# FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

Denizar Blitzkow
EPUSP-PTR-LTG (Março 2007)

Os conceitos relacionados com espaços vetoriais, espaços de Hilbert, espaços de Banach, problemas inversos e outros tópicos afins vinculados à análise funcional importam sobremaneira à geodésia. Com efeito, a maioria dos problemas geodésicos se relaciona com três espaços vetoriais distintos: das observações, dos parâmetros e do modelo matemático. Por outro lado, o Problema de Valor de Contorno da Geodésia (PVCG), tanto na teoria de Stokes quanto na de Molodenskii, constitui um problema inverso. Aliás, estes ocorrem extensivamente em várias ciências. Além disso, na solução dos problemas inversos a busca de maior confiabilidade nos resultados conduz às observações superabundantes, o que leva à não satisfação das condições de Hadamard para um problema "bem-posto". O princípio dos mínimos quadrados é então utilizado a título de "regularização", o que implica nas condições de norma mínima, que por sua vez significa estabelecer uma norma a partir de uma métrica. Os satélites artificiais contribuem de forma substancial na solução do PVCG, porém, a obtenção de funcionais sobre a superfície física, ou outra escolhida como referência, em função de condições que ocorrem na órbita dos satélites, leva a situações de instabilidade e não unicidade da solução, o que representa novamente um problema "mal-posto". O mesmo ocorre nos aerolevantamentos, embora neste caso a altura seja bem menor do que nos satélites. O rápido aperfeiçoamento dos computadores eletrônicos foi o responsável pelo surgimento dos estudos sobre os problemas inversos e suas condições de solução visto ter permitido o tratamento de problemas com grandes quantidades de dados. Assim, uma revisão das condições de Hadamard para os problemas "bem-postos" se fez necessária partindo do trabalho pioneiro de Tikhonov. O presente trabalho objetiva uma revisão dos conceitos relacionados a estas colocações.

## 1 - FUNÇÃO E ESPAÇO MÉTRICO

### 1.1. Função

Dados dois conjuntos A e B, uma função f de A em B consiste num subconjunto não vazio $D \subset A$, chamado domínio de f e numa relação que associa a cada elemento $a \in D$ um único elemento $b \in B$, normalmente representado por f(a). O conjunto de todos os elementos b $\in$ B associados a um ou mais elementos a $\in$ D é chamado contradomínio de f e representado por R. Nestas condições a função é indicada por:

$f : D \rightarrow R$

Se o domínio coincidir com o conjunto A e o contradomínio com o conjunto B, indica-se: [FINKBEINER,1978]

$f : A \rightarrow B$

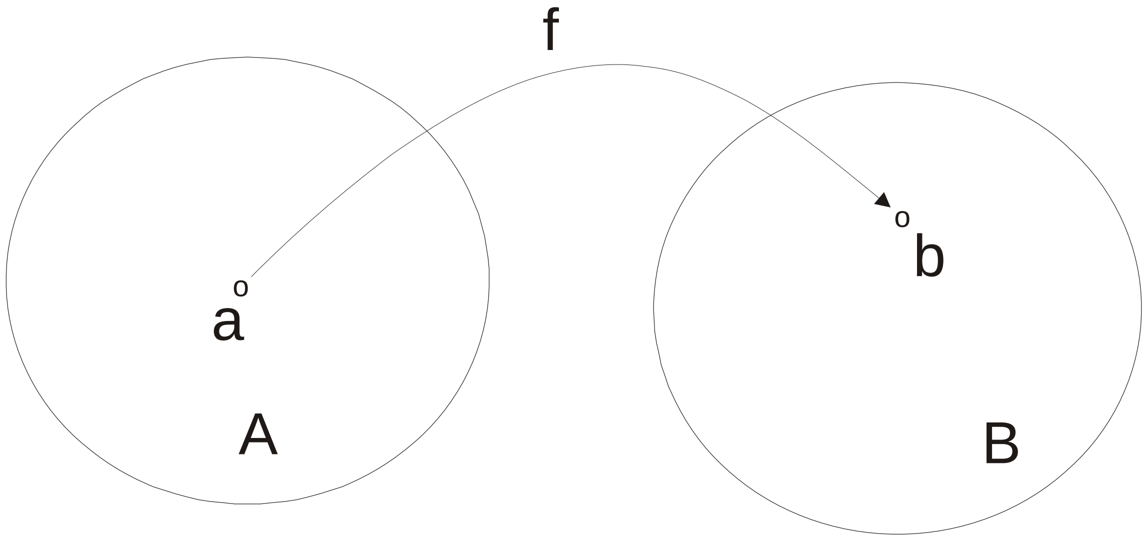


Fig. 1 - Função, domínio e contradomínio.

### 1.2. Espaço métrico

Denomina-se espaço métrico a um par ordenado (X,d), onde X é um conjunto e d é uma métrica (ou função distância) em X, isto é, uma função definida no espaço X x X (o símbolo "x" indica produto escalar) tal que para todo x,y,z $\in$ X tem-se :

a) d tem valor real, finito e positivo.

b) $d(x,y) = 0$ se e somente se $x = y$

c) $d(x,y) = d(y,x)$ (simetria)

d)$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (desigualdade triangular)

Vários exemplos de espaços métricos podem ser citados.

#### 1.2.1 Exemplos

a) O conjunto de todos os números reais R com a métrica definida por:

$D(x,y) = || x - y ||$

Com x,y $\in$ R, e as duas barras indicando o módulo.

b) O conjunto de todos os pares ordenados de números reais, plano Euclidiano $R^2$, com a métrica definida por:

$$d(X,Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

sendo $X = (x_1,y_1)$ e $Y = (x_2,y_2)$

### 1.3. Ponto de acumulação

Seja um subconjunto M de um espaço métrico X. Um elemento $x_o$ de X (pertencente ou não a M ) é chamado ponto de acumulação de M se qualquer vizinhança de $x_o$ contiver pelo menos um ponto, diferente de $x_o$, pertencente a M. O conjunto formado por M e mais os pontos de acumulação é chamado fechamento de M , e indicado por $\overline{M}$ [KREYSZIG,1978].

Um subconjunto M de um espaço métrico X é considerado denso em X se:

$$\overline{M} = X$$

O conjunto X diz-se separável se tiver um subconjunto numerável (finito) que seja denso em X.

### 1.4. Seqüência

Uma seqüência $\{x_n\}$ em um espaço métrico $\{X,d\}$, é chamada de Cauchy (ou fundamental) se para todo $\varepsilon > 0$ exista um $N = N(\varepsilon)$ tal que:

$d(x_m,x_n) < \varepsilon$ para todo $m,n > N$.

Esta condição é denominada critério de Cauchy.

### 1.5. Espaço métrico completo

Um espaço métrico X é chamado completo se toda seqüência de Cauchy converge em X, isto é, tem um limite que é um elemento de X.

## 2 - ESPAÇOS VETORIAIS

### 2.1. Espaço vetorial ou linear

Um espaço vetorial (ou espaço linear) sobre um campo escalar K é um conjunto não vazio de elementos **x**, **y**,..., **z** chamados vetores, juntamente com duas operações algébricas: adição de vetores e multiplicação de vetores por escalares.

A adição de vetores é uma operação que a cada par ordenado (**x**,**y**) associa um vetor **x** + **y** chamado soma, satisfazendo as seguintes propriedades:

a) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ (comutativa)

b) $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$ (associativa)

c) $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ (elemento neutro)

d) $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ (elemento inverso)

A multiplicação de vetores por escalares associa a cada vetor **x** e um escalar $\alpha$ um vetor $\alpha\mathbf{x}$, produto de $\alpha$ por **x** , de tal modo que:

$\alpha (\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\, \mathbf{x}$

$\alpha (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$ (distributiva)

$(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$

$1\mathbf{x} = \mathbf{x}$ (elemento neutro)

$\alpha$, $\beta \in$ K. K é chamado campo escalar associado ao espaço vetorial X. Este é denominado espaço vetorial real se K = R (conjunto dos números reais) e espaço vetorial complexo se K = C (conjunto dos números complexos).

### 2.2. Combinação linear

A combinação linear de vetores $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_3}$ , ..., $\mathbf{x_n}$ pertencentes a um espaço vetorial X é uma soma da forma :

$$\alpha_1\mathbf{x_1} + \alpha_2\mathbf{x_2} + \alpha_3\mathbf{x_3} + ...+ \alpha_r\mathbf{x_r} \qquad (1)$$

A dependência ou independência linear de um conjunto de vetores V = $\{\mathbf{x_1}\ \mathbf{x_2}\ ...\ \mathbf{x_r}\}$ (r > 1) pertencentes a X é estabelecida a partir da equação:

$$\alpha_1\mathbf{x_1} + \alpha_2\mathbf{x_2} + \alpha_3\mathbf{x_3} + ... + \alpha_r\mathbf{x_r} = \mathbf{0} \qquad (2)$$

onde $\alpha_1$ , $\alpha_2$ , ... ,$\alpha_r$ são escalares . Evidentemente a equação é satisfeita para $\alpha_1 = \alpha_2 ... = \alpha_r = 0$. Se este for o único conjunto de r escalares que satisfizer a equação, o conjunto V diz-se linearmente independente. Se a equação (2) for satisfeita para um conjunto qualquer de r escalares, não todos nulos, o conjunto V é linearmente dependente.

Diz-se que um espaço vetorial X tem dimensão finita se existir um inteiro positivo n tal que X contenha um conjunto de n vetores linearmente independentes, enquanto qualquer outro conjunto de n + 1 vetores seja linearmente dependente. Neste caso n é chamado dimensão do espaço vetorial X e representado na forma :

$\dim X = n$

Se dim X = n , um conjunto de n vetores de X $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, ..., \mathbf{e_n}\}$ linearmente independentes é chamado base de X. Neste caso qualquer $\mathbf{x} \in X$ pode ser representado como uma combinação linear dos vetores base :

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e_1} + \alpha_2\mathbf{e_2} + \alpha_3\mathbf{e_3} + ...+ \alpha_n\mathbf{e_n} \qquad (3)$$

### 2.3. Espaço normado

Um espaço vetorial normado é um espaço vetorial X no qual se define uma função de valor real que associa a cada elemento $\mathbf{x} \in X$ um número real indicado por $\| \mathbf{x} \|$ chamado norma de **x** satisfazendo às seguintes propriedades:

a) $\| \mathbf{x} \| \geq 0$ (positividade)

b) $\|\alpha \mathbf{x} \| = |\alpha| \, \| \mathbf{x} \|$ (homogeneidade)

c) $\| \mathbf{x} + \mathbf{y} \| \leq \| \mathbf{x} \| + \| \mathbf{y} \|$ (desigualdade triangular)

d) $\| \mathbf{x} \| = 0$ se e somente se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

Uma norma em X sempre define uma métrica em X dada por:

$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|$

chamada métrica induzida pela norma [KREYSZIG ,1978].

Um espaço vetorial normado completo (na métrica induzida pela norma) é chamado espaço de Banach.

### 2.4. Espaço de produto interno

Um espaço vetorial X no qual seja definido um produto interno (ou produto escalar) de vetores é chamado espaço de produto interno. Alguns autores o denominam pré-espaço de Hilbert [AUBIN, 1979]. O produto interno, representado por $< \mathbf{x} , \mathbf{y} >$, é uma relação que a cada par ordenado $(\mathbf{x} , \mathbf{y})$ de vetores associa um escalar; é portanto uma relação X x X sobre K .

O produto interno satisfaz as seguintes condições:

a) $<\mathbf{x} + \mathbf{y} , \mathbf{z}> = <\mathbf{x} , \mathbf{z}> + <\mathbf{y}, \mathbf{z}>$ (distributividade)

b) $<\alpha\mathbf{x} , \mathbf{y}> = \alpha <\mathbf{x} , \mathbf{y}>$ (homogeneidade)

c) $<\mathbf{x} , \mathbf{y}> = <\mathbf{y}, \mathbf{x}>$ (simetria)

d) $<\mathbf{x} , \mathbf{x} > = 0$

$<\mathbf{x}, \mathbf{x}> = 0$ se e somente se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (positividade)

Como conseqüência destas propriedades torna-se válida a desigualdade de Schwarz:

$$| <\mathbf{x}, \mathbf{y}> | \leq <\mathbf{x}, \mathbf{x}> <\mathbf{y}, \mathbf{y}>$$

ou $$| <\mathbf{x}, \mathbf{y}> | = \| \mathbf{x} \| \| \mathbf{y} \|$$

Uma particularidade importante é a continuidade do produto interno, expressa por:

$$\text{Se: } \mathbf{x}_n \to \mathbf{x}, \mathbf{y}_m \to \mathbf{y} \quad \text{então} \quad <\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_m> \to <\mathbf{x}, \mathbf{y}> \tag{4}$$

Um espaço de produto interno completo é chamado espaço de Hilbert. Conclui-se que um espaço de produto interno é um espaço normado. Pode-se afirmar, por extensão, que um espaço de Hilbert é um espaço de Banach.

## 3 - OPERADORES E FUNCIONAIS

### 3.1. Operador

No conjunto dos números reais R consideram-se funções de valores reais. Essas funções associam de maneira unívoca um elemento do domínio a outro do contradomínio. Em análise funcional consideram-se espaços mais gerais, tais como espaços métricos e espaços normados, bem como relações nestes espaços. Nestas condições uma relação é chamada de maneira mais genérica de operador.

Sejam A e B dois conjuntos. Uma relação que associa de maneira unívoca elementos de A com elementos de B , indicada por:

$$\mathbf{y} = T\mathbf{x} \tag{5}$$

com $\mathbf{x} \in$ A e $\mathbf{y} \in$ B é chamada operador e escreve-se :

$$T : D(T) \to R(T) \tag{6}$$

sendo D(T) o domínio de T e R(T) o contradomínio. Se D (T) = A e R (T) = B, então

$$T : A \to B \tag{7}$$

### 3.2. Operador linear

Um operador T é chamado operador linear desde que:

a) o domínio D(T) e o contradomínio R(T) sejam espaços vetoriais associados com um mesmo campo escalar K.

b) para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D(T)$ e $\alpha \in K$

$$T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T\mathbf{x} + T\mathbf{y} \tag{8}$$

$$T(\alpha\, \mathbf{x}) = \alpha\, T\, \mathbf{x} \tag{9}$$

As igualdades em b) expressam o fato de que um operador linear constitui um isomorfismo de um espaço vetorial (domínio) em outro espaço vetorial (contradomínio), isto é, preserva as duas operações definidas no espaço vetorial.

Um operador é chamado isométrico se preservar a distância, ou seja:

$$d'\,(T\mathbf{x}\,,\, T\mathbf{y}) = d\,(\mathbf{x}\,,\,\mathbf{y}) \tag{10}$$

### 3.3. Operador injetivo

Um operador $T : D\,(T) \to R(T)$ é chamado injetivo se diferentes pontos no domínio têm diferentes imagens, ou seja, para qualquer $\mathbf{x}_1$ , $\mathbf{x}_2 \in D(T)$, $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2 \Rightarrow T\mathbf{x}_1 \neq T\mathbf{x}_2$ . Ou de maneira equivalente: $T\mathbf{x}_1 = T\mathbf{x}_2 \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$.

Nestas condições existe um operador inverso :

$T^{-1} : R(T) \to D(T)$

que associa cada elemento $\mathbf{y} \in R(T)$ um elemento $\mathbf{x} \in D(T)$. [KREYSZIG, 1978]

Seja $T : D(T) \to R(T)$ um operador linear. Então:

a) o inverso $T^{-1} : R(T) \to D(T)$ existe se e somente se

$T\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$

b) se $T^{-1}$ existir será um operador linear.

c) se $\dim D(T) = n < \propto$ e $T^{-1}$ existir, então $\dim R(T) = \dim D(T)$

Sejam X e Y espaços normados e $T : D(T) \to Y$ um operador linear onde $D(T) \subset X$. O operador T é chamado limitado se existir um número real c tal que para todo $\mathbf{x} \in D(T)$

$$\|\, T\, \mathbf{x}\,\| < c\, \|\, \mathbf{x}\,\| \tag{11}$$

### 3.4. Funcional linear

Um funcional linear f é um operador cujo domínio está contido num espaço vetorial X e cujo contradomínio está contido no campo escalar K de X:

$f : D(T) \rightarrow K$

## 4 - PROBLEMAS INVERSOS

Quando os parâmetros que descrevem matematicamente um sistema físico não podem ser determinados a partir de observações diretas, mas somente a partir de observáveis (ver § 5.1) que a êles se relacionam, diz-se tratar-se de um "problema inverso". A (5) expressa matematicamente tal problema com **x** pertencente ao espaço dos parâmetros e **y** ao espaço das observações. Algumas dificuldades são típicas de tais problemas. Por exemplo, os inevitáveis erros nas observações podem resultar ampliados na solução quando se diz que esta não é estável ou que não há dependência contínua das observações. Há casos igualmente em que o problema não tem solução única, quando tem solução. Finalmente pode acontecer uma combinação de tais desqualificações. Tais problemas são tradicionalmente conhecidos como "mal-postos" ou "impropriamente-postos".

### 4.1. Problema "bem-posto"

De acordo com a (5) num caso geral em que **x** e **y** sejam vetores pertencentes a espaços métricos X e Y respectivamente com métricas $\rho_x(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ para $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$ e $\rho_y(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$ para $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in Y$, a solução de um problema quantitativo consiste em determinar **x** a partir do vetor de observações **y**. O problema se diz estável sobre os espaços (X , Y) se, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que a desigualdade $\rho_y(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) \leq \delta$ implique $\rho_x(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \leq \varepsilon$ com $\mathbf{y}_1 = T(\mathbf{x}_1)$ e $\mathbf{y}_2 = T(\mathbf{x}_2)$, $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in X$ e $(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) \in Y$.

Conforme [HADAMARD, 1923] um problema assim colocado é "bem-posto" sobre (**x , y**) se:

a) $\forall\, \mathbf{x} \in X, \exists\, \mathbf{y} \in Y$ (existência da solução)

b) **x** é univocamente determinado a partir de **y** (unicidade)

c) o problema é estável nos espaços (X , Y) (estabilidade da solução)

Durante muito tempo admitiu-se que estas condições eram indispensáveis para a solução matemática de um problema físico. Os problemas que não satisfaziam estas condições eram ditos "mal-postos" ou "impropriamente-postos" e considerados irrelevantes para fins práticos.

É importante salientar que o problema mal-posto se refere a um par de espaços métricos (X , Y). Um problema pode se tornar bem-posto se uma métrica conveniente for estabelecida. [TIKHONOV & ARSENIN , 1977, §3, p. 9]

### 4.2. Solução aproximada

Considere-se um problema representado pela relação.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y} \tag{12}$$

Na situação mais comum não se conhece o valor verdadeiro $\mathbf{y}_V$ do segundo membro, porém, um valor aproximado $\mathbf{y}_\delta$ dentro de uma margem de erro $\delta$, tal que: $\rho_Y(\mathbf{y}_V , \mathbf{y}_\delta) \leq \delta$. Se $\mathbf{y}_\delta$ pertencer a um conjunto AM (imagem de um conjunto M sob o operador A) e M denso, é natural segundo [TIKHONOV & ARSENIN, 1977] se conceber uma solução aproximada para a equação (12) na classe $Q_\delta$ de elementos $\mathbf{x}$ tal que $\rho_Y(\mathbf{y}_V , \mathbf{y}_\delta) \leq \delta$ dada por:

$$\mathbf{x}_\delta = A^{-1}\mathbf{y}_\delta \tag{13}$$

a qual será também solução da equação $A\mathbf{x} = \mathbf{y}_\delta$ desde que o operador $A^{-1}$ seja contínuo sobre AM. É importante ter em mente o nível de erro do segundo membro:

$$\rho_Y(A\mathbf{x}_\delta , \mathbf{y}_V) \leq \rho_Y(A\mathbf{x}_\delta , \mathbf{y}_\delta) + \rho_Y(\mathbf{y}_\delta , \mathbf{y}_V) \tag{14}$$

Há casos, entretanto, em que existe um número considerável de elementos $\mathbf{x}_\delta$ nem todos pertencentes à classe $Q_\delta$. Desta forma nem todos os elementos de $Q_\delta$ podem ser tomados como solução aproximada da equação. Isto caracteriza uma das possíveis situações de um problema mal-posto. Neste caso há necessidade de estabelecer regras para a escolha das possíveis soluções através de informações complementares. Tais informações podem ser quantitativas ou qualitativas. A tentativa de utilizar uma informação complementar de natureza quantitativa leva ao conceito do que é denominado por (TIKHONOV & ARSENIN, 1977) de "quase solução" e cuja idéia original é devida a [IVANOV, 1973].

### 4.3. Quase solução

Um elemento $\mathbf{x} \in M$ o qual, para um dado $\mathbf{y}$, minimiza o funcional $\rho_Y(A\mathbf{x}, \mathbf{y})$ sobre o conjunto M é chamado "quase solução" da equação (2.12):

$$\rho_Y(A\mathbf{x} , \mathbf{y}) = \inf_{\mathbf{x} \in M} \rho_Y(A\mathbf{x} , \mathbf{y}) \qquad \text{(inf = ínfimo)}$$

Se M for um conjunto denso, uma quase solução existe para todo $\mathbf{y} \in Y$.

Há casos, entretanto, em que M não é denso e variações no segundo membro da equação (2.12) podem levar $\mathbf{x}$ para fora do conjunto AM. Neste caso, há necessidade de maiores considerações para obter soluções aproximadas da equação em apreço que sejam estáveis a pequenas variações de $\mathbf{y}$. Isto leva ao conceito de operador regularizador.

### 4.4. Regularização

Um operador $R(\mathbf{y}, \alpha)$ é chamado regularizador para a equação $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ numa vizinhança de $\mathbf{y}$ ($\mathbf{y} = \mathbf{y}_V$) se:

a) existir um número positivo $\delta_1$ tal que o operador $R(\mathbf{y}, \alpha)$ seja definido para todo $\alpha>0$ e todo $\mathbf{y} \in Y$ para o qual

$\rho_Y(\mathbf{y}, \mathbf{y}_V) \leq \delta \leq \delta_1$

b) existir uma função $\alpha = \alpha(\delta)$ tal que, para todo $\varepsilon > 0$ existir um número $\delta(\varepsilon) \leq \delta_1$ tal que a inclusão $\mathbf{y}_\delta \in Y$ e a desigualdade

$\rho_Y(\mathbf{y}_V, \mathbf{y}_\delta) < \delta(\varepsilon)$

implica

$\rho_X(\mathbf{x}_V, \mathbf{x}_\alpha) < \varepsilon$

onde $x_\alpha = R(\mathbf{y}_\delta, \alpha(\delta))$.

A definição acima não exige que $R(\mathbf{y}_\delta, \alpha)$ seja único . O parâmetro $\delta$ caracteriza o erro do segundo membro. Portanto, é natural definir $\mathbf{x}_\delta$ com a ajuda de um operador $\alpha$ escolhido em coerência com o erro $\delta$. A solução assim obtida é chamada solução regularizada e $\alpha$ parâmetro regularizador. Este método de obter uma solução aproximada é denominado regularização.

A partir das idéias expostas acima a postura relativa aos problemas mal-postos mudou, e hoje se diz que muitos problemas que se relacionam com fenômenos reais têm uma solução estável desde que um adequado método de regularização seja aplicado. Assim, na concepção moderna a equação (12) traduz um problema bem-posto se as seguintes condições forem satisfeitas: [RUMMEL at al. , 1979]

a) a melhor solução aproximada existe para todo $\mathbf{y} \in Y$

b) a melhor solução aproximada é única em Y

c) a melhor solução aproximada depende continuamente de Y

A “melhor solução” precisa ser entendida dentro de um ponto de vista estatístico.

Diferentes estratégias têm sido propostas para os problemas mal-postos a partir de diferentes métodos de regularização [NASHED, 1987] [SABATIER, 1987]. Este último analisa as condições de solução dos problemas mal-postos sob a denominação de "questões bem-postas" para os problemas mal-postos.

## 5 - CÁLCULO DE AJUSTAMENTO

A aplicação do princípio dos mínimos quadrados no ajustamento de observações resulta da necessidade de se encontrar a melhor solução aproximada para os parâmetros vinculados a um determinado modelo matemático. Trata-se de uma técnica extensivamente utilizada em geodésia bem como em outras ciências.

### 5.1. Espaços vetoriais no ajustamento

Vinculado com um problema físico, podemos identificar um certo número de grandezas e alguns conceitos. Primeiramente, existem quantidades que dentro de um certo grau de aproximação são consideradas sem erro e por isso denominadas constantes representadas pelo vetor **c**. Observável é uma quantidade física ou matemática que pode ser observada, ou seja, um número pode ser atribuído à mesma dentro de alguma margem de erro. Observações são os valores atribuídos às componentes $l_i$ (i = 1,2, ..., n) do vetor **l** obtidos através de medições dessa quantidade física realizadas com um instrumento ou sensor. Além disso, existem quantidades para as quais há pouca ou nenhuma informação e que são denominadas parâmetros (incógnitas) normalmente representadas pelas componentes $x_i$ ( i = 1,2, ..., u ) do vetor **x**. Vinculando estas diferentes quantidades entre si há o modelo matemático que pode ser representado pela seguinte equação:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \mathbf{c}) = 0 \tag{15}$$

ou se a constante for englobada no modelo:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{l}) = 0 \tag{16}$$

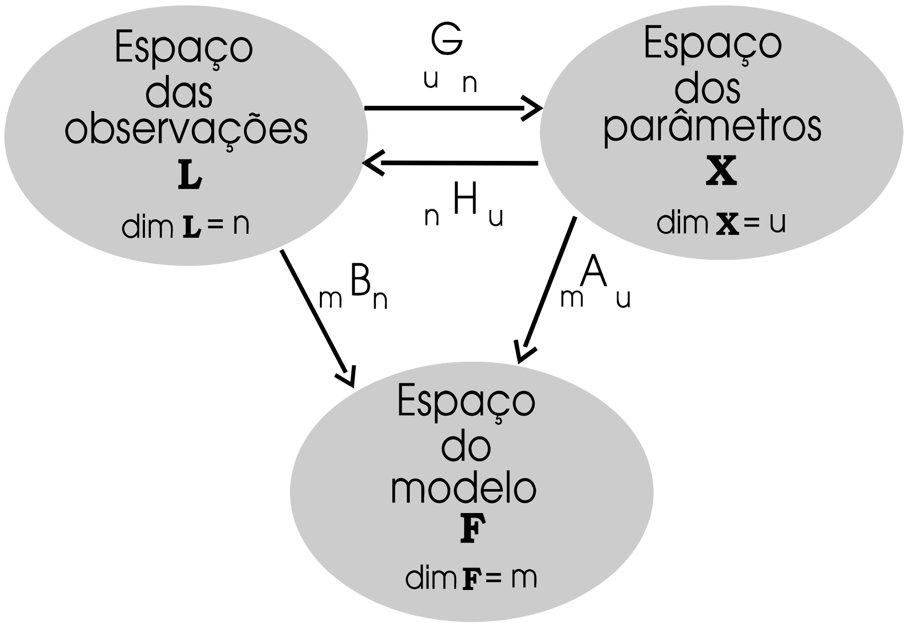


Fig. 2 - Espaços vetoriais relacionados com o cálculo de ajustamento.

Relacionado com o exposto acima podem ser definidos os seguintes espaços vetoriais: das observações L com dim L = n; dos parâmetros X com dim X = u; do modelo matemático F com dim F = m (fig. 2).

Um modelo explícito em **x** é escrito na forma:

$$\mathbf{x} = g(\mathbf{l}) \tag{17}$$

sendo g um operador genérico que transforma L em X. Assim ambos os termos da (17) pertencem ao espaço X e diz-se que o problema é formulado no espaço dos parâmetros. É comum os espaços dos vetores **x** e **l** se relacionarem através de um operador linear, caso em que se pode escrever:

$$\mathbf{x} = G\mathbf{l} + \mathbf{w} \tag{18}$$

G e **w** refletem o aspecto matemático ou físico do experimento e são grandezas conhecidas. Há circunstâncias em que os parâmetros são observados diretamente e a seguinte equação pode ser escrita:

$$g(\mathbf{l}) = 0 \tag{19}$$

ou na forma linear:

$$G\mathbf{l} + \mathbf{w} = 0 \tag{20}$$

A (19) traduz o chamado modelo das equações de condição [GEMAEL, 1994]. É mais freqüente e conveniente expressar as observações em função dos parâmetros:

$$\mathbf{l} = h(\mathbf{x}) \tag{21}$$

ou na forma linear

$$\mathbf{l} = H\mathbf{x} + \mathbf{w} \tag{22}$$

denominado modelo paramétrico [GEMAEL, 1994]. Numa situação mais genérica as observações e os parâmetros se relacionam de maneira implícita através de:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{l}) = 0 \tag{23}$$

ou numa forma linear

$$A\mathbf{x} + B\mathbf{l} + \mathbf{w} = 0 \tag{24}$$

A (24) traduz o que é conhecido como modelo combinado sendo dim A = (m , n), dim $\mathbf{w}$ = m. Observa-se que A transforma X em F e B transforma L em F (Fig. 2). Quando as formas (19), (21), e (.23) são linearizadas pela série de Taylor os vetores conhecidos e a determinar têm significados um pouco diferentes conforme pode ser visto em [VANICEK & KRAKIWSKY, 1986], [GEMAEL, 1994].

### 5.2. Solução do caso paramétrico

Considere-se o modelo linear explícito em $\mathbf{l}$ com o termo $\mathbf{w}$ de alguma maneira anulada:

$$\mathbf{l} = H\mathbf{x} \tag{25}$$

Se o inverso do operador H, $H^{-1}$, existir e for contínuo a equação tem solução única. A condição comum no cálculo de ajustamento é que a busca da melhor solução leva a realizar observações superabundantes (n >> u). Um sistema de equações nestas condições é impossível, ou seja, não tem solução. Escolhendo-se u equações entre as n existentes pode-se encontrar uma solução, mas esta não irá satisfazer as demais n-u equações. Portanto, trata-se de um problema mal-posto no sentido de Hadamard, não satisfazendo a condição a) (§ 2.4-1). Uma reformulação do problema é possível e consiste em acrescentar um vetor $\mathbf{r}$ dos resíduos ao vetor $\mathbf{l}$ das observações, justificável pelo fato das observações estarem eivadas de erro. Este procedimento torna também a igualdade consistente em (25). Assim obtém-se um sistema da forma:

$$\mathbf{l} + \mathbf{r} = H\mathbf{x} \tag{26}$$

onde dim $\mathbf{r}$ = dim $\mathbf{l}$ = n. O sistema passa a ter n + u incógnitas uma vez que o vetor $\mathbf{r}$ é desconhecido. Nestas condições há infinitas soluções que satisfazem a (26) e, portanto, a condição de unicidade deixa de ser satifeita conforme postulado por Hadamard. Porém, no conceito de Tikhonov é possível encontrar a melhor solução aproximada. O cálculo de ajustamento sugere aplicar a condição de Gauss-Legendre, escolhendo-se uma métrica:

$$\rho(H\mathbf{x}, \mathbf{l}) = \rho(\mathbf{r}) \tag{27}$$

a ser minimizada. Ou se L for um espaço Euclidiano afim com o tensor métrico definido pela matriz covariância $C_l$, razões de caráter estatístico levam a minimizar a função de variação:

$$\Phi = \mathbf{r}^T C_r^{-1}\, \mathbf{r} = (H\mathbf{x} - \mathbf{l})^T C_l^{-1}\, (H\mathbf{x} - \mathbf{l}) \tag{28}$$

Com $C_r = C_l$. Na literatura se diz "minimizar a soma dos quadrados dos resíduos ponderados" [ GEMAEL, 1994]. Isto conduz a um sistema de equações normais da forma:

$$H^T C_l^{-1} H \mathbf{x} = H^T C_l^{-1} \mathbf{l} \qquad (29)$$

que constitui um sistema possível e determinado. Conclui-se que o método dos mínimos quadrados é um método de regularização no sentido de Tikhonov. Admite-se evidentemente que o operador $H^T C_l^{-1} H$ em (29) seja contínuo e, portanto, a solução estável.

## Referências Bibliográficas

Aubin J.P. (1979). Applied functional analysis. John Wiley & Sons, New York.

Finkbeiner D.T. (1978). Introduction to matrices and linear transformations. W.H. Freeman, San Francisco.

Gemael C. (1976). Aplicações do cálculo matricial em geodésia. 2ª. parte: Ajustamento de Observações. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. Universidade Federal do Paraná. Curitiba.

Gemael C. (1994). Introdução ao Ajustamento de Observações – Aplicações Geodésicas. Editora da Universidade Federal do Paraná. Curitiba.

HADAMARD J. (1923). **Lectures on the Cauchy problem in linear partial differential equation**. Yale University Press. New Haven.

Ivanov V.K. (1963). On ill-posed problems. Matematicheskiy Sbornic, 61(2).

Kreyszig E. (1978). Introductory Functional Analysis with Applications. John Wiley & Sons. New York.

Nashed M.Z. (1987). A new approach to classification and regularization of ill-posed operator equations. In: Inverse and ill-posed problems. Editors: H.W.Engl, C.W. Groetsh. Academic Press, New York.

RUMMEL R. , SCHWARZ K. P. , GERSTL M. (1979). Least squares collocation and regularization. **Bulletin Géodésique**, (53) pp. 343-361.

Sabatier P.C. (1987). A few geometrical features of inverse and ill-posed problems. In: Inverse and ill-posed problems. Editors: H.W.Engl, C.W. Groetsh. Academic Press, New York.

Tikhonov A.N. & Arsenin V.Y. (1977). Solutions of ill-posed problems. John Wiley & Sons. New York.

Vaníček P. & Krakiwsky E. (1982). Geodesy – The Concepts. North-Holland. Amsterdam.