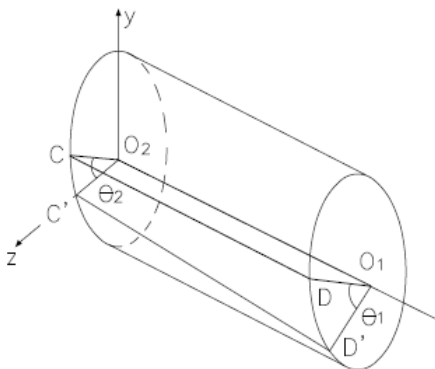


Fig. 9.3 Variação linear do eixo ao longo do eixo

9.4 Relação deslocamento-deformação angular

O vetor deslocamento tangencial pode ser escrito usando as parcelas descritas na relações (9.5) e (9.6) de modo que é possível escrever:

$$\vec{d}(x, y, z) = v(x, y, z) \cdot \vec{j} + w(x, y, z) \cdot \vec{k} \quad (9.7)$$

Sendo o seu módulo dado por:

$$d(x, y, z) = \sqrt{(z \cdot \theta(x))^2 + (y \cdot \theta(x))^2} = \left[\sqrt{(z)^2 + (y)^2} \right] \cdot \theta(x) \quad (9.8)$$

Ou

$$d(x, y, z) = r \cdot \theta(x) \quad (9.9)$$

Em problemas de torção circular, a deformação será angular, ou de distorção, devido a variação do ângulo $\theta(x)$. E elas são definidas como:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -z \cdot \left[\frac{\partial \theta(x)}{\partial x} \right] \quad (9.10)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = y \cdot \left[\frac{\partial \theta(x)}{\partial x} \right] \quad (9.11)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial \theta(x)}{\partial x} + \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} = 0 \quad (9.12)$$

E a distorção tangencial é dada por:

$$\gamma_t = \sqrt{(\gamma_{xy})^2 + (\gamma_{xz})^2} = \sqrt{y^2 + z^2} \cdot \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} = r \cdot \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} \quad (9.13)$$

9.5 Lei Constitutiva

Para cada material, determina-se experimentalmente (ensaio de torção) uma curva característica que relaciona a tensão de cisalhamento com a deformação angular, de modo que se pode representá-la da seguinte forma:

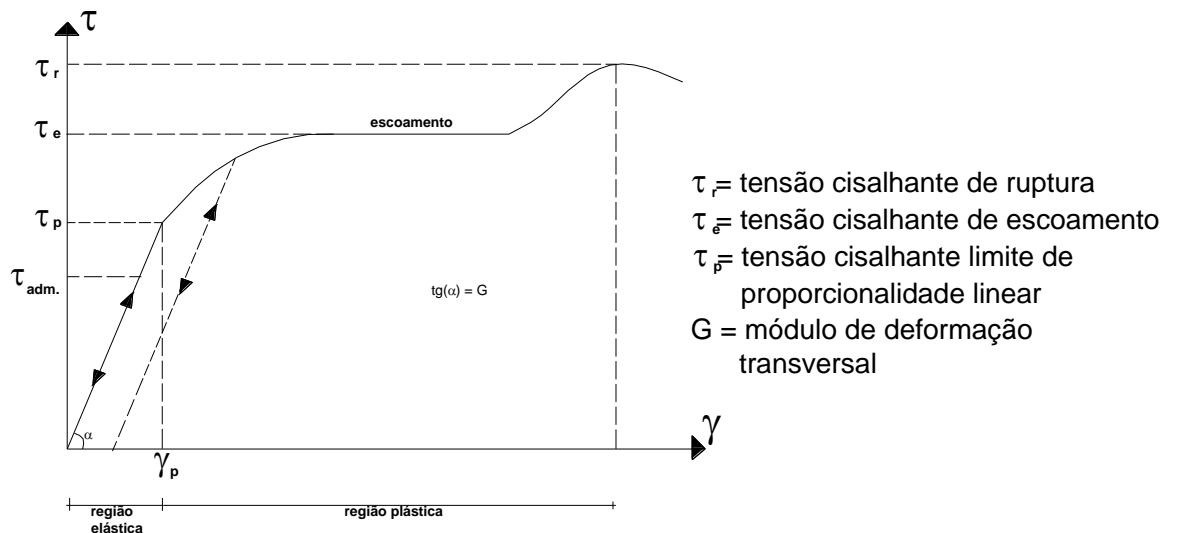


FIG. 9.4 Diagrama tensão cisalhante -deformação angular

Neste caso, as relações constitutivas para um material no regime elástico-linear é dado por:

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} \quad (9.14)$$

$$\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} \quad (9.15)$$

Onde G é o módulo de deformação transversal, característico de cada material. Assim, usando as expressões (9.12) e (9.13) escreve-se:

$$\tau_{xy} = -G \cdot z \cdot \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} \quad (9.16)$$

$$\tau_{xz} = G \cdot y \cdot \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} \quad (9.17)$$

Ou na forma de tensão cisalhante tangencial:

$$\tau_t = G \cdot r \cdot \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} \quad (9.18)$$

9.6 Relação de Equilíbrio

As tensões cisalhantes tangenciais geram um momento resultante em cada seção que é igual ao momento de torção (diagrama), ver fig. 9.5, sendo válido escrever:

$$dM_t = \tau_t \cdot r \cdot dA \quad (9.19)$$

Integrando em toda a seção:

$$M_t = \int_A \tau_t \cdot r \cdot dA = \int_A G \cdot r \cdot \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} r \cdot dA = G \cdot \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} \int_A r^2 \cdot dA \quad (9.20)$$

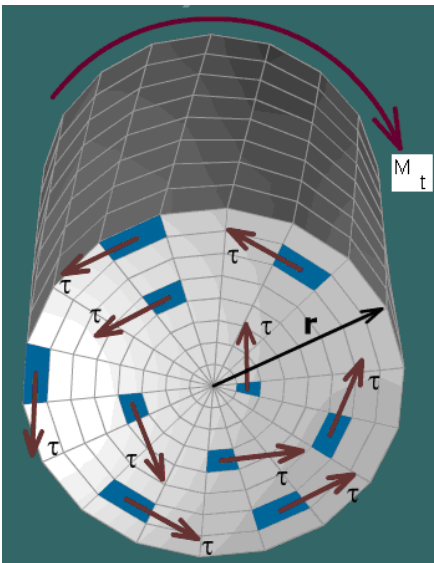


FIG. 9.5 Distribuição de tensão cisalhante numa seção genérica

O termo do integrador da eq. (9.20) é denominado de momento de inércia polar ou momento a torção ($I_p = I_y + I_z$), onde para seções vazadas de diâmetros interno e externo indicados pelos símbolos D_i e D_e é dado por:

$$I_p = \frac{\pi \cdot (D_e^4 - D_i^4)}{32} \quad (9.21)$$

Caso $t \ll d_m \rightarrow I_p = \frac{\pi \cdot d_m^3 \cdot t}{4}$ (tubo de parede fina, um cano, por exemplo)

Assim, a relação fica:

$$M_t(x) = G \cdot \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} \cdot I_p \quad (9.22)$$

De modo que se conhecendo a lei do momento torçor e conhecendo as condições de contorno adequadas, obtém-se a equação da rotação.

Como, por hipótese, o giro de uma seção qualquer com relação a uma seção de referência é diretamente proporcional à distância entre elas, escreve-se:

$$\theta(x) = \Phi \cdot x \quad (9.23)$$

Onde Φ é giro por unidade de comprimento.

Assim, derivando a relação (9.23), a relação (9.22) é escrita como:

$$M_t = G \cdot \Phi \cdot I_p \quad (9.24)$$

Finalmente, confrontando a relação (9.22) com a (9.18), escreve-se a relação entre a tensão de cisalhamento e o momento torçor de modo a se ter a expressão conhecida:

$$\tau_t(x, r) = \frac{M_t(x)}{I_p} \cdot r \quad (9.25)$$

Algumas observações são feitas com respeito a esta relação anterior:

1. a tensão cisalhante varia ao longo do eixo longitudinal, uma vez que o momento de torção e o momento de inércia podem variar ao longo do eixo;
2. a tensão de cisalhamento varia de forma linear numa mesma seção, tendo seu valor máximo no extremo da seção, ou seja, onde $r = d/2$ (ver fig.9.6).
3. Pode-se projetar eixos calculando as tensões solicitantes máximas empregando a expressão (9.24) e condicionando seu valor a ser menor ou igual a tensão admissível, ou seja

$$\tau_t^{\max} \leq \tau_{adm} \quad (9.26)$$

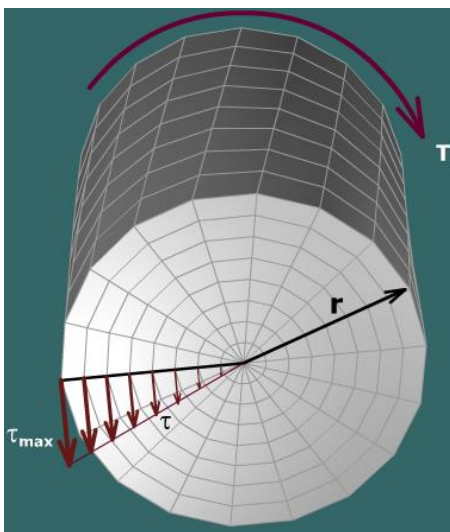


FIG. 9.6 Distribuição linear da tensão cisalhante numa seção genérica

A rotação na seção pode ser obtida pelo uso da equação (9.22), onde se isola os termos da derivada, assim:

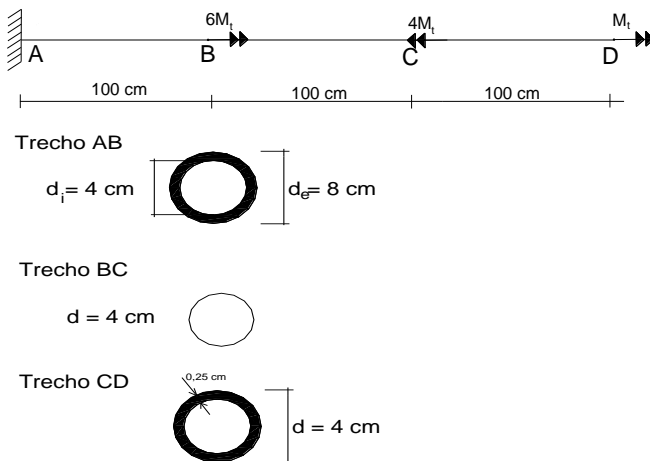
$$\frac{\partial \theta(x)}{\partial x} = \frac{M_t(x)}{G \cdot I_p} \int \rightarrow \int_{x_0}^{x_1} \partial \theta(x) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{M_t(x)}{G \cdot I_p} dx \rightarrow \theta(x_1) - \theta(x_0) = \frac{M_t(x) \cdot (x_1 - x_0)}{G \cdot I_p} = \frac{M_t(x) \cdot L}{G \cdot I_p}$$

$$\theta(x_j) = \theta(x_0) + \sum_{i=1}^j \left(\frac{M_t \cdot L}{G \cdot I_p} \right)_i$$

Onde j é o número de trechos da peça estrutural onde M_t , G e I_p se mantem constante, e L é seu comprimento.

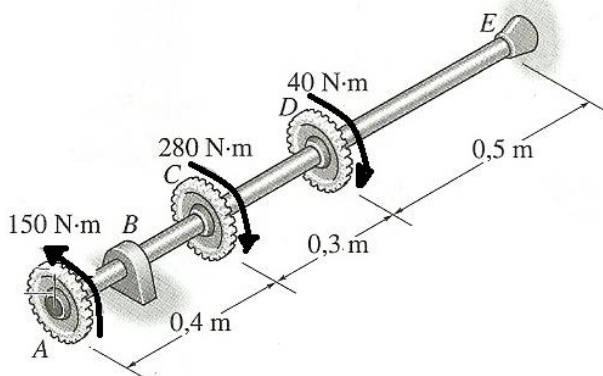
9.7 Exemplo

1) (Proença, pg. 254) Para o eixo ilustrado na fig. 9.7, considerando-se uma tensão cisalhante admissível de valor 10 kN/cm^2 e $G = 10\,000 \text{ kN/cm}^2$, determinar o maior valor de torção de referência que se pode aplicar e o diagrama de giro ao longo da mesma.

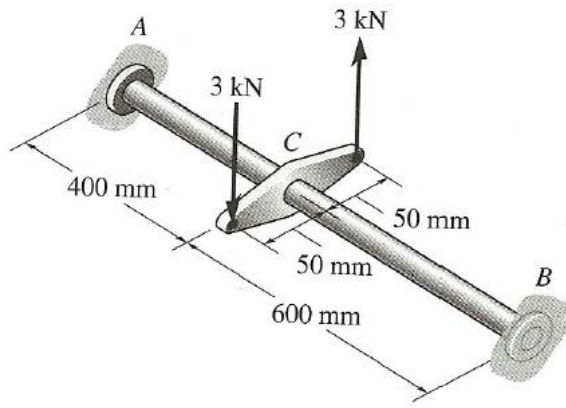


Resposta: $M_t = 41,89 \text{ kN cm}$. $\theta_B = (1/300) \text{ rad}$, $\theta_C = (-14/300) \text{ rad}$, $\theta_D = (-4/300) \text{ rad}$

2) (Valerio, 2013) As engrenagens acopladas ao eixo de aço com umas das extremidades fixa estão sujeitas aos torques mostrados na figura. Supondo que o módulo de elasticidade transversal seja 80 GPa e o eixo tenha diâmetro de 14 mm , determinar a máxima tensão cisalhante e a rotação do ponto A.



3) (Valerio, 2012) O eixo de aço tem diâmetro de 40 mm e suas extremidades A e B são fixas. Se ele for submetido ao conjunto de forças, conforme desenho, qual será a tensão máxima de cisalhamento para as regiões AC e CB. Com essas tensões e sabendo que $\bar{\tau} = 10 \text{ MPa}$, indique o coeficiente de segurança da estrutura.



10. ESTUDO DE TENSÕES:

10.1 Definição

O conceito de tensão já foi apresentado no estudo de flexão, cisalhamento e torção em capítulos anteriores.

Neste item, tem-se o estudo das tensões de forma mais geral, com objetivo de obter as componentes em quaisquer plano de um certo ponto do elemento estrutural.

Considere então um volume infinitesimal de um elemento estrutural qualquer, de modo que este volume seja indicado por um cubo com as faces paralelas aos planos ortogonais usuais (x,y,z).

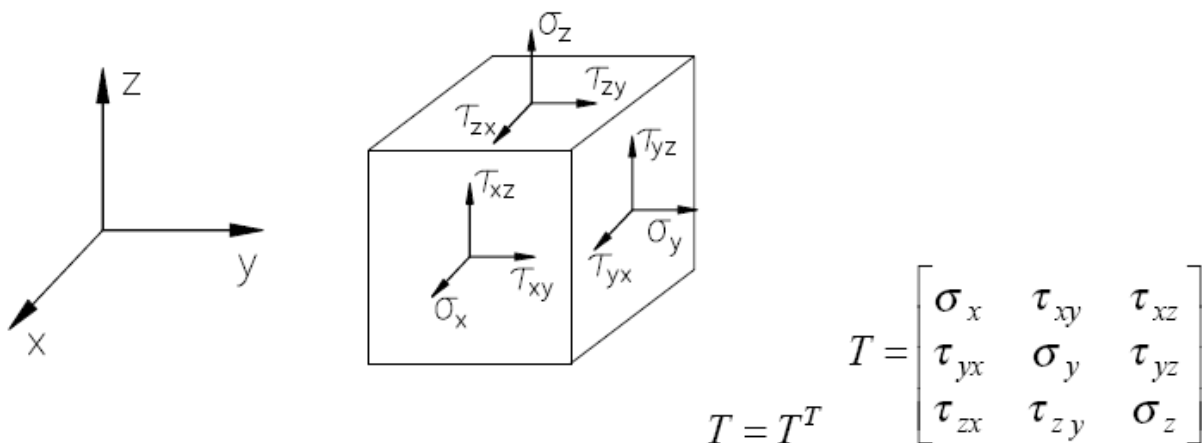


FIG. 10.1 Componentes de tensão num volume infinitesimal

Nota-se que será admitido para um plano inclinado qualquer os sentidos positivos das tensões impondo-se um giro anti-horário (positivo), de modo que suas direções coincidam com as direção normal e tangencial ao plano inclinado.

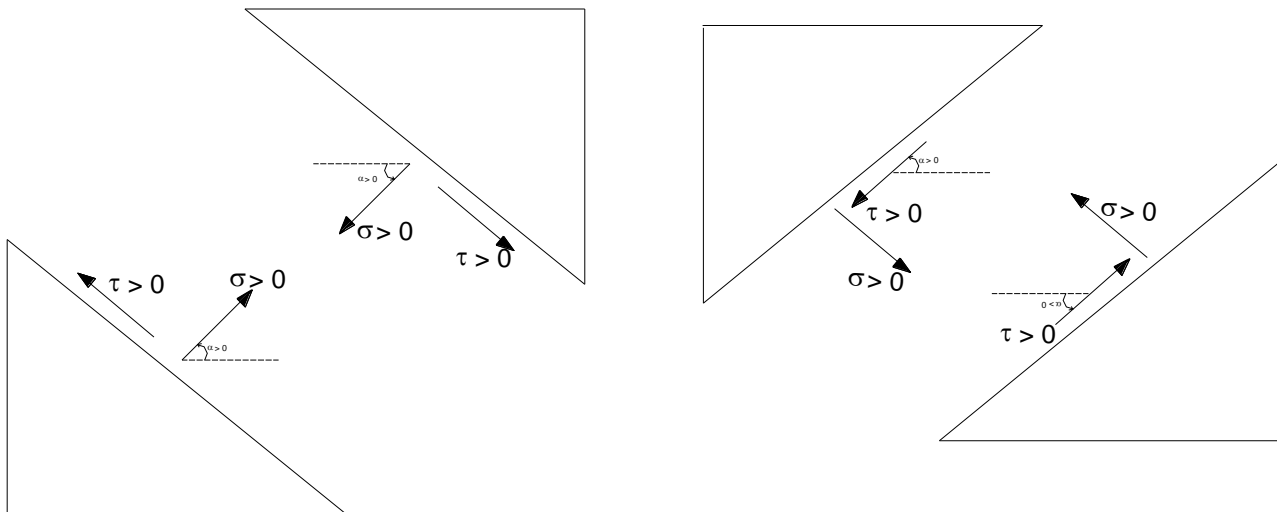


FIG. 10.2 Convenção para as componentes de tensão num plano α qualquer

Tem-se assim para um caso geral 9 componentes de tensão:

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (1)$$

Mostram-se por equilíbrio do volume infinitesimal (fig.10.1) que se não houver momentos concentrados neste volume, têm-se as igualdades das tensões cisalhantes:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} ; \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (2)$$

Estas componentes descritas em (1) tem as referências os três planos ortogonais convencional, mas com relação a um outro plano qualquer, estes valores de tensão são diferentes.

Conhecendo-se as componentes de T para o sistema cartesiano convencional, é possível calcular as suas componentes para qualquer plano α mediante transformações adequadas. Isto é importante, pois se deve mostrar que os valores extremos de tensão normal e cisalhante de modo geral ocorrem em planos inclinados, fato importante para a adequada análise da peça estrutural.

10.2 Deformação

Seja a barra sujeita a força de tração P e com as dimensões indicadas na fig. 10.3, as deformações na direção x e y podem ser definidas como:

$$\text{Deformação axial} = \varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L_0}$$

$$\text{Deformação lateral} = \varepsilon_y = \frac{\Delta b}{b_0}$$

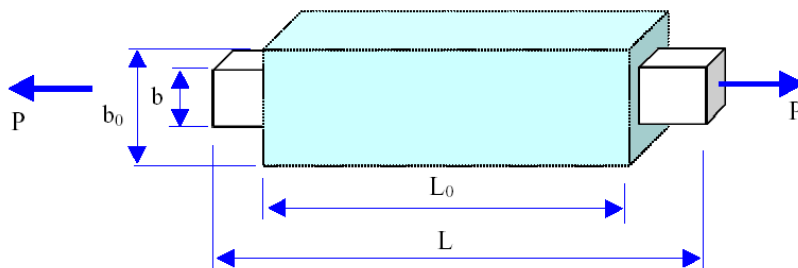


FIG. 10.3 Barra sujeita a forças de tração

Uma outra forma de representar estas deformações é em termos de valores infinitesimais, ou seja, em termos de relações diferenciais.

Se o corpo se deforma em três direções ortogonais x , y , e z e u , v , e w forem as três componentes do deslocamento nestas direções, as deformações lineares são respectivamente:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

Além da deformação linear, um corpo pode sofrer uma deformação angular, como mostrado abaixo.

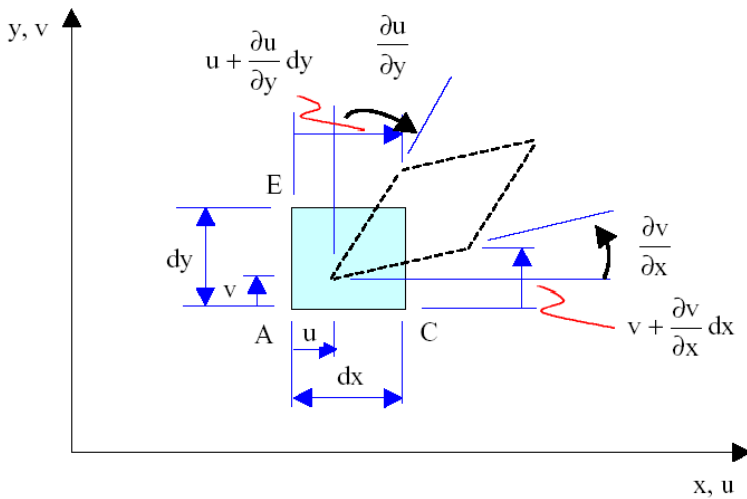


FIG. 10.4 Determinação de deformação angular

Assim, para pequenas mudanças de ângulo, a deformação angular associada as coordenadas x e y é definida por:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

Se o corpo se deforma em mais planos ortogonais xz e yz , as deformações angulares nestes planos são:

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad , \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

A relação entre o valor da deformação lateral e a deformação axial é conhecida como coeficiente de poisson:

$$\nu = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_x}$$

10.3 Lei de Hooke Generalizada

É possível generalizar a relação constitutiva entre tensão-deformação levando-se em conta todas as componentes de tensão e deformação no elemento tridimensional. Assim, tem-se:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}, \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}, \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}$$

O módulo de cisalhamento G está relacionado a E e ν por:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

10.4 Estado simples de tensão

Seja a barra submetida a tração ou compressão centrada

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

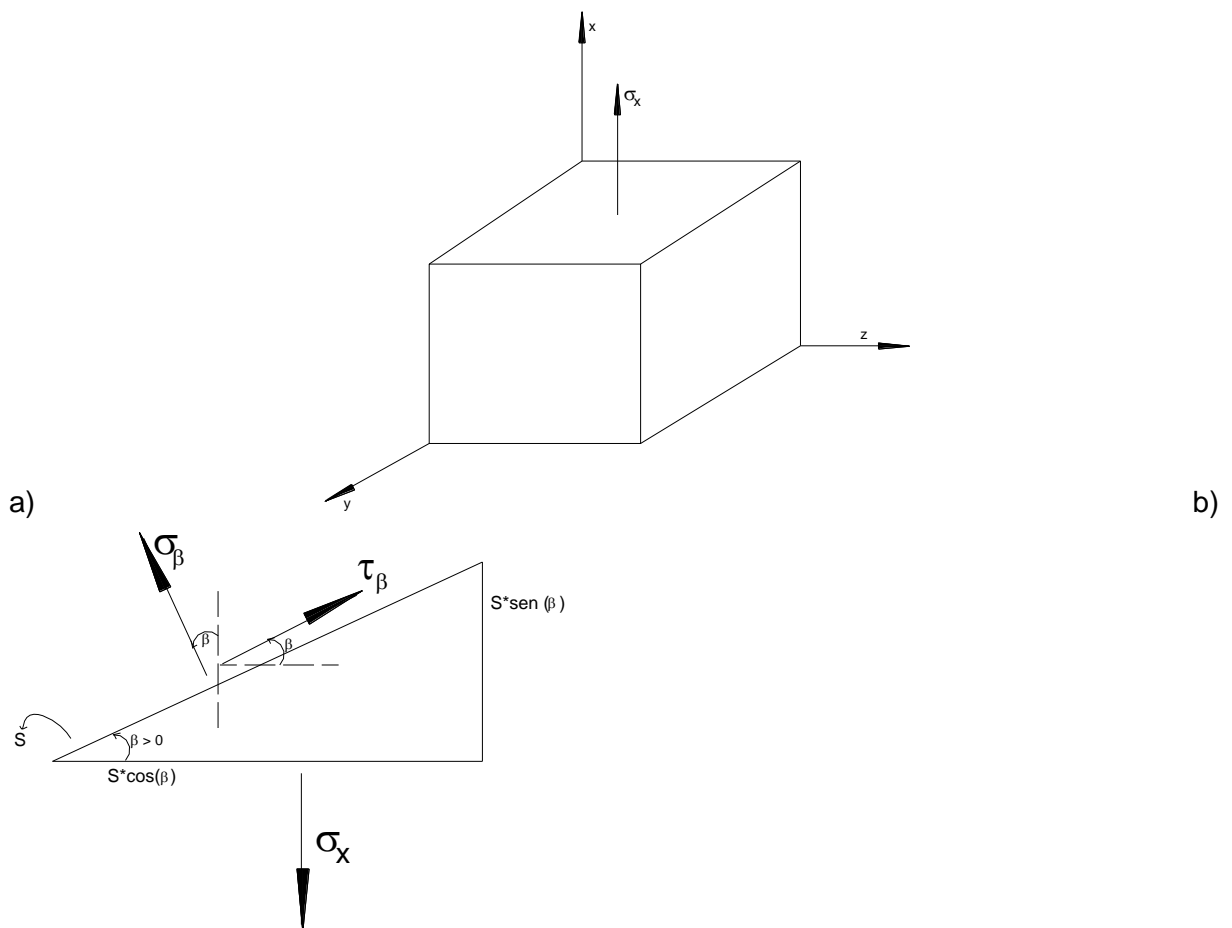


FIG. 10.5 (a) estado simples de tensão; (b) componentes segundo um plano inclinado

$$\sum F_x = 0$$

$$\sigma_x \cdot S \cdot \cos \beta = \sigma_\beta \cdot S \cdot \cos \beta + \tau_\beta \cdot S \cdot \sin \beta$$

$$\sigma_x = \sigma_\beta + \tau_\beta \cdot \operatorname{tg} \beta \quad (4)$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\tau_\beta \cdot S \cdot \cos \beta = \sigma_\beta \cdot S \cdot \sin \beta$$

$$\tau_\beta = \sigma_\beta \cdot \operatorname{tg} \beta \quad (5)$$

Substituindo (5) em (4):

$$\sigma_x = \sigma_\beta + \sigma_\beta \cdot (\operatorname{tg} \beta)^2 = \sigma_\beta \cdot \left(1 + \frac{(\sin \beta)^2}{(\cos \beta)^2} \right) \quad (6)$$

$$\sigma_\beta = \sigma_x \cdot (\cos \beta)^2 \quad (7)$$

Substituindo (7) em (5):

$$\tau_\beta = \sigma_x \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta \quad (8)$$

Obter os extremos das funções (7) e (8):

$$\frac{d\sigma_\beta}{d\beta} = -2 \cdot \sigma_x \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta = 0 \quad (9)$$

$$\beta = 0, \pi/2, -\pi/2$$

$$\frac{d\tau_\beta}{d\beta} = \sigma_x \cdot \cos 2\beta = 0 \quad (10)$$

$$\beta = \pi/4, -\pi/4 \quad (45^\circ)$$

Assim, os extremos são:

Tensão normal:

$$\sigma_\beta = \sigma_x \quad (\text{máximo}) \quad (11)$$

$$\sigma_\beta = 0 \quad (\text{mínimo}) \quad (12)$$

Tensão cisalhante:

$$\tau_{\beta=\pm\pi/4} = \frac{\sigma_x}{2} \quad (13)$$

Note que no plano onde σ_β é máximo τ_β é nulo.

A relação (4) pode ser manipulada algebricamente de modo a escrevê-la como uma equação de circunferência de forma:

$$(\sigma_\beta)^2 + (\tau_\beta)^2 = \frac{\sigma_x}{2} \cdot (1 + \cos^2 \beta) \quad (14)$$

De maneira que a variação das tensões em função do ângulo pode ser esquematizada de forma de um círculo denominado de círculo de Mohr.

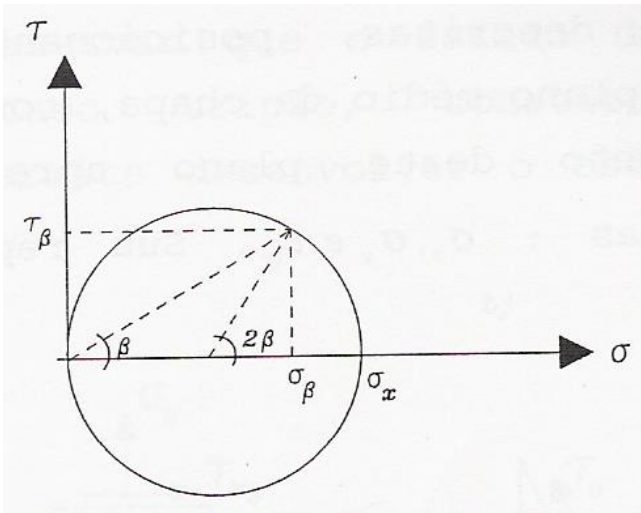


FIG. 10.6 Círculo de Mohr para estado de tensão simples

10.5 Estado duplo de tensão

Considere o seguinte caso plano:

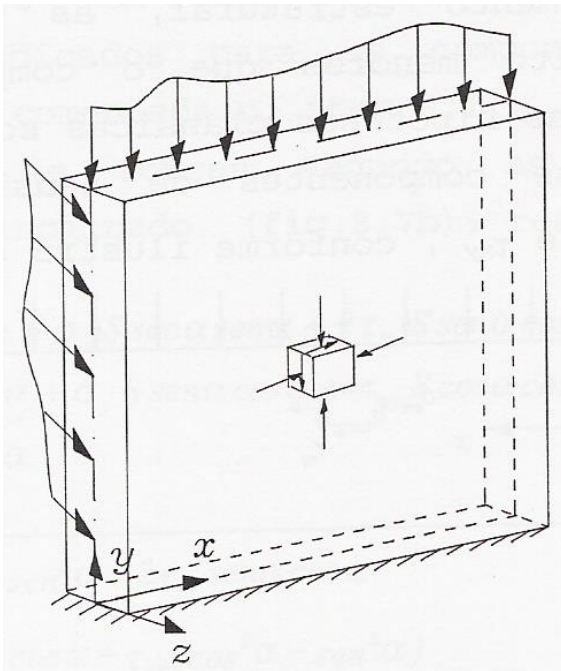


FIG. 10.7 Exemplo 1 de Estado Plano (Duplo) - Chapa

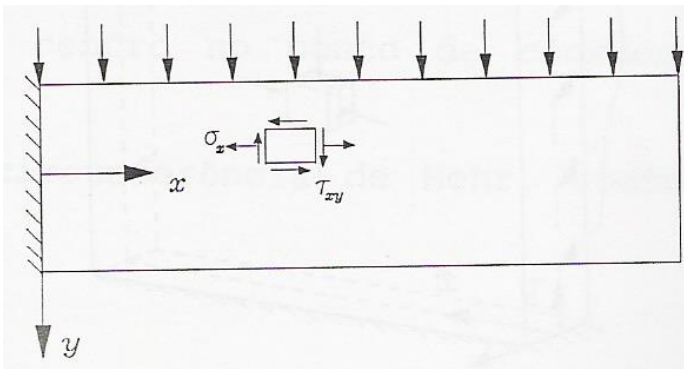


FIG. 10.8 Exemplo 2 de Estado Plano (Duplo) – Viga

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

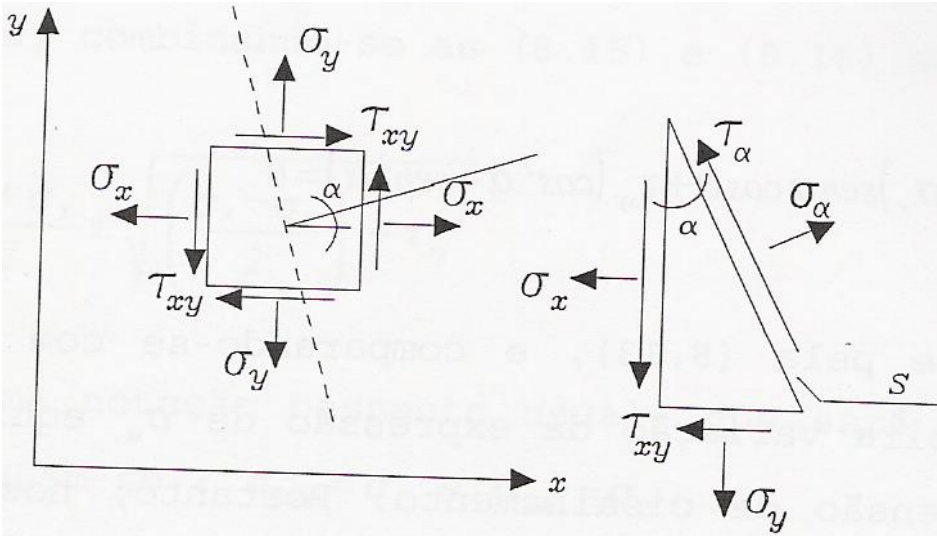


FIG. 10.9 Componentes segundo um plano inclinado

$$\sum F_x = 0$$

$$\sigma_\alpha \cdot S \cdot \cos \alpha = \sigma_x \cdot S \cdot \cos \alpha + \tau_{xy} \cdot S \cdot \sin \alpha + \tau_\alpha \cdot S \cdot \sin \alpha \quad (16)$$

Ou

$$\sigma_\alpha = \sigma_x + \tau_{xy} \cdot \operatorname{tg} \alpha + \tau_\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (16b)$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sigma_\alpha \cdot S \cdot \sin \alpha + \tau_\alpha \cdot S \cdot \cos \alpha = \tau_{xy} \cdot S \cdot \cos \alpha + \sigma_y \cdot S \cdot \sin \alpha \quad (17)$$

Ou

$$\tau_\alpha = \tau_{xy} + \sigma_y \cdot \operatorname{tg} \alpha - \sigma_\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (17b)$$

Substituindo (17b) em (16b):

$$\sigma_\alpha = \sigma_x + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \operatorname{tg} \alpha + \sigma_y \cdot (\operatorname{tg} \alpha)^2 - \sigma_\alpha \cdot (\operatorname{tg} \alpha)^2 \quad (18)$$

Ou

$$\sigma_\alpha = \sigma_x (\cos \alpha)^2 + \sigma_y \cdot (\sin \alpha)^2 + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad (19)$$

Substituindo (19) em (17b):

$$\tau_\alpha = \tau_{xy} + \sigma_y \cdot \operatorname{tg} \alpha - [\sigma_x (\cos \alpha)^2 + \sigma_y \cdot (\sin \alpha)^2 + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha] \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (20)$$

Lembrando que

$$(\cos \alpha)^2 + (\operatorname{sen} \alpha)^2 = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot (1 - \operatorname{sen}^2 \alpha) = \operatorname{tg} \alpha \cdot (1 - 1 + \cos^2 \alpha) = \operatorname{tg} \alpha \cdot (\cos \alpha)^2$$

$$\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha = 1/2 \cdot \operatorname{sen} 2\alpha$$

A relação (20) fica:

$$\tau_{\alpha} = \tau_{xy} \cdot [(\cos \alpha)^2 - (\operatorname{sen} \alpha)^2] + (\sigma_y - \sigma_x) \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha \quad (21)$$

Assim, os extremos são:

Tensão normal:

$$\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = -2 \cdot \sigma_x \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha + 2 \cdot \sigma_y \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \cos 2\alpha = 0 \quad (22)$$

Lembrando que

$$y = (\operatorname{sen} x)^2 \rightarrow y' = 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x$$

$$y = (\cos x)^2 \rightarrow y' = -2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x$$

Assim, a eq. (22) fica:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (23)$$

Assim, com esta relação (23) encontra-se o plano onde as tensões normais são extremas. Note que da trigonometria $\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}(2\alpha \pm \pi)$, portanto o ângulo α e $\alpha \pm \pi/2$ satisfaz a relação, tendo assim 2 planos inclinados de extremo defasados de 90 graus.

Substituindo a expressão (23) em (19) chega-se a conhecida relação:

$$\sigma_{\text{máx/mín}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} \quad (24)$$

Ou escrevendo da seguinte forma:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} \quad (24b)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} \quad (24c)$$

Onde as tensões extremas máximas e mínimas são chamadas de tensões principais e indicadas por σ_1 e σ_2 , para os valores máximos e mínimos respectivamente. Estes valores extremos ocorrem nos planos determinados pelo ângulo α e $\alpha \pm \pi/2$.

O ângulo que indica a tensão máxima (σ_1) é dado por:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}} \quad (24d)$$

Caso substitua a relação (23) em (21) obtem-se valores nulos para a tensão de cisalhamento, isto mostra também que onde as tensões normais são máximas, as tensões cisalhantes são nulas.

Os extremos são para a tensão de cisalhamento é obtida pela derivada da eq. (21):

$$\frac{d\tau_\theta}{d\theta} = \tau_{xy} \cdot [-2 \cdot \text{sen}\theta \cdot \cos\theta - 2 \cdot \text{sen}\theta \cdot \cos\theta] + (\sigma_y - \sigma_x) \cdot \cos 2\theta = 0 \quad (25)$$

Ou seja:

$$\text{tg } 2\theta = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2 \cdot \tau_{xy}} \quad (26)$$

Assim, o plano indicado pelo ângulo θ é onde ocorre as tensões cisalhantes máximas, e substituindo a relação (26) em (21) e considerando a eq. (24b) e (24c), estas tensões cisalhantes ficam determinadas pela relação:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (27)$$

Sendo que neste plano de cisalhamento máximo a tensão normal é dada por:

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \quad (28)$$

Obs.

Confrontando as eq. (23) e (26), chega-se a

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{-1}{\text{tg } 2\theta} = -\cot g 2\theta \quad (29)$$

Assim os ângulos α e θ estão defasados de $\pm \pi/4$.

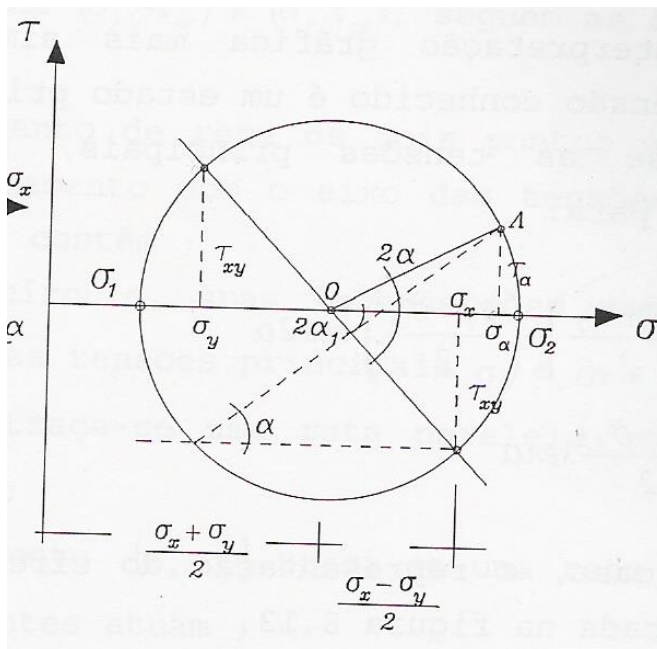


FIG. 10.10 Círculo de Mohr para estado de tensão dupla

10.6 Exemplo

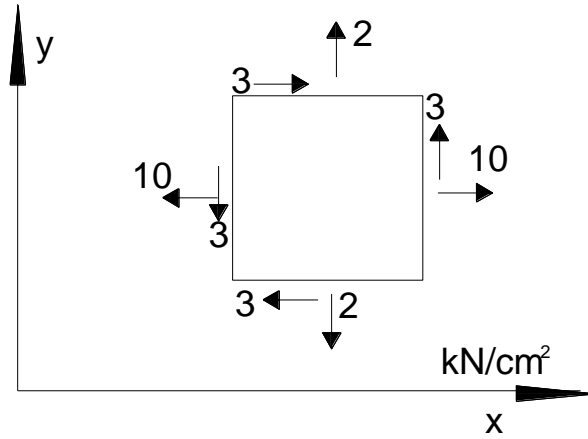
Exemplo 1 (Proença, pg. 299): Determinar as tensões principais, e suas respectivas direções, conhecidas as seguintes componentes de tensão para um estado plano:

$$\sigma_x = 8 \text{ kN/cm}^2, \sigma_y = 2 \text{ kN/cm}^2 \text{ e } \tau_{xy} = 4 \text{ kN/cm}^2.$$

Resposta:

$$\sigma_1 = 10 \text{ kN/cm}^2, \sigma_2 = 0, \alpha_1 = 26,57^\circ$$

Exemplo 2 (Proença, pg. 302): Para o estado de tensão indicado na figura, determinar o valor máximo de cisalhamento em módulo.



Resposta:

$$\sigma_1 = 11 \text{ kN/cm}^2, \sigma_2 = 1,0 \text{ kN/cm}^2, \alpha_1 = 18,43^\circ$$

11. CRITÉRIOS DE RESISTÊNCIA

11.1 Definição

Na engenharia, emprega-se uma classificação dos materiais em dois grandes grupos, em função da sua capacidade de deformação:

- 1) Materiais frágeis;
- 2) Materiais dúcteis;

Frágeis: rompem após apresentarem níveis de deformação bastante pequenos (vidros, concreto, argamassa)

Dúcteis: se deformam significativamente antes de se romper (metais em geral)

Além desses dois tipos de classificação apresentada, os materiais sofrem influência de seu grau de homogeneidade e do seu tamanho para sua classificação mecânica e posterior caracterização de sua capacidade resistente, o que resulta em uma difícil forma de matematizar estes efeitos para construção de modelos para verificar se as tensões solicitantes não excedam sua capacidade de resistência do material.

Uma alternativa simples, porém plausível para contornar esta dificuldade é o desenvolvimento de certos critérios de resistência.

11.2. Critério de Coulomb – ou Critério da máxima tensão normal (materiais frágeis)

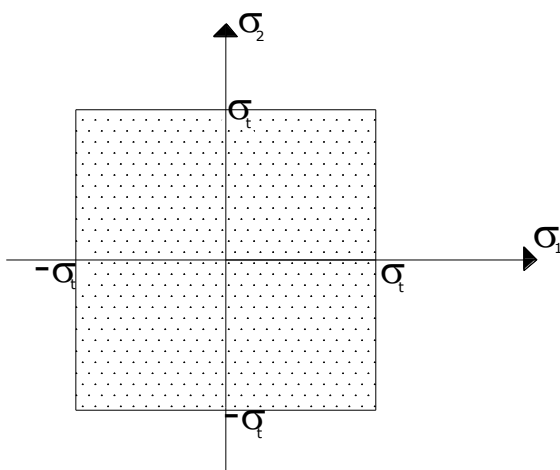
Neste caso, a ruptura ocorre quando a máxima tensão normal ultrapassa o valor de resistência a tensão normal de tração simples do material.

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_t$$

Onde σ_t é o valor resistente do material.

Lembre que σ_{\max} é o ponto mais solicitado da peça, obtido pela análise de tensões principais, ou seja:

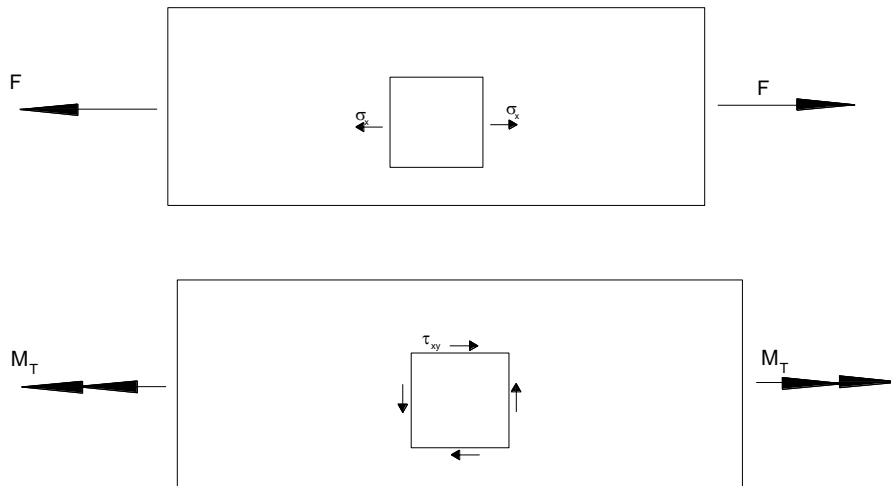
$$\sigma_{\max} = \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{array} \right\}$$



Critério de Coulomb

Exemplo 1

Uma barra de seção circular (diâmetro 10cm) é constituído por um material que apresenta resistência à tração simples $\sigma_t = 1kN/cm^2$. Determinar os valores limites de força axial de tração e momento de torção que podem ser aplicados nas extremidades da barra.



- tensão normal.
- determinação do momento de torção

Resposta: $F = 78,5 \text{ kN}$; $M_t = 196,3 \text{ kNcm}$

11.3. Critério de Tresca – ou Critério da máxima tensão de cisalhamento (materiais dúcteis)

Adequado para materiais dúcteis que tenham a resistência à tração e compressão praticamente iguais.

O material rompe quando a maior tensão de cisalhamento (em função das tensões principais) ultrapasse os valores máximos resistentes de tração obtidos no ensaio de tração simples.

σ_t : máximo valor de referência obtido no ensaio de tração simples.

Neste ensaio simples, a tensão máxima de cisalhamento ocorre num plano de 45° e de valor (veja capítulo 10).

$$\tau_t = \frac{\sigma_t}{2}$$

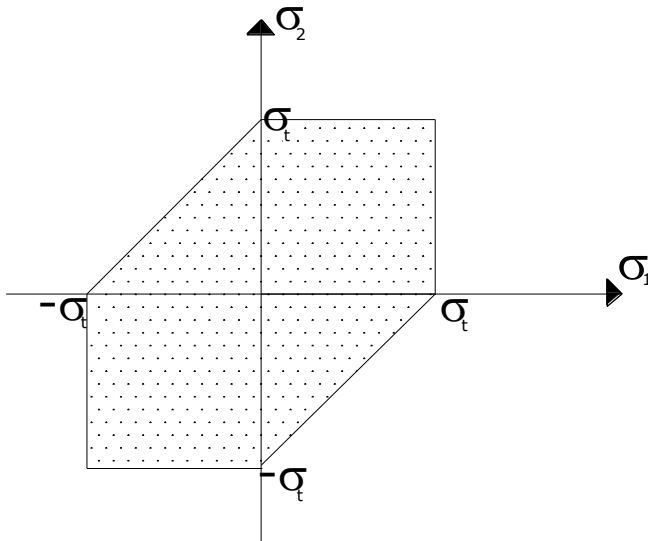
Assim, uma peça no estado duplo de tensões apresenta como tensão máxima de cisalhamento (veja capítulo 10) expressa pela relação:

$$\tau_{\max} = \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right|$$

Então, o critério de resistência fica:

$$\tau_t \geq \tau_{\max} \text{ , ou } \frac{\sigma_t}{2} \geq \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right| \rightarrow$$

$$-\sigma_t \leq \sigma_1 - \sigma_2 \leq \sigma_t$$



Critério de Tresca

Fig.1 Esquema do Hexágono de Tresca

Exemplo 2

Determinar o mínimo valor do diâmetro para que um eixo maciço, considerando os seguintes dados: $M = 300 \text{ kNcm}$, $M_t = 240 \text{ kNcm}$, $\sigma_t = 10 \text{ kN/cm}^2$. Aplique o critério de Tresca.

Resposta:

$$D_{\min} = 7,3 \text{ cm}$$

11.4. Critério de Von Mises – ou Critério da máxima energia de distorção (materiais dúcteis)

A ruptura ocorre quando a energia de distorção capaz de ser absorvida no processo de deformação atinge um valor limite de referência, obtido no ensaio de tração simples.

A energia de deformação específica é definida como:

$$u_d = \frac{1}{2} \cdot [\sigma_1 \cdot \varepsilon_1 + \sigma_2 \cdot \varepsilon_2 + \sigma_3 \cdot \varepsilon_3]$$

Onde ε_1 , ε_2 e ε_3 são as deformações específicas na direção principal.

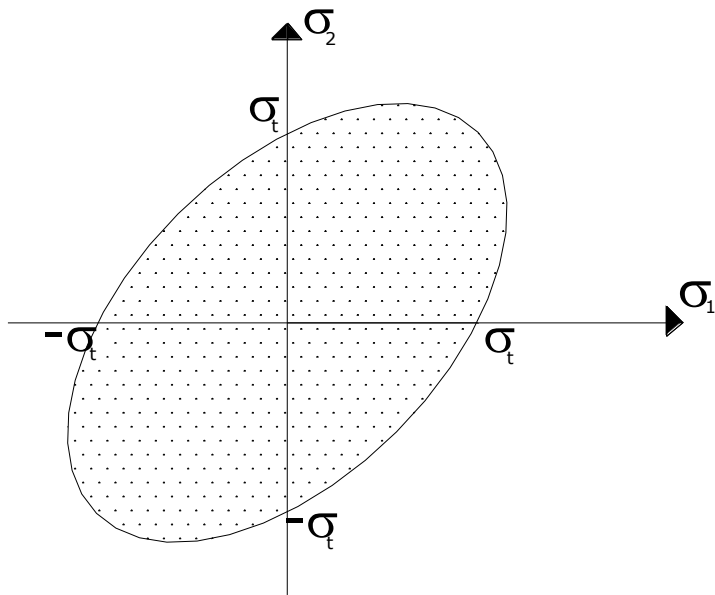
Empregando a lei de Hooke Generalizada, chega-se a relação, já no estado duplo de tensão:

$$[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2] \leq \sigma_t^2$$

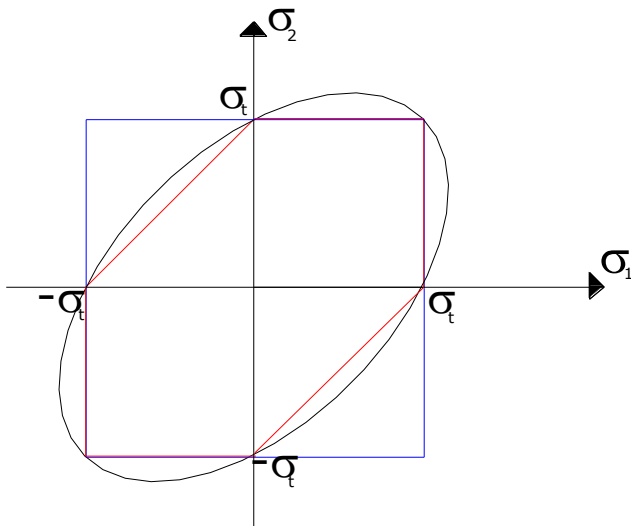
Ou em termos de tensões no sistema cartesiano:

$$\sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2} \leq \sigma_t$$

Que representa a equação de uma elipse.



Critério de Von Mises



Critério Sobrepostos

Exemplo 3.

Determinar o mínimo valor do diâmetro para que um eixo, considerando os seguintes dados:
 $M = 300 \text{ kNcm}$, $M_t = 240 \text{ kNcm}$, $\sigma_t = 10 \text{ kN/cm}^2$. Aplique o critério de Von Mises.

Resposta:

$$D_{\min} = 7,2 \text{ cm}$$

12. INTRODUÇÃO AO ESTUDO DA INSTABILIDADE

12.1– POR QUE ESTUDAR INSTABILIDADE?

O uso de materiais com resistências cada vez mais elevadas e a criação de estruturas arrojada conduzem à utilização de peças cada vez mais esbeltas e de formas não convencionais.

Com o aumento da esbelteza, ha um aumento nos esforços solicitantes e conseqüentemente aumenta também a tendência aos deslocamentos, aumentando o perigo de ruptura da peça.

Rüsh em 1972 escrevia:

“Como uma ruína por instabilidade tem geralmente conseqüências catastróficas, atualmente não podemos mais nos contentar com aproximações grosseiras correntemente utilizadas”.

12.2– Estabilidade e instabilidade do equilíbrio

- Equilíbrio estável – dadas pequenas perturbações arbitrárias ao sistema, o corpo permanecerá pouco afastado da configuração de equilíbrio e tão mais próximo dela quanto menores forem as perturbações dadas.
- Equilíbrio instável – dadas pequenas perturbações arbitrárias ao sistema, o corpo tende a se afastar progressivamente da configuração de equilíbrio (ver Figura 1).

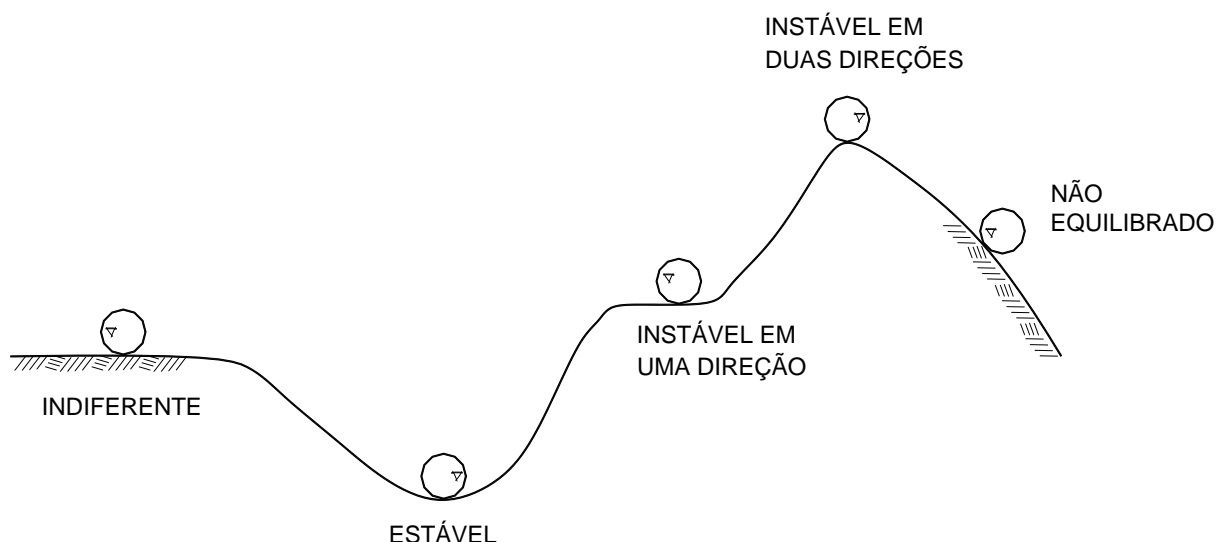


Figura 1 – Formas de equilíbrio

12.2.1 – Cálculo da carga crítica

Para o cálculo da carga crítica de flambagem, pode-se utilizar a equação simplificada da linha elástica dada por:

$$\frac{1}{r} \equiv \frac{dy^2}{dx^2} = \pm \frac{M}{EI} \quad \text{onde } M = P.y$$

$$\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{P.y}{EI} = 0 \quad \text{considerando } \frac{P}{EI} = k^2$$

$$\frac{dy^2}{dx^2} + k^2 y = 0$$

$$y = C_1 \cdot \text{sen}(k.x) + C_2 \cdot \text{cos}(k.x) \quad (1)$$

Considere-se o caso de pilar engastado na base e livre no topo, indicado na figura 2:

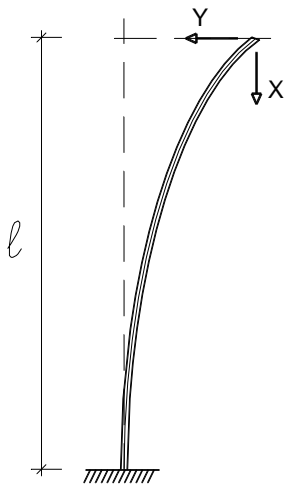


Figura 2 – Pilar engastado na base e livre no topo

Condições de contorno:

$$x = 0 ; y = 0 \rightarrow k = 0$$

$$e C_2 = 0$$

$$x = l \quad \frac{dy}{dx} = 0$$

Da equação 1 fica obtém-se:

$$y = C_1 \cdot \text{sen } kx$$

$$y' = C_1 \cdot k \cos kx$$

$$y'(\ell) = C_1 \cdot k \cdot \cos k\ell = 0 \rightarrow$$

$$\cos k\ell = 0 \quad \therefore \quad k\ell = \frac{\pi}{2}$$

$$k = \frac{\pi}{2\ell} \quad (2)$$

Como

A equação 3 pode ser escrita $k^2 = \frac{P}{EI} \therefore \frac{P_{\text{crit}}}{EI} = \frac{\pi^2}{4\ell^2} \rightarrow P_{\text{crit}} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{4\ell^2}$ (3)

$$P_{\text{crit}} = \frac{\pi^2 EI}{\ell_e^2} \quad \text{onde}$$

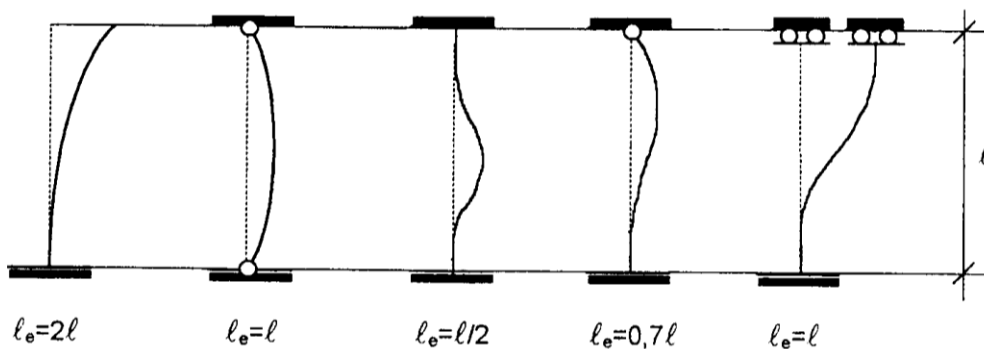


Figura 3 - Comprimentos de flambagem

12.3.2 – Validade da fórmula de Euler

Para que a fórmula de Euler seja válida, é necessário que o material da estrutura tenha um comportamento elástico-linear.

Para que isso ocorra, é necessário que a tensão crítica de compressão " σ_{cr} " seja menor que o limite de proporcionalidade do material " f_0 ", ou seja:

$$\sigma_{\text{cr}} = \frac{P_{\text{cr}}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{\ell_e^2 A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq f_0, \quad \text{sendo} \quad \lambda = \frac{l_e}{i} \quad \text{e} \quad i = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

Quando $\sigma_{cr} = f_o$, tem-se:

$$\lambda = \lambda_{lim} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{f_o}}$$

Desta forma, a fórmula de Euler só é válida para $\lambda \geq \lambda_{lim}$, pois a flambagem encontra-se no regime elástico.

Quando $\lambda > \lambda_{lim}$, a barra é pouco esbelta e $\sigma_{crit} > f_o$.

O limite de validade da fórmula de Euler pode ser melhor visualizado na Figura 4:

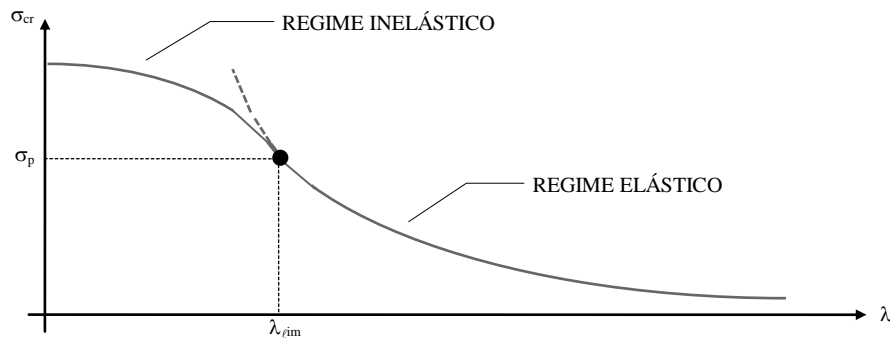


Figura 4 – Curva de Euler

É importante saber que quanto mais esbelta é a coluna, maior é a aproximação da fórmula de EULER com resultados experimentais, isto é, para materiais com comportamento elástico linear.

13. VIGAS COMPOSTAS DE DIFERENTES MATERIAIS

Vigas constituídas por dois ou mais materiais são vigas compostas. Os engenheiros projetam estas vigas de propósito, para desenvolver um meio mais eficiente de suportar cargas aplicadas.

A fórmula de flexão foi desenvolvida para viga formada apenas por um material (homogêneo) não podendo ser aplicada diretamente essa relação da flexão pura na determinação da distribuição de tensões normais.

Entretanto, desenvolveremos um método para modificar a seção transversal de modo a aplicar a relação clássica da flexão, usando o método da **seção transformada**.

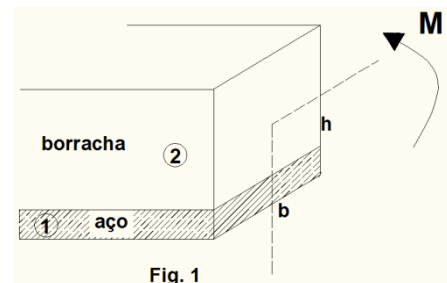
Considere uma viga formada por dois materiais “1” e “2”, ver figura 1.

Admitindo que a sua seção transversal (ST) permaneça plana, assim, as deformações variam de forma linear ao longo da ST. Pela lei de Hooke, sabe-se que:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= E_1 \cdot \varepsilon & (\text{material 1}) \\ \sigma_2 &= E_2 \cdot \varepsilon & (\text{material 2})\end{aligned}\quad (13.1)$$

Se $E_1 > E_2$ (aço e borracha), então, tira-se:

$$\frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_2}{E_2} \rightarrow \sigma_1 = E_1 \frac{\sigma_2}{E_2} \rightarrow \sigma_1 > \sigma_2 \quad (13.2)$$



Assim, a maior parte da carga vai ser absorvida pelo material “1” e a variação na flexão fica indicado na figura 2.

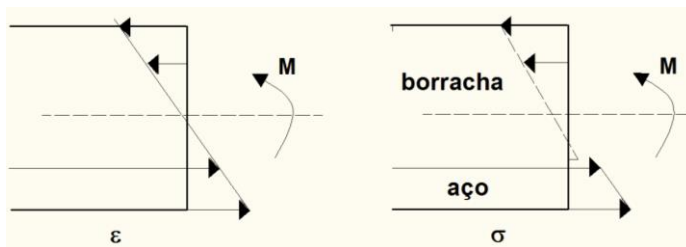


Fig.2

Observe o salto na tensão que ocorre na junção entre os materiais. A determinação das tensões em cada material pode ser obtida usando várias técnicas, por exemplo, por um processo iterativo, devendo satisfazer as seguintes condições:

- i) A tensão produz uma força resultante nula na ST: $(F_1 + F_2) = 0$;
- ii) O momento produzido na ST tem que ter resultante (M): $(2.F_1.y) = M$.

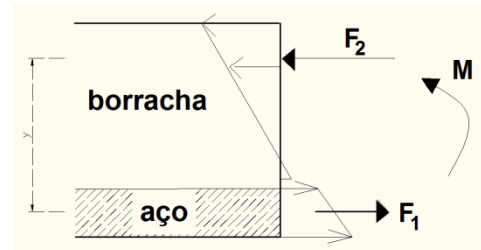
Contudo, um modo mais simples de cumprir essas duas premissas é transformar a viga composta em outra, feita apenas de um único material, transformando um dos materiais em outro equivalente ao material fixado. Isso pode ser feito assumindo que a altura de cada região do material seja a mesma, mas alterando-se a largura da região do material a ser modificada.

No exemplo da figura 1, suponha que queiramos fixar o material 1, que é mais rígido ($E_1 > E_2$), de forma que a área da região do material 2 seja modificada para o material 1, mas que mantenha a mesma resultante de força do problema original, assim:

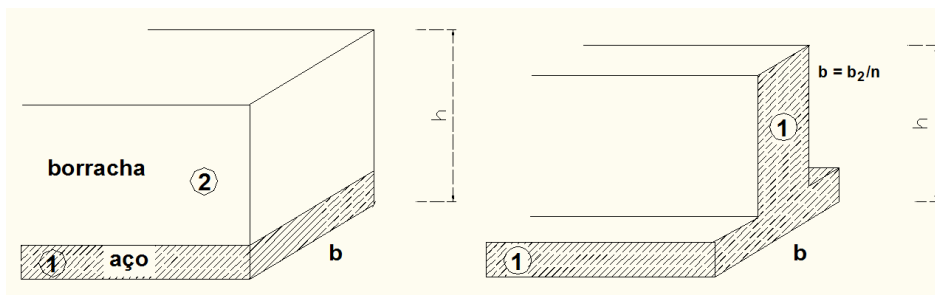
$$F_2 = \bar{F}_2 \rightarrow \sigma_2 \cdot A_2 = \sigma_1 \cdot \bar{A}_2 \rightarrow E_2 \cdot \varepsilon \cdot b_2 \cdot h_2 = E_1 \cdot \varepsilon \cdot \bar{b}_2 \cdot h_2 \quad (13.3)$$

$$\bar{b}_2 = \frac{E_2}{E_1} \cdot b_2 \rightarrow \bar{b}_2 = \frac{b_2}{n} \quad (13.4)$$

Com $n = \frac{E_1}{E_2}$ denominado de **fator de transformação**.



Basta assim, modificar a largura da região do material “2”, de forma que fora transformado para o material “1”.



Dessa forma, pode-se aplicar diretamente a fórmula da flexão:

$$\sigma_1 = \frac{M \cdot y}{I_z} \quad (13.5) \quad (\text{material 1})$$

para o trecho do material fixo, no exemplo material “1”.

Para a região onde se tem o material “2”, as tensões são calculadas a partir da equação 13.5, mas com o uso da equação 2, deve ser corrigida, levando a:

$$\sigma_2 = \frac{1}{n} \frac{M \cdot y}{I_z} \quad (13.6) \quad (\text{material 2})$$

Resumo

- 1) Para uma seção de 2 materiais A e B. Fixe uma das seções, por exemplo: A;
- 2) Calcule $n = E_A/E_B$ e transforme a largura da seção B: $b_B = b_B/n$;
- 3) Obtenha na nova seção seu CG e I_z ;
- 4) Para trechos do material A: $\sigma_{Ay} = \frac{M \cdot y}{I_z}$

$$\text{Para trechos do material B: } \sigma_{By} = \frac{1}{n} \cdot \frac{M \cdot y}{I_z}$$

Obs.: Para o caso de “j” seções de materiais diferentes, siga o resumo, mas se terá “j-1” ns, onde $n_i = E_k/E_i$, com k sendo a seção fixada e i as demais.

Exemplos: