



OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

Prof. Valério S. Almeida
valerio.almeida@usp.br

2015



Summary

- » *Definição de otimização*
- » *Problemas clássicos de otimização*
- » *Otimização: definição matemática*
- » *Métodos de otimização*
- » *Otimização estrutural topológica*
- » *Exemplos*
- » *Aplicação em modelos de bielas e tirantes*
- » *Exemplos*



Otimização. [f. *optimise* v. + *-ation*.] *the making the best (of anything); the action or process of rendering optimal; the state or condition of being optimal (Oxford University Press, 1989).*

Conceito de otimização:

Animais

Plantas

Humanidade

Todos aplicam os princípios de otimização

Consciente ou Inconscientemente

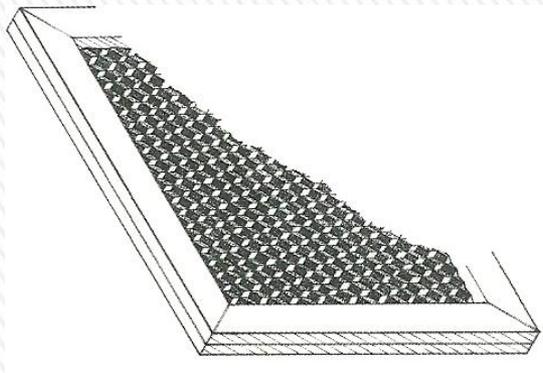


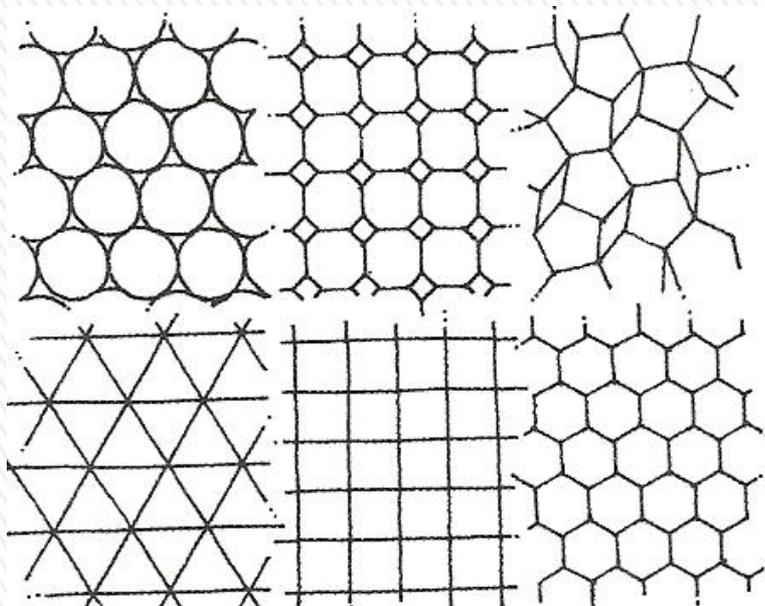
Na natureza, existem muitos exemplos de otimização:

Colmeias das abelhas!

Problema:

Otimizar o volume com menor consumo de cera





Diferentes formas para dividir o espaço com prismas regulares

A forma do hexágono é o espaço geométrico mais eficiente para a construção do material

Geometric Shape	Perimeter p	variation in consumption of wax
Hexagon	6	0
Square	6.45	+7.5%
Triangle	7.35	+22.5%
Pentagon	8.60	+43.4%
Octagon	8.80	+46.7%
Circle	11.43	+90.5%

*células com mesma área

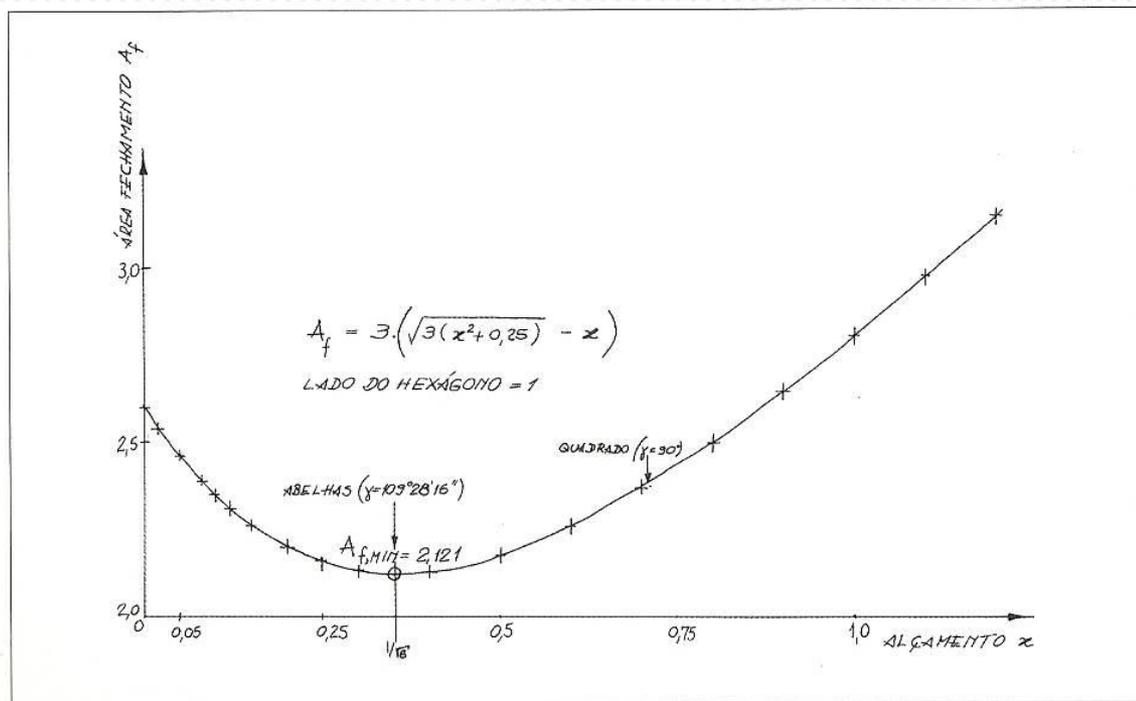
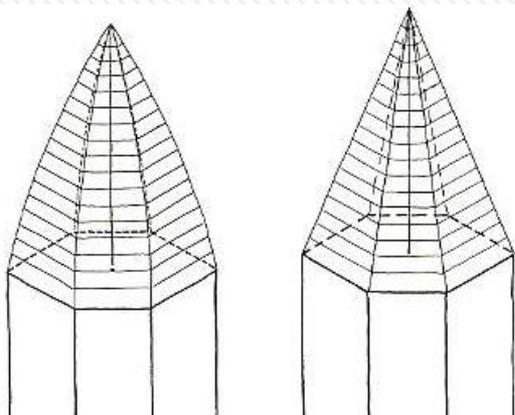


Otimização natural – Geometria da colmeia

6

Abelhas escolhem a forma geométrica racional:
Ângulos obtusos são de $109^{\circ}28'16''$ (usando cálculo)

Abelhas constroem isto com erros de menos de 1'!



1. Geometrias dos Alvéolos de uma Colmeia

O objetivo deste trabalho é evidenciar do ponto de vista da otimização a relação entre matemática e ciências naturais. Destaca-se então, que na visão biológica, a situação é o máximo aproveitamento de volume em uma área de superfície mínima, com vistas a reduzir gastos na produção de cera. Na visão matemática a minimização da quantidade de cera, reduz-se ao problema de encontrar o valor do ângulo de modo que a superfície seja mínima.

1.1 Desenvolvimento

Os favos das abelhas são formados pela união de vários alvéolos e cada alvéolo tem a forma de um prisma hexagonal regular. O alvéolo apresenta uma extremidade aberta, que é a porta de entrada da abelha, e outra extremidade fechada, com um ápice triédrico.

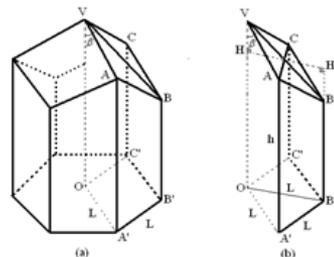


Figura 1 – Alvéolo 3D

Considerando um alvéolo (prisma de base hexagonal) como a união de três prismas de base losangonal com ângulos internos de 60° e 120° , pode-se determinar o ângulo ideal destes prismas de modo que, se gaste uma quantidade menor possível de cera, para um mesmo volume.

A minimização da quantidade de cera se reduz ao problema matemático de se encontrar o ângulo $\beta = \angle C'VB$, ver Figura 1(a) de modo que a soma das áreas das figuras $ABB'A'$, $BCC'B'$ e $ABCV$ seja a maior possível. Devido a simetria existente nos alvéolos, o trapézio possui a mesma área. Deve-se então encontrar um modelo matemático que relacione as áreas do trapézio $ABB'A'$ e o losango $ABCV$ com o ângulo β .

Na figura 1(b) tem-se que:

$$1 - \overline{A'A} = h$$

$$2 - \overline{B'H'} = h$$

$$3 - \overline{VH} = \overline{BH'} = x$$

$$4 - \overline{A'B'} = L$$

$$5 - \overline{VB} \cap \overline{A'C} = \{D\}$$

A área do trapézio $ABB'A'$ é dada por:

$$A_t = \frac{(\overline{A'A} + \overline{B'B}) \cdot \overline{A'B'}}{2} \quad (1)$$

Manipulando matematicamente a expressão (1) em função de β , x e h (uma constante prescrita para o problema) chega-se a:

$$A_t(\beta) = \frac{(h + (h - x(\beta)) - L)}{2}$$

no triângulo retângulo VHD tem-se:

$$\cot\beta = \frac{\overline{VH}}{\overline{HD}}$$

logo

$$\cot\beta = \frac{x}{\frac{L}{2}}$$

Assim, tem-se a x em função de β

$$x = \frac{L}{2} \cot\beta$$

$$x = \frac{L}{2} \cot\beta \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1) chega-se a área do trapézio em função de β .

$$A_t(\beta) = \frac{(2h - \frac{L}{2} \cot\beta) \cdot L}{2}$$

$$A_t(\beta) = \frac{2hL}{2} - \frac{L^2}{4} \cot\beta$$

$$A_t(\beta) = hL - \frac{L^2}{4} \cot\beta$$

$$A_t(\beta) = hL - \frac{L^2}{4} \cot\beta \quad (3)$$

A área do losango $ABCV$ é quatro vezes a área do triângulo VCD que é dada por:

$$A_l(\beta) = 4 \frac{\overline{VD} \cdot \overline{CD}}{2} \quad (4)$$

No triângulo VCD tem-se:



$$\overline{CD} = \frac{L\sqrt{3}}{2} \quad (\text{altura do triângulo equilátero})$$

ainda no triângulo VCD tem-se

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{HD}{VD}$$

$$VD = \frac{L}{\operatorname{sen} \beta}$$

$$VD = \frac{L}{2 \operatorname{sen} \beta}$$

A área do triângulo VCD em função de β é dado por:

$$A_{\text{vcd}}(\beta) = \frac{L}{2 \operatorname{sen} \beta} \cdot \frac{L\sqrt{3}}{2}$$

$$A_{\text{vcd}}(\beta) = \frac{L^2 \sqrt{3}}{8 \operatorname{sen} \beta}$$

$$A_{\text{vcd}}(\beta) = \frac{F \sqrt{3}}{8 \operatorname{sen} \beta} \quad (5)$$

A área do losango VACB em função de β é igual a:

$$A_1(\beta) = \frac{L^2 \sqrt{3}}{2 \operatorname{sen} \beta} \quad (6)$$

A soma das áreas será dada por:

$$S(\beta) = 6 \cdot A_1(\beta) + 3A_2(\beta)$$

$$S(\beta) = 6 \cdot (hL - \frac{F}{4} \cot \beta) + 3 \cdot \frac{F \sqrt{3}}{2 \operatorname{sen} \beta}$$

$$S(\beta) = 6 \cdot hL - \frac{3F}{2} \cot \beta + \frac{3F \sqrt{3}}{2 \operatorname{sen} \beta}$$

$$S(\beta) = 6 \cdot hL + \frac{3F}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{\operatorname{sen} \beta} - \cot \beta \right)$$

$$S(\beta) = 6 \cdot hL + \frac{3F}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{\operatorname{sen} \beta} - \cot \beta \right) \quad (7)$$

Para que $S(\beta)$ tenha o menor valor possível, deve-se ter a função

$F(\beta) = \frac{\sqrt{3}}{\operatorname{sen} \beta} - \cot \beta$ com $0 < \beta < 90^\circ$ um valor mínimo. Deste modo, basta fazer $F'(\beta) = 0$ então, chega-se a:

$$F'(\beta) = \frac{1}{\operatorname{sen}^2(\beta)} - \frac{\sqrt{3} \cos \beta}{\operatorname{sen}^2(\beta)} \quad (8)$$

$$F'(\beta) = \frac{1}{\operatorname{sen}^2(\beta)} - \frac{\sqrt{3} \cos \beta}{\operatorname{sen}^2(\beta)} = 0$$

$$1 - \sqrt{3} \cos \beta = 0$$

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Para $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ tem-se $\beta = 54^\circ 44' 08''$. Destarte, conclui-se que o

ângulo de fechamento será $\alpha = 2 \cdot \beta = 109^\circ 28' 16''$ (ápice triédrico).

1.2 Desenvolvimento

$$\frac{3L^2}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{\text{sen}\beta} - \cot\beta \right) \quad (1)$$

como:

$$\text{sen}\beta = \frac{L}{2\sqrt{x^2 + \frac{L^2}{4}}} \quad (2)$$

e

$$\cot\beta = \frac{2x}{L} \quad (3)$$

substituindo (2), (3) em (1) tem-se:

$$F(x) = \frac{3L^2}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{\frac{L}{2\sqrt{x^2 + \frac{L^2}{4}}}} - \frac{2x}{L} \right)$$

$$F(x) = \frac{3L^2}{2} \left(\frac{2\sqrt{3}\sqrt{x^2 + \frac{L^2}{4}}}{L} - \frac{2x}{L} \right)$$

$$F(x) = \frac{3L^2}{2} \cdot \frac{2}{L} \left(\sqrt{3}\sqrt{x^2 + \frac{L^2}{4}} - x \right)$$

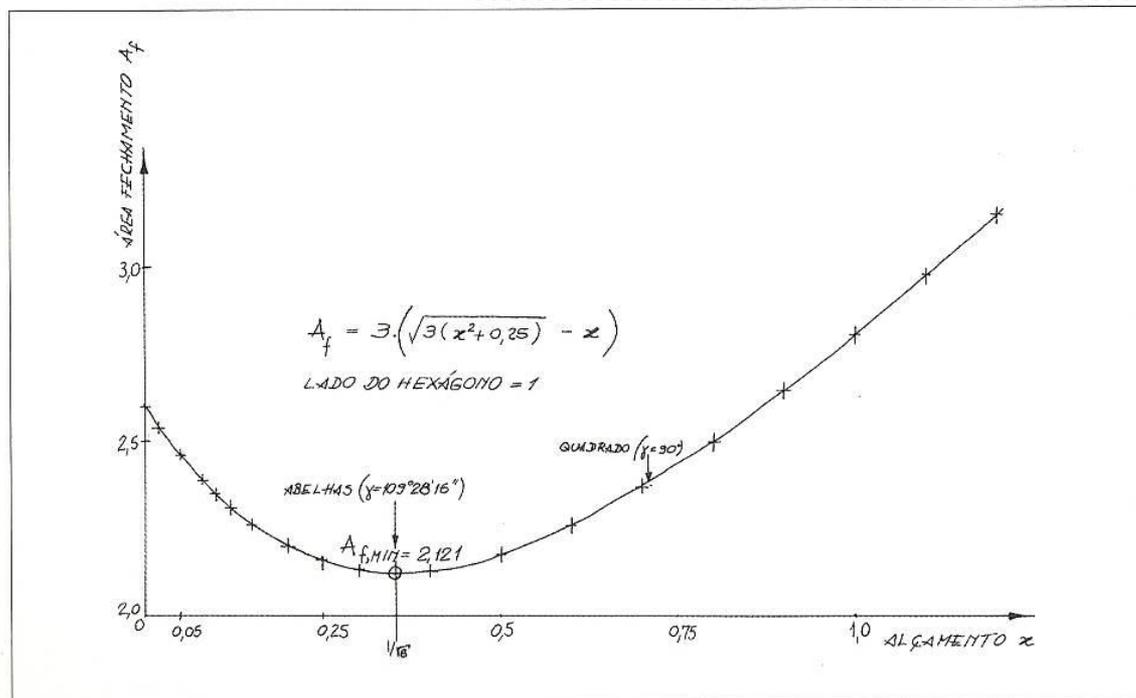
$$F(x) = 3L \cdot \left(\sqrt{3}\sqrt{x^2 + \frac{L^2}{4}} - x \right)$$

No livro do Vasconcelos $L=1$ então

$$F(x) = 3 \cdot \left(\sqrt{3}\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} - x \right)$$

$$F(x) = 3 \cdot \left(\sqrt{3}\sqrt{x^2 + 0,25} - x \right)$$

CQD



Geométrica racional:
 Ângulos obtusos são de $109^\circ 28' 16''$

Abelhas constroem isto com erros de menos de 1'!



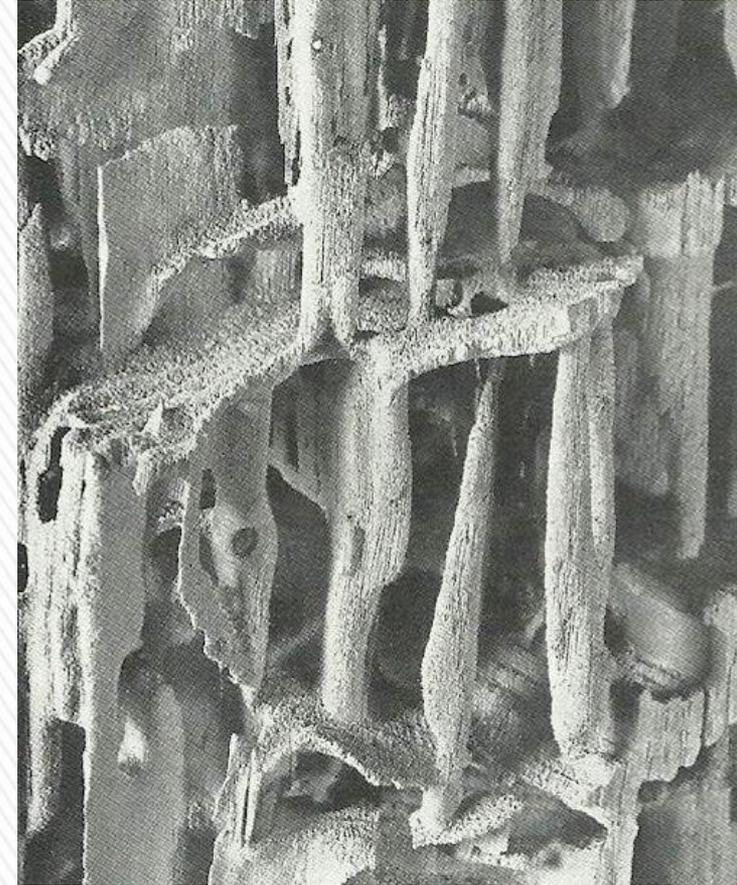
Otimização natural – *Formigas carpinteiras*

7

Formigas fazem galerias dentro de árvores para expandir suas colônias.

Elas roem a madeira seguindo o caminho das fibras, **destruindo o mínimo possível** sua estrutura resistente

Destroem 50% do volume inicial!

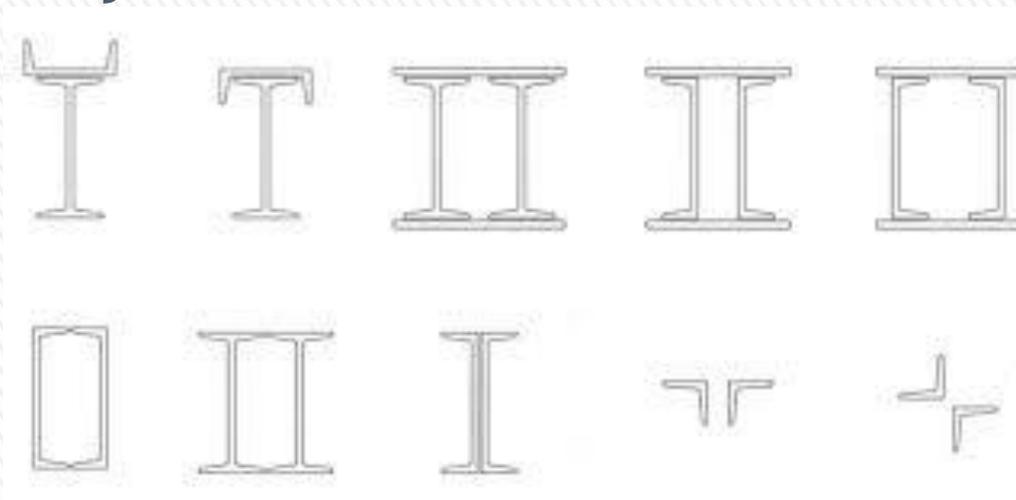


Otimização *natural* - Otimização de forma

Formas das seções transversais (ST) em plantas são otimizadas

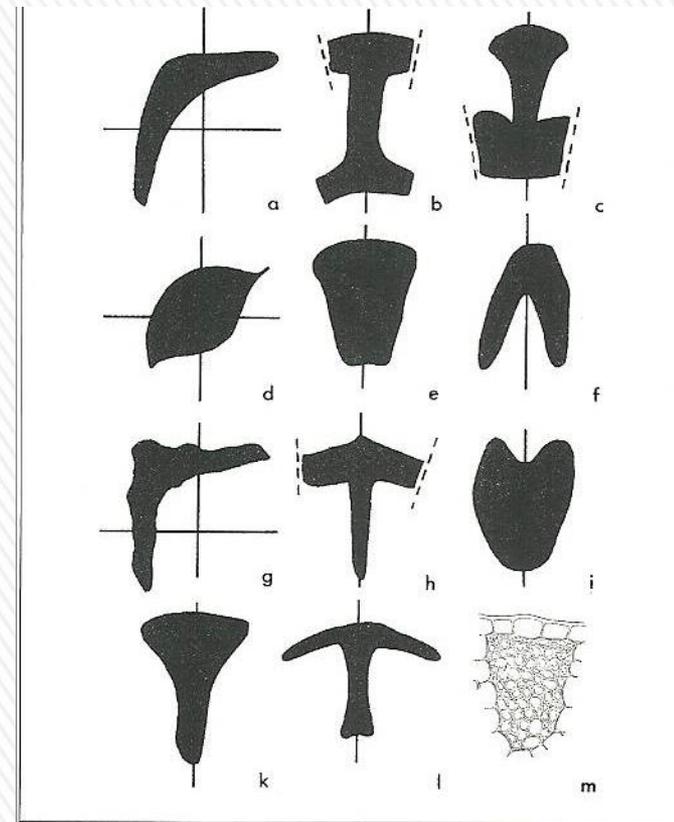
Momento de inércia (I): Flexão

Compare com perfis laminados de aço



ST em perfis laminados

Área distribuída longe do CG



ST de plantas

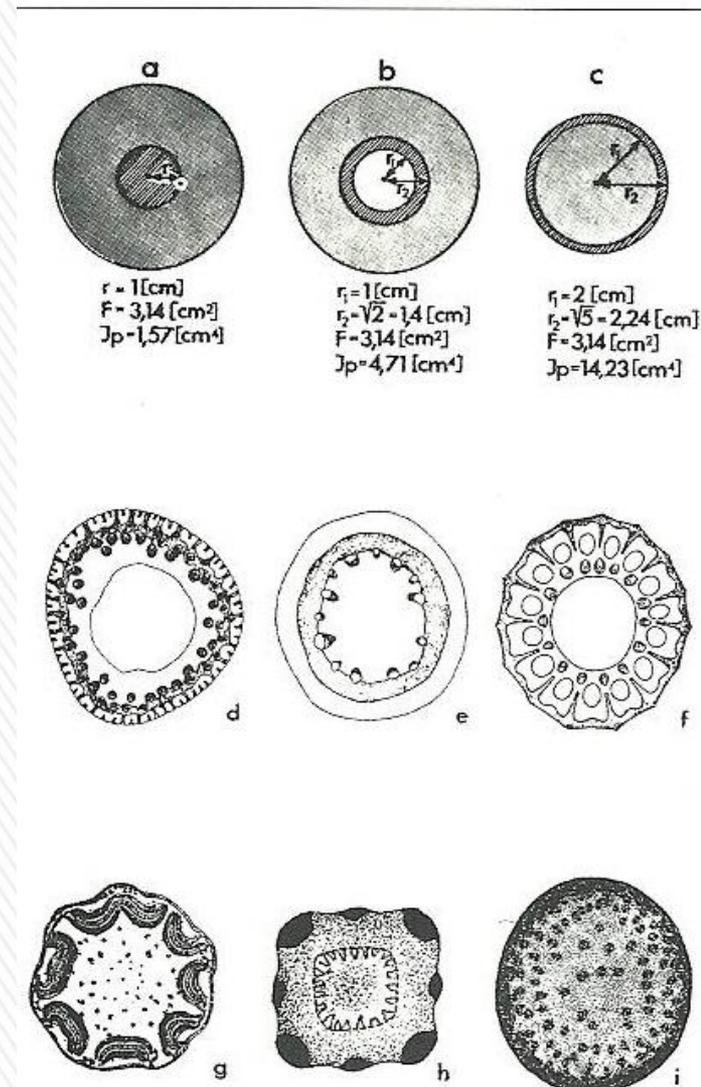
Formas das seções transversais (ST) em plantas são otimizadas

Efeito de torção:

Para as cargas de vento

hastes vegetais com grande

momentos polares de inércia



Otimização: Filosofia

“Se ocorrer alguma mudança na natureza, a qte de ação necessária para essa mudança deve ser tão pequena quanto possível.”

Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698 – 1759)

O princípio proclama que a natureza sempre escolhe o “melhor” caminho para atingir seu objetivo.

“Custo metabólico natural”



Otimização: Filosofia

Mas “Melhor” em matemática significa lidar com teoria/algoritmos para a busca de extremos

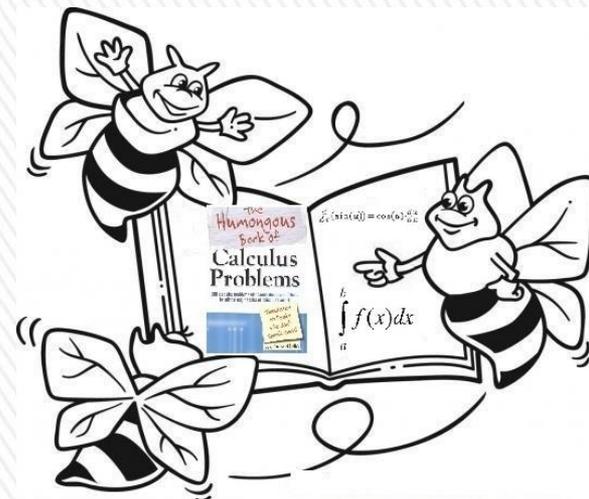
Então, isto é teoria de otimização

Em todo o mundo, muitos pesquisadores estão intensamente trabalhando nisso há muitas décadas!

Mas, a **Natureza aplica isso a milhares de anos!**

As abelhas conhecem Cálculo?

As formigas/plantas cursaram Resistência dos Materiais?



Otimização: Filosofia

Natureza tem um algoritmo/programa interno em seu “DNA”, que encontrou o valor ótimo usando processos evolucionários

A convergência para esse ótimo foi atingido depois de milhares de anos aplicando processos de tentativa e erro!

Processo Evolutivo

O ser humano simula isso (iterativamente) por uso de computadores!



Otimização: *definição*

Minimizar $f(x)$

ou

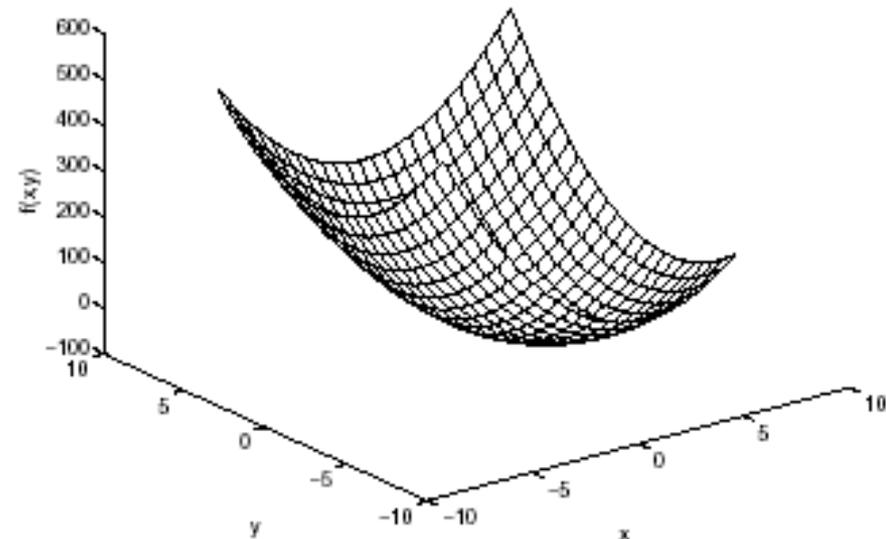
Maximizar $f(x)$

sujeito a $h_i(x) = 0, i \in E$

$g_i(x) \geq 0, i \in I$

$x \in \mathcal{R}^n$ (*região factível*)

$f(x)$: função objetivo



Otimização: *definição e considerações gerais*

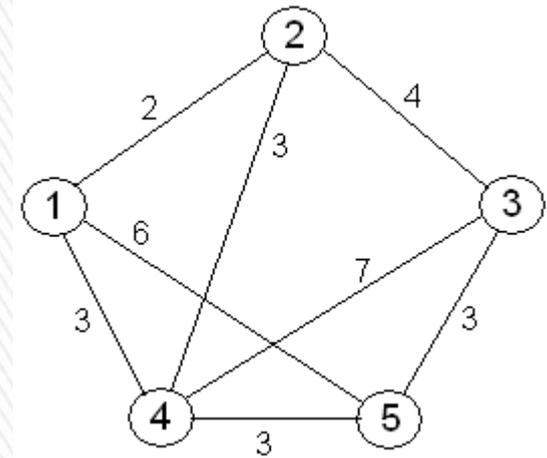
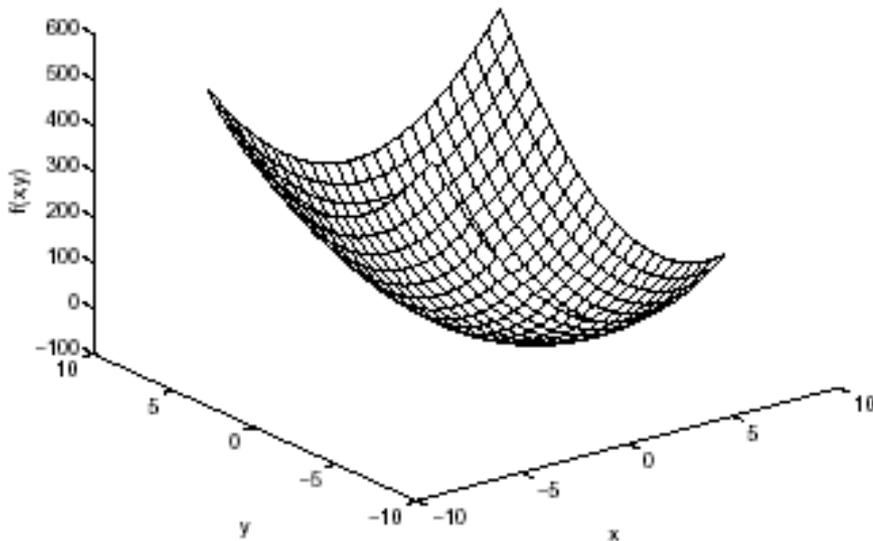
Para avaliar o problema matemático, você deve conhecer seu problema, se ele é um problema de otimização:

- Linear ou Não-Linear
- Contínuo x discreto
- Irrestrito x Restrito
- Local x Global



Otimização: *definição*

- Otimização Contínua x Discreta



Discreto:

Variáveis são valores inteiros

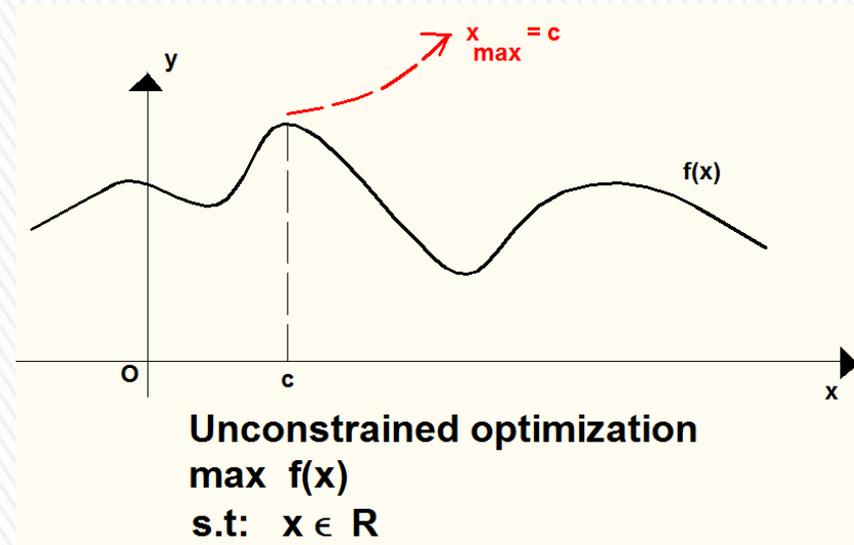
Problema do caixeiro viajante

Contínuo: Variáveis podem ser no campo dos reais

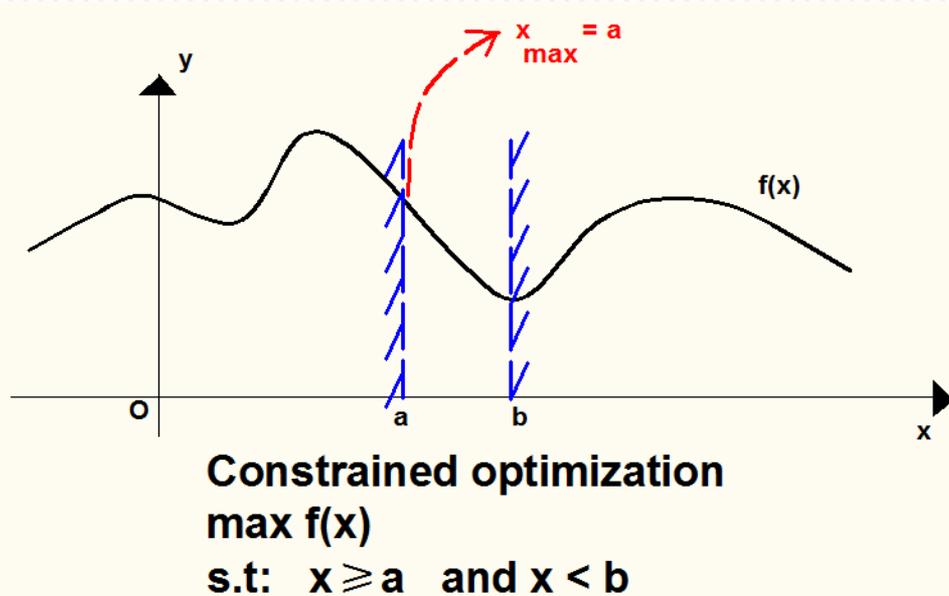


Otimização: *definição*

- Otimização Irrestrita x Restrita
- Otimização Local x Global



Global



Local



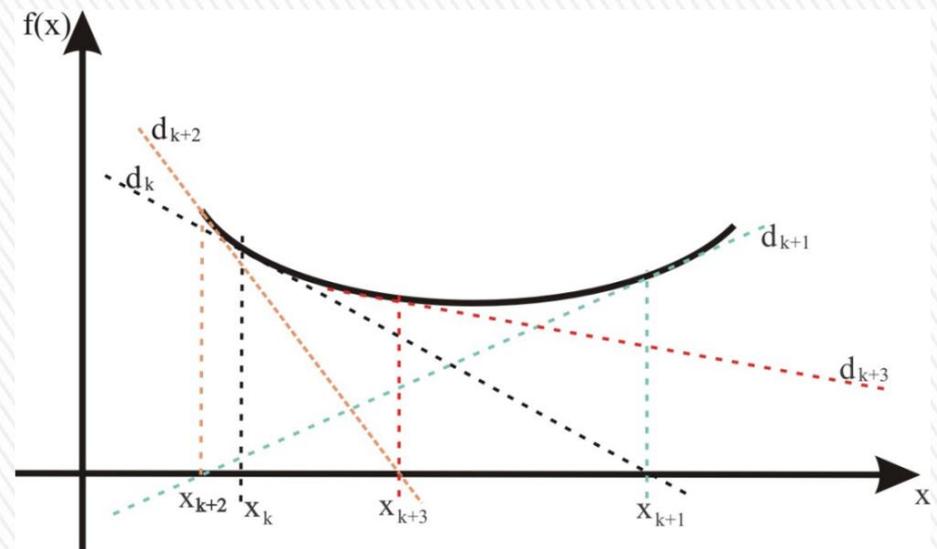
Otimização: *métodos*

Existem dois tipos de métodos para resolver problemas de otimização:

- **Métodos Determinísticos (métodos clássicos)**

Vantagem que usam as propriedades analíticas da função para encontrar as regiões de extremos

Ex.
Simplex, Newton-Raphson,
Quase-Newton,
Gradiente Conjugados



Otimização: *métodos*

- **Métodos Não- Determinísticos**

(métodos heurísticos, sem conhecimento de derivadas):

Busca heurísticamente a solução de um problema

multidimensional. São inclusos no campo da computação natural

- **Computação Evolucionária**

- Algoritmos Genéticos (AG)
- Simulated Annealing (SA) (recozimento simul.)

- **Inteligência de enxames**

- *Algoritmos de Colônia de formigas, de abelhas*



Otimização – Pontos de vista da engenharia

Certamente que engenheiros usariam a otimização de modo a encontrar a melhor solução para vários campos de problemas

“Mundo real” (engenharia real), problemas:

Não – lineares, Contínuo

Muitos extremos locais

Nao suaves

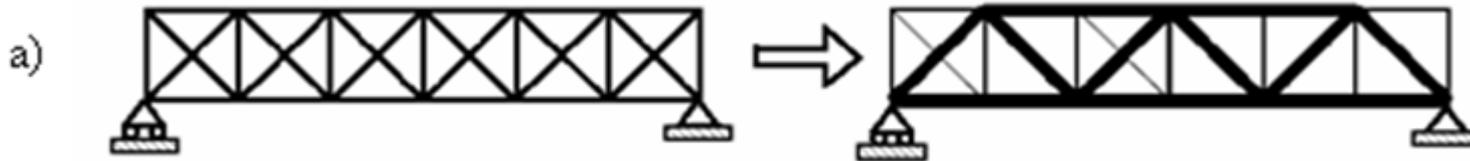
Sem função objetivo, etc..



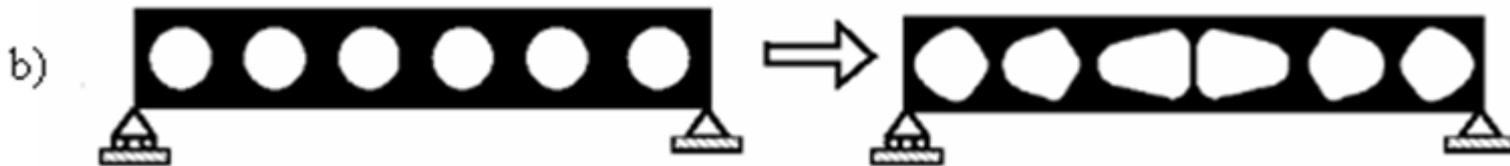
Otimização – Pontos de vista da engenharia

Otimização em estruturas:

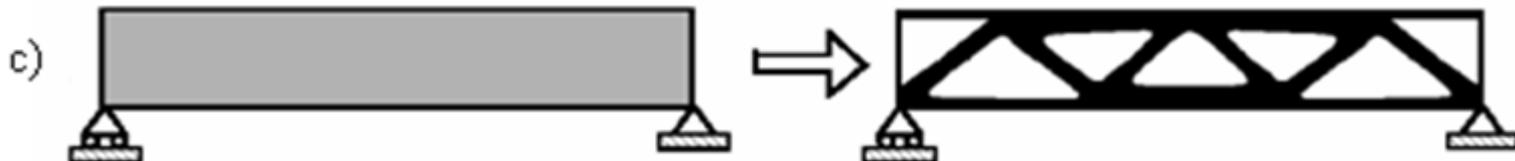
Paramétrica (dimensão)



Forma

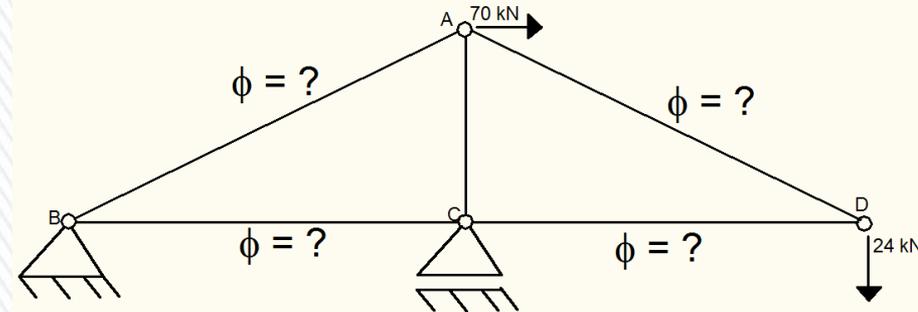
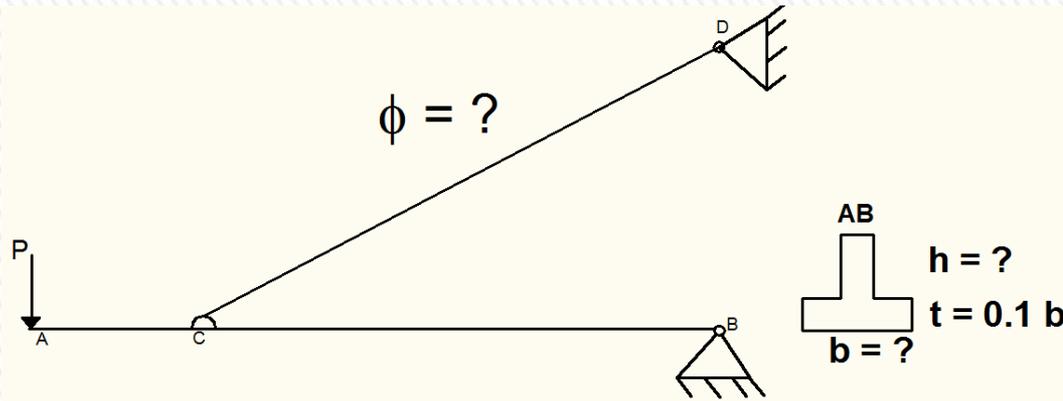


Topológica



Otimização paramétrica

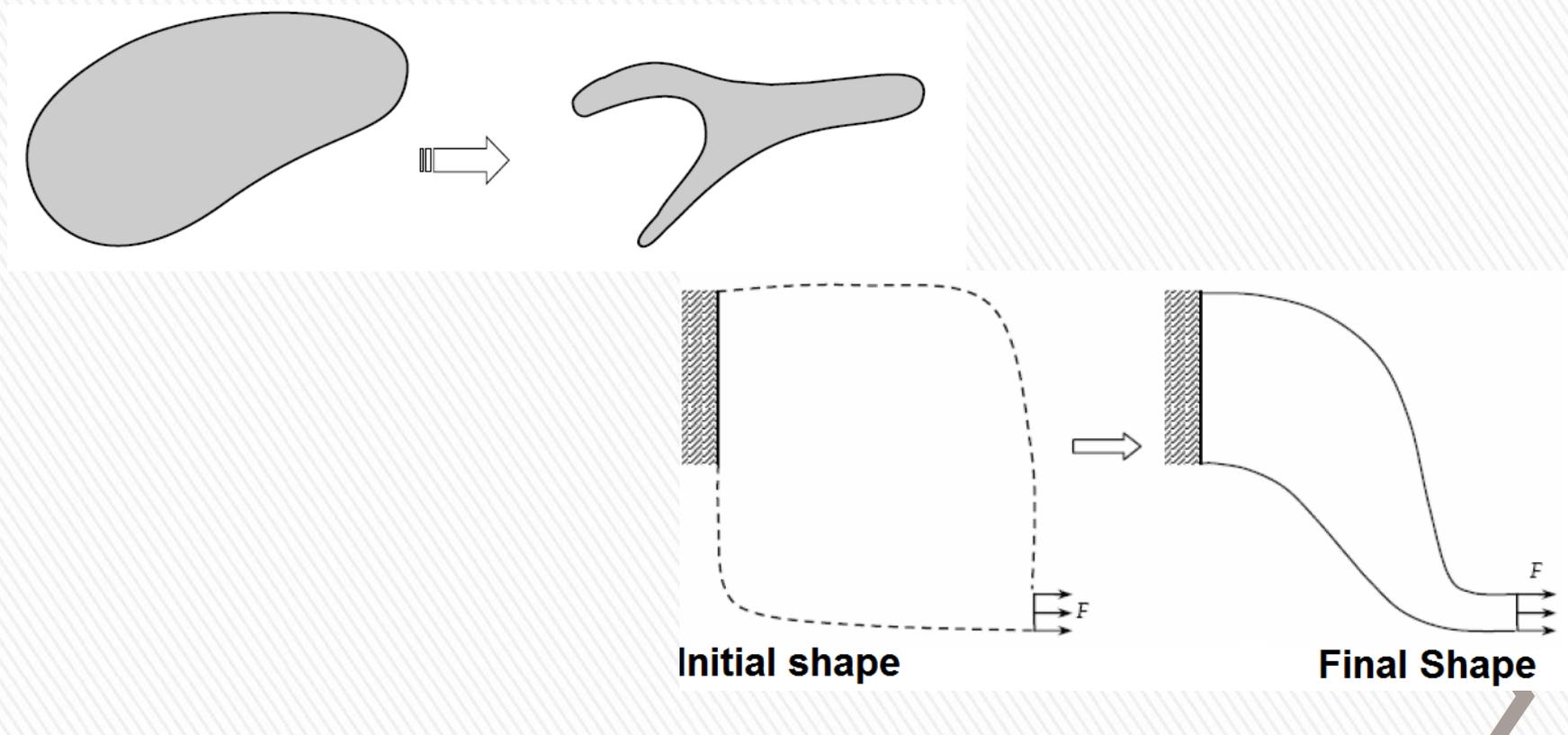
Dimensão: p.e. otimizar a ST da estrutura. Vigas/treliças.



Encontrar o parametro ótimo para minimizar o volume, ou maximizar capacidade de carga crítica/volume, etc..

Otimização de forma

Geometria ótima é procurada em uma classe de domínios, sem inserção de buracos.

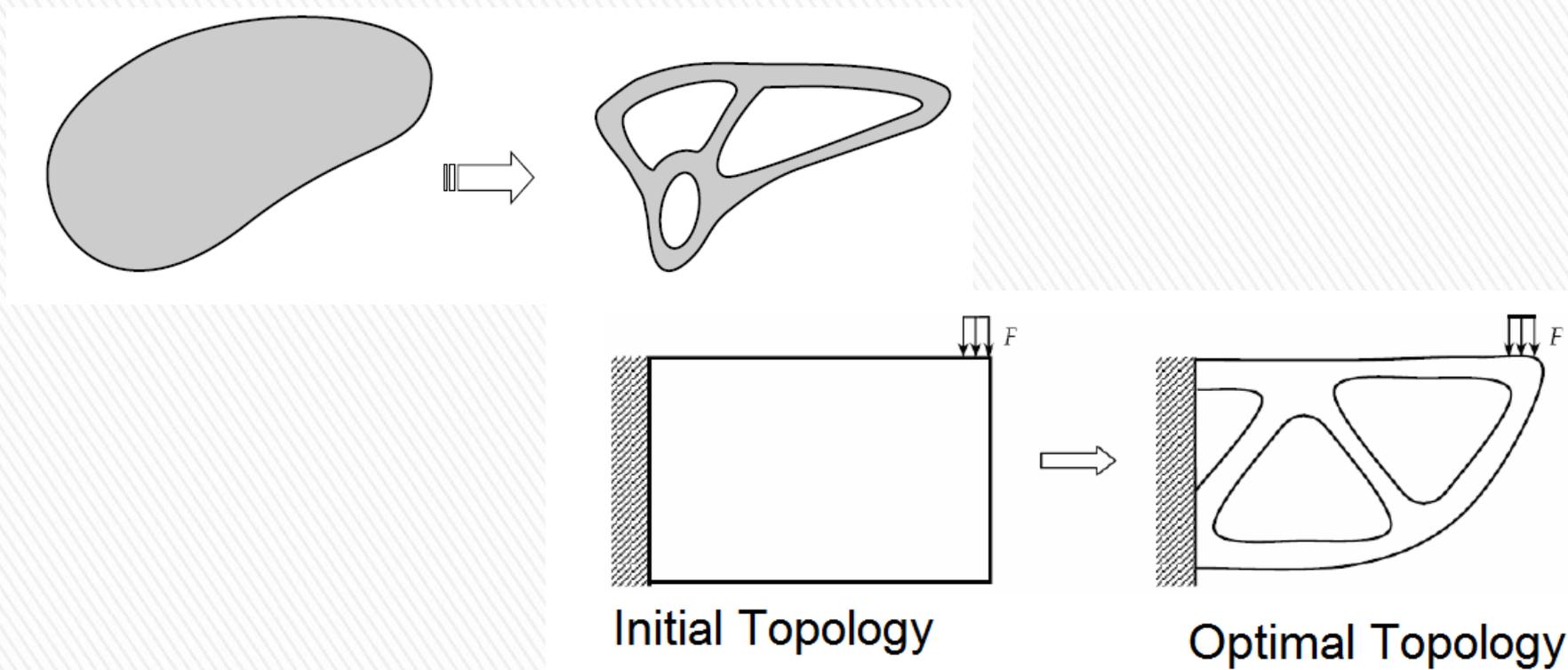


Achar geometria ótima para minimizar volume

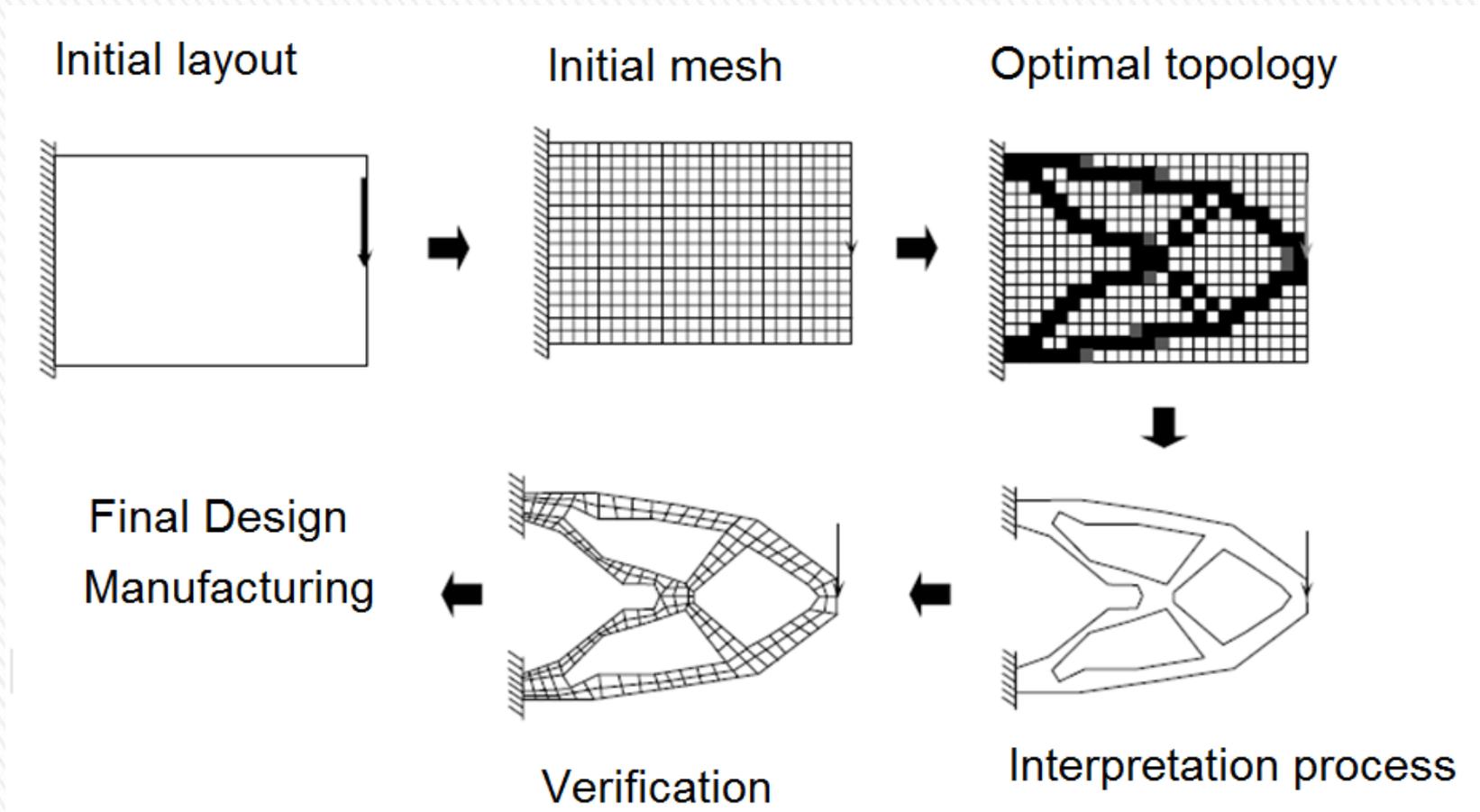
Otimização topológica

Forma e conectividade do do domínio são variáveis de projeto.

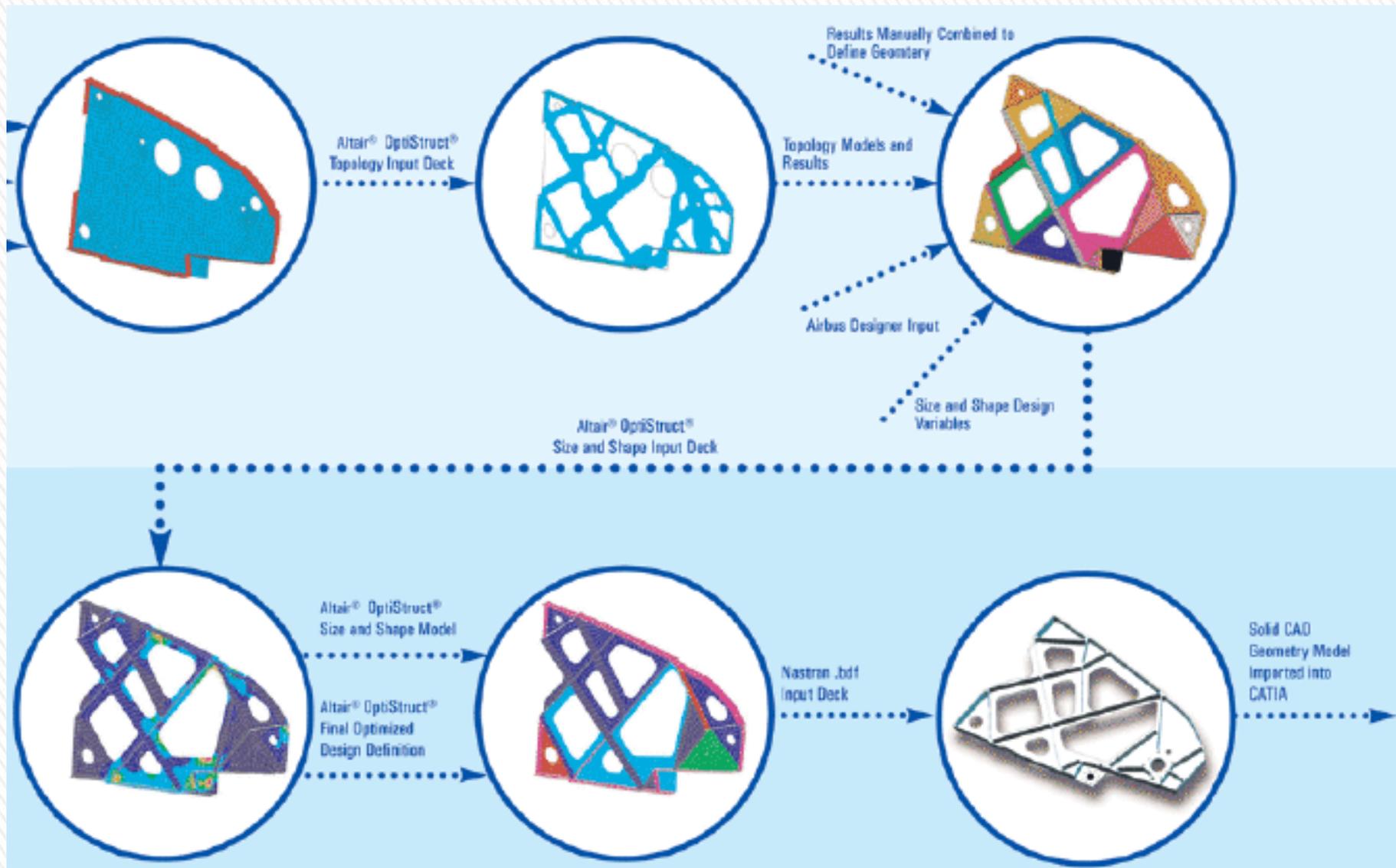
A introdução de um novo contorno é permitido via criação de buracos.



Achar a geometria ótima para minimizar o volume



Otimização topológica – exemplo industrial



Otimização paramétrica, forma e topológica

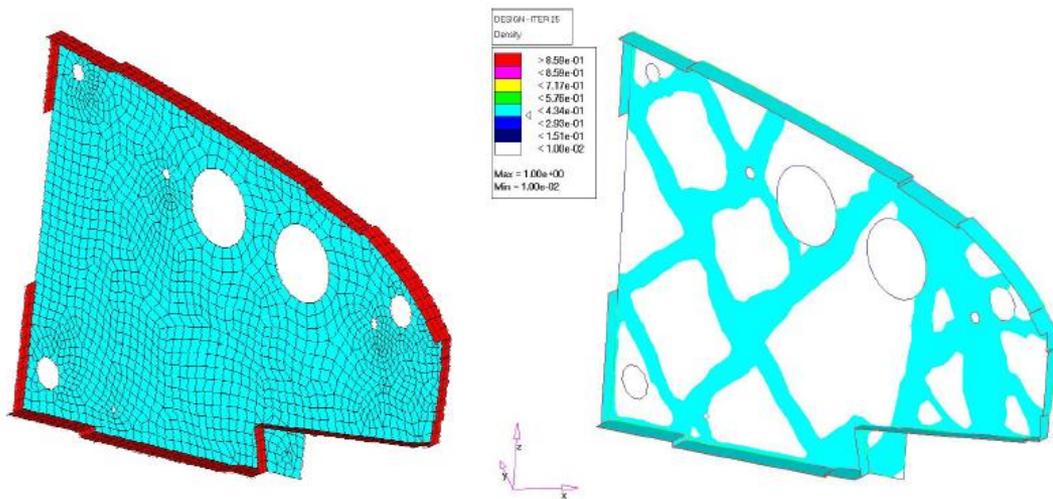


Figure 7: Topology Optimisation of Leading Edge Rib.

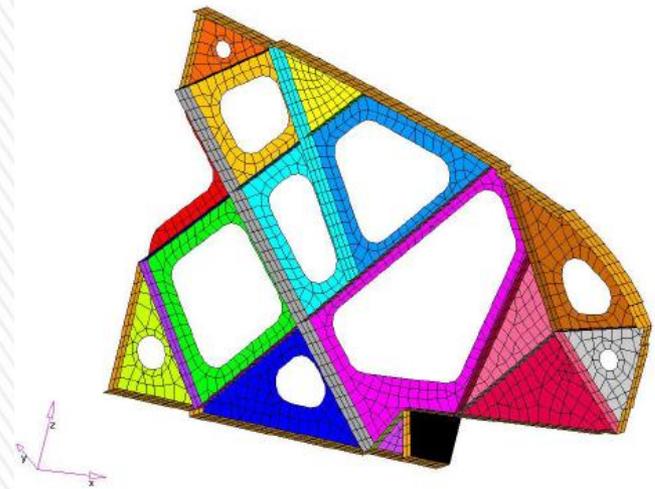


Figure 9: Initial Design for Sizing and Shape Optimisation Created by Interpreting the Topology Optimisation Result



SIMP (Simple Isotropic Material with Penalization)

Bendsøe and Sigmund (2003)

TSA (Análise de sensibilidade topológica)

Eschenauer and Olhoff (2001)

Algoritmo Genético

Sonmez (2008)

Otimização Estrutural Evolucionária - ESO

Xie and Steven (1993)



Heurística gradual de remoção de regiões do domínio,
Procedimento “*Hard – Kill*”

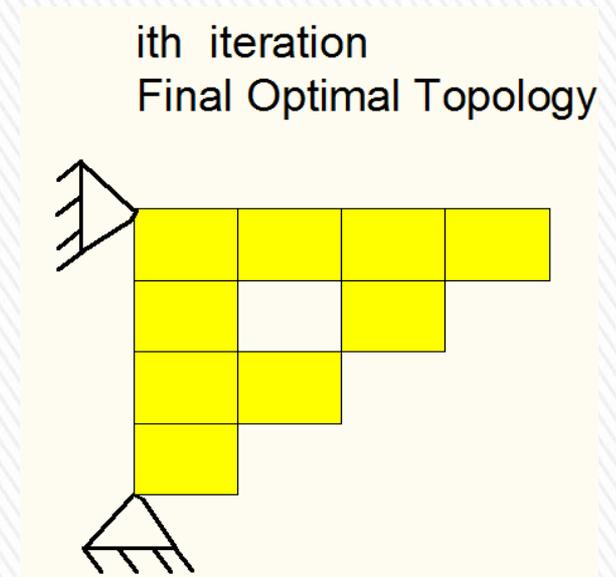
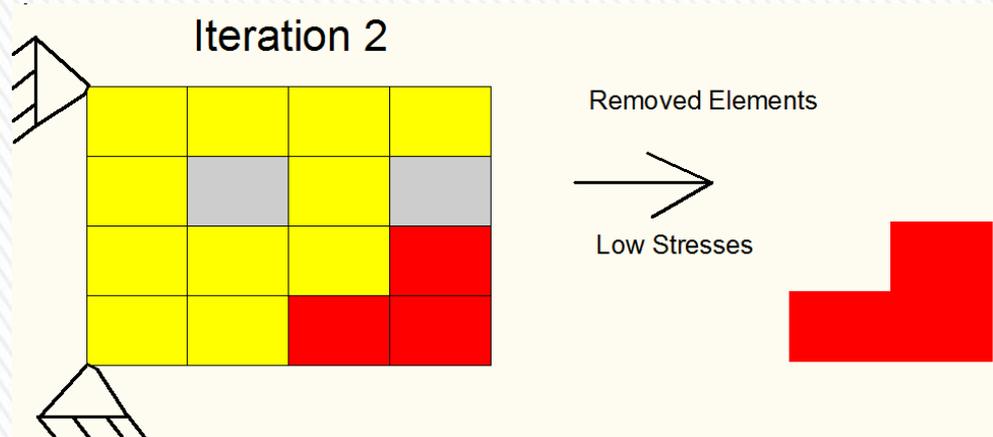
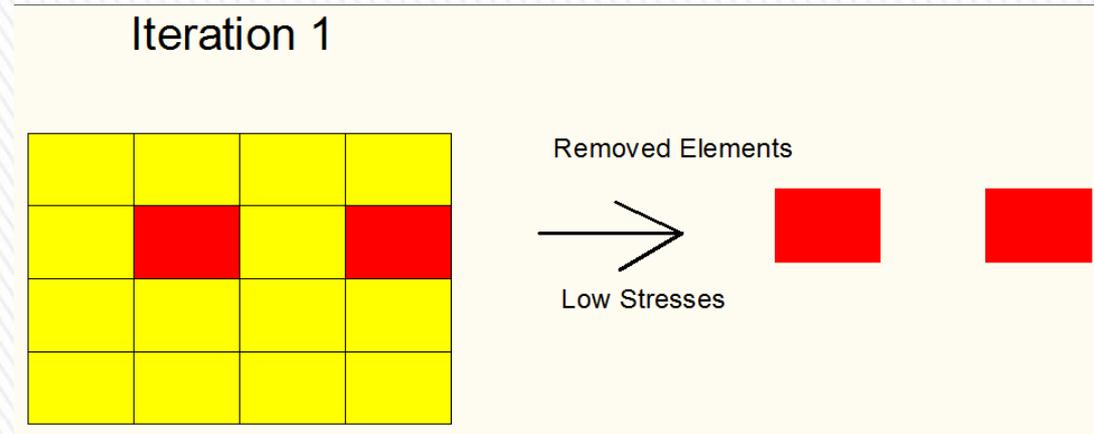
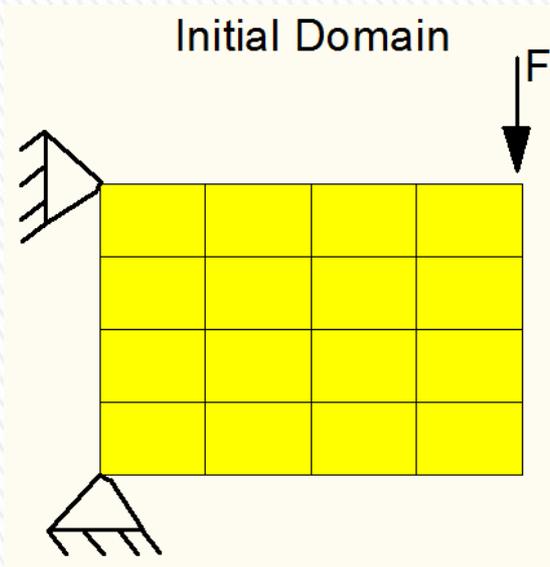
$$\begin{array}{ll} \text{minimize } W = \sum_{e=1}^{NE} w_e(t_e) & \text{Minimization procedure in relation to} \\ \text{subject to } \sigma_{j,\max}^{vm} - \sigma^{project} \leq 0 & \text{their weight} \end{array}$$

O problema é resolvido via MEF iterativamente

Todos elementos que satisfazem a inequação são removidos

$$\sigma_e^{vm} < RR \cdot \sigma_{\max}^{vm}$$

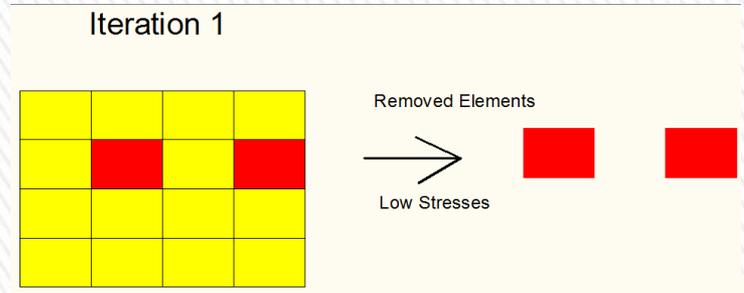
$$RR_{i+1} = RR_i + RE \quad i=0,1,2,3,\dots \quad \blacktriangleright$$



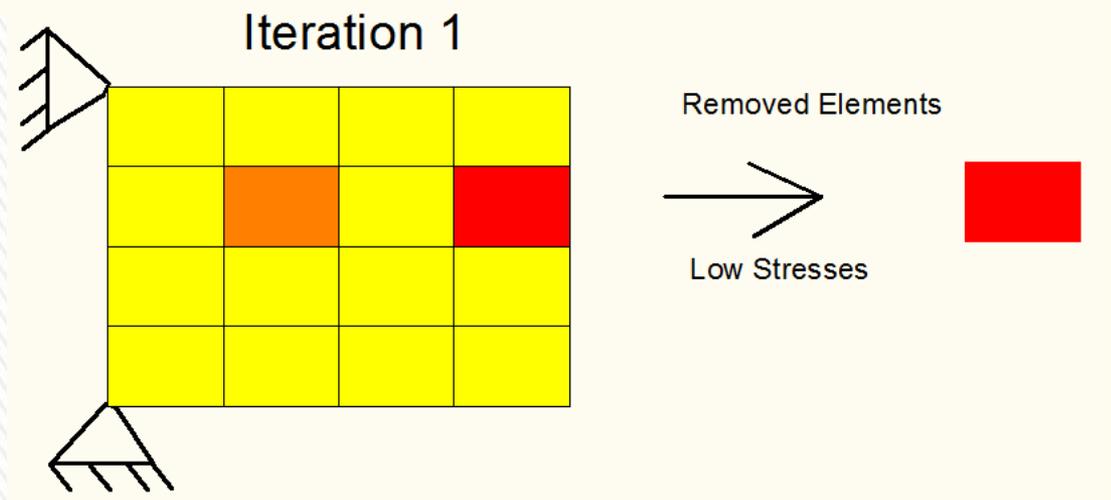
Otimização Estrutural Evolucionária Suavizada - SESO

Remoção não radical (non "hard-kill"):

procedimento "Soft-kill"



ESO



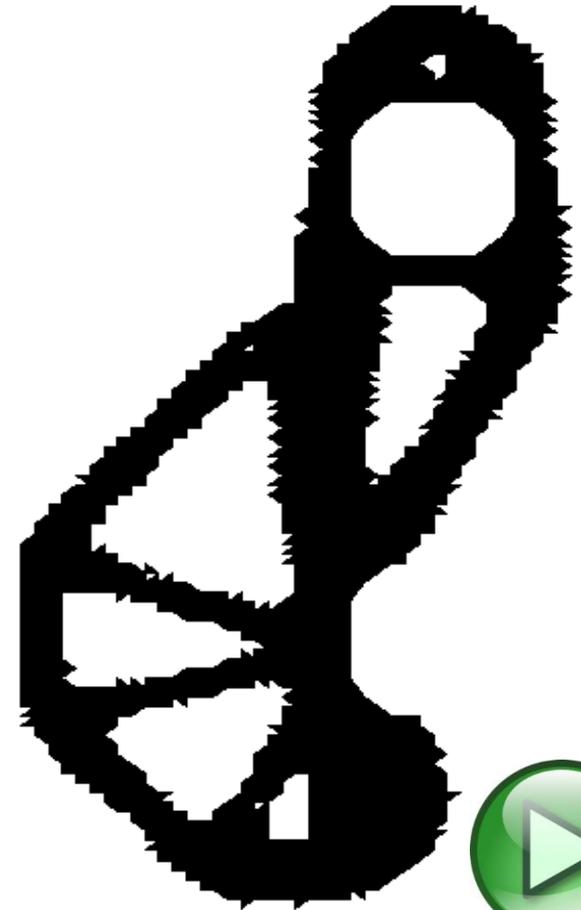
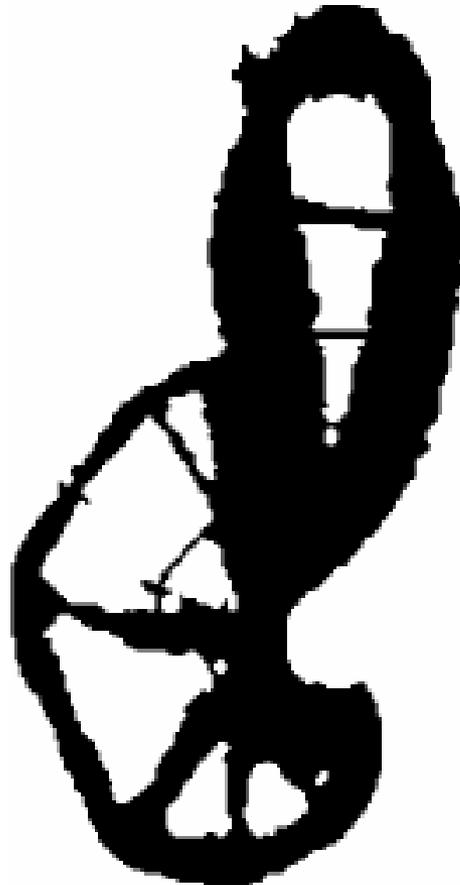
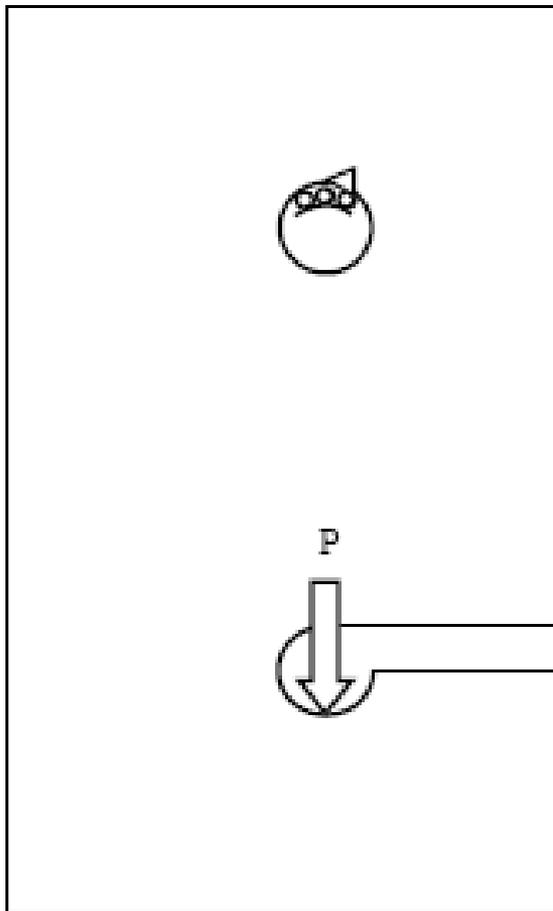
SESO

SESO apresenta robustez and eficiência para obter a config. ótima

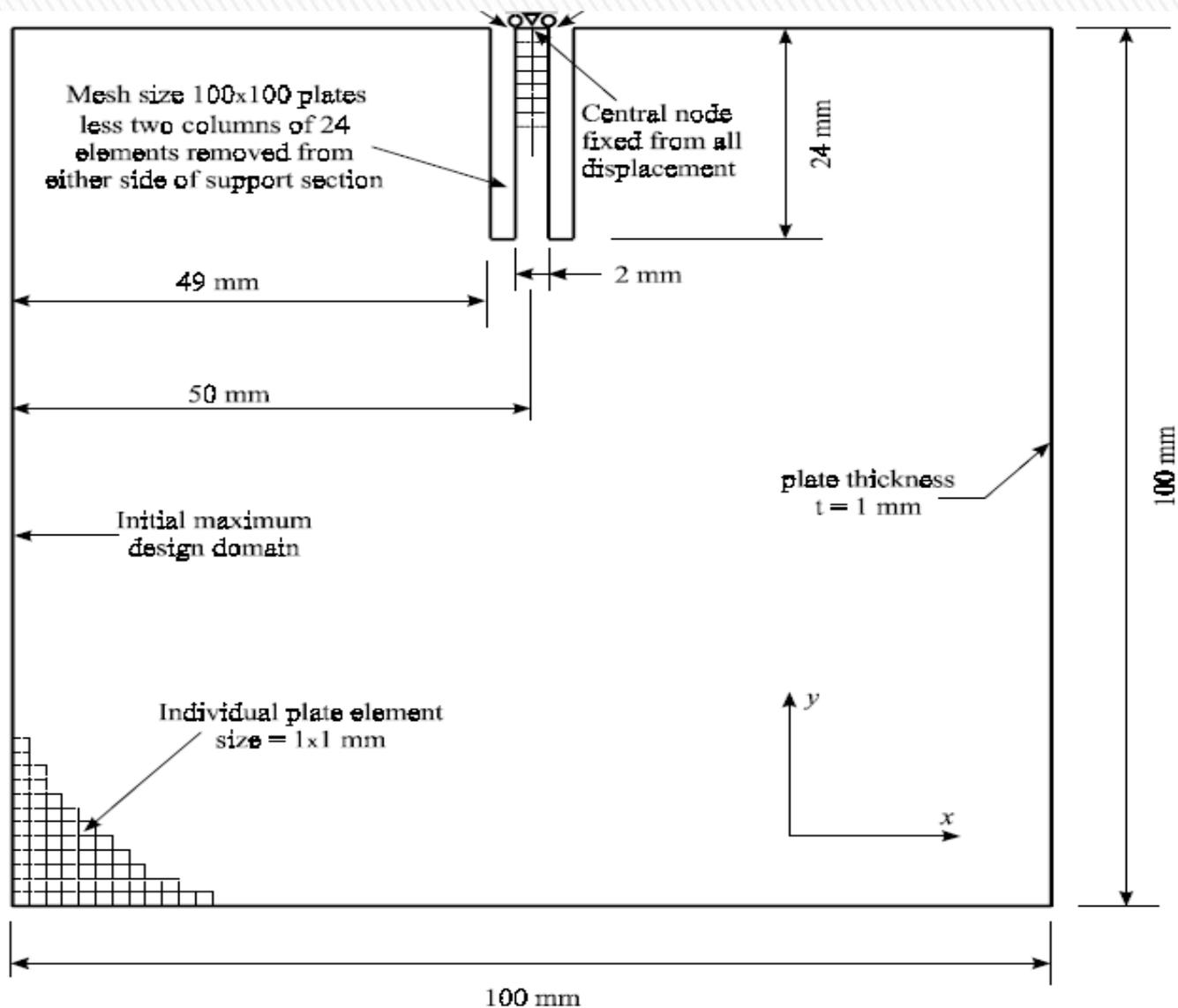
1) Gancho:

Neches (2007) BEM

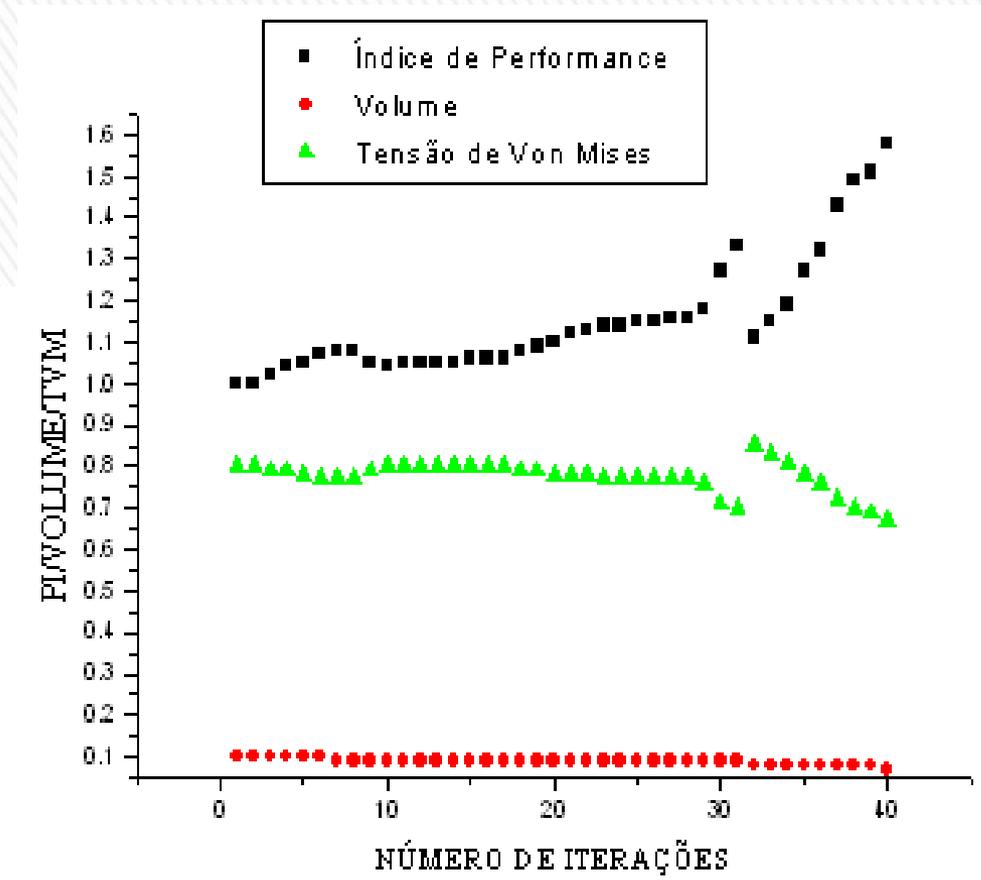
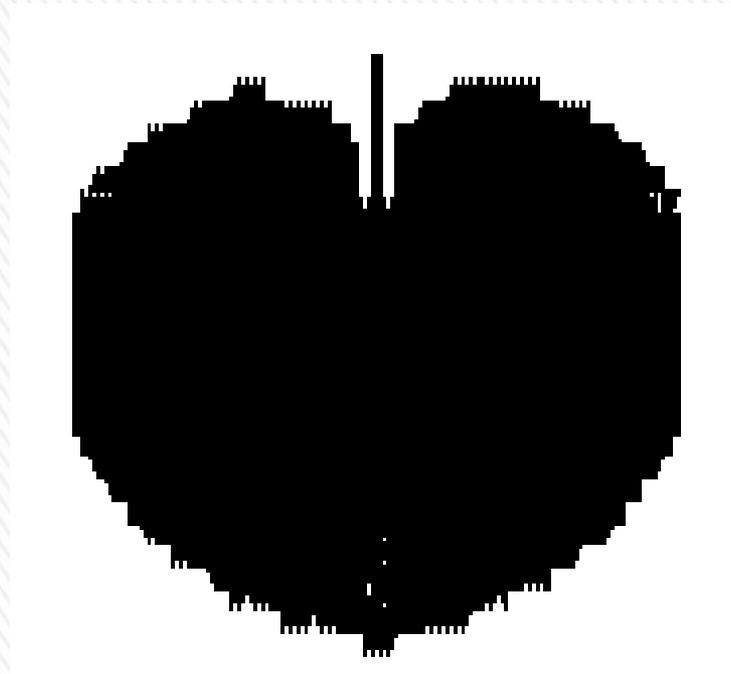
SESO (2010)



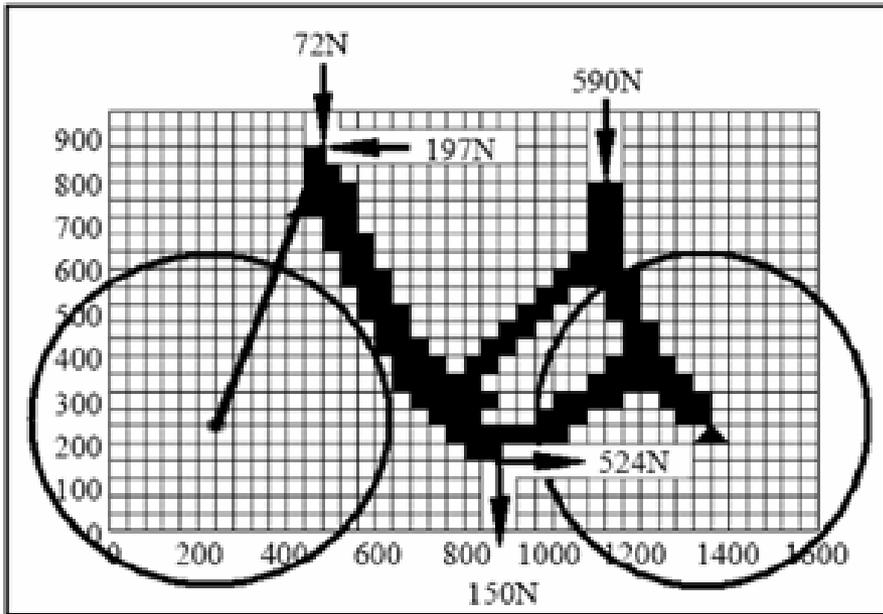
2) Peso Próprio - Maça:



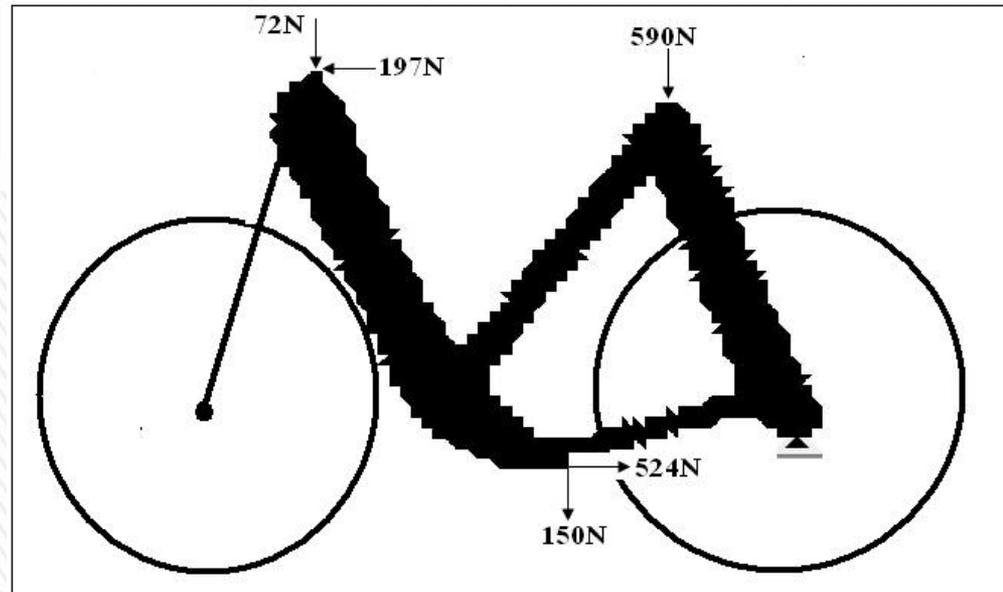
2) Peso Próprio - Maça:



3) Bicicleta



Lin and Hsu (2008)



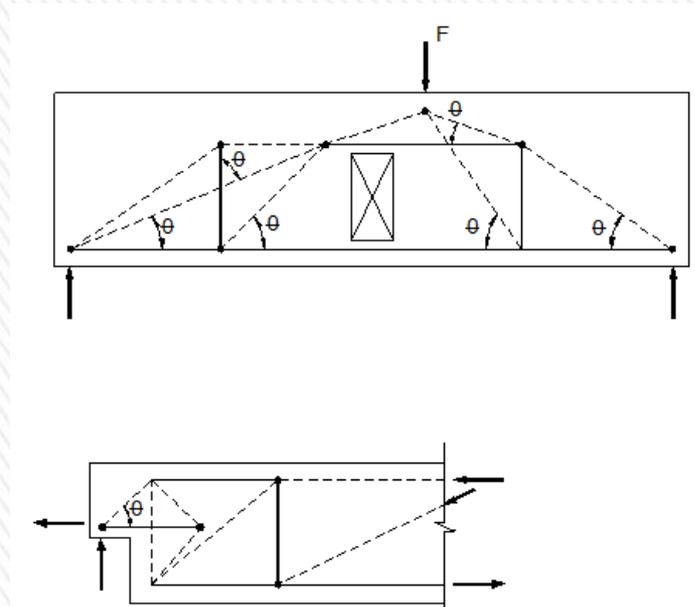
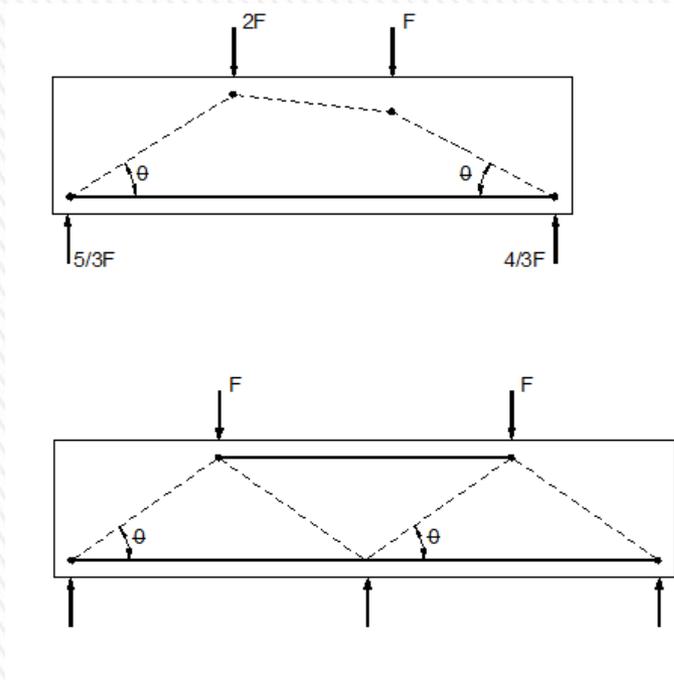
SESO (2010)

Estruturas em concreto armado

Modelos de Bielas-Tirantes

Idealização simplificada de um mecanismo de transferência de carga

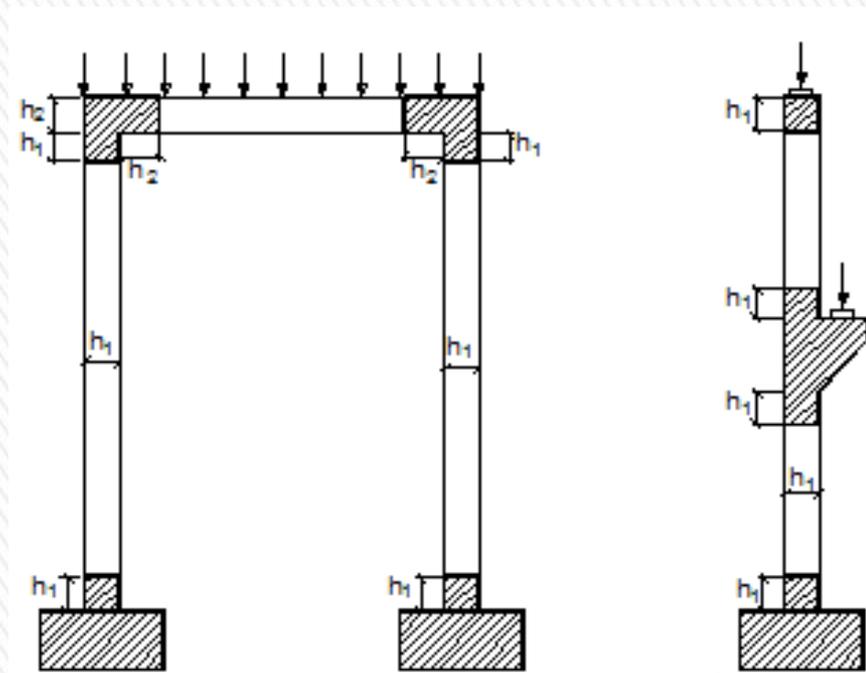
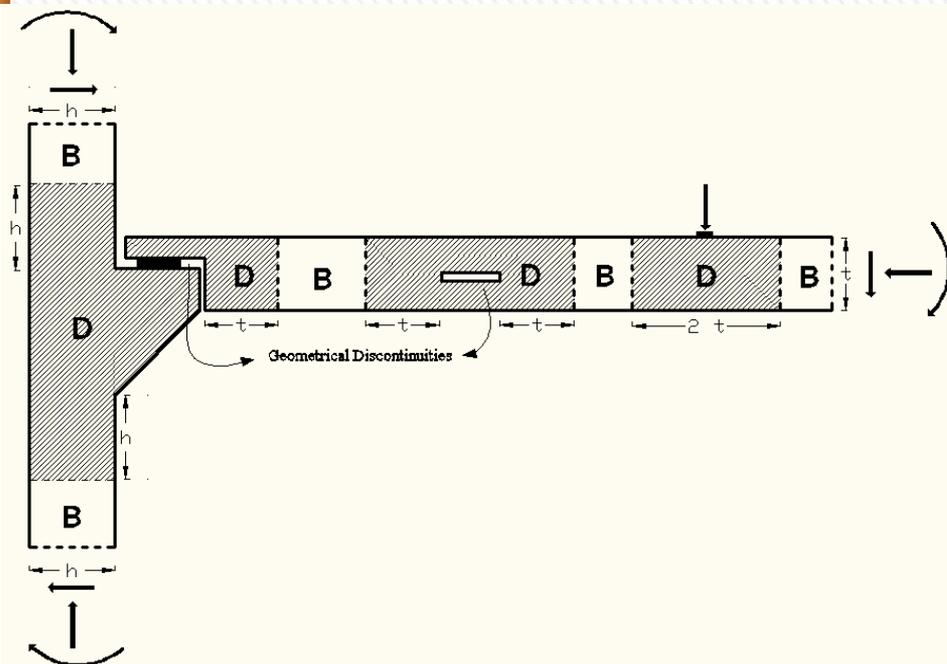
Método tradicional: processo de tentativa e erro



Modelo de treliça



Vigas em CA – Modelo de biela e tirante



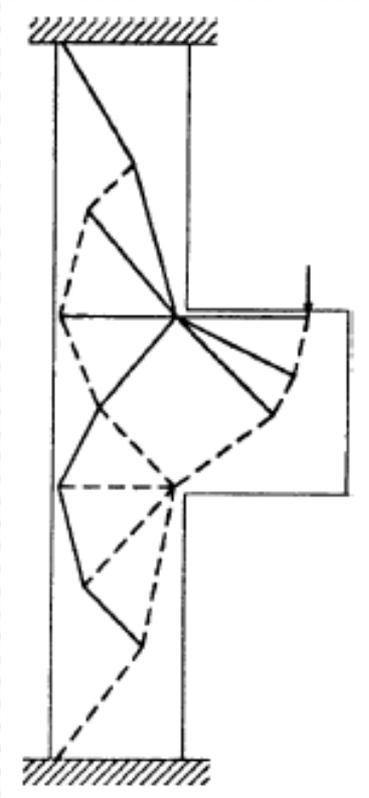
Exemplos de regiões D e B

Região descontínua: D

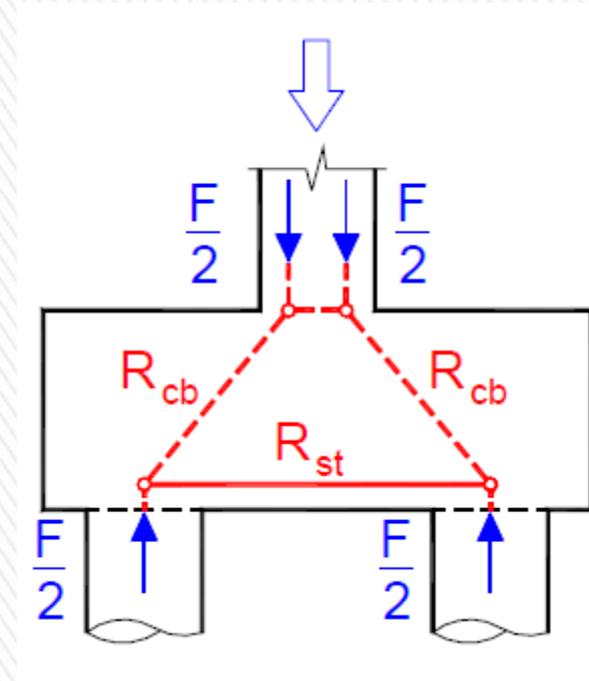
Hipóteses de Bernoulli: B

Modelo de biela e tirante clássicos

Algumas regiões clássicas D



Pilares com consolo curto



Duas estacas em bloco



Modelo de biela e tirante usando otimização topológica

Mas, para geometria genérica, não existe modelos prontos.

Para superar essa limitação

Pode-se usar otimização..

Gerando modelos de biela e tirantes automaticamente para ajudar no projeto



Exemplos - Biela e Tirante

1) Viga

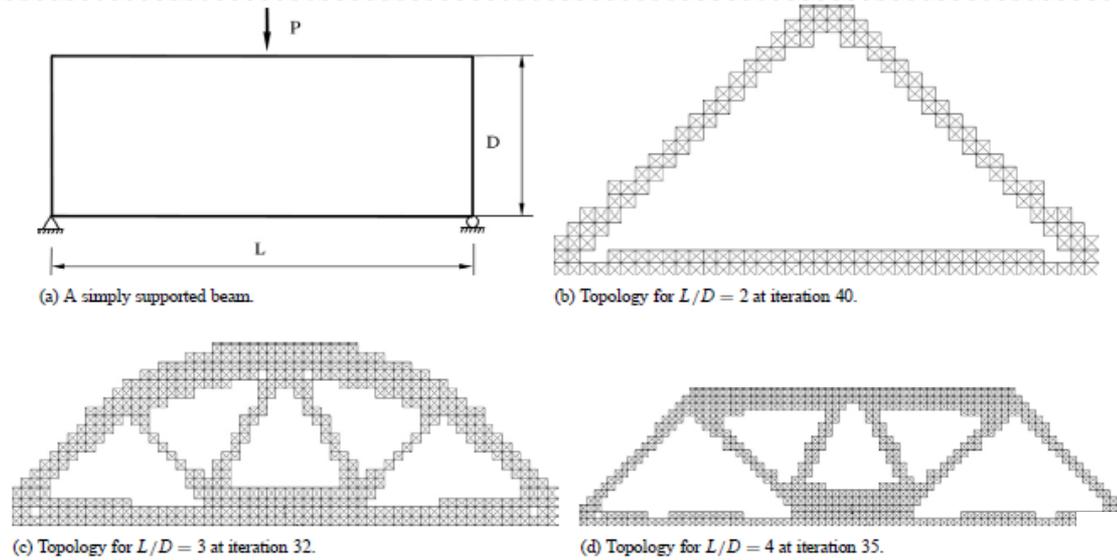
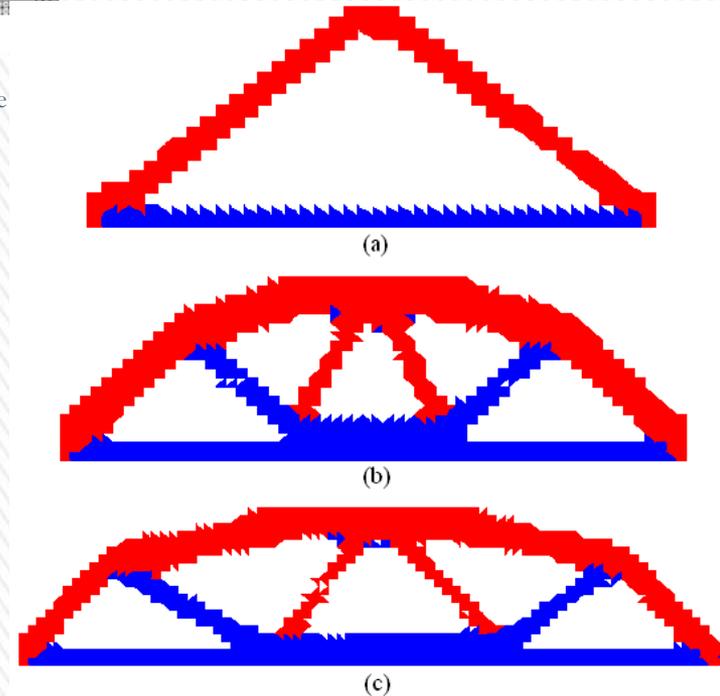


Fig. 4. (a) Design domain of a beam structure; (b), (c) and (d) Optimal Topologies of the beam structure

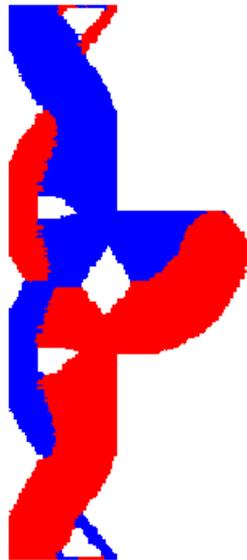
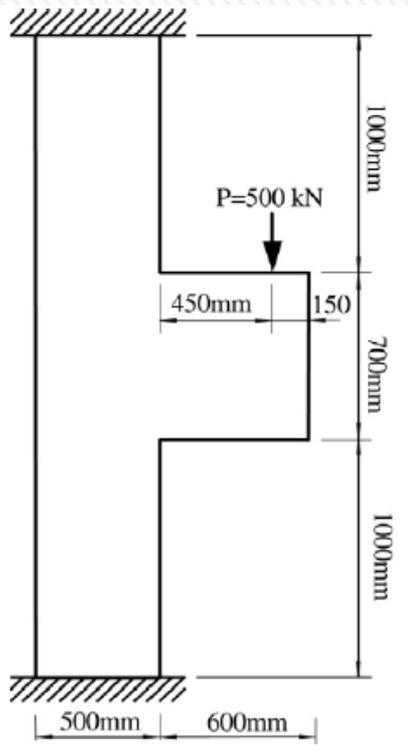
Kwar and Noh (2006)



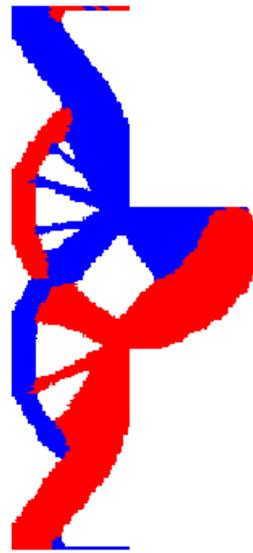
Presente trabalho

Exemplos - Biela e Tirante

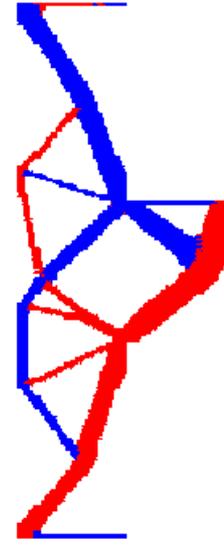
2) Pilar com consolo



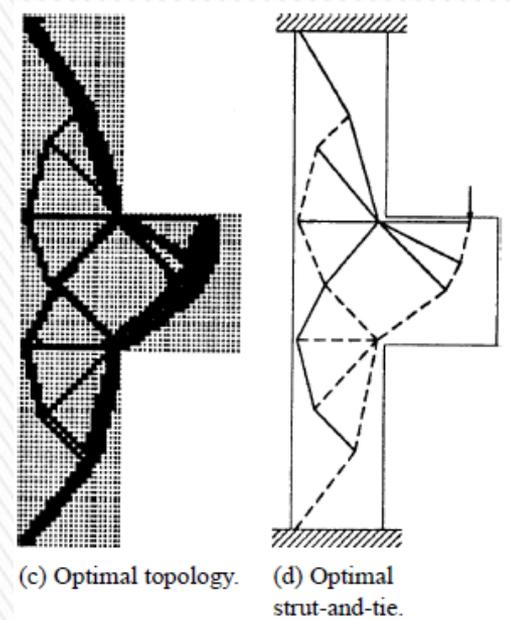
(b) Topology at iteration 48



(c) Topology at iteration 85



(d) Topology at iteration 220



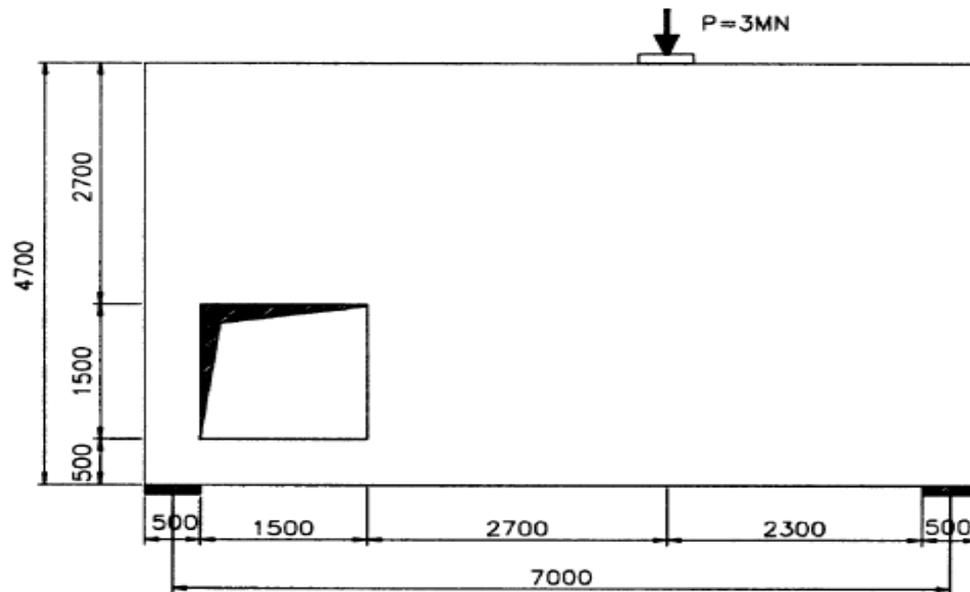
Liang and Steven (2000)



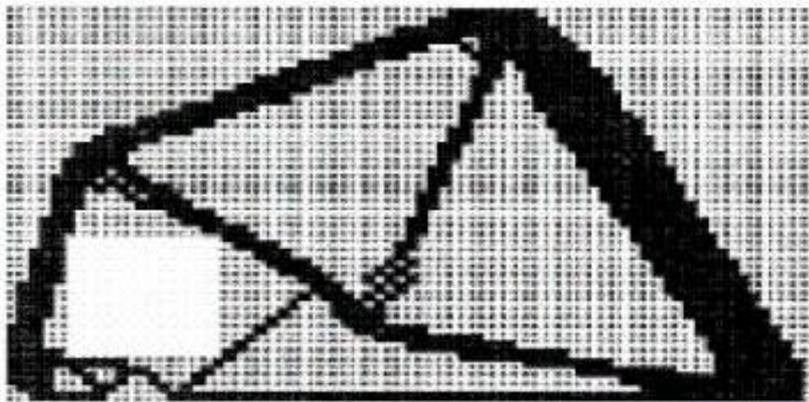
Presente trabalho

Exemplos - Biela e Tirante

3) Viga com abertura

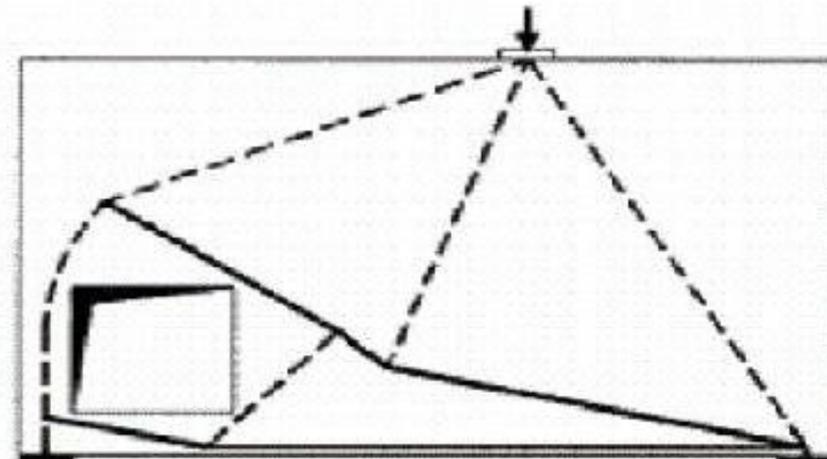


Presente trabalho



b

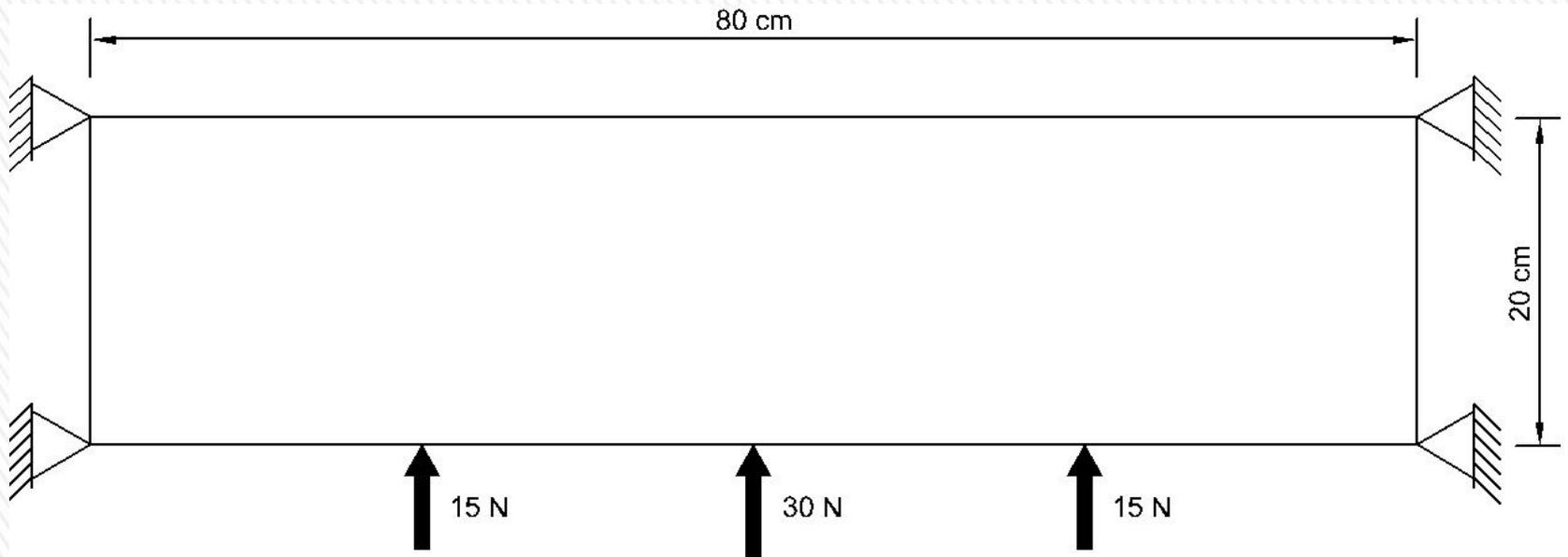
Liang (2005)



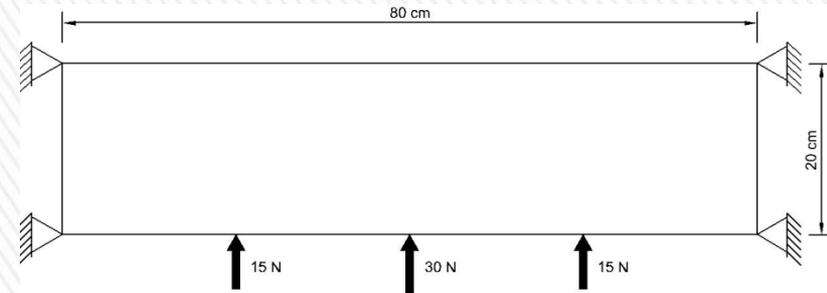
c

Schlaich et al. (1987)

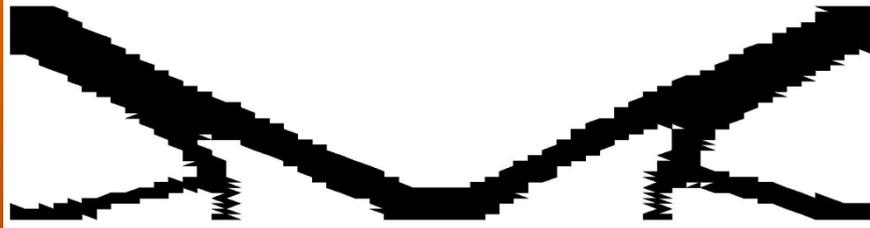
4) Long plate fixed in all four sides



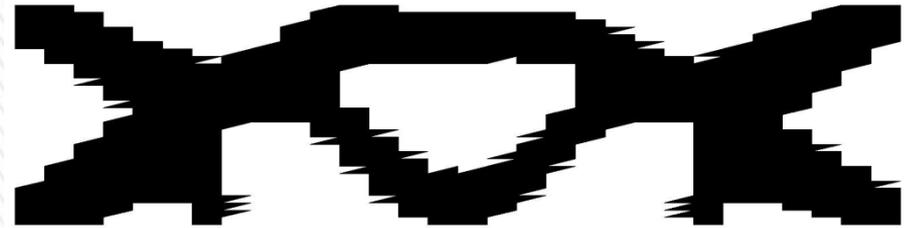
4) Long plate fixed in the vertices



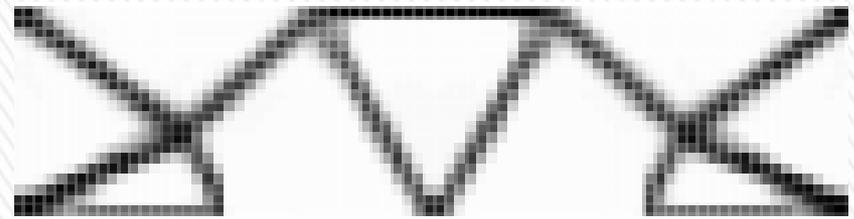
Linear



Non Linear

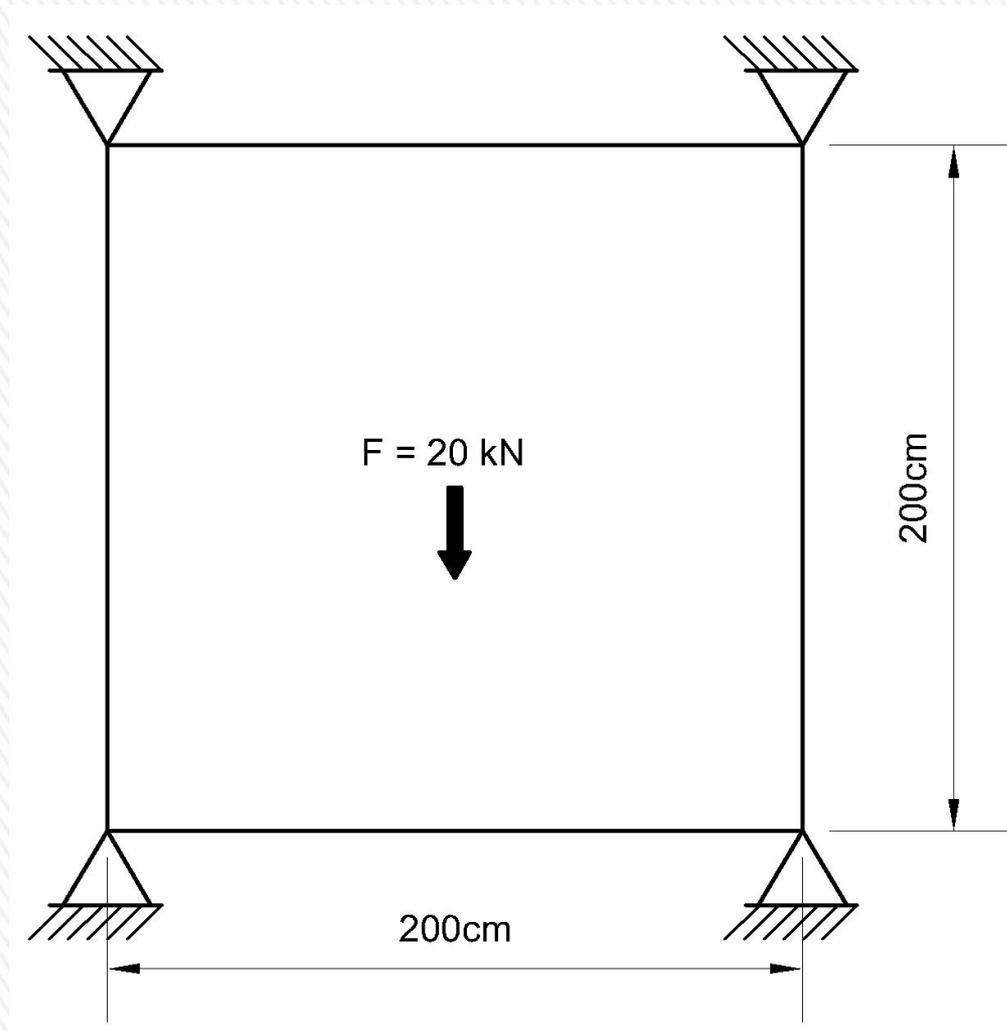


Present work

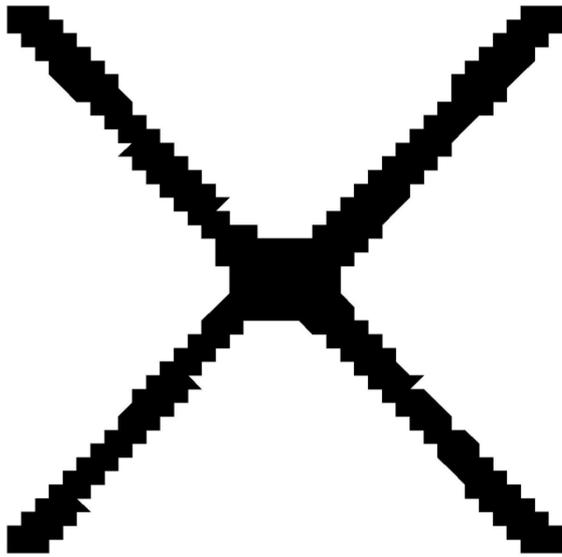


Gea and Luo (2001)

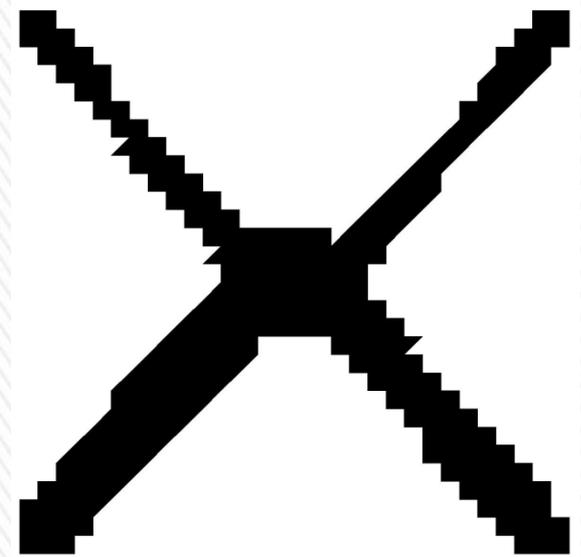
5) Square plate with a geometric center load



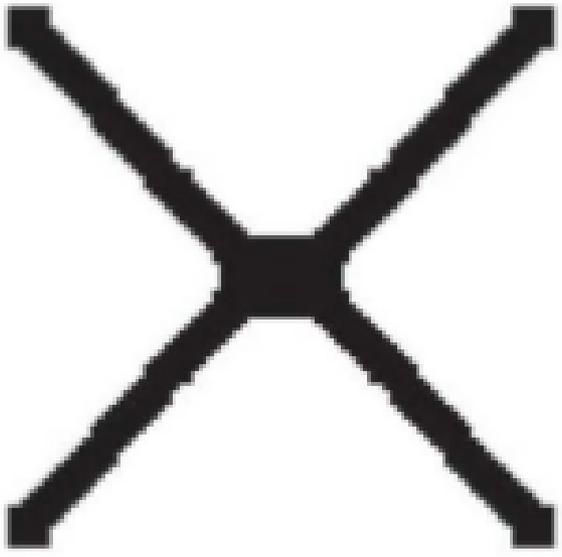
Linear



Non Linear

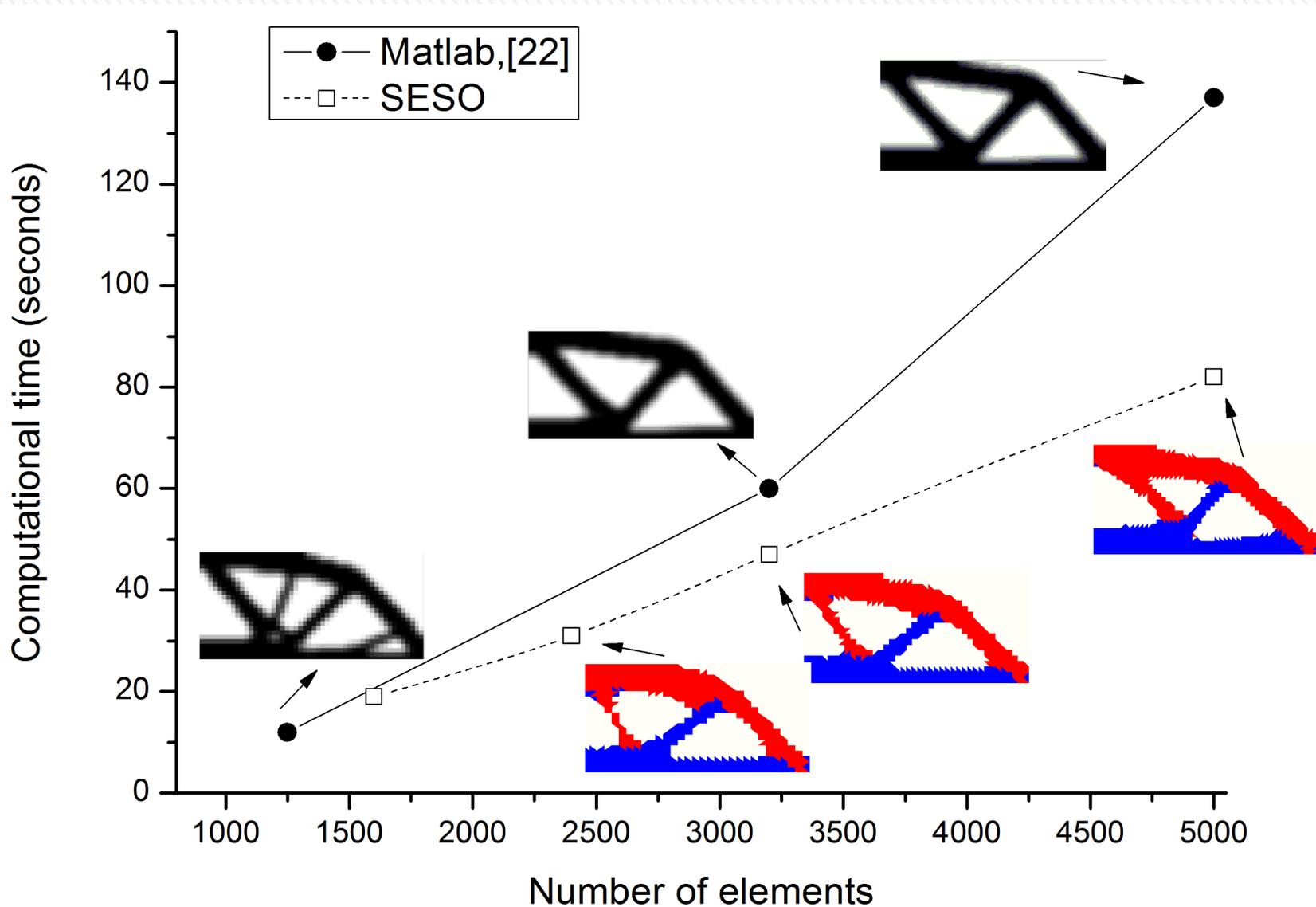


Present work



Chang et al. (2012)

Comparing computational time



References

- Vasconcelos, AC.** Estruturas da Natureza: um estudo da interface entre biologia e engenharia. SP. Studio Nobel, 2000.
- Kwar HG, Noh SH.** Determination of strut-and-tie models using evolutionary structural optimization. Engineering Structures 2006; 28: 1440-1449.
- H.A. Eschenauer & N. Olhoff.** Topology Optimization of Continuum Structures: A Review. Applied. Mechanics Review, 54:331-390, 2001.
- Xie YM, Steven GP.** A simple evolutionary procedure for structural optimization. Computers & Structures 1993; 49(5): 885-896.
- Bendsøe, M.P. e Sigmund, O.** Topology optimization: theory, methods and applications. Berlin, Springer-Verlag, 2003, ISBN 3-540-42992-1.
- Sokolowski J, Zochowski A.** On topological derivative in shape optimization. SIAM Journal of Control Optimization 1999; 37(4): 1251-1272.
- Liang QQ, Xie YM, Steven GP.** Topology optimization of strut-and-tie models in reinforced concrete structures using an evolutionary procedure. ACI Structural Journal 2000; 97(2): 322-330.

References

Feininger , Andreas. The work of carpenter ants (Camponotus herculeanus). Andreas Feininger Archive. Copyright: ©1999 Center for Creative Photography, The University of Arizona Foundation.

[22] **Andreassen E, Clausen A, Schevenels M, Lazarov BS, Sigmund O.** Efficient topology optimization in MATLAB using 88 lines of code. Struct Multidisc Optim 2011; 43(1): 1-16.



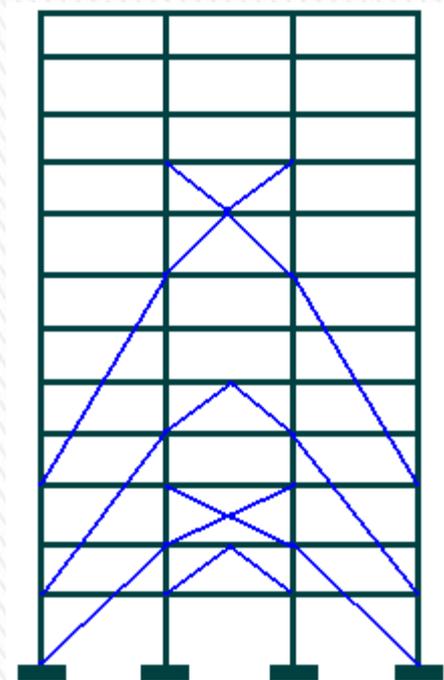
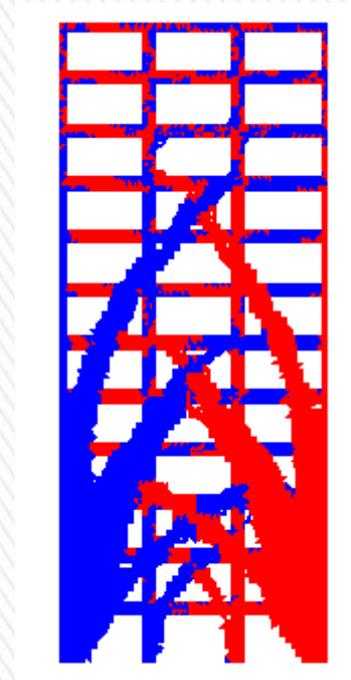
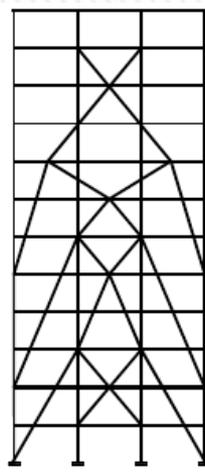
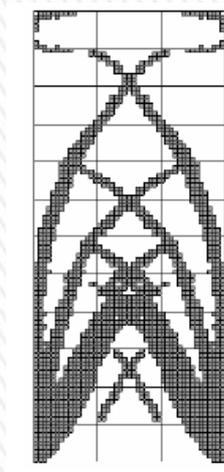
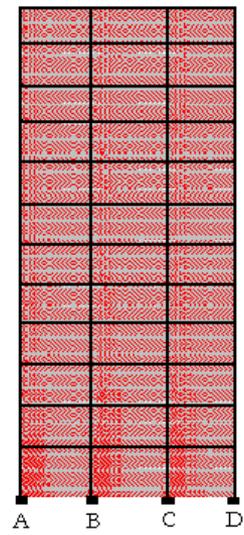


Figura 16 – Proposta de contraventamento com a presente formulação



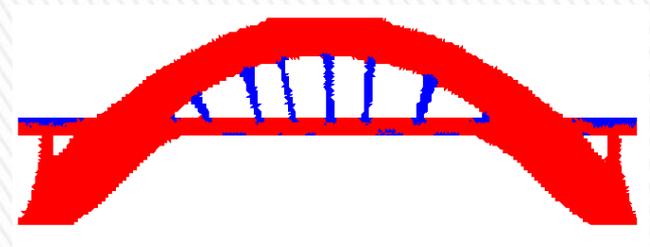
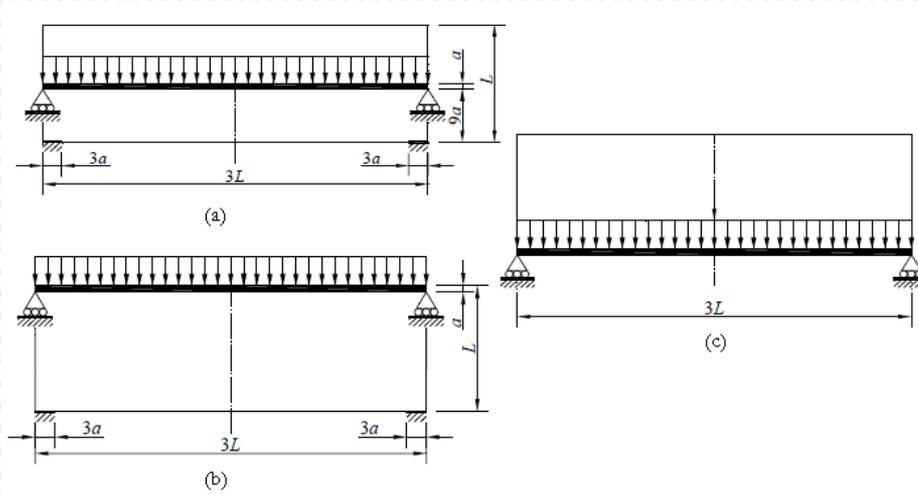


Figura 7 – Ponte com tabuleiro Central

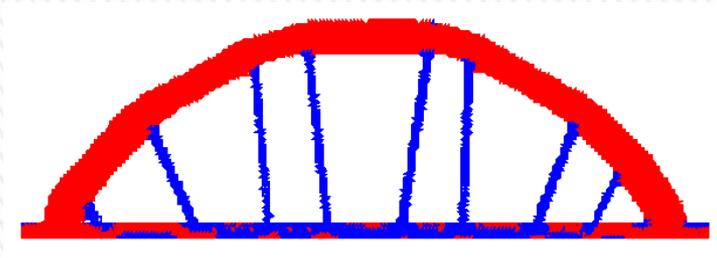
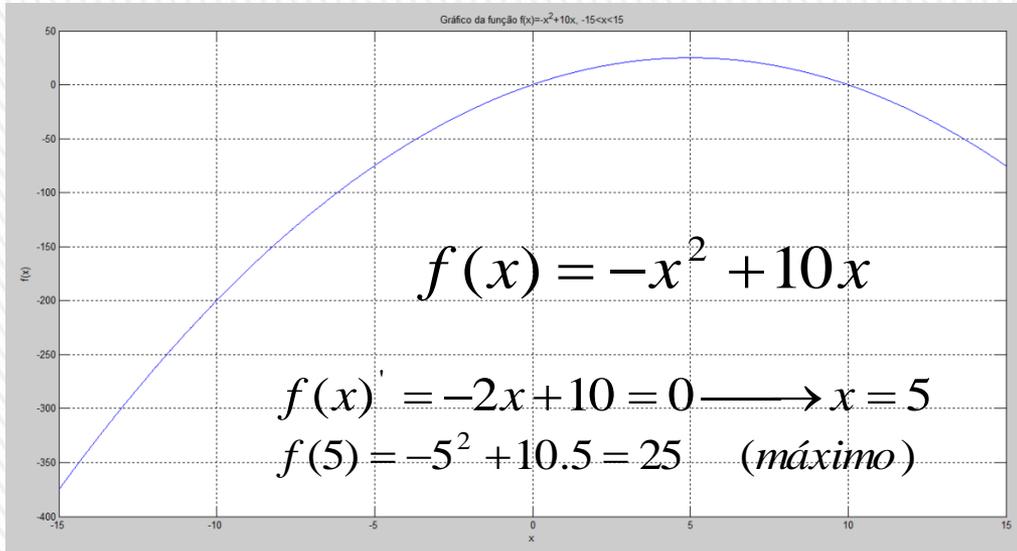


Figura 8 – Ponte com tabuleiro Inferior



Algoritmo Genético



- $f(-1,5) = -17,25$
- $f(-2) = -24$
- $f(30,8) = -640,64$
- $f(9,1) = 8,19$
- $f(-10,5) = -215,25$
- $f(0,5) = 4,75$
- $f(100,45) = -9086$
- $f(-9,7) = -191$
- $f(3,2) = 21,76$

ORDENA DECRESCENTE

- $f(3,2) = 21,76$
- $f(9,1) = 8,19$
- $f(0,5) = 4,75$
- $f(-1,5) = -17,25$
- $f(-2) = -24$
- $f(-9,7) = -191$
- $f(-10,5) = -215,25$
- $f(30,8) = -640,64$
- $f(100,45) = -9086$

Geração 1
(aleatória)

$f(x)$ maiores: Indivíduos (x)
mais acima, "mais aptos"!

Gerações 2, 3, ...n

(gera indiv. aleatórios E mutação/cruzamento dos mais aptos de gerações 1 a n-1)

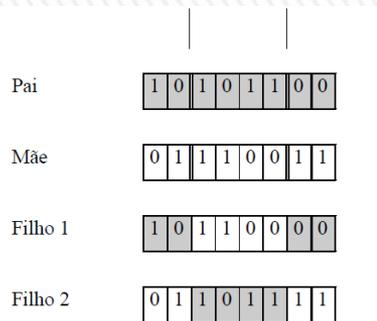


Figura 2-4. Cruzamento dois pontos

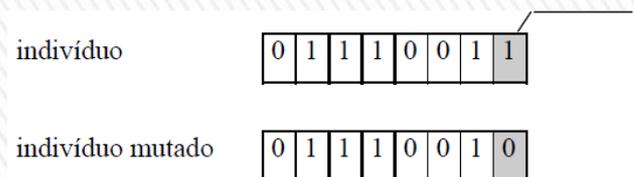


Figura 2-7. Exemplo de mutação

Simula processo evolucionário
Milhares de "indivíduos" (x) são
computados

Computação Pesada

