

Ondaletas: Histórico e Aplicação

¹ Augusto César Barros Barbosa

² Denizar Blitzkow

¹ Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da Universidade de São Paulo – IAG/USP

² Escola Politécnica da Universidade de São Paulo – EPUSP-PTR-LTG

E-MAIL: ¹barbosa@model.iag.usp.br; ²dblitzko@usp.br

São Paulo
Maio/2008

¹ Estudante de Doutorado do Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da Universidade de São Paulo – IAG/USP e colaborador científico do Laboratório de Topografia e Geodésia – LTG.

² Professor Titular da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo - EPUSP.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	03
2. OBJETIVO	04
3. BREVE HISTÓRIA: Fourier, Joseph	05
4. A TRANSFORMADA JANELADA DE FOURIER	08
5. A CONVOLUÇÃO	11
5.1 A Linearidade da Transformada de Fourier	12
5.2 A Linearidade da Convolução.....	12
5.3 A Relação entre a TF e a Convolução.....	13
6. A TRANSFORMADA EM ONDALETAS.....	14
6.1 A Transformada em Ondaletas Forma Contínua	16
6.1.1 A Função Ondaleta Base de Morlet.....	17
6.1.2 A Relação entre a TJF e a TO.....	19
6.2 A Transformada em Ondaletas da Função Base de Morlet.....	20
6.2.1 O Processo de Decomposição em Escalas.....	21
6.2.2 O Espectro de Energia das Ondaletas	23
7. A TRANSFORMADA CRUZADA EM ONDALETAS	25
7.1 O Ângulo de Fase da TCO	26
7.1.1 A Transformada Coerência	27
7.1.2 A Interpretação dos Vetores de Fase	28
8. TIPOS DE ONDALETAS MÃE	30
8.1 Como Escolher Uma Melhor Ondaleta-mãe?	30
9. APLICAÇÕES E RESULTADOS.....	32
10. CONCLUSÕES	36
11. APÊNDICE	37
12. AGRADECIMENTOS	37
13. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	38

“A transformada em ondaletas é uma operação linear utilizada na análise de sinais não-estacionários, com o propósito de extrair informações relevantes a cerca das variações em frequência, como também detectar estruturas localizadas no espaço-tempo”.

1. INTRODUÇÃO

A grande maioria das observações e simulações de processos e regimes não-lineares na natureza é registrada a partir de uma Série Temporal (ST). Atualmente observa-se uma vasta gama de técnicas de análise espectral daquelas séries, em contrapartida à análise estatística clássica de sinais, que foram desenvolvidas e introduzidas na literatura com a finalidade de fornecer ferramentas para a caracterização de regimes não-lineares que estão associados à complexa variabilidade observada das mais diferentes variáveis.

Exemplos clássicos de dados que apresentam esta variabilidade complexa são aqueles relacionados à observação de variáveis atmosféricas, oceânicas e terrestres, ou seja, vento, Temperatura da Superfície do Mar (TSM), observações GPS (*Global Positioning System*), etc.

Demonstra-se claramente que a Análise de Fourier (AF) tradicional não é viável na investigação de fenômenos que possuem sinais não-estacionários ou mesmo aqueles em que o sinal sofre variações bruscas de frequência (Farge, 1992). Entende-se como “não-estacionária” uma ST em que, momentos estatísticos como “médias” e “variâncias”, para diferentes intervalos de período constante, apresentam-se estatisticamente distintas. Caso contrário, assume-se que a série é estacionária.

A técnica chamada de Transformada Janelada de Fourier (TJF) para o estudo de sinais não-estacionários é limitada no aspecto de que possui uma janela móvel no tempo, porém esta janela é fixa, ou seja, ela não consegue determinar variações de altas e baixas frequências simultaneamente. Tal deficiência requer o uso da técnica conhecida com Transformada em Ondaletas (TO), a qual possui janelas móveis, no tempo ou no espaço, que se dilatam ou se comprimem para capturar sinais de baixa e alta frequência, respectivamente.

A TO se tornou uma ferramenta comum, para a análise de variações locais de energia dentro de uma ST, pela decomposição da mesma em tempo-freqüência-espço. Esta é capaz de determinar os modos dominantes de variabilidade e, como estes modos variam no decorrer do tempo.

A TO tem sido usada em numerosos estudos em meteorologia e geofísica, como convecção tropical (Weng & Lau, 1994), o ENSO (Gu & Philander, 1995), frentes frias atmosféricas (Gamage & Blumen, 1993), estruturas coerentes em fluxos turbulentos (Farge, 1992), turbulência atmosférica (C. Rodrigues Neto *et al.*, 2001), processamento de sinais (M. Verteli & C. Herley, 1992), sistemas hidrológicos (D. J. R. Nordemann, 1998), Geofísica Espacial (M. J. A. Bolzan, 2005). Uma completa descrição de aplicações geofísicas pode ser encontrada em (Foufoula-Georgio & Kumar, 1995), enquanto o tratamento teórico de análise em ondaletas é dado em (Daubechies, 1992).

A análise em ondaletas tem sido formalizada extensivamente graças aos esforços de Físicos e Matemáticos, constituindo um núcleo de idéias partilhadas também por Engenheiros, entre outros pesquisadores. Esta técnica foi originalmente empregada na análise de sinais sísmicos na geofísica (Morlet, 1983); contudo o estudo desta técnica vem crescendo vertiginosamente estando aliada a poderosos algoritmos computacionais e ao interesse de uma ampla comunidade (Daubechies *et al.*, 1992).

2. OBJETIVO

Este trabalho visa mostrar, num contexto histórico, a necessidade de se utilizar a transformada em ondaletas como uma ferramenta (técnica) importante na investigação de fenômenos não-estacionários, onde a análise de Fourier tradicional não é eficiente (Farge, 1992).

3. BREVE HISTÓRIA: Fourier, Joseph



Figura 1 - Tirada de http://pt.wikipedia.org/wiki/Jean-Baptiste_Joseph_Fourier

Jean-Baptiste Joseph Fourier nasceu em Auxerre a 21 de Março de 1768 e faleceu em Paris a 16 de Maio de 1830. Foi um Matemático e Físico francês, celebrado por iniciar a investigação sobre a decomposição de funções periódicas em séries trigonométricas convergentes, conhecidas como Séries de Fourier (SF) e, a sua aplicação aos problemas da condução do calor.

Antes de 1830, Fourier utilizando-se de sua teoria de análise de freqüências, postulou que toda função periódica $f(x)$ poderia ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \{a_k \cos(kx) + b_k \text{sen}(kx)\} \\ a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \text{sen}(kx) dx. \end{aligned} \tag{1}$$

O conjunto de Equações (1) pode ser encontrado na literatura, e.g., (Butkov, 1978).

Hoje a AF é uma das técnicas matemáticas com maior número de aplicações práticas. Além de ser utilizada extensivamente nas mais diversas áreas das ciências aplicadas, em especial na engenharia, a mesma constitui ainda a base do processamento de sinais. Tem por isso um papel central nas telecomunicações modernas e também no processamento de imagens digitais.

Como exemplos didáticos e ilustrativos serão apresentados aqui (resumidamente) resultados encontrados no artigo do (Bolzan, 2006). Isso permitirá um melhor entendimento da análise de Fourier e a necessidade do uso da teoria das ondaletas.

A Transformada de Fourier (TF) é uma ferramenta útil que possibilita determinar a contribuição que cada função seno e co-seno, presentes numa ST, apresentam para a energia total desta série (periódica). A TF é definida da seguinte forma:

$$F(\omega) = \int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi i\omega x} dx \quad (2)$$

onde $f(x)$ é a série temporal ou sinal analisado, ω é a frequência que cada componente oscilatória inerente ao sinal apresenta (ou seja, representa as diferentes frequências contidas na série) e a exponencial transforma para o espaço das frequências.

A Equação (2) apresenta uma deficiência referente à decomposição das várias frequências de um sinal com relação à sua localização no tempo. (Gabor, 1946) percebeu esta deficiente aplicabilidade da TF em séries temporais não-estacionárias, o que de fato é o caso da maioria dos fenômenos encontrados na natureza. Em consequência ele modificou a TF visando à melhor representatividade deste tipo de séries temporais. Neste esquema, a ST é dividida em intervalos iguais e a TF é aplicada em cada um destes. Este método ficou conhecido como a Transformada Janelada de Fourier (TJF) e será mostrado em detalhes no tópico (4).

Um exemplo ilustrativo para a aplicação da TJF pode ser encontrado em (Bolzan, 2006) através da consideração de três séries temporais dos argumentos de uma função seno, com 16 segundos de duração cada uma, tendo amplitudes e frequências distintas (1, 5 e 10 Hz), conforme mostrado na Figura (2) (gráfico superior). A mesma figura (gráfico inferior) mostra a resultante da soma das três frequências nos 8 primeiros segundos e a soma das frequências de 1 e 10 Hz para os 8 segundos restantes.

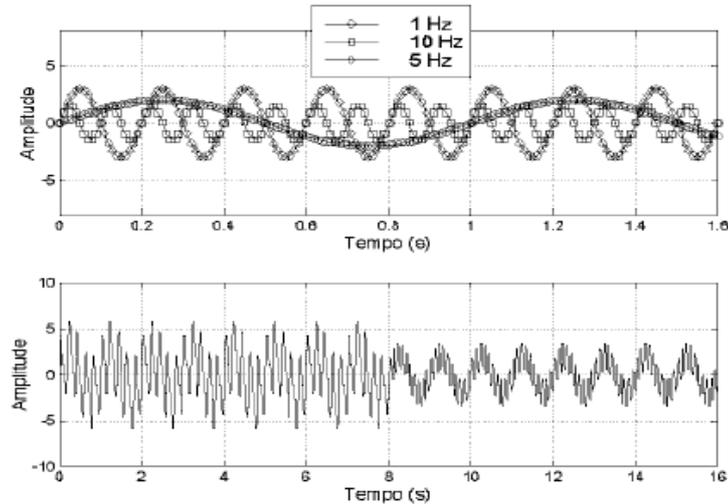


Figura 2 - Gráfico Superior: Séries temporais de três argumentos de uma função seno. Gráfico Inferior: Série temporal criada pela soma de cada série do gráfico superior.

Aplicando a TF sobre a série temporal do gráfico inferior da Figura (2) obtém-se o chamado “Espectro de Energia” da série, como pode ser visto na Figura (3).

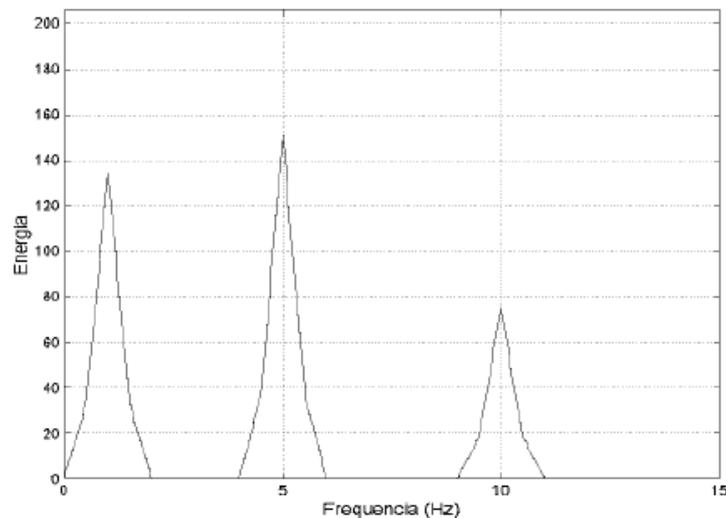


Figura 3 – Espectro de energia, obtido pela TF da série temporal mostrada na Figura (2) (gráfico inferior).

Na Figura (3) nota-se claramente a presença das três freqüências, definidas pelos argumentos da função seno, na série temporal. Todavia, a TF quando aplicada para todo o período da ST (16 segundos) não mostra distinção com relação às somas das componentes oscilatórias das séries e suas respectivas localizações temporais.

4. A TRANSFORMADA JANELADA DE FOURIER

Como mencionado anteriormente, a idéia de Gabor foi a de separar uma série temporal em vários segmentos de períodos fixos e em seguida aplicar a TF em cada um desses intervalos. Dentro desta idéia (Bolzan, 2006) dividiu a ST do gráfico inferior da Figura (2) em cinco segmentos com intervalos iguais de tempo, ou seja, cada segmento com três segundos de duração. Em seguida foi aplicada a TF em cada um deles. A Figura (4) (gráfico inferior) mostra o resultado dessa aplicação, conhecida como TJF.

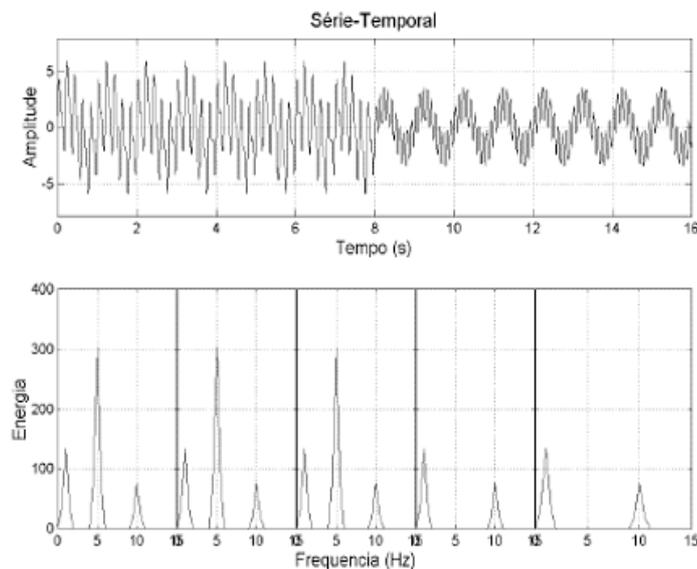


Figura 4 – Transformada de Fourier aplicada em cada segmento da série temporal da Figura (2) (inferior).

Percebe-se agora a presença das diferentes freqüências de cada argumento definido na função seno, em suas respectivas localizações temporais. Ou seja, nos primeiros oito segundos aparecem as três

freqüências, enquanto nos oito últimos segundos a freqüência de 5 Hz não está presente.

A TJF de Gabor contribuiu substancialmente para o estudo e análise de ST não-estacionárias. Entretanto, ainda permaneceram dois problemas a serem resolvidos:

1. A janela temporal permanece fixa, não possibilitando modificar o tamanho da mesma após o início da aplicação da TJF na série analisada.
2. As funções trigonométricas possuem energia infinita, ou seja, as mesmas são limitadas entre $-\infty$ e $+\infty$.

Em 1982, o geofísico Francês chamado *Jean Morlet* percebeu os dois problemas ao aplicar a TJF em séries temporais de ecos geofísicos na busca de poços petrolíferos. Imediatamente vislumbrou a necessidade de desenvolver uma suposta função matemática base ψ (psi), que possuísse energia finita, ou seja, um início e um fim, e que essa função fosse totalmente capaz de dilatar ou comprimir, eliminando o problema da janela temporal da TJF ser fixa.

Em seguida Alex Grossman juntou-se a *Morlet* na busca destas funções matemáticas base que possuíssem características de pequenas ondas. Desta forma construíram as bases matemáticas da teoria em ondaletas, com ênfase nas representações de sinais por “*blocos construtivos*” os quais *Grossman* e *Morlet* chamaram de “*Ondelette*” referindo-se às “pequenas ondas”; daí teve origem o termo em inglês “*Wavelets*”, assim como o termo “Ondaletas” em português.

Reunindo propriedades de translação e escalamento (Equações (4) e (5), respectivamente) em um único protótipo de uma função ondaleta geradora $\psi_{j,k}(t)$, obtêm-se as chamadas funções ondaletas filhas, pela mudança de j e k . Dessa forma, o termo ondaleta refere-se basicamente a um conjunto de funções com forma de pequenas ondas geradas por translações $\psi(t) \rightarrow \psi(t+1)$ e escalamentos $\psi(t) \rightarrow \psi(2t)$ e de uma Função

Ondaleta base simples (FO) $\psi_0(t)$, a chamada ondaleta-mãe. Sendo assim, a Equação (3) mostra a função ondaleta geradora em função de ψ_0 .

$$\psi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{j}} \psi_0\left(\frac{t-k}{j}\right); j \neq 0 \quad (3)$$

onde “ j ” é denominado fator de escalamento (contração j aumenta e dilatação j diminui) e “ k ” é o fator de translação. As ondaletas filhas são geradas da seguinte forma:

$$\psi_k(t) = \psi_0(t-k) \rightarrow \text{Translação} \quad (4)$$

$$\psi_j(t) = \frac{1}{\sqrt{j}} \psi_0\left(\frac{t}{j}\right) \rightarrow \text{Escalamento}; j \neq 0 \quad (5)$$

As Equações (4) e (5) mostram as ondaletas filhas geradas pela translação e pela mudança de escala, respectivamente. O fator $\frac{1}{\sqrt{j}}$ é chamado de constante de normalização da energia de cada ondaleta filha de forma a manter a mesma energia da ondaleta principal, ou seja, a soma das energias de todas as ondaletas filhas, oriundas das Equações (4) e (5), resulta na energia total da transformada.

A análise em ondaletas é feita pela aplicação sucessiva da transformada em ondaletas a diversos valores de k e j , o que representa a decomposição do sinal original da ST em diversas componentes localizadas no tempo e em frequência (período) de acordo com os parâmetros de translação e de escala.

De certa forma, cada tipo de ondaleta-mãe possui uma melhor ou pior localização nos domínios da frequência e/ou do tempo; desta maneira torna-se necessário a escolha de uma ondaleta base conveniente, de acordo com o sinal estudado e os objetivos almejados.

Neste trabalho a atenção será restrita apenas à aplicação da ondaleta base de “*Morlet*”, a qual possui uma ótima representação de sinais não-estacionários obtidos na natureza, tais como os que serão analisados posteriormente, como exemplos de aplicação. No entanto, serão

apresentados outros tipos de ondaletas-mãe, bem como a necessidade de utilização de cada uma delas.

Em vista da TO ser uma transformada linear e ser definida como a convolução do sinal analisado $f(t)$ e uma ondaleta-mãe, a seção seguinte irá mostrar a relação entre a convolução e a TF, como também a linearidade de ambas. O que exige de mostrar que a TO também é uma transformação linear, pois a operação entre dois fatores lineares tem como resultado um fator também linear.

A propriedade mais importante que relaciona a convolução e a TF será demonstrada. Através desta propriedade, a análise em ondaletas, que envolve a integral do produto das funções convoluídas, torna-se basicamente um produto das TFs. Esta, por sua vez, é obtida de maneira simples através de algoritmos adequados.

5. A CONVOLUÇÃO

“Toda transformação linear que seja invariante por translação, pode ser escrita sob a forma de uma convolução”.

$$[f(x) \otimes g(x)](t) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt \quad (6)$$

A Equação (6) mostra a convolução contínua unidimensional entre as funções $f(x)$ e $g(x)$ no ponto t (variável de integração). Dessa forma $f(x)$ representa uma série temporal qualquer e $g(x)$ representa um filtro que possui a finalidade de identificar e selecionar o período de cada componente oscilatória presente em $f(x)$.

5.1 A Linearidade da Transformada de Fourier

Considerando duas funções unidimensionais $f(x)$ e $g(x)$ e uma combinação linear $f(x) + cg(x)$, sendo c uma constante qualquer, têm-se:

$$\begin{aligned} \overbrace{f(x) + cg(x)} &= \int_{x=-\infty}^{+\infty} [f(x) + cg(x)] e^{-2\pi i \omega x} dx \Rightarrow \\ &= \int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i \omega x} dx + c \int_{x=-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-2\pi i \omega x} dx = F(\omega) + cG(\omega) \end{aligned} \quad (7)$$

A Equação (7) mostra matematicamente que a transformada de Fourier é uma operação linear, onde o circunflexo representa a TF das funções sobrescritas.

5.2 A Linearidade da Convolução

Considerando as funções $f(x)$, $g(x)$ e uma função fixa $h(x)$ unidimensionais, onde c é uma constante pertencente aos reais, têm-se:

$$\begin{aligned} \{[f(x) + cg(x)] \otimes h(x)\}(t) &= \int_{t=-\infty}^{+\infty} [f(t) + cg(t)] h(x-t) dt = \\ &= \underbrace{\int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t) h(x-t) dt}_I + c \underbrace{\int_{t=-\infty}^{+\infty} g(t) h(x-t) dt}_{II} \end{aligned}$$

onde :

$$I = [f(x) \otimes h(x)](t) \quad (8)$$

e

$$II = c[g(x) \otimes h(x)](t)$$

As Equações (7) e (8) demonstram a linearidade da TF e da convolução, respectivamente. A operação entre ambas resultará em uma transformação também linear e, como mencionado anteriormente, definirá a transformada em ondaletas.

5.3 A Relação Entre a TF e a Convolução

A seguinte propriedade básica relaciona a operação de convolução com a transformada de Fourier para duas funções $f(x)$ e $g(x)$.

$$\overbrace{[f(x) \otimes g(x)](t)} = \int_{x=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt \right] e^{-2\pi i \omega x} dx \quad (9)$$

Fazendo-se $k = x - t$ e pela translação no espaço, têm-se:

$$k = x - t \Rightarrow \frac{dk}{dx} = \frac{dx}{dx} - \frac{dt}{dx} \Rightarrow dk = dx$$

pois k é função de x e t não é função de x , dessa forma, tem-se:

$$\overbrace{[f(x) \otimes g(x)](t)} = \underbrace{\int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i \omega t} dt}_{F(\omega)} \underbrace{\int_{k=-\infty}^{+\infty} g(k) e^{-2\pi i \omega k} dk}_{G(\omega)} \quad (10)$$

Conseqüentemente:

$$\overbrace{[f(x) \otimes g(x)](t)} = F(\omega)G(\omega) \quad (11)$$

Como anteriormente, o circunflexo representa a TF das funções sobrescritas. A Equação (11) mostra que a TF da convolução das funções $f(x)$ e $g(x)$ no ponto t é igual ao produto das TFs das mesmas. A importância da convolução no domínio da frequência consiste no fato que se $f(x)$ tem uma TF definida por $F(\omega)$ e $g(x)$ também possui sua TF definida por $G(\omega)$, então:

$$[f(x) \otimes g(x)](t) \Leftrightarrow F(\omega)G(\omega) \quad (12)$$

O que mostra a importância da convolução já explicada no parágrafo 4.

6. A TRANSFORMADA EM ONDALETAS

A TO, como demonstrado anteriormente, envolve uma operação “linear” que pode ser utilizada na análise de sinais não-estacionários para extrair informações das variações em frequência dos mesmos e para detectar estruturas localizadas no tempo ou espaço. Esta técnica tem sido amplamente utilizada em vários campos científicos já mencionados e na análise de dados climáticos. Para que uma função seja denominada de função ondaleta base (FO), representada por ψ_0 , ela deve satisfazer a duas propriedades distintas, descritas a seguir.

1ª Propriedade: A integral dessa função deve ser zero, ou seja:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0(t) dt = 0 \quad (13)$$

A Equação (13) assegura que a FO assuma uma forma do tipo onda. Essa condição é conhecida como condição de “admissibilidade”. Isto garante a “Transformada Inversa da FO”.

2ª Propriedade: A FO deve possuir energia unitária, isto é:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_0(t)|^2 dt = 1 \quad (14)$$

A Equação (14) assegura que a FO possua suporte compacto, ou seja, um decaimento rápido de amplitude, da literatura inglesa (*e-folding time*), o que garante que a ondaleta-mãe possua uma localização espacial. As propriedades descritas acima são equivalentes a dizer que $\psi_0(t)$ é quadraticamente integrável, ou seja, que a FO pertence ao conjunto das funções de quadrado integrável $L^2(\mathbf{R})$ dentro do conjunto dos números reais \mathbf{R} . As propriedades acima, também sugerem que $\psi_0(t)$ tende a oscilar acima e abaixo do eixo t e que tem sua energia localizada em uma certa região, já que ela é finita. Aliás, nesta classe de funções encontram-se a maior parte

dos sinais reais (de energia finita) de importância na aplicação de processamento de sinais.

Essa característica de energia concentrada em uma região finita é que diferencia a análise de sinais quando se utiliza a TO, da análise utilizando-se a TF (http://pt.wikipedia.org/wiki/Transformada_de_Fourier), já que esta última usa as funções trigonométricas (seno e cosseno) que são periódicas, e assim possuem energia infinita.

De um modo geral, as funções denominadas ondaletas possuem a propriedade básica de dupla localização: em frequência e em tempo, com uma relação intrínseca entre elas, arbitrada pelo princípio da incerteza de Heisenberg. (Ver Figura 5).

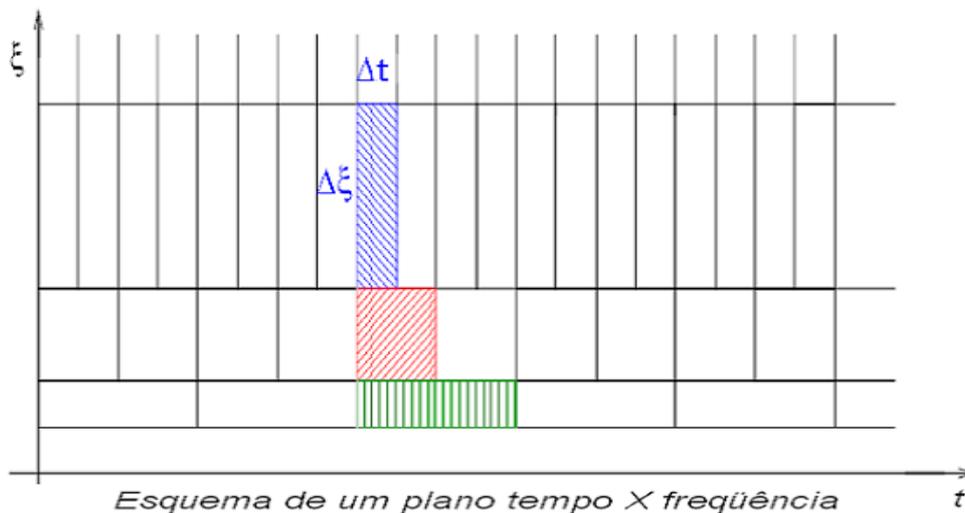


Figura 5 – Relação entre tempo x frequência. Quanto maior a localização temporal, menor será a localização em frequência, e vice-versa. Onde a letra “ ξ ” representa a frequência e t o tempo.

Na análise clássica de Fourier, extrai-se apenas informações no domínio da frequência da função analisada ou de séries temporais obtidas na natureza, enquanto na análise com ondaletas pode-se extrair também informações da função no domínio do tempo, o que é extremamente vantajoso na análise de sinais. Entretanto, as ondaletas não são tão bem localizadas no domínio da frequência como as funções base de Fourier (em uma analogia ao Princípio da Incerteza de Heisenberg, chama-se esta relação entre os domínios da frequência e do tempo de “*Relação de Incerteza*” ou simplesmente de “*Princípio da Incerteza*”).

A localização temporal da FO ocorre devido à mesma ser definida em um intervalo finito, ou seja, quando a escala j na Equação (3) aumenta a função ondaleta dessa escala fica localizada em um intervalo (janela temporal) de comprimento cada vez menor, determinando a localização no tempo do sinal analisado para a respectiva escala j .

A localização em frequência da ondaleta-mãe se deve ao fato da transformada de Fourier da FO poder ser interpretada como um filtro passa-banda, ou seja, a TF da ondaleta base em uma determinada escala j determina a energia para aquele período e conseqüentemente sua referida frequência, ou seja, a energia de uma determina ondaleta filha.

6.1 A Transformada em Ondaletas Forma Contínua

Quando da escolha de uma função ondaleta, tal decisão deve ser tomada em virtude da representatividade da mesma às características do sinal em estudo, ou seja, da série temporal. Caso o interesse esteja no estudo de mudanças de amplitude e fase, uma ondaleta complexa deve ser uma ótima escolha, como é o caso da FO de *Morlet*, que ajuda a capturar o sinal oscilatório dos dados.

A TO de uma série temporal ($f(t)$, $t=1, \dots, N$) com períodos de tempo constantes dt é definida como a convolução de $f(t)$ com o complexo conjugado da ondaleta-mãe escalada e normalizada, conforme Equação (15).

$$W_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{j}} \int_{t=1}^N f(t) \psi_0^* \left(\frac{t-k}{j} \right) dt \quad (15)$$

O valor $W_{j,k}(t)$ representa a similaridade entre a FO e a função ou série analisada $f(t)$, ou seja, quanto maior o valor de $W_{j,k}(t)$, maior será a similaridade entre a função analisada com a função ondaleta-mãe, a qual modula o sinal analisado.

A idéia central da TO consiste em decompor o sinal analisado em diferentes níveis de frequências (resolução); tal processo é conhecido como “Multiresolução”. Esta forma de representação do sinal fornece uma

estrutura hierárquica simples para a interpretação física das informações fornecidas pelo sinal analisado. Em diferentes resoluções, os detalhes de um sinal mostram diferentes estruturas físicas do mesmo.

6.1.1 A Função Ondaleta Base de Morlet

O resultado de todo o trabalho de Morlet e de Grossman originou a primeira função ondaleta base, que posteriormente foi chamada de função ondaleta-mãe de Morlet.

A FO de *Morlet* é definida da seguinte forma:

$$\psi_o(t) = \pi^{\frac{-1}{4}} e^{i\omega_0 t} \underbrace{e^{\frac{-1}{2}t^2}}_I \quad (16)$$

I = Envelope _ Gaussiano

onde ω_0 é uma freqüência adimensional (ou seja, o valor que determina a forma do sinal modulador da FO) e t é cada valor da série temporal. Para a ondaleta base de *Morlet* sugere-se que a freqüência de corte ω_0 seja igual a 6 como escolha ótima (este valor foi utilizado pelos autores para os resultados posteriormente apresentados nesta apostila) e que também é um valor sugerido por (Torrence & Compo, 1998) e (Grinsted *et al.*, 2004).

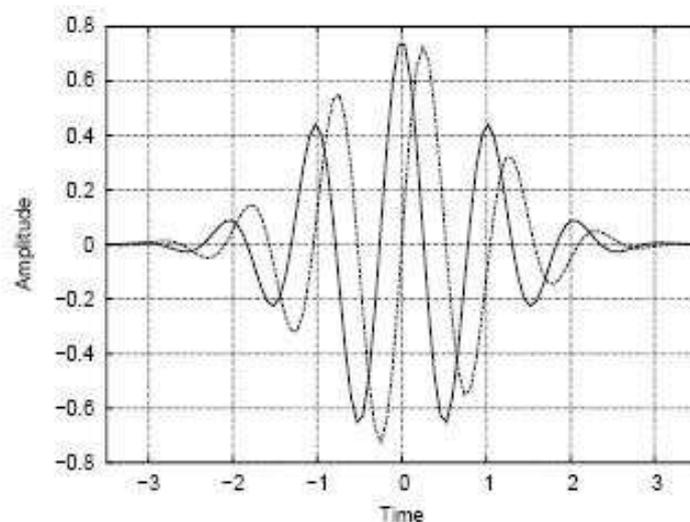


Figura 6 – Parte Real (Linha Sólida) e Parte Imaginária (Linha Pontilhada), parte da ondaleta de *Morlet* com $\omega_0=6$. Figura tirada de (D. Maraun & J. Kurts, 2004).

A Figura (6) mostra o sinal da FO de *Morlet* para $\omega_0=6$, com a parte real em linha sólida e a parte imaginária em linha tracejada. As Figuras 7(a, b) mostram respectivamente, o sinal da função ondaleta base de *Morlet* (linha azul contínua) de largura e amplitude arbitrária e a construção da ondaleta de *Morlet* (linha azul tracejada) a partir de uma onda seno (verde), modulada por um pacote gaussiano (vermelho), conforme (Torrence & Compo, 1998).

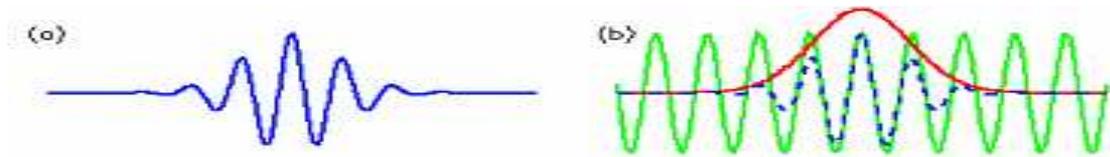
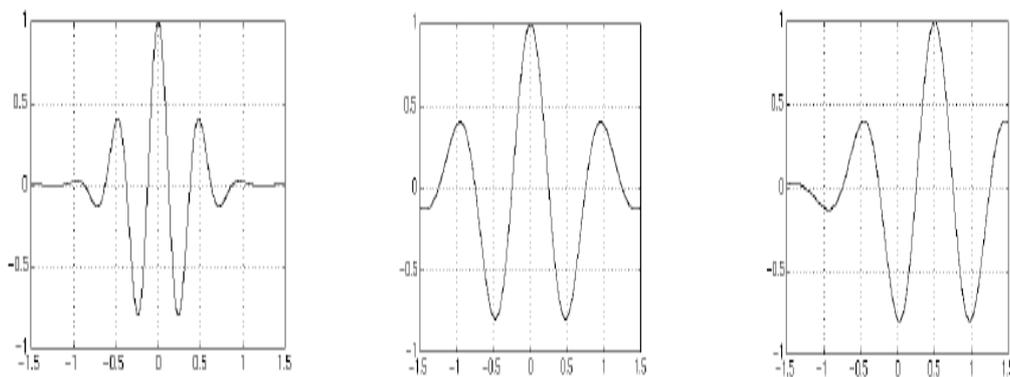


Figura 7 - (a) Sinal da FO de *Morlet* com largura e amplitude arbitrária, **(b)** Construção do sinal (azul tracejado) a partir de uma onda seno (verde), modulada por um pacote gaussiano (vermelho), (Torrence & Compo, 1998).

Na realidade, a utilidade primordial da análise em ondaletas está na sua possibilidade de atuar como função base para a decomposição de outras funções pertencentes ao espaço $L^2(\mathbf{R})$. As funções bases em ondaletas cobrem e descrevem completamente este espaço de uma forma mais sofisticada que as bases senoidais dos métodos de Fourier.



(a) $\psi_o(t) = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{i\omega_0 t} e^{-\frac{1}{2}t^2}$ (b) $\psi_o\left(\frac{t}{j}\right); j = 2.0$ (c) $\psi_o\left(\frac{t-k}{j}\right); j = 2.0, k = 0.5$

Equação 17 - (a) Sinal da ondaleta-mãe de *Morlet* com largura e amplitude arbitrária, **(b)** Dilatação da FO de *Morlet* para $j=2$ **(c)** Translação e dilatação da ondaleta-mãe de *Morlet* para $j=2$ e $k=0.5$. Figuras tiradas da dissertação de Regis Rossi Alves Faria, EPUSP - 1997.

Torna-se importante observar que mesmo dilatando (comprimindo) e transladando, o sinal da FO de *Morlet* não perde sua estrutura característica do sinal original. Isso é altamente requerido, em virtude da modulação do sinal em estudo para todas as freqüências presentes na série, dando origem assim, ao processo de multiresolução.

6.1.2 A Relação entre a TJF e a TO

$$W(j, k) = \frac{1}{\sqrt{j}} \int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \psi_0^* \left(\frac{t-k}{j} \right) dt \quad F(\omega, k) = \frac{1}{2\pi} \int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot g(t-k) \cdot e^{-2\pi i \omega t} dt$$

Equação 18 - (a) Transformada em Ondaletas da função $f(t)$. **Equação 18 - (b)** Transformada Janelada de Fourier da função $f(t)$.

É importante salientar que tanto a TO (Equação 18 (a)) como a TJF (Equação 18 (b)) conduzem a uma análise de $f(t)$ em tempo-freqüência, mas apenas a TO possui o escalamento (dilatação/compressão) e translação, diferentemente da TJF que possui apenas a translação, ou seja, apenas a Equação 18 (a) captura sinais de baixa e alta freqüência com mais detalhes.

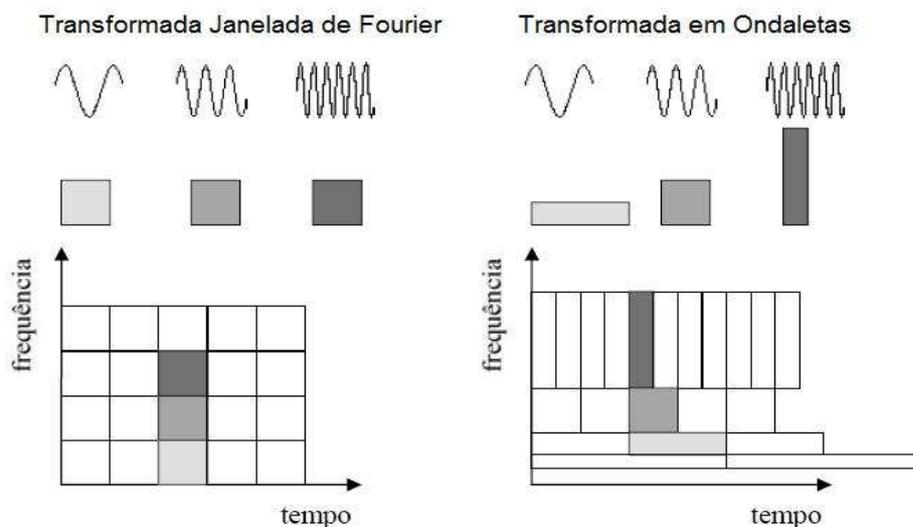


Figura 8 – Relação em tempo-freqüência da TJF (esquerda) e da TO (direita) - observa-se também a forma das janelas de ambas as transformadas para diferentes freqüências no tempo. Figuras tiradas da dissertação de Regis Rossi Alves Faria, EPUSP - 1997.

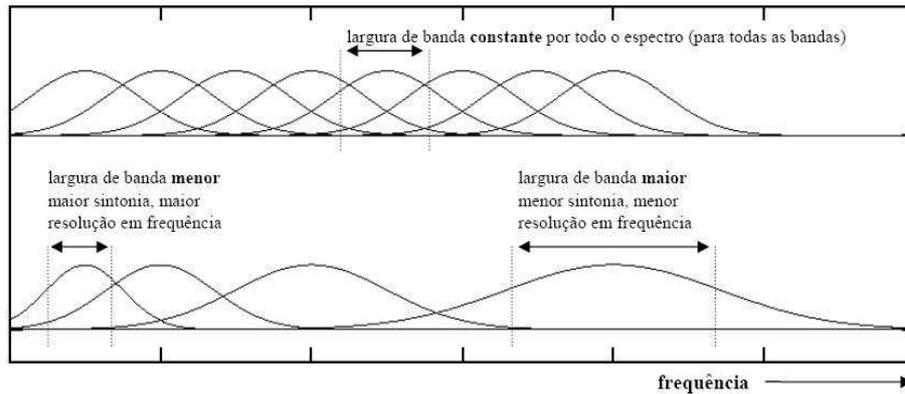


Figura 9 – Cobertura do espectro de freqüências pela TJF (acima) e pela TO (abaixo). Figura tirada da dissertação de Regis Rossi Alves Faria, EPUSP - 1997.

A Figura (9) mostra que para a análise de freqüências mais altas (menor comprimento de onda) a TO emprega janelas mais estreitas e de curta duração, dessa forma permite a visualização do sinal analisado numa escala muito mais detalhada, com uma melhor resolução temporal. Todavia, em freqüências mais baixas (maior comprimento de onda), janelas mais largas e dilatadas localizam o sinal numa escala maior, ou seja, menos detalhada, permitindo visualizar características gerais do mesmo. Para esta faixa de freqüência, a análise apresenta uma resolução na freqüência mais refinada do que a temporal, o que torna mais fácil a localização do sinal em freqüência. Tal processo é arbitrado pelo princípio da incerteza de Heisenberg (como mostra a Figura (5)).

6.2 A Transformada em Ondaletas da Função Base de Morlet

A Transformada em Ondaletas da função base de Morlet é capaz de decompor e descrever a função $f(t)$ no domínio da freqüência, de forma que se pode analisar esta função em diferentes escalas de freqüência e de tempo.

$$W_{j,k} \left(\frac{t-k}{j} \right) = \frac{\pi^{-1/4}}{\sqrt{j}} \int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega_0 \left(\frac{k-t}{j} \right)} e^{-1/2 \left(\frac{t-k}{j} \right)^2} dt \quad (19)$$

A Equação (19) mostra a TO da função $f(t)$, utilizando-se a FO de Morlet (Equação (13)). É importante notar que foi aplicado o complexo conjugado da função $\psi_0(t)$, possibilitando assim a utilização da propriedade que relaciona a convolução e a TF (entre a função $f(t)$ e a exponencial). Em geral, esta propriedade torna-se mais vantajosa em virtude da convolução ser de aplicação muito mais complexa e trabalhosa do que o produto da TF de duas funções (como mostra a Equação (11)). Com isso, usa-se este teorema para determinar as integrais das funções convoluídas, calculando-se o produto das TFs das funções envolvidas.

6.2.1 O Processo de Decomposição em Escalas

Neste sub-tópico será abordada a forma de decomposição das escalas (frequências) possíveis, encontradas em cada sinal analisado de acordo com (Bolzan, 2006), tornando prático e didático entender o processo de multiresolução.

Primeiramente, supõe-se que se tenha uma ST com um comprimento de s pontos, admitindo que seja possível colocá-los como potência de 2, $s = 2^n$. Considerando como exemplo $s=1024$ pontos, portando: $1024 = 2^n \rightarrow n = 10$. Isso implica que se tem basicamente 10 escalas (frequências) que poderão ser “VIZUALIZADAS” pela análise em ondaletas; dessa forma a primeira escala (ou frequências) a ser analisada será $n - 1 = 9 \rightarrow 2^9 = 512$ pontos. Assim, a função ondaleta-mãe será comprimida pela metade e a TO será aplicada na primeira metade da ST. Em seguida, a mesma será transladada para a segunda metade da mesma série temporal. Este processo é mostrado na Figura (10). Para o próximo nível de resolução ter-se-á $n - 2 = 8 \rightarrow 2^8 = 256$ pontos, na realidade isso equivale a dividir pela metade cada uma das séries anteriores (512 pontos).

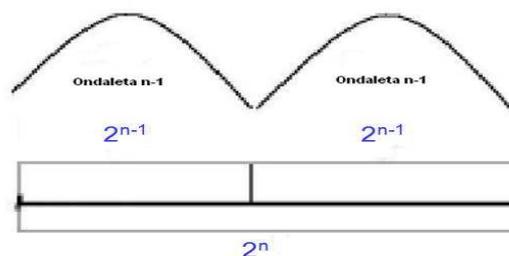


Figura 10 – Primeira análise de multiresolução do sinal em estudo fornecida pela função ondaleta-mãe.

Da mesma forma, a função ondaleta deve também ser comprimida pela metade de modo que se tenha 256 pontos, para em seguida ser transladada em todos os novos segmentos da série temporal, como mostra a Figura (11).

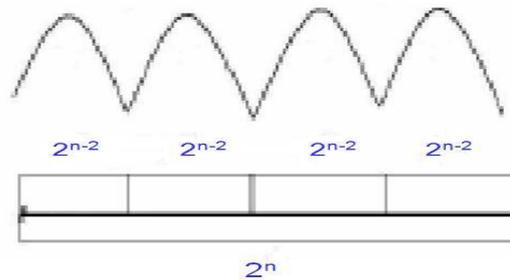


Figura 11 – Segunda análise de multiresolução do sinal em estudo, fornecida pela função ondaleta-mãe em cada novo seguimento da série temporal.

Este processo será repetido até a última escala onde $n = 1 \rightarrow 2$ pontos. Tal procedimento nos fornecerá um diagrama conhecido como “Periodograma” o qual é visualizado na Figura (12) e, como exemplo didático na Figura (13).

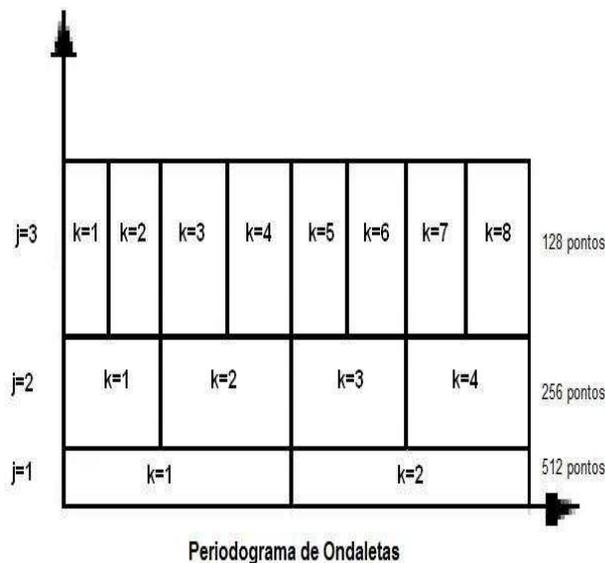


Figura 12 – Resultado da análise de multiresolução em virtude da variação dos parâmetros k e j conhecido como periodograma de ondaletas. Podem-se ver claramente as diferentes escalas da série temporal.

Assim a TO pode ser interpretada como consecutivos filtros passa-banda aplicados às séries temporais onde a escala é linearmente relacionada com o período do filtro (Grinsted *et al.*, 2004).

6.2.2 O Espectro de Energia das Ondaletas

Define-se a energia da ondaleta contínua como $\left|W_n^X(s)\right|^2$. O argumento complexo da Equação (19), ou seja, a exponencial pode ser interpretada como a fase local. Uma importante observação é que devido a TO não ser completamente localizada no tempo, o resultado final possui efeitos de bordas e, por isso, a utilidade de se usar o Cone de Influência (COI), em que os efeitos de borda podem ser desprezados. Este conceito será mostrado com mais detalhes à *posteriori*.

A grande maioria das aplicações de análise em ondaletas não realiza testes de significância estatística, de tal forma que os resultados são amplamente quantitativos. Recentemente, (Torrence & Compo, 1998) propuseram um esquema para determinar os níveis de significância do espectro de ondaletas.

Para a significância estatística de um pico no espectro de ondaletas, pode-se utilizar a ‘hipótese nula’ em que se considera o sinal como ruído vermelho com dado ‘Espectro de Energia de Fundo (P_k)’. Em (Allen & Smith, 1996) encontra-se:

$$P_k = \frac{1 - \alpha^2}{\left|1 - \alpha e^{-2i\pi k}\right|^2} \quad (20)$$

A Equação (20) mostra a forma de se calcular o espectro de energia de fundo do ruído vermelho em função da autocorrelação da série temporal analisada. Assim tem-se: ($k = 0, 1, \dots, N/2$) é o índice das bandas de freqüências de Fourier f_k , com $f_k = k/(ndt)$, sendo que dt é o intervalo de amostragem da série temporal e α é determinado de acordo com a Equação (21). O nível de confiança estatística de 95% no espectro de energia da ondaleta implica em dizer que esta energia tem que ser aproximadamente 3 vezes maior que o seu espectro de fundo de ruído vermelho (P_k) para ser considerada significativa. Assim:

$$\alpha = \frac{(\alpha_1 + \sqrt{\alpha_2})}{2} \quad (21)$$

Nesta equação α_1 e α_2 são as autocorrelações da série temporal com defasagens lag-1 e lag-2, respectivamente.

Como mostra o artigo (Bolzan, 2006) e objetivando mostrar a vantagem do uso da TO em relação à TF, foi aplicada a transformada em ondaletas sobre a série temporal do gráfico inferior da Figura (2), utilizando-se da ondaleta-mãe de *Morlet*.

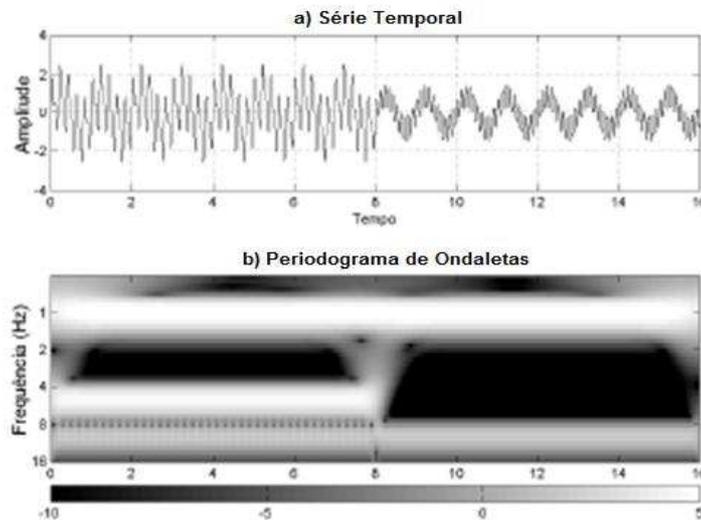


Figura 13 – (a) Série temporal da soma das freqüências (1 Hz, 5 Hz e 10 Hz) durante os oito primeiros segundos e (1 Hz e 10 Hz) durante os oito segundos restantes **(b)** Periodograma de Ondaletas.

A Figura (13b) mostra o periodograma de ondaletas, resultado da aplicação da TO sobre a série temporal da Figura (13a). É interessante notar que se obteve a presença de cada um dos três argumentos da função seno para os oito primeiros segundos de duração da série, ou seja, as freqüências (1, 5 e 10 Hz), que são as faixas de cores mais claras no gráfico. A partir dos oito segundos restantes, nota-se a presença apenas das duas freqüências de 1 Hz e 10 Hz. Conclui-se então, que através do periodograma, podem-se identificar exatamente as freqüências presentes em um determinado sinal. Todavia, este é claramente o mesmo resultado obtido pela TJF na Figura (4). Esta nova representação possui um caráter muito mais vantajoso e utilitário que é a localização no tempo da variabilidade da energia de uma série temporal.

O resultado comentado no parágrafo anterior é de extrema importância para o estudo de qualquer sistema natural em que exista a necessidade de determinar os fenômenos físicos atuantes neste sistema, contribuindo assim para um melhor entendimento do mesmo.

Dessa forma pode-se concluir que **“A TRANSFORMADA EM ONDALETAS REVELA, NO TEMPO, QUE PARTE DO SINAL ANALISADO TRANSPORTA ENERGIA SIGNIFICATIVA E EM QUAIS FREQUÊNCIAS (ESCALAS) ISSO ACONTECE.”**

7. A TRANSFORMADA CRUZADA EM ONDALETAS

A Transformada Cruzada em Ondaletas (TCO) mostra a covariabilidade da energia entre duas STs e revela informações sobre a relação entre as fases das mesmas. Como na análise de Fourier, o espectro de energia das ondaletas pode ser ampliado para analisar duas séries temporais, X_n e Y_n . Neste trabalho será considerada apenas a forma contínua, a menos que seja previamente informado. Assim, é possível definir a TCO destas duas séries como $W^{XY} = W^X W^{Y*}$, onde o asterisco como anteriormente, denota o complexo conjugado; além disso, define-se o espectro de energia cruzado das ondaletas como sendo $|W^{XY}|$. A distribuição teórica do espectro cruzado de energia de fundo das ondaletas de duas séries temporais P_k^X e P_k^Y é definida em (Torrence & Compo, 1998) como:

$$D \left(\frac{|W_n^X(s) W_n^{Y*}(s)|}{\sigma_X \sigma_Y} < p \right) = \frac{Z_\nu(p)}{\nu} \sqrt{P_k^X P_k^Y} \quad (22)$$

A equação acima mostra a distribuição teórica do espectro de energia da transformada cruzada em ondaletas de duas séries temporais de acordo com (Torrence & Compo, 1998). Dessa forma $Z_\nu(p)$ é o nível de confiança associado com a probabilidade p , para uma Função de Densidade de Probabilidade (PDF - *Probability Density Function*), definida pela raiz

quadrada do produto de duas distribuições χ^2 (Qui-quadrado). Por exemplo, o nível de significância estatística de 5% no gráfico da TCO foi calculado usando $Z_2(95\%) = 3,999$.

7.1 O Ângulo de Fase da TCO

O conhecimento da diferença de fase entre duas séries temporais é de grande importância para quantificar e qualificar a relação entre elas em termos da propagação de seus ciclos de oscilação. Para isso, é necessário estimar a média e o intervalo de confiança da diferença de fase entre as séries, o que significa usar a média circular da fase sobre regiões com significância estatística maiores que 5% e, que estejam fora do COI, o que quantificará a relação de fase. Entenda-se que 5% de significância estatística equivalem a 95% de confiança estatística.

A média circular, ou ângulo médio, de um conjunto de ângulos ($a_i, i = 1 \dots n$) é definido de acordo com (Zar, 1999) da seguinte forma:

$$a_m = \arctan2(Y, X) \quad (23)$$

onde os valores de Y e X são determinados de acordo com as Equações (24) para cada valor de a_i .

$$X = \sum_{i=1}^n \cos(a_i)$$

$$Y = \sum_{i=1}^n \text{sen}(a_i)$$

(24)

7.1.1 A Transformada Coerência

A Transformada Coerência (TC) mostra como o próprio nome sugere o grau de coerência entre duas séries temporais, não necessariamente determina a covariabilidade na energia entre elas. A TC ainda pode ser interpretada como a medida da coerência entre duas ondaletas simples em tempo-freqüência. Para o caso de duas séries temporais, esta explica quanto da variabilidade de uma determinada variável pode ser explicada pela variabilidade da outra. De acordo com (Torrence & Webster, 1999), pode-se definir a TC entre duas séries temporais como:

$$R_n^2(s) = \frac{|S(s^{-1}W_n^{XY}(s))|^2}{S\left(s^{-1}|W_n^X(s)|^2\right) \cdot S\left(s^{-1}|W_n^Y(s)|^2\right)} \quad (25)$$

onde S é o operador de suavização. Note-se que a equação (25) é uma expressão semelhante ao tradicional coeficiente de correlação (Pearson). Assim, é útil pensar em ondaleta coerência como sendo também a medida do coeficiente de correlação localizado em tempo-freqüência. A definição de S se dá da seguinte forma:

$$S(W) = S_{escala}(S_{tempo}(W_n(s))) \quad (26)$$

onde S_{escala} denota a suavização ao longo da escala dos eixos das ondaletas e S_{tempo} no tempo. Para a ondaleta-mãe de *Morlet*, um operador de suavização é dado de acordo com (Torrence & Webster, 1999).

$$S_{tempo}(W)/s = \left(W_n(s) \otimes c_1^{\frac{-t^2}{2s^2}} \right) \Big|_s \quad (27)$$

$$S_{escala}(W)/s = (W_n(s) \otimes c_2 \Pi(0,6s)) \Big|_s \quad (28)$$

onde c_1 e c_2 são as constantes de normalização e Π é a função retângulo. O fator 0,6 é determinado empiricamente para a FO de *Morlet* de acordo com (Torrence & Compo, 1998).

O nível de significância estatística da ondaleta coerência foi estimado utilizando-se o método de Monte Carlo em 95% de confiança (para mais detalhes sobre este método, veja (Barbosa, 2007).

Para as aplicações que serão mostradas nesta apostila, utilizou-se a metodologia encontrada em (Grinsted *et al.*, 2004), através de rotinas em Matlab destes autores, com algumas modificações feitas para uma melhor aplicação aos dados aqui analisados. Assim, tornou-se possível a obtenção do espectro de energia das ondaletas (WPS - *Wavelets Power Spectrum*) para a visualização do espectro de energia do sinal em estudo. Esta análise foi feita buscando-se conhecer as relações existentes entre as componentes de diferentes períodos, em função da escala temporal do sinal.

A linha preta contínua em forma de arco no WPS chama-se cone de influência e os períodos fora do mesmo devem ser negligenciados por não possuírem confiança estatística. O contorno em preto no WPS em regiões com índices de energia indica os 95% do nível de confiança, assumindo o ruído vermelho de fundo definido pela variância e o número de pontos da série temporal original.

7.1.2 A Interpretação dos Vetores de Fase

Tanto na TCO, quanto na TC pode-se ver a relação de fase entre as variáveis analisadas, através de vetores que determinam o atraso temporal de resposta de uma série em relação à outra, ou simplesmente, a relação de fase entre ambas. Existem várias possibilidades de representação destes vetores de fase e que podem mostrar perfeitamente interações entre duas grandezas físicas como também a forma de oscilação entre elas. Todavia, estes vetores serão utilizados aqui para quantificar a relação de duas séries temporais a título de ilustração.

Em virtude do que se comentou no parágrafo anterior, uma análise minuciosa pode ser feita em períodos extremamente específicos e para cada ano, o que de certa forma vai depender exclusivamente do estudo que se

quer realizar e dos objetivos empreendidos. Assim, para uma completa interpretação da diferença de fase entre as séries analisadas, deve-se seguir o diagrama da Figura (14) que mostra a forma de orientação dos vetores entre duas séries temporais. Uma observação importante é a de que se deve saber qual série temporal é processada primeiramente, para que seja válido o esquema da Figura (14).

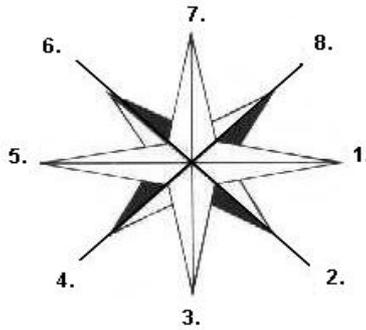


Figura 14 – Relação do ângulo de fase entre duas séries temporais.

O significado dos ângulos de fase relativos aos indicadores numéricos da Figura (14) são o seguinte:

1. Série 1 e Série 2 completamente em fase.
2. Série 2 avançada 45° da Série 1. A Série 1 responde em $1/8$ do período.
3. Série 2 avançada 90° da Série 1. A Série 1 responde em $1/4$ do período.
4. Série 2 avançada 135° da Série 1. A Série 1 responde em $3/8$ do período.
5. Série 1 e Série 2 estão em fase completamente opostas.
6. Série 2 defasada 225° da Série 1, ou a Série 1 avançada 135° da Série 2. A Série 2 responde com $3/8$ do período.
7. Série 2 defasada 90° da Série 1. A Série 2 responde em $1/4$ do período.
8. Série 2 defasada 45° da Série 1. A Série 2 responde em $1/8$ do período.

8. TIPOS DE ONDALETAS MÃE

8.1 Como Escolher Uma Melhor Ondaleta-mãe?

Uma grande dúvida que surge na maioria dos iniciantes em aplicações e análises em ondaletas é justamente a questão da escolha da melhor ondaleta-base para a utilização em seus dados. A resposta para tal pergunta seria a de que não existe uma receita básica a ser seguida, mas de certa forma algumas recomendações podem ser estabelecidas:

1. Quanto à forma, o sinal modulador (exemplo, veja Figura (7b)) da função ondaleta-mãe deve refletir as características do sinal analisado. Para o caso de STs com variações bruscas na frequência, ou em forma de degraus, a ondaleta mais adequada seria a ondaleta-mãe de *Haar* (muito utilizada na análise de sinais de circuitos eletrônicos).
2. Para analisar STs com variações um pouco mais suaves, uma ondaleta complexa como a de *Morlet* permite analisar a fase e o módulo do sinal decomposto. Outra ondaleta-base para este tipo de sinal seria a do Chapéu Mexicano. Note que as características desse tipo de sinal são geralmente encontradas em sistemas naturais, ou sistemas geofísicos.
3. Caso se deseje estudar mudanças de amplitude e de fase, uma ondaleta complexa seria uma ótima escolha; este tipo de ondaleta-base ajuda a capturar o comportamento oscilatório dos dados (exemplo, *Morlet*).
4. Caso exista a necessidade de sintetizar dados e/ou fazer compressão de sinal, uma escolha ideal seriam as ondaletas ortogonais, que representam os sinais de forma mais compacta (exemplo, a ondaleta-mãe de *Malvar*). De fato, quando da necessidade de uma informação quantitativa sobre um processo, este tipo de ondaleta-base torna-se a melhor escolha (Kumar e Foufoula-Georgiou, 1997).

5. Caso se deseje um maior refinamento para os dados no tópico 1. acima, as ondaletas-mãe de *Daubechies* apresentam uma maior capacidade de análise e síntese muito mais efetiva do que as de *Haar*. Isso se deve ao fato de possuírem maior regularidade (suavidade) e aproximarem muito melhor funções (suaves) no espaço das funções quadraticamente integráveis $L^2(\mathbf{R})$.
6. As ondaletas-mãe de *Gabor* também se mostram populares em aplicações de segmentação de imagens.
7. Para uma informação quantitativa sobre um determinado processo, funções-base ortogonais, tornam-se a melhor escolha (Kumar e Foufola-Georgiou, 1997).

De certa forma, e muito provavelmente, essas escolhas estão na realidade associadas a uma maior disponibilidade de *softwares* das funções-base mencionadas acima, principalmente as de *Morlet*, *Haar* e *Daubechies*.

Dentre outras famílias de ondaletas-base pode-se mencionar a de *Meyer*, utilizada por (Yano *et al.*, 2001b,a), as FO “*packets*” definidas por (Coifman *et al.*, 1992), entre outras. Contudo, na maioria das aplicações em Geofísica e Ciências Atmosféricas, as funções-base mais utilizadas são as de *Morlet*, Chapéu Mexicano, *Daubechies* e *Haar*. No caso da FO de *Haar*, esta pode ser considerada como sendo uma *Daubechies* de ordem 2.

Por fim, regras de construção de funções-base estão sendo propostas por vários pesquisadores de acordo com as restrições impostas por determinados processos e de sua aplicabilidade em determinados tipos de sinais (fenômenos). Dessa forma, pode-se concluir que existe a possibilidade de se gerar (desenvolver) uma infinidade de ondaletas-mãe levando possivelmente a resultados melhores.

9. APLICAÇÕES E RESULTADOS

Em análise, a técnica em ondaletas é essencialmente utilizada de duas formas, ou seja, a primeira como um núcleo de integração para extrair informações sobre processos físicos, a segunda como uma base para a representação ou caracterização destes processos.

As figuras apresentadas para esta seção são parte dos resultados contidos em (Barbosa, 2007), as quais possuem aqui um caráter de visualização de uma aplicação da TO em um sinal geofísico.

As séries temporais utilizadas são dados de satélites das variáveis Temperatura da Superfície do Mar (TSM) e da componente meridional do vento (W). As séries são de médias móveis de 3 dias, filtradas em 20 – 60 dias para o ano de 2001. O propósito da filtragem pode ser visto na dissertação de mestrado do primeiro autor (Barbosa, 2007).

As análises foram realizadas no periodograma cujo eixo x representa a escala temporal em dias, no eixo y são os períodos presentes na série, também em dias, visando conhecer as relações existentes entre as componentes de diferentes períodos (frequências), em função da escala temporal do sinal.

Na Figura (15) os dados utilizados para o cálculo do espectro de ondaletas foram normalizados, tendo assim unidade de variância normalizada, ou seja, $^{\circ}\text{C}^2$. A completa falta de energia (faixa azul - amarelo) em períodos menores do que 20 dias e maiores do que 60 dias (não visualizado na figura) se dá ao fato das séries temporais terem sido filtradas previamente em 20 – 60 dias.

Para o espectro de energia, a linha preta contínua no periodograma chama-se cone de influência e os períodos fora desse cone devem ser negligenciados por não possuírem confiança estatística. O contorno em preto na energia do WPS indica os 5% de significância estatística contra o ruído vermelho. Assume-se que o ruído vermelho de fundo é definido pela variância e o número de pontos da série temporal original.

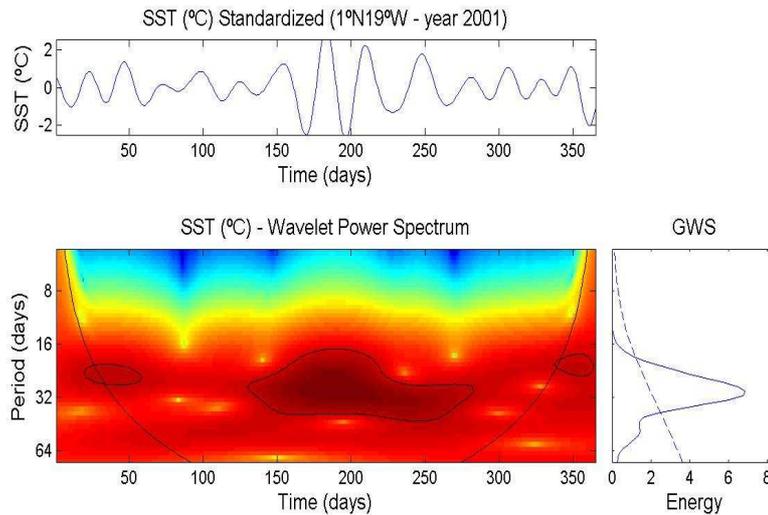


Figura 15 - Série temporal da TSM filtrada e normalizada em 1°N - 19°W (acima, em °C). Espectro de energia (abaixo a esquerda, em °C²) e espectro global das ondaletas (abaixo a direita, em °C²) para o ano de 2001.

A Tabela (1) mostra os respectivos dias dos meses para o ano de 2001 referentes ao eixo x do WPS. Todavia, as figuras 16, 17 e 18 seguem a mesma tabela como referência.

Tabela 1 – Dias corridos do ano e seus respectivos dias dos meses para o ano de 2001.

Dia 50	Dia 100	Dia 150	Dia 200	Dia 250	Dia 300	Dia 350
19/FEV	10/ABR	30/MAI	19/JUL	07/SET	27/OUT	16/DEZ

No ano de 2001 a variável TSM (Figura (15)) mostrou uma grande variabilidade na energia de abril a setembro para um período de 16 a 40 dias. O espectro de potência global de ondaletas (*Global Wavelets Power Spectrum* – GWS) determina o período de maior variabilidade na energia de uma ST. Ainda para a mesma figura o GWS mostra um pico de energia bem intenso em torno dos 32 dias e com valor por volta de 6 para a energia.

Na análise da componente meridional do vento (Figura (16)) para o mesmo ano é notória a grande variabilidade na energia durante quase todo o ano e para períodos de 16 a 50 dias aproximadamente. A mesma figura apresenta pico de energia em torno da escala 6 com período máximo de 32 dias. Dessa forma, a TSM e a componente do vento (W) apresentaram, para o mesmo período de 32 dias, praticamente a mesma variabilidade na energia de acordo com o GWS.

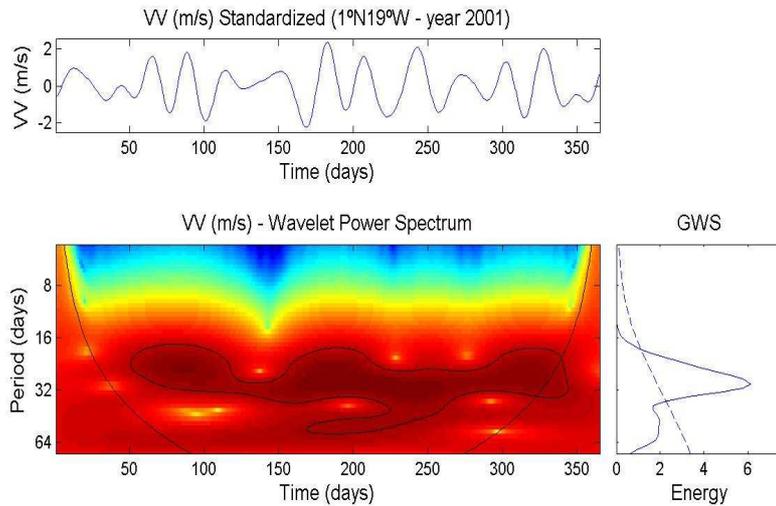


Figura 16 – Mesmo que a Figura (15), mas para a componente meridional do vento (W). Unidade em variância normalizada para o WPS.

De certa forma, as similaridades entre os padrões em alguns períodos bem definidos do ano entre as duas séries analisadas (TSM e W) mostram-se completamente baixas, tornando difícil dizer se seriam ou não uma mera coincidência. Entendem-se como similaridades regiões em comum em tempo-escala entre duas STs visualizadas em seus respectivos WPS. Estas regiões não se encontram dentro da linha dos 5% de significância estatística contra o ruído vermelho, mas possuem energia significativa. Devido a isso, torna-se claro a necessidade da utilização da TCO e da TC, buscando assim, evidenciar estes aspectos e dizer se seriam ou não, realmente válidos estatisticamente ou simplesmente um mero acaso.

Assim, a TCO e a TC tornam possível evidenciar características de acoplamento e regiões espectrais de maior energia em comum e com maior covariabilidade em tempo-escala entre as variáveis analisadas.

Ondaletas: Histórico e Aplicação – Maio 2008

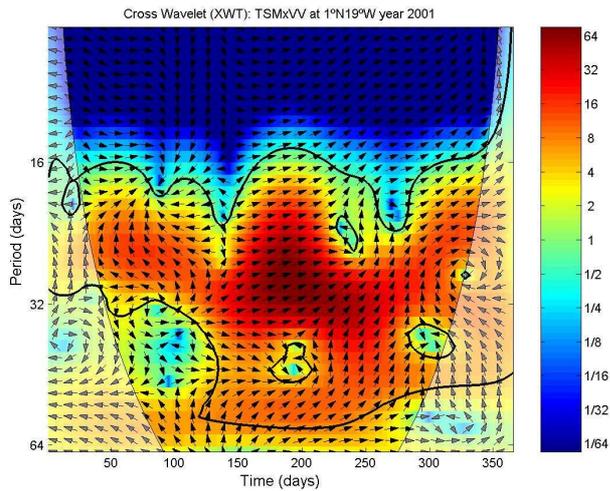


Figura 17 – TCO das séries temporais normalizadas de TSM e W em 1°N -19°W para o ano 2001. Os 5% de significância contra o ruído vermelho é mostrado como um contorno espesso. A fase relativa é mostrada como vetores onde: em fase, apontando para a direita; fora de fase, apontando para a esquerda; W conduzindo a TSM em 90°, apontando para baixo; TSM conduzindo W em 90°, apontando para cima.

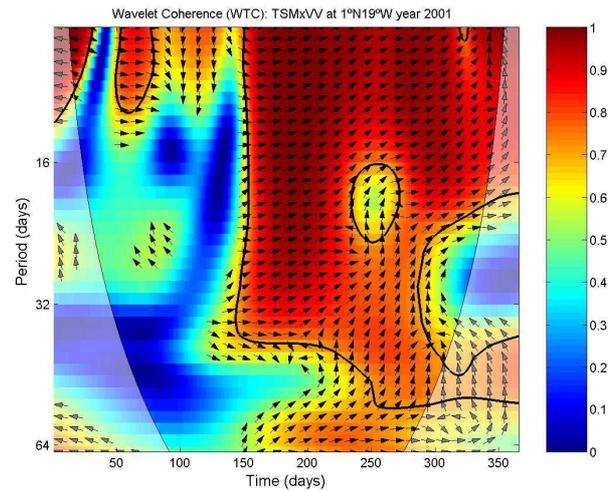


Figura 18 – TC entre as séries temporais normalizadas TSM e W em 1°N -19°W para o ano de 2001. Os 5% de significância contra o ruído vermelho é mostrado como um contorno espesso. A fase relativa é mostrada como vetores onde: em fase, apontando para a direita; fora de fase, apontando para a esquerda; W conduzindo a TSM em 90°, apontando para baixo; TSM conduzindo W em 90°, apontando para cima.

Para o ano de 2001, a Figura (17) mostra a TCO da TSM e a componente meridional do vento, onde se percebe um núcleo de alta variabilidade na energia para um período de 20 - 35 dias aproximadamente, entre os dias Juliano 150 e 250 (30MAI – 07SET). Estas altas energias são confirmadas pela ondaleta coerência destas variáveis, como mostra a Figura (18). Aquela região mostra uma coerência variando de 0.9 a 1, mostrando que quase 100% da variabilidade do vento meridional se deve a mudança da TSM para o ponto 1°N19°W no oceano Atlântico Tropical.

De acordo com a Figura (18), a partir do final de maio, quase toda escala do período apresenta covariabilidade entre as duas variáveis. A TSM encontra-se praticamente em fase com o vento. Entretanto, observa-se a partir do dia Juliano 260 e entre os períodos de 25 - 50 dias, que existe a mudança no sentido dos vetores de fase das variáveis em análise. Torna-se importante observar que o vento está defasado 90° da TSM e o mesmo responde com $\frac{1}{4}$ do período à variabilidade da temperatura da superfície do mar.

10. CONCLUSÕES

A análise em ondaletas tem se tornado uma ferramenta cada vez mais útil e significativa para a interpretação de fenômenos naturais os mais diversos, em diferentes áreas de estudo. Dessa forma, a transformada em ondaletas constitui uma base matemática robusta que encoraja as atividades de pesquisas científicas que visam à análise de sinais geofísicos e eletrônicos intrínsecos aos vários sistemas físicos.

Atualmente, a utilização desta técnica é bastante acessível devido ao grande número de rotinas disponíveis em várias linguagens de programação, por exemplo, IDL, Matlab e Fortran. Isto pode ser encontrado em várias páginas em sítios (como os mencionados nesta apostila), além de trabalhos publicados utilizando-se a metodologia de análise de sinais abordada neste trabalho.

Espera-se ter conseguido, de uma forma completa e didática, mostrar os caminhos traçados por alguns pesquisadores para a melhora da interpretação e processamento de sinais, o que viabiliza o desenvolvimento científico e tecnológico. Espera-se motivar os leitores para a aplicação desta técnica em suas empreitadas científicas, pois a mesma possibilita a análise e interpretação física dos mais diversos fenômenos naturais, como os descritos aqui como aplicação.

Para a parte de aplicação em TO, foi mostrado que é possível determinar de forma simples e bastante rápida a covariabilidade na energia entre duas grandezas físicas, evidenciando as características quantitativas de cada uma delas. Isso mostra que a técnica em ondaletas é uma forma robusta para processamento de sinais não-estacionários, onde a transformada de Fourier mostrou debilidades.

11. APÊNDICE

ALGUNS ENDEREÇOS ÚTEIS NA INTERNET SOBRE ONDALETAS

INFORMAÇÕES:

1. <http://www.wavelet.org>
2. <http://www.uni-stuttgart.de/iag/>
3. <http://www.cosy.sbg.ac.at/~uhl/wav.html>
4. <http://www.amara.com/current/wavelet.html> (Para Iniciantes)
5. <http://www.ecs.syr.edu/faculty/lewalle/tutor/tutor.html> (Para Iniciantes)

SOFTWARES:

1. <http://paos.colorado.edu/research/wavelets/software.html>
(Torrence & Compo, 1998)
2. <http://www.pol.ac.uk/home/research/waveletcoherence/>
(Grinsted *et al.*, 2004)
3. <http://www.amara.com/current/wavesoft.html>
(Inclui vários endereços para baixar softwares para ondaletas)

Uma forma muito prática de se encontrar páginas relacionadas ao assunto (Ondaletas) é utilizando-se de sítios de buscas como o <http://www.google.com.br>.

12. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem aos integrantes do Laboratório de Topografia e Geodésia da Universidade de São Paulo – LTG/USP, em especial ao professor Dr. Edvaldo Simões pelo valioso apoio e incentivo. Expressamos nossos agradecimentos à estudante de Doutorado da UNESP, Presidente Prudente, Eniuce Menezes de Souza que despertou a idéia de uso da TO e contribuiu em discussões sobre o tema.

13. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Allen, M. R. and L. A. Smith, Monte Carlo SSA, Detecting irregular oscillations in the presence of colored noise, *Journal of Climate*, 9, 3383-3404, 1996.

A. Grinsted, J. C. Moore, and S. Jevrejeva, Application of the cross wavelet transform and wavelet coherence to geophysical time series, *Nonlinear Processes in Geophysics* (2004) 11:561-566.

Barbosa, Augusto C. B., 2007: Estudo da Variabilidade Acoplada Oceano-Atmosfera no Atlântico Tropical [(Dissertação de Mestrado) - Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da Universidade de São Paulo – IAG/USP].

C. Rodrigues Neto, A. Zanandrea, F. M. Ramos, R. R. Rosa, M. J. A. Bolzan e L. D. A. Sá, *Physica A* **295**, 215 (2001).

Coifman, R. R.; Meyer, Y.; Wickerhauser, M. V., **Wavelets and their applications**. Jone and Bartlett, 1992. Cap. Wavelet analysis and signal processing.

Daubechies, I.; Mallat, S.; Willsky, A., Introduction to the special issue on wavelet transforms and multiresolution signal analysis. *IEEE Trans. Inf. Theory*, v. 38, n.2, p. 528-531, 1992.

Daubechies, I., Ten lectures on wavelets. Philadelphia, PA: SIAM, 1992. v.61 of *CBMS-NSF Regional Conference (Series in Applied Mathematics)*, 351 p. D. J. R. Nordemann, *Pesq. Agropec. Brás.* **33**, 1787 (1998).

D. Maraun., and J. Kurths, Cross wavelet analysis: significance testing and pitfalls. *Nonlinear Processes in Geophysics*, **11**, p. 505 – 514, 2004.

E. Butkov, *Física Matemática*, Editora Guanabara Dois S. A., Rio de Janeiro – RJ, 1978, v. 1, p. 156.

Farge, M., Wavelet transforms and their applications to turbulence. *Journal of the Atmospheric Sciences*, Palo Alto, v.24, p.395-457, 1992.

Foufoula-Georgiou, E., and Kumar, P.: Wavelets in Geophysics, *Academic Press*, 373, 1995.

Gabor, D. Theory of communication. *Journal of the Institute of Electrical Engineering*, London, v. 93, p. 429 – 457, 1946.

Gamage, N., and W. Blumen, 1993: Comparative analysis of low-level cold fronts: Wavelets, Fourier, and empirical orthogonal function decompositions. *Mon. Wea. Rev.*, 121, 2867-2878.

Gu, D., and Philander, S.: Secular changes of annual and interannual variability in the Tropics during the past century, *Journal of Climate*, 8, 864-876, 1995.

Kumar, P.; Foufoula-Georgiou, E., Wavelets analysis for geophysical applications. *Reviews of Geophysics*, v. 35, n. 4, p. 385 – 412, 1997.

M. J. A. Bolzan, *Brasilian Journal of Physics*, **35**, 592 (2005).

M. J. A. Bolzan, Transformada em Ondeleta: Uma necessidade, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 28, n. 4, p. 563 – 567, (2006).

Morlet, J., Sampling theory and wave propagation. Springer, 1983.

M. Vertteli e C. Herley, *IEEE Trans. Signal Proc.* **40**, 2207 (1992).

Torrence, C., and G. P. Compo, A practical guide to wavelet analysis, *Bull. Am. Meteorol. Soc.*, 79, 61-78, 1998.

Torrence, C. and Webster, P.: Interdecadal Changes in the ENSO-Monsoon System, *J. Clim.*, 12, 2679 – 2690, 1999.

Weng, H. Y.; Lau, K. M., Wavelet, period-doubling and time frequency localization with application organization of convection over the tropical western Pacific. *Journal of the Atmospheric Sciences*, v. 51, n. 17, p. 2523-2541, 1994.

Yano, J. –I.; Moncrieff, M. W.; Wu, X., Wavelet analysis of simulated tropical convective cloud systems. part ii: Decomposition of convective-scale and mesoscale structure. **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 58, n. 8, p. 868 – 876, 2001a.

Yano, J. –I.; Moncrieff, M. W.; Wu, X.; Yamada, M., Wavelet analysis of simulated tropical convective cloud systems. part i: Basic analysis. **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 58, n. 8, p. 850 – 867, 2001b.

Zar, J. H., *Biostatistical Analysis*, Prentice-Hall, Old Tappan, N. J., 1999.

Finalizado em 06 de Maio de 2008 às 20h23min

(A...)