

Sistemas altimétricos e determinação do geóide

Prof. Dr. Denizar Blitzkow

EPUSP – PTR - LTG

Geodésia Física

PTR-5797

2004

SUMÁRIO

1. Introdução

2. Fundamentos de Geodésia Física

2.1 Campo de Gravidade

2.2 Terra normal e Campo Anômalo

2.3 Funções Harmônicas Esféricas

3. O Problema de Valor de Contorno – Molodenskii e Stokes

3.1 O PCVG e a Teoria do Potencial

3.2 Dificuldade na Realização prática do PCVG

3.3 Concepção Clássica do PCVG

4. Gravimetria

4.1 Introdução

4.2 O Gravímetro e suas Instabilidades

4.3 Redes Gravimétricas de Referência

4.4 Processamento das Observações

4.5 Calibração

4.6 Cálculo das anomalias

5. Métodos de Determinação do Geóide

5.1 As componentes espectrais da altura geoidal

5.2 A integral modificada de Stokes

5.3 A técnica de Fourier

5.3.1 Introdução

5.3.2 Transformada de Fourier

5.3.3 A integral de Stokes e o domínio de frequência

5.4 A regularização da Terra

5.4.1 Método da condensação de Helmert

6. As altitudes Científicas

1. INTRODUÇÃO

A era espacial, iniciada com o lançamento do primeiro satélite artificial em 4 de outubro de 1957, trouxe uma contribuição decisiva no aprimoramento do cálculo dos coeficientes do desenvolvimento em série do geopotencial. Com efeito, a observação do movimento dos satélites artificiais, em órbitas convenientemente escolhidas, permite separar a perturbação devida ao campo gravitacional das demais perturbações. Desta forma, os coeficientes de baixo grau do desenvolvimento em série do geopotencial podem ser melhor determinados do que a partir de dados terrestres, uma vez que os longos comprimentos de onda ficam melhor definidos através dos satélites.

O dia 14 de fevereiro de 1989, marcou o que pode ser chamado de Era GPS, com o lançamento do primeiro satélite do Bloco II do que foi conhecido como NAVSTAR/GPS (Navigation Satellite with Timing and Ranging/Global Positioning System), hoje popularizado com a última sigla. No final da década de 60 a comunidade geodésica internacional assistiu com muito otimismo ao lançamento dos satélites do sistema TRANSIT. Na época se assegurava que o mesmo oferecia uma solução satisfatória para vários problemas geodésicos, em particular, para aqueles relacionados com o posicionamento. Não foi necessário muito tempo para mostrar que o otimismo tinha sido exagerado. O GPS não vem sendo menos promissor. Determinações absolutas podem ser obtidas com precisão de decímetros utilizando o código P. O método diferencial, explorando a correlação entre diferentes estações, diferentes satélites e diferentes instantes, atinge precisões da ordem do centímetro ou melhor através de medidas de fase da portadora. A perspectiva de uso do GPS na obtenção da altitude ortométrica ou normal vem apresentando bons resultados, principalmente nas necessidades da área da engenharia. Esta aplicação, entretanto, exige o conhecimento das alturas geoidais ou quase-geoidais.

A determinação do geóide (quase-geóide) a partir do potencial perturbador está estritamente relacionada ao problema de valor de contorno da geodésia física. O mesmo pode ser solucionado em termos de uma série de funções harmônicas esféricas (modelos do geopotencial), na forma integral (integral de Stokes) ou através de alguma forma de predição (colocação por mínimos quadrados, multipolos sequenciais, redes neurais, etc.). Como as integrais envolvidas no problema são integrais de convolução, o tratamento no espaço de frequências através do uso da transformada de Fourier tem sido proposto mais recentemente e

recebido muita aceitação. Em qualquer das alternativas a separação das componentes de longo e de curto comprimento de onda do campo oferece profunda vantagem, quando não é uma exigência. O conceito de Terra normal (elipsóide de referência) é fundamental no problema.

Observações sobre a superfície terrestre, sobretudo em termos de anomalias da gravidade, têm sido comuns desde o início do último século. Isto foi o resultado do desenvolvimento das observações pendulares, do dispositivo tri-pendular de Vening-Meinesz e, sobretudo, dos gravímetros de mola. A era espacial trouxe novas e encorajadoras perspectivas: observações a bordo de aeronaves ou de veículos espaciais. Isto resultou numa nova dificuldade: reduzir as observações realizadas no espaço para a superfície terrestre. É a conhecida continuação para baixo. Isto resulta num problema de instabilidade da solução e na consideração do conceito de problema “mal-posto”.

A concepção de Stokes para o problema de valor de contorno foi apresentado em 1849. O interesse na época foi puramente teórico uma vez que a ausência quase total de dados gravimétricos sobre a superfície terrestre era vista como um problema cuja solução era utópica. O desenvolvimento dos gravímetros no início do século vislumbrou um certo otimismo. Mas restava ainda a dificuldade de se reduzir as observações conduzidas sobre a superfície física ao geóide. A concepção de Molodenskii para o PVCG contornou de modo engenhoso a necessidade das reduções gravimétricas. A dificuldade é que a solução resulta numa superfície que não é uma superfície de equilíbrio do campo de gravidade. Por outro lado, a modificação da integral de Stokes é uma condição obrigatória na utilização adequada das anomalias da gravidade para o cálculo da componente de curto comprimento de onda da altura geoidal.

Antes da era espacial inexistiam modelos do geopotencial. Desde as observações aos primeiros satélites artificiais, Sputnik I, Explorer 1 e Vanguard 1, até a disponibilidade de anomalias médias da gravidade com uma cobertura global razoável, apareceram valores para os zonais C_{20} e C_{40} , modelos parciais até grau e ordem 22, 30, 70, 180 e modelos mais recentes completos até o grau e ordem 360 (EGM96). No momento vislumbra-se uma nova revolução nos modelos do geopotencial com as famosas missões modernas: CHAMP(**CH**allenging **M**inisatellite **P**ayload), GRACE (**G**ravity **R**ecovery **A**nd **C**limate **E**xperiment) e GOCE (**G**ravity field and steady-state **O**cean **C**irculation **E**xplorer). Cada um destes satélites dispõe de equipamentos específicos para atingir metas especiais, porém, todos são satélites de órbita baixa e, portanto, se prestam ao modelamento do campo gravitacional.

2. FUNDAMENTOS DE GEODÉSIA FÍSICA

2.1 - O CAMPO DE GRAVIDADE

Num adequado sistema de coordenadas cartesianas X, Y, Z , o potencial gravitacional da Terra num ponto $P(x, y, z)$ é expresso por: [MORITZ, 1980]

$$V(P) = V(x, y, z) = K \iiint \frac{\rho(Q)}{l} dV_Q \quad (2.1)$$

dv_Q é um elemento de volume centrado em Q com densidade de massa $\rho(Q)$ e l a distância entre P e Q ; K é a constante universal da gravitação:

$$K = 6,672 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$$

A integral deve ser estendida a toda a Terra o que inclui a parte sólida e líquida. A atmosfera em geral não é incluída na integral e seu efeito considerado separadamente através de uma correção apropriada. Por outro lado, variações temporais em geral são negligenciadas e a menos de algumas correções como a maré e o movimento do polo, a Terra é considerada rígida. Em determinados casos, outras variações temporais tornam-se necessárias e são consideradas através de correções específicas.

O potencial devido à força centrífuga é calculado por:

$$V_c = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) \quad (2.2)$$

sendo ω a velocidade angular. A partir daí define-se o potencial de gravidade como a soma do potencial de atração e do potencial centrífugo:

$$W(x, y, z) = V(x, y, z) + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) \quad (2.3)$$

O potencial V está vinculado ao campo gravitacional e o potencial W ao campo de gravidade. Assim, o vetor gravitacional f é o gradiente de V :

$$f = \text{grad } V = [V_x \quad V_y \quad V_z]^T \quad (2.4)$$

e o vetor gravidade g o gradiente de W :

$$g = \text{grad } W = [W_x \quad W_y \quad W_z]^T \quad (2.5)$$

É importante mencionar o tensor gradiente gravitacional V_{ij} :

$$V_{ij} = \begin{bmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{yx} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{zx} & V_{zy} & V_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

cujos elementos são derivadas parciais de 2ª ordem de V. O tensor gradiente de gravidade é definido de modo semelhante:

$$W_{ij} = \begin{bmatrix} W_{xx} & W_{xy} & W_{xz} \\ W_{yx} & W_{yy} & W_{yz} \\ W_{zx} & W_{zy} & W_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Os traços das matrizes (2.6) e (2.7) representam o Laplaciano de V e de W respectivamente:

$$\nabla^2 V = V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} \quad (2.8)$$

e

$$\nabla^2 W = W_{xx} + W_{yy} + W_{zz} \quad (2.9)$$

Fora das massas atrativas, V satisfaz a equação de Laplace:

$$\nabla^2 V = 0 \quad (2.10)$$

e no interior das massas a equação de Poisson:

$$\nabla^2 V = -4\pi K \rho \quad (2.11)$$

Estas duas últimas equações são extremamente importantes em geodésia. A primeira é utilizada na solução do PVCG no exterior das massas atrativas. A segunda oferece a possibilidade de resolver o PVCG no interior das massas desde que se conheça um modelo de distribuição de densidades. Esta possibilidade ainda é utópica.

No caso do potencial de gravidade as relações que se assemelham às anteriores são:

$$\nabla^2 W = 2 \omega^2 \quad (2.12)$$

no exterior das massas, e

$$\nabla^2 W = -4\pi K \rho + 2 \omega^2 \quad (2.13)$$

no interior.

Pelo fato de V satisfazer a equação (2.10) é denominado FUNÇÃO HARMÔNICA. Isto permite representá-lo em série de funções harmônicas esféricas (§ 2.3).

A norma do vetor gravidade

$$g = \| \mathbf{g} \| \quad (2.14)$$

é de extrema importância pois trata-se da quantidade que mais facilmente pode ser observada, direta ou indiretamente. É denominada simplesmente gravidade. A direção de \mathbf{g} é definida pelo versor \mathbf{n} cujas componentes são:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \cos \phi_A \cos \lambda_A \\ \cos \phi_A \operatorname{sen} \lambda_A \\ \operatorname{sen} \phi_A \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

onde ϕ_A , λ_A são coordenadas astronômicas. Pela (2.14) o sentido de n é para o exterior de tal modo que:

$$\mathbf{g} = -g \mathbf{n} \quad (2.16)$$

A direção de \mathbf{g} coincide com a direção da vertical no ponto numa aproximação esférica, com uma distribuição homogênea de massa e não rotante e é tangente à vertical do ponto no caso da terra real onde as superfícies de nível não são paralelas e a vertical é uma curva reversa.

Ao campo de gravidade estão associadas superfícies ao longo das quais o potencial de gravidade é constante, denominadas superfícies equipotenciais.

$$W(x,y,z) = \text{conste.}$$

Diferenciando o potencial de gravidade W tem-se:

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz \quad (2.17)$$

Em notação vetorial:

$$dW = \operatorname{grad} W \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{g} \cdot d\mathbf{x} \quad (2.18)$$

Se $d\mathbf{x}$ for tomado ao longo da superfície equipotencial $W = \text{conste.}$, então o potencial permanece constante e $dW = 0$, de tal modo que:

$$\mathbf{g} \cdot d\mathbf{x} = 0 \quad (2.19)$$

Quando o produto escalar de dois vetores é nulo, os mesmos são perpendiculares entre si.

Portanto, o vetor gravidade é perpendicular à superfície equipotencial. As linhas que cruzam perpendicularmente as superfícies equipotenciais não são retas, mas levemente curvas. São chamadas linhas de força ou linhas de prumo. O vetor gravidade num ponto é tangente à linha de força naquele ponto.

É de fundamental importância para a geodésia aquela superfície equipotencial que coincide com o nível médio não perturbado dos mares, a superfície geoidal, limitante de um corpo chamado geóide.

2.2 - TERRA NORMAL E CAMPO ANÔMALO

Um elipsóide de revolução, gerado pela rotação de uma elipse em torno do eixo menor, tendo a mesma velocidade angular e a mesma massa da terra real, cujo potencial U_0 sobre a superfície, seja igual ao potencial W_0 sobre a superfície geoidal, com seu centro no centro de massa da terra, é chamado terra normal. Vinculado a ela está o potencial de gravidade normal U e o vetor gravidade normal γ :

$$\gamma = \text{grad } U = [U_x \ U_y \ U_z]^T \quad (2.20)$$

sendo

$$U = U_g + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) \quad (2.21)$$

e U_g o potencial de atração relativo à terra normal. Portanto,

$$\nabla^2 U = 2 \omega^2 \quad (2.22)$$

no exterior da superfície limite.

O potencial U constitui uma boa aproximação do potencial de gravidade W . A diferença num ponto P

$$T(P) = W(P) - U(P) \quad (2.23)$$

é relativamente pequena e se denomina potencial anômalo ou perturbador.

A comparação dos vetores \mathbf{g} e γ no mesmo ponto P define uma grandeza diretamente vinculada ao potencial perturbador chamada vetor distúrbio da gravidade.

$$\delta \mathbf{g}(P) = \mathbf{g}(P) - \gamma(P) \quad (2.24)$$

cuja relação com o potencial perturbador é:

$$\delta \mathbf{g} = \text{grad } T = \left[\frac{\partial T}{\partial x} \ \frac{\partial T}{\partial y} \ \frac{\partial T}{\partial z} \right]^T \quad (2.25)$$

É importante observar a semelhança das relações entre os vetores $\delta \mathbf{g}$, \mathbf{g} e γ e os potenciais perturbador, de gravidade da terra real e de gravidade da terra normal respectivamente.

O resultado da comparação entre o vetor \mathbf{g} em P e $\boldsymbol{\gamma}$ em Q (Fig. 2.2) define uma grandeza de fundamental importância para a geodésia que é o vetor anomalia da gravidade: [GEMAEL, 1978]

$$\Delta\mathbf{g}(P) = \mathbf{g}(P) - \boldsymbol{\gamma}(Q) = [\gamma\eta \ \gamma\xi \ \Delta g]^T \quad (2.26)$$

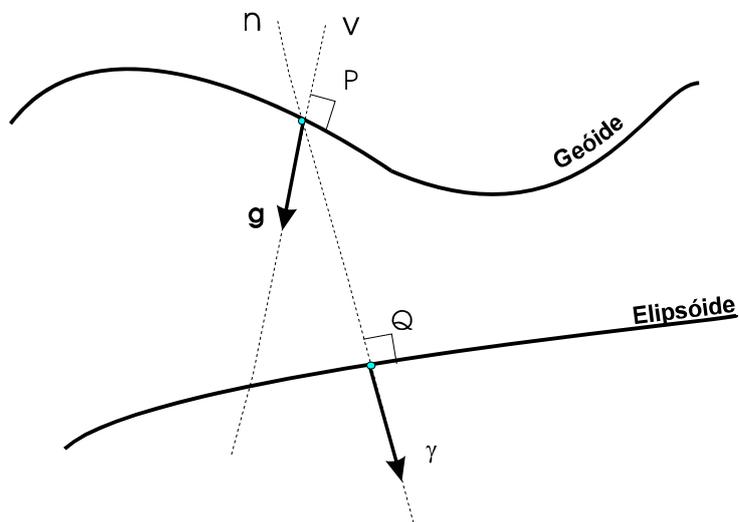


Fig. 2.2 - Vetores \mathbf{g} e $\boldsymbol{\gamma}$.

A terceira componente é simplesmente chamada anomalia da gravidade e é dada por:

$$\Delta g = g(P) - \gamma(Q) \quad (2.27)$$

Considerando a relação natural da continuação para cima:

$$\gamma(P) = \gamma(Q) + \frac{\partial\gamma}{\partial h} N \quad (2.28)$$

e tomando a última componente do vetor em (2.28) tem-se:

$$-\frac{\partial T}{\partial h} = \delta g = g(P) - \gamma(P) = g(P) - \gamma(Q) - \frac{\partial\gamma}{\partial h} N \quad (2.29)$$

onde h refere-se à direção da normal orientada para o exterior e N é a altura geoidal.¹

Substituindo a (2.27) em (2.29):

$$-\frac{\partial T}{\partial h} = \Delta g - \frac{\partial\gamma}{\partial h} N \quad (2.30)$$

Lembrando a fórmula de Bruns:

$$N = \frac{T}{\gamma} \quad (2.31)$$

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial h} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial\gamma}{\partial h} T \quad (2.32)$$

¹Tem sido usual em geodésia usar o mesmo símbolo para a altura geoidal e para o raio da secção primeiro vertical, a despeito da dicotomia.

Esta última equação diferencial é conhecida como "equação fundamental da geodésia física". Ela traduz o fato da anomalia da gravidade ser expressa como uma combinação linear entre o potencial perturbador e sua derivada normal. Considerando T como um parâmetro a ser determinado em função de observações da anomalia da gravidade trata-se de uma condição de contorno sobre a superfície à qual a anomalia da gravidade seja referida. Trata-se também de um problema inverso que em certas condições atuais da geodésia adquire características de "mal posto". A resolução da equação resulta na determinação de T e através da fórmula de Bruns (2.31) calcula-se a altura geoidal N.

A alternativa de considerar a esfera como uma aproximação da forma da terra em lugar de um elipsóide de referência oferece vantagens e resulta em diferenças da ordem do achatamento. Em muitos problemas é uma aproximação aceitável. Quando não, uma posterior correção à solução esférica pode ser acrescentada.

Na esfera valem as relações: [HEIKANEN & MORITZ, 1967, P.87]

$$\gamma = \frac{KM}{r^2}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial h} = \frac{\partial \gamma}{\partial r} = -2 \frac{KM}{r^3}, \quad \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} = -\frac{2}{r}$$

Considerando um valor médio R para o raio da Terra e um valor médio G para a aceleração da gravidade tem-se:

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} = -\frac{2}{R} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \gamma}{\partial h} = -\frac{2G}{R}$$

o que resulta para a (2.29):

$$-\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{R} T = \Delta g \quad (2.33)$$

que constitui a aproximação esférica da equação fundamental da geodésia física (2.30). Se a anomalia da gravidade fosse conhecida de maneira contínua em todo o espaço a equação (2.33) poderia ser resolvida diretamente e fornecer T. Entretanto, a anomalia da gravidade só é conhecida sobre a superfície física, eventualmente reduzida à superfície geoidal, e ainda assim em pontos discretos. Deste modo, a (2.33) é usada somente como uma condição de contorno e como tal constitui o terceiro problema de valor de contorno da teoria do potencial ou problema de Hilbert (§ 3) desde que a superfície de contorno seja escolhida. Uma possibilidade é optar pela superfície geoidal como limite e neste caso cair na teoria de Stokes. Se a opção for a superfície física, a solução é encontrada na teoria moderna de Molodenskii.

2.3 - FUNÇÕES HARMÔNICAS ESFÉRICAS

A equação (2.10) pode ser representada em termos de coordenadas esféricas (r, θ, λ) tomando a seguinte forma:

$$r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = 0 \quad (2.34)$$

Esta equação pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis chegando-se, como solução, a uma série de funções harmônicas esféricas da seguinte forma: [HEISKANEN & MORITZ, 1967, P. 21]

$$V(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (A_{nm} Y_{nm}^c + B_{nm} Y_{nm}^s) \quad (2.35)$$

$$Y_{nm}^c = P_{nm}(\cos \theta) \cos m\lambda$$

$$Y_{nm}^s = P_{nm}(\cos \theta) \sin m\lambda$$

onde $P_{nm}(\cos \theta)$ representam as funções principais da equação associada de Legendre e n, m os autovalores. Y_{nm}^c, Y_{nm}^s podem ser vistas como funções principais da equação de Laplace sobre a superfície de uma esfera; são chamadas funções harmônicas esféricas (de superfície) [VANÍCEK and KRAKIWSKY, 1986]. Usando coeficientes adimensionais e plenamente normalizados a (2.31) toma a seguinte forma:

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{KM}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [\bar{J}_{nm} \bar{Y}_{nm}^c + \bar{K}_{nm} \bar{Y}_{nm}^s] \right\} \quad (2.36)$$

As relações que vinculam os coeficientes A_{nm}, B_{nm} , com unidades de potencial, os coeficientes J_{nm}, K_{nm} , sem unidades, e os coeficientes $\bar{J}_{nm}, \bar{K}_{nm}$, plenamente normalizados são: [VANÍCEK & KRAKIWSKY, 1986]

$$A_{nm} = -\frac{KM}{a} J_{nm}$$

$$B_{nm} = -\frac{KM}{a} K_{nm}$$

$$\bar{J}_{n0} = \frac{1}{\sqrt{(2n+1)}} J_{n0} \quad (m=0)$$

$$\bar{J}_{nm} = \sqrt{\frac{(n-m)!}{2(2n+1)(n-m)!}} J_{nm} \quad (m \neq 0)$$

$$\bar{K}_{nm} = \sqrt{\frac{(n-m)!}{2(2n+1)(n-m)!}} K_{nm}$$

De maneira semelhante, embora mais simples devido à simetria existente, o potencial gravitacional da Terra normal pode ser representado através do seguinte desenvolvimento em série:

$$U_g(r, \theta) = \frac{KM}{r} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^{2n} \bar{J}_{2n}^N \bar{P}_{2n}(\cos \theta) \right] \quad (2.37)$$

onde a forma $2n$ do índice inferior (ou superior) enfatiza tratar-se de um número par e o índice superior N refere-se à terra normal. Os coeficientes zonais da terra normal podem ser calculados a partir de parâmetros definidos para o modelo.

Assumindo que as forças centrífugas relacionadas aos potenciais U e W sejam exatamente idênticas, o potencial perturbador (2.20) satisfaz a equação de Laplace e em consequência pode ser representado através de um desenvolvimento em série:

$$T(r, \theta, \lambda) = -\frac{KM}{r} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n [\bar{J}'_{nm} \bar{Y}_{nm}^c + \bar{K}'_{nm} \bar{Y}_{nm}^s] \right\} \quad (2.38)$$

com

$$\bar{J}'_{nm} = \bar{J}_{nm} - \bar{J}_{nm}^N \quad (2.39a)$$

$$\bar{K}'_{nm} = \bar{K}_{nm} - \bar{K}_{nm}^N \quad (2.39b)$$

A expressão (2.35) é uma consequência da (2.20) admitindo algumas hipóteses simplificadoras [BLITZKOW, 1986]. As expressões (2.39) representam de forma genérica a relação entre os coeficientes vinculados ao potencial perturbador e aos potenciais gravitacionais V e U . Porém, na prática a (2.39b) é desnecessária pois o potencial gravitacional da terra normal não contém termos que dependem de $\sin m\lambda$. Por outro lado, a (2.39a) só irá envolver os termos em que $m = 0$ e n par.

A anomalia da gravidade, como componente do campo anômalo, está relacionada ao potencial perturbador através de: [HEISKANEN and MORITZ, 1967]

$$\Delta g = \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) T_n(\theta, \lambda) \quad (2.40)$$

e à altura geoidal pela (2.31).

Uma forma de representação da altura geoidal em série de funções harmônicas esféricas é: [BLITZKOW, 1986]

$$N(\theta, \lambda) = -R \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n (\bar{J}'_{nm} \bar{Y}_{nm}^c + \bar{K}'_{nm} \bar{Y}_{nm}^s) \quad (2.41)$$

resultado da (2.32) e (2.38) assumindo que $\gamma = KM / R^2$. Os termos de graus zero e um foram considerados nulos.

A representação da anomalia da gravidade em série de funções harmônicas esféricas é:

$$\Delta g(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_{nm} Y_{nm}^c + D_{nm} Y_{nm}^s) \quad (2.42)$$

sendo os coeficientes C_{nm} , D_{nm} grandezas vinculadas à anomalia da gravidade e obtidos através de:

$$C_{no} = \frac{2n+1}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g P_n(\cos\theta) d\sigma \quad (m=0) \quad (2.43a)$$

$$\begin{cases} C_{nm} \\ D_{nm} \end{cases} = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iint \Delta g P_{nm}(\cos\theta) \begin{cases} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{cases} d\sigma \quad (2.43b)$$

Considerando a (2.42) os coeficientes C_{nm} , D_{nm} se relacionam com os coeficientes do potencial perturbador através de:

$$J'_{nm} = -\frac{1}{n-1} \frac{R^2}{KM} C_{nm} \quad (2.44a)$$

$$K'_{nm} = -\frac{1}{n-1} \frac{R^2}{KM} D_{nm} \quad (2.44b)$$

3. PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO – MOLODENSKII E STOKES

3.1 - O PVCG E A TEORIA DO POTENCIAL

A teoria do potencial apresenta três problemas de valor de contorno que assim se enunciam:

a) **Problema de Dirichlet ou primeiro problema de valor de contorno:** conhecendo-se os valores de uma função arbitrária V sobre uma superfície S , determinar essa função V de tal forma que seja harmônica interna ou externamente a S e que sobre a superfície S assuma os valores da função escolhida.

b) **Problema de Neumann ou segundo problema de valor de contorno:** conhecendo-se os valores da derivada normal de uma função V sobre uma superfície S , determinar a função V que seja harmônica interna ou externamente a S .

c) **Problema de Hilbert ou terceiro problema de valor de contorno:** conhecendo-se os valores da combinação linear da função V com a sua derivada normal sobre a superfície S , determinar a função V nas condições anteriores.

Este último problema tem especial importância para a geodésia, pois a determinação do potencial perturbador de certa forma se relaciona a ele. Com efeito, a anomalia da gravidade, que é observada, em geral sobre a superfície física, é uma combinação linear do potencial perturbador com a sua derivada normal (2.29). O problema na geodésia é que a superfície é desconhecida e é ela exatamente uma das questões que precisam ser resolvidas. Dependendo da superfície escolhida, é necessário realizar as observações da anomalia da gravidade sobre ela. No problema de Molodenskii a superfície escolhida é a superfície física. Neste caso define-se a anomalia de altura através de:

$$\zeta = \frac{T}{\gamma} \quad (3.1)$$

sendo γ a gravidade normal. O potencial perturbador é obtido a partir da solução da (2.30). A anomalia da gravidade neste caso é definida por:

$$\Delta g = g_P - \gamma_Q \quad (3.2)$$

A partir de alguma versão da fórmula internacional da gravidade obtém-se γ_0 sobre o elipsóide e, a seguir, o cálculo de γ_Q , sobre o teluróide, pode ser feito através de:

$$\gamma_Q = \gamma_0 \left[1 - 2(1 + f + m - 2f \operatorname{sen}^2 \phi) \frac{H^N}{a} + 3 \left(\frac{H^N}{a} \right)^2 \right] \quad (3.3)$$

sendo 'f' e 'a' respectivamente o achatamento e o semi-eixo maior do elipsóide e $m \equiv \frac{\omega^2 a}{\gamma_{eq}}$ em que γ_{eq} é o valor da gravidade normal sobre o equador.

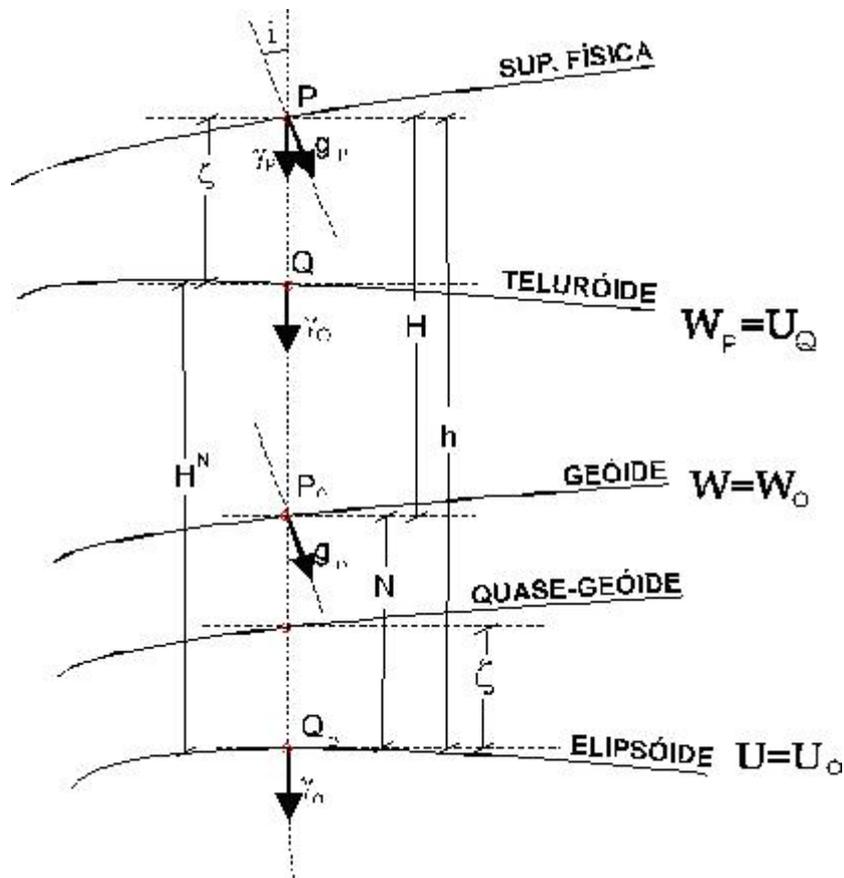


Fig. 3.1 - Quantidades envolvidas no PVCG.

A altura normal H^N é obtida a partir do número geopotencial C:

$$H^N = \frac{C}{\gamma_0} \left[1 + (1 + f + m - 2f \sin^2 \phi) \frac{C}{a\gamma_0} + \left(\frac{C}{a\gamma_0} \right)^2 \right] \quad (3.4)$$

Através da fig. 3.1 tira-se que:

$$h = H^N + \zeta$$

$$h = H + N$$

$$N - \zeta = +H^N - H$$

donde se conclui que a diferença entre a altura geoidal (N) e a anomalia de altura (ζ) é igual à diferença entre a altura normal (H^N) e a altitude ortométrica (H). Por outro lado, se a anomalia de altura for plotada a partir do elipsóide, o resultado será uma superfície denominada por Molodenskii de "quase-geóide" (fig.4.3-1).

A mesma formulação pode ser aplicada ao geóide desde que um adequado processo de regularização (§ 5.4) cuide da remoção das massas externas ao mesmo. Nestas condições, ao invés do teluróide adota-se como superfície aproximada a do elipsóide. Por outro lado, $\beta_1 = \beta_2 = \beta = 0$ e $\partial/\partial n = \partial/\partial h$. Assim, a equação integral para o potencial perturbador reduz-se a:

$$T - \frac{1}{2\pi} \iint_E \left[\frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{1}{l} \right) - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} \frac{1}{l} \right] T dE = \frac{1}{2\pi} \iint_E \frac{\Delta g}{l} dE \quad (3.5)$$

Finalmente, se o elipsóide de referência for substituído por uma esfera a solução do problema é dada pela integral de Stokes, como se verá mais adiante (§ 3.3).

3.2 - Dificuldade na realização prática do PVCG

O PVCG exige uma distribuição contínua de dados sobre a superfície limite. Na prática dispõe-se de dados discretos com uma certa distribuição espacial nem sempre cobrindo a superfície de modo homogêneo. Desta maneira a determinação do potencial anômalo é um problema indeterminado, pois o número de incógnitas, coeficientes de zero a infinito considerando a solução através de uma série (2.34), é maior do que o número de observações. Assim, só é possível admitir uma solução num espaço de dimensão finita, representada por um número finito de coeficientes. Porém neste caso realizam-se observações superabundantes quando o problema passa a ser impossível exigindo para a sua solução um processo de regularização, por exemplo, através do princípio dos mínimos quadrados. [SACERDOTE & SANSONO, 1985]. Além disso, quando um número finito de coeficientes é determinado o fenômeno de "alisamento" afetará os coeficientes de ordem mais elevada.

A tentativa de melhorar a distribuição de dados para a resolução do PVCG levou o geodesta a utilizar observações tomadas a bordo de satélites artificiais ou aeronaves. Como os dados devem estar sobre a superfície de contorno, e.g., a superfície física, é necessário aplicar a continuação analítica para baixo ([HEISKANEN & MORITZ, 1967, eq. 8.87]). A consequência é que os erros inerentes às observações podem resultar ampliados, o que causa uma instabilidade na solução, deixando de satisfazer uma das condições de Hadamard para um problema bem-posto. A razão principal da instabilidade é que um funcional relativamente irregular e detalhado é determinado a partir de funcionais mais suaves obtidos a bordo [RUMMEL et al., 1979]. Para

sanar o problema é necessário estabelecer injunções adicionais que estabilizem a solução no processo de minimização [SACERDOTE & SANZO, 1990].

A "melhor solução aproximada" para o problema indeterminado é mais satisfatória, no caso do PVCG, se o campo de gravidade for suave. Esta condição pode ser facilmente conseguida se o efeito da topografia for subtraído, o que se consegue se um adequado modelo digital do terreno estiver disponível.

A continuação para cima [HEISKANEN & MORITZ, 1967, eq. 6-65] é um processo de alisamento, oposto ao processo da continuação para baixo. Este último, já mencionado, existe quando se tenciona obter valores para os coeficientes do desenvolvimento em série do potencial gravitacional a partir do rastreio de satélites artificiais. Outro exemplo é o uso da gravimetria ou gradiometria em aeronaves. Estes problemas são mal-postos. A diferenciação numérica também oferece uma dificuldade pois envolve igualmente um processo de "anti-alisamento". Isto ocorre quando os dados de altimetria por radar são transformados em anomalias da gravidade. De alguma forma a integral de Stokes deve ser "invertida".

3.3 - CONCEPÇÃO CLÁSSICA DO PVCG

A concepção moderna do PVCG, devida a Molodenskii e tratada no parágrafo 3.1, desfruta da principal vantagem de que o conhecimento da distribuição de densidades no interior das massas é totalmente imprescindível. Porém, a proposta inicial para a solução do problema se deve a G.G. Stokes que propôs a superfície geoidal como contorno, o que significa resolver um problema de contorno interno às massas. A dificuldade é que torna-se indispensável o conhecimento de um modelo, pelo menos aproximado, de distribuição de densidades no interior da crosta na camada entre a superfície física e o geóide.

O PVCG clássico pode ser resolvido em termos do potencial perturbador através da integral de Stokes, que numa aproximação esférica assim se expressa: [HEISKANEN & MORITZ, 1967].

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint \Delta g S(\psi) d\sigma \quad (3.6)$$

que depende da anomalia da gravidade, desta feita, definida sobre a superfície geoidal (Fig.5.1)

$$\Delta g = g(P_o) - \gamma(Q_o) \quad (3.7)$$

e da função de Stokes dada por:

$$S(\psi) = \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\psi}{2}} - 6 \operatorname{sen} \frac{\psi}{2} + 1 - 5 \cos(\psi) - 3 \cos \psi \ln(\operatorname{sen} \frac{\psi}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{\psi}{2}) \quad (3.8)$$

ou

$$S(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi) \quad (3.9)$$

A (3.6) é uma integral de convolução sendo $S(\psi)$ uma função homogênea e isotrópica. A altura geoidal pode então ser obtida através da fórmula de Bruns:

$$N = \frac{T}{\gamma} \quad (3.10)$$

A (3.6) supõe a inexistência de um termo de ordem zero. Para a sua consideração referir-se a [BLITZKOW & SÁ, 1983]. O potencial perturbador deve satisfazer a equação de Laplace (2.10), portanto, deve ser uma função harmônica. Para tanto é necessário remover as massas externas ao geóide através de um adequado processo de regularização.

4. GRAVIMETRIA

4.1 - INTRODUÇÃO

Gravimetria é a denominação dada à técnica que objetiva a medição da aceleração da gravidade de forma absoluta ou relativa. No primeiro caso, pode ser utilizado o movimento pendular ou a queda livre de um corpo. No segundo caso, usam-se os gravímetros de mola ou relativos.

O princípio do movimento pendular foi utilizado para efetuar a primeira determinação absoluta da aceleração da gravidade no observatório de Potsdam, Alemanha. A equação do movimento é a seguinte:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (4.1)$$

sendo T - o período, l - o comprimento e g - a aceleração da gravidade. Medindo-se o comprimento e conduzindo-se uma série de observações do período do movimento durante um certo intervalo de tempo obtém-se a aceleração da gravidade através de um método de ajustamento das observações.

Nos últimos 20 anos desenvolveu-se uma avançada tecnologia objetivando a determinação absoluta através da queda livre de um corpo. Isto permitiu o estabelecimento de pontos absolutos distribuídos por todo o mundo constituindo-se numa referência para os trabalhos de densificação. A equação da queda livre é:

$$s = \frac{1}{2} g t^2 \quad (4.2)$$

sendo s - a altura de queda, t - o tempo de percurso e g - a aceleração da gravidade.

As determinações relativas são realizadas através dos gravímetros de mola. Eles foram desenvolvidos na primeira metade do século passado e trouxeram grandes avanços nos levantamentos em função de sua operacionalidade e precisão. Estes gravímetros baseiam-se numa massa que é mantida suspensa por meio de um sistema elástico e que é atraída mais ou menos conforme a força da gravidade do local. Uma certa posição de equilíbrio definida por construção é restabelecida através de um parafuso de compensação. O deslocamento necessário para atingir aquela posição é traduzido por uma leitura que posteriormente é transformada em valores de aceleração. As unidades usuais da aceleração da gravidade são:

$$1.10^{-2} \text{ m/s}^2 = 1 \text{ cm/s}^2 = 1\text{Gal}$$

$$1 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2 = 1 \text{ } \mu\text{m/s}^2 = 1 \text{ mGal}$$

$$1 \cdot 10^{-8} \text{ m/s}^2 = 1 \text{ nm/s}^2 = 1 \text{ } \mu\text{Gal}$$

Na figura 4.1 está uma apresentação esquemática de um gravímetro de mola.

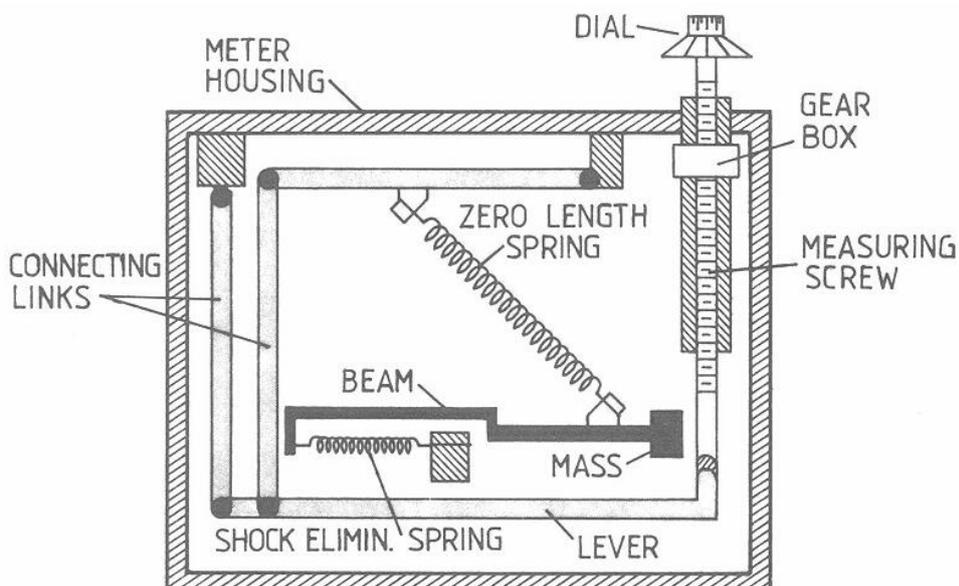


Figura 4.1 – Gravímetro de mola.

4.2 - O GRAVÍMETRO E SUAS INSTABILIDADES

A tecnologia conseguiu nas últimas décadas desenvolver aparelhos altamente sensíveis, mas não havia conseguido aliar a isto uma grande estabilidade. Em consequência, os gravímetros sofrem variações em suas condições elásticas resultando em leituras distintas para um mesmo ponto em diferentes instantes. Além disso, as condições ideais de operação precisam ser constantemente verificadas de modo a tornar os resultados do levantamento homogêneos.

Em relação às condições elásticas, a leitura do gravímetro tende a variar com o tempo mesmo que a aceleração não varie, ou seja, que o aparelho seja mantido no mesmo ponto. É o que se chama de **deriva** instrumental. Na verdade a deriva terá um comportamento diferente se o aparelho estiver estacionado num ponto ou se estiver em movimento. É o que se denomina de deriva estática e deriva dinâmica respectivamente; elas precisam ser controladas de forma específica. Em períodos curtos (máximo de 48 hs para os gravímetros L&R) a variação da deriva é considerada linear. Ela é controlada retornando-se ao ponto de partida. Via de regra, o ponto de partida de um levantamento é uma estação da rede de referência; isto não é estritamente necessário. Quando isto ocorre a deriva dinâmica pode ser controlada realizando a

leitura final em outro ponto da rede de referência, num intervalo de tempo não superior ao máximo estabelecido para o aparelho. Por outro lado, no caso em que, durante um circuito de levantamento, haja necessidade de parar por mais de 1 hora, é recomendável que se faça uma leitura ao parar e outra antes de reiniciar o trabalho para controlar a deriva estática.

A posição do gravímetro para a leitura é controlada através de níveis fixos ao corpo do aparelho; um nível é longitudinal e outro é transversal. É necessário que haja consistência entre a horizontalidade (verticalidade) do sistema ao qual está suspensa a massa interna com a posição das bolhas nos níveis. É o que se denomina de calagem dos níveis. O nível longitudinal controla a **sensibilidade** do fiel de leitura. Assim, quando o referido nível está calado, a rotação do dial em 10 unidades (uma volta completa) implica num deslocamento de 10 unidades inteiras no fiel de leitura no interior do gravímetro. A sensibilidade de 10,5 é ideal, porém, valores da mesma entre 9 e 11 podem ser considerados uma situação aceitável de operação. O ajuste, quando necessário, se processa inclinando o gravímetro para a direita ou esquerda se a sensibilidade estiver alta ou baixa, respectivamente. Isto se faz atuando no parafuso de fixação do nível. A operação seguinte consiste em verificar a exata posição da linha de leitura. Certifica-se a posição mediante a constatação do deslocamento do fiel de leitura quando a bolha do nível longitudinal é deslocada para a esquerda e para a direita. Nos dois casos o fiel deve se deslocar para o mesmo lado e da mesma quantidade (em geral muito pouco: uma divisão ou menos). Finalmente, exige-se a verificação da calagem do nível transversal. Novamente, a constatação do deslocamento do fiel para o mesmo lado e da mesma quantidade, quando a bolha do nível transversal é deslocada para a esquerda e para a direita, assegura a sua calagem. (Maiores detalhes são encontrados no manual do aparelho). A operação do gravímetro em condições ideais implica numa grande estabilidade do sistema e, conseqüentemente, na obtenção de resultados perfeitamente coerentes.

Saliente-se que já se encontra disponível no mercado gravímetro de alta tecnologia, onde a deriva já não ocorre e os níveis são auto-ajustáveis.

4.3 - REDES GRAVIMÉTRICAS DE REFERÊNCIA

Os gravímetros de mola, como foi mencionado, efetuam medições relativas, ou seja, determinam diferenças de aceleração da gravidade. Isto implica na existência de pontos com valores da aceleração da gravidade previamente determinados. Estes podem ser obtidos mediante determinações absolutas ou mesmo através de determinações relativas usando uma metodologia adequada. As determinações absolutas estão se tornando cada vez mais rápidas e

precisas. No entanto, ainda não tem sido viável estabelecer redes de referência com a densidade exigível somente com determinações absolutas. Uma das razões é que os gravímetros absolutos precisam ainda ser operados em ambientes especiais, salas dotadas de climatização com facilidade de energia. Assim, os gravímetros relativos ainda complementam as estações absolutas. [Castro Jr., 2005]

Os trabalhos de densificação têm sido comprometidos em diversos países em função da inexistência de pontos de referência confiáveis. Daí a importância de cuidar com o estabelecimento da rede preliminarmente aos trabalhos de densificação.

As observações nos pontos de uma rede de referência devem ser conduzidas com mais de um gravímetro, se possível, 3 ou 4. Além disso, os pontos devem ser ocupados mais de uma vez sempre que viável. Posteriormente às observações da rede, deve-se proceder a um ajustamento da mesma pelo método dos mínimos quadrados de modo a homogeneizá-la. Para tanto, pode ser usado o método paramétrico ou das equações de condição. É imprescindível prever o método de ajustamento a ser usado para programar as observações da rede de maneira consistente. Em princípio, o método de ajustamento é indiferente. Todos estes cuidados se prestam a oferecer confiabilidade a uma rede gravimétrica de referência.

4.4 - PROCESSAMENTO DAS OBSERVAÇÕES

Os levantamentos de densificação são realizados normalmente com um só gravímetro. Para maior confiabilidade dos resultados são realizadas três leituras em cada estação, anotando-se o instante da leitura média; o intervalo entre elas não deve ultrapassar dois minutos em função da correção da atração luni-solar. O processamento das observações consiste em tirar a média das leituras, efetuar a correção da atração luni-solar, transformar as leituras em valores de aceleração, corrigir as derivas dinâmica e, quando for o caso, estática. Finalmente, com as diferenças de aceleração entre os pontos e com um valor de g conhecido da rede de referência, calculam-se os valores de aceleração nos pontos de densificação. Para a realização destas tarefas utiliza-se comumente um programa de computador.

4.5 - CALIBRAÇÃO

A transformação das leituras em valores de aceleração se dá através de um fator de escala. No caso dos gravímetros LaCoste&Romberg, tendo em vista a não linearidade do sistema, é fornecida pelo fabricante uma tabela de conversão. Em função da variação das

condições elásticas do conjunto de fixação da massa de prova, o fator de escala pode variar com o tempo e, portanto, deve ser verificado periodicamente. Esta verificação precisa ser feita sobre pontos onde se conheça a aceleração da gravidade, preferencialmente em estações absolutas, e num intervalo de leituras que seja compatível com a área de trabalho. Conseguem-se intervalos maiores de leitura observando-se estações com variação grande, dezenas de graus, em latitude. Isto é oneroso e de logística complicada uma vez que, em geral, implica em utilizar vãos comerciais. Uma alternativa muitas vezes utilizada consiste em estabelecer uma linha de calibração com uma variação grande de altitude, alguns milhares de metros. Nem sempre é fácil conseguir disponibilidade para isso e, quando viável, o intervalo de leitura não é muito grande. Entretanto, acaba atendendo uma área razoável de levantamento.

O fator de escala é determinado comparando-se a diferença de aceleração da gravidade fornecida pelo gravímetro, usando-se a tabela disponível, com as diferenças conhecidas nos pontos de calibração. Assim, a diferença de aceleração observada Δg_{obs} será diferente da diferença conhecida nas estações absolutas Δg_{abs} de modo que:

$$\Delta g_{abs} = k \cdot \Delta g_{obs}$$

4.6 - CÁLCULO DAS ANOMALIAS

A anomalia da gravidade definida pela (2.26) é utilizada na aplicação da integral de Stokes. A condição básica é que o valor de g seja definido sobre o geóide e γ sobre o elipsóide. Entretanto, as observações da aceleração da gravidade são conduzidas sobre a superfície física. As chamadas reduções da gravidade se destinam a transformar os valores da superfície física para o geóide.

O valor teórico é calculado pela fórmula internacional da gravidade, específica em cada sistema de referência. Para o WGS-84, usado atualmente nos satélites GPS, a fórmula é a seguinte:

$$\gamma_{84} = 978032,67714 \frac{1 + 0,00193185138639 \text{sen}^2 \phi}{\sqrt{1 - 0,00669437999013 \text{sen}^2 \phi}} \text{mGal} \quad (4.3)$$

Imaginando que o valor de g seja observado a uma distância h da superfície geoidal e que não exista massa fora do geóide, o valor sobre o geóide é obtido simplesmente aplicando a correção 'ar livre', cuja expressão é:

$$C_{al} = (0,3083293357 + 0,0004397732 \cos^2 \phi)H + 7,125 \times 10^{-8} H^2 \quad (4.4)$$

função da latitude e da altitude ortométrica.

Nestas condições têm-se a anomalia ar livre definida por:

$$\Delta g_{al} = g + C_{al} - \gamma \quad (4.5)$$

A correção da atmosfera ao valor de g , necessária em função da fórmula teórica (4.3) incluir a massa da mesma, pode ser realizada usando a seguinte fórmula empírica:

$$\delta g_a = 0,87 e^{-0,116H^{1,047}} \text{ mGal} \quad (4.6)$$

com H em quilômetros.

A correção de Bouguer é normalmente aplicada considerando um platô de extensão infinita e espessura H com densidade de 2,67g/cc na região continental e 1,17g/cc nas estações oceânicas. Com estas hipóteses a correção de Bouguer assume o valor:

$$C_B = 0,1119 H \text{ mGal} \quad (4.7)$$

e a anomalia de Bouguer será obtida pela expressão:

$$\Delta g_B = g + C_{al} + C_B - \gamma \quad (4.8)$$

Acrescenta-se ainda uma de correção da curvatura calculado por: [GREEN AND FAIRHEAD, 1991]

$$C = -1,4639108 \times 10^{-3} H + 3,532715 \times 10^{-7} H^2 - 4,449648 \times 10^{-14} H^3 \text{ mGal} \quad (4.9)$$

com H em metros. Na região oceânica a correção é levemente diferente:

$$C = -6,40427 \times 10^{-4} D - 1,54751 \times 10^{-7} D^2 - 4,06303 \times 10^{-14} D \text{ mGal} \quad (4.10)$$

agora D é a profundidade em metros.

Para completar a anomalia de Bouguer é necessário ainda fazer a correção do terreno (relevo). Isto visa levar em consideração as massas que estão acima do platô de Bouguer bem como a inexistência de massa no interior do platô. De modo que a anomalia completa de Bouguer fica:

$$\Delta g_B = g + C_{al} + C_B + C + C_R - \gamma \quad (4.11)$$

5. MÉTODOS DE DETERMINAÇÃO GEOIDAL

Supondo que a anomalia da gravidade seja conhecida de maneira contínua sobre a superfície geoidal e que não existam massas externas a esta superfície, a determinação da forma dessa superfície e do potencial de gravidade no exterior da mesma representa a concepção de Stokes para o PVCG. A superfície geoidal, contrariamente à superfície física, ao teluróide e ao quase-geóide, tem a vantagem de ser uma superfície de nível e por isso despertar interesses específicos como uma entidade com características físicas. Na prática, entretanto, o que se determina é o quase-geóide uma vez que se utiliza o gradiente ar-livre da Terra normal para reduzir as observações gravimétricas da superfície física a geóide.

5.1 - AS COMPONENTES ESPECTRAIS DA ALTURA GEOIDAL

A expressão (2.37) pode ser decomposta da seguinte forma:

$$N(\theta, \lambda) = -R \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n (\bar{J}'_{nm} \bar{Y}_{nm}^c + \bar{K}'_{nm} \bar{Y}_{nm}^s) - \\ -R \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (\bar{J}'_{nm} \bar{Y}_{nm}^c + \bar{K}'_{nm} \bar{Y}_{nm}^s) \quad (5.1)$$

ou, na forma abreviada:

$$N(\theta, \lambda) = N_1(\theta, \lambda) + \delta N_1(\theta, \lambda) \quad (5.2)$$

O termo N_ℓ traduz a componente de longo comprimento de onda da altura geoidal. O termo δN_ℓ traduz uma componente de comprimento de onda mais curto.

As duas componentes podem ser interpretadas geometricamente da seguinte forma: a componente de longo comprimento de onda representa a separação entre o elipsóide e o esferóide de referência representado pelo modelo do geopotencial; a outra componente é a separação entre o esferóide de referência e o geóide (Fig. 5. 1).

A componente de longo comprimento de onda é facilmente calculada a partir de um modelo do geopotencial, o que significa estender a série até um dado grau e ordem ℓ . Vários modelos do geopotencial de grau e ordem elevados ($\ell = 360$) têm sido publicados; porém,

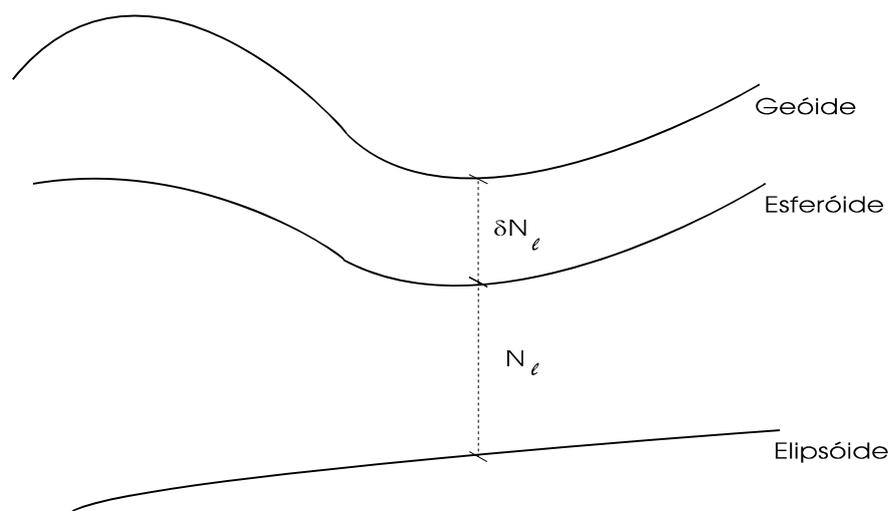


Fig. 5.1 - Componentes da altura geoidal.

recentemente, tem existido a preocupação específica de melhorar a determinação dos coeficientes de grau e ordem mais baixas (ℓ até 36).

A componente de curto comprimento de onda δN_ℓ tem despertado um interesse cada vez maior, em particular quando a intenção é obter um modelo de alta resolução da altura geoidal. O seu cálculo é feito através de uma modificação da integral de Stokes. Um modelo digital do terreno permite ainda remover a influência de uma camada de referência da topografia.

5.2 - A INTEGRAL MODIFICADA DE STOKES

A adoção de um modelo do geopotencial no cálculo da componente de longo comprimento de onda significa a possibilidade de aplicar a integral de Stokes a uma vizinhança restrita do ponto de cálculo, isto é, adotar um valor ψ_0 como distância esférica máxima para estender a integral. Para isso é necessário proceder a uma reformulação da integral original (4.23), que basicamente consiste em modificar a função de Stokes $S(\psi)$. Diversas propostas têm sido apresentadas visando a conveniente modificação da função, e.g., (VANICEK et al., 1987), (BLITZKOW et al., 1991). A integral modificada de Stokes pode ser escrita da seguinte forma:

$$\delta N_1(\theta, \lambda) = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\Psi=0}^{\Psi_0} \int_{\alpha=0}^{360} \Delta g(\alpha, \psi) \delta S_1^m(\psi) \sin \psi d\psi d\alpha \quad (5.3)$$

sendo δS_1^m a função modificada de Stokes obtida mediante uma conveniente reformulação. Sem uma preocupação com a dedução que pode ser encontrada em [VANICEK et al., 1987] e [BLITZKOW et al., 1991], as fórmulas são as seguintes:

$$\delta S_1^m(\psi) = \delta S_1(\psi) - \overline{\delta S_1}(\psi) \quad (5.4)$$

com

$$\delta S_1(\psi) = S(\psi) - S_1(\psi) \quad (5.5)$$

$$S_1(\psi) = \sum_{n=2}^1 \frac{2n+1}{n-1} P_n(\psi) \quad (5.6)$$

$$\overline{\delta S_1}(\psi) = \sum_{i=0}^1 \frac{2i+1}{2} t_i P_i(\cos \psi) \quad (5.7)$$

A integral (5.3) em geral não pode ser avaliada de forma direta uma vez que a anomalia da gravidade não é conhecida de maneira contínua sobre a região de cálculo. Em consequência são adotados procedimentos numéricos avaliando a influência de blocos de tamanhos distintos sobre o ponto de cálculo, cada bloco representado por um valor médio a partir dos valores observados. A utilização de valores discretos faz com que o princípio da ortogonalidade das funções harmônicas esféricas seja perdido. Em consequência o produto $\Delta g \delta S_1^m$ torna-se incompatível e a anomalia da gravidade precisa igualmente ser modificada subtraindo os harmônicos de grau e ordem baixas, compatíveis com o modelo do geopotencial utilizado. Assim deve-se usar Δg_1 calculada da seguinte forma:

$$\Delta g_1 = \Delta g - \sum_{n=0}^1 \sum_{m=0}^n (C_{nm} Y_{nm}^c + D_{nm} Y_{nm}^s) \quad (5.8)$$

resultando na seguinte expressão final:

$$\delta N_1(\theta, \lambda) = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\Psi=0}^{\Psi_0} \Delta g_1(\alpha, \psi) \delta S_1^m(\psi) \sin \psi d\psi d\alpha \quad (5.9)$$

A função modificada de Stokes tende a zero mais rapidamente do que a função normal [BLITZKOW et al., 1991] e isso justifica o limite da integral a uma vizinhança ψ_0 . Há uma justificativa de caráter físico para isso: trata-se do fato de que a influência da região afastada, ou mais rigorosamente, dos longos comprimentos de onda da região afastada, são levados em consideração pelo modelo do geopotencial na componente N_ℓ (5.2).

A altura geoidal é finalmente obtida reintroduzindo a componente de longo comprimento de onda (5.2).

5.3 - A TÉCNICA DE FOURIER

5.3.1 - Introdução

A era espacial, os modernos computadores, o aperfeiçoamento dos diversos equipamentos de medições e outros fatores têm levado a um aumento considerável de informações e dados, nem sempre compatível com a capacidade de processamento. Em geodésia, por exemplo, dispõe-se de quantidades consideráveis de estações gravimétricas, modelos digitais do terreno com espaçamento cada vez menores, dados derivados da altimetria por radar nos oceanos, etc. Todas essas informações apresentam-se de forma discreta e o processamento pode envolver intervalos longos de tempo. Por outro lado, as integrais envolvidas em geodésia física em muitos casos constituem integrais de convolução, por exemplo, as integrais de Stokes e de Vening Meinesz. A propriedade fundamental daquelas integrais é que elas se transformam num simples produto de funções se o processo de avaliação das mesmas for feito no espaço da frequência [Blitzkow, 1973]. A transformação de uma função definida no domínio do espaço para o domínio da frequência é realizada pela transformada de Fourier. Quando a função não é conhecida de forma contínua mas somente por amostra em pontos discretos, o que acontece na maioria dos casos, e desde que o espaçamento seja constante, a transformada de Fourier é feita de maneira simples e eficiente através de algoritmos específicos conhecidos como Transformada Rápida de Fourier (TRF) [COOLEY & TUKEY, 1965]. A técnica acarreta algumas dificuldades. Como os dados precisam constituir u'a malha com espaçamento constante, quando isto não ocorrer, deve-se aplicar alguma técnica de interpolação. Por outro lado, se o espaçamento não for compatível com a resolução exigida haverá o chamado efeito de "alisamento" na solução, que aliás não é uma característica exclusiva da técnica de Fourier. Outro fator importante é a extensão da amostra. Se a mesma não contiver um múltiplo inteiro do período da função amostrada haverá uma distorção no espectro, chamada "vazamento espectral" [SCHWARZ, 1984].

5.3.2 - Transformada de Fourier

Sendo $h(x,y)$ uma função definida no espaço cartesiano, a transformada contínua de Fourier é dada por:

$$H(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy = F[h(x, y)] \quad (5.10)$$

onde H é o espectro da função $h(x,y)$, k_x, k_y são os números de onda (frequência no domínio do espaço) correspondente aos eixos x e y , $i = \sqrt{-1}$. Define-se igualmente a transformada inversa:

$$h(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(k_x, k_y) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y = F^{-1}[H(k_x, k_y)] \quad (5.11)$$

Os números de onda se relacionam com as frequências espaciais através de:

$$k_x = 2\pi u \quad \text{e} \quad k_y = 2\pi v$$

Com isso as integrais (5.10) e (5.11) podem ser escritas na forma:

$$H(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) e^{-2\pi i(ux + vy)} dx dy \quad (5.12)$$

$$h(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(u, v) e^{2\pi i(ux + vy)} du dv \quad (5.13)$$

As propriedades da transformada de Fourier são importantes e podem ser vistas com mais detalhe em [BLITZKOW, 1973] ou [SCHWARZ et al., 1990]. Uma das mais importantes é a integral de convolução. Dadas duas funções $h(x,y)$ e $g(x,y)$ a integral de convolução é representada por $h(x, y) * g(x, y)$ e definida da seguinte forma:

$$h(x, y) * g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x_o, y_o) g(x - x_o, y - y_o) dx_o dy_o \quad (5.14)$$

Pode ser facilmente verificado que:

$$h(x, y) * g(x, y) = H(u, v)G(u, v) \quad (5.15)$$

ou seja, a convolução das funções h e g é igual ao produto de suas transformadas.

Quando a função $h(x,y)$ não é conhecida de forma contínua, mas através de observações em pontos discretos, as integrais (5.10) e (5.11) não podem ser aplicadas. Neste caso, é possível estimar o espectro através da seguinte integral finita:

$$\bar{H}(u, v) = \int_{-x/2}^{x/2} \int_{-y/2}^{y/2} h(x, y) e^{-2\pi i(ux + vy)} dx dy \quad (5.16)$$

onde se admite que os pontos onde a função é observada constituem u'a malha regular com espaçamento $\Delta x, \Delta y$ sendo a extensão dos registros:

$$X = M\Delta x, \quad Y = N\Delta y$$

com M e N o número de pontos nas direções x e y respectivamente. Nestas condições a integral (5.16) pode ser aproximada por um somatório:

$$H_D(u_m, v_n) = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} h(x_k, y_l) e^{-2\pi i(u_m x_k + v_n y_l)} \Delta x \Delta y \quad (5.17)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Devido ao caráter discreto dos dados, o espectro só poderá ser estimado para frequências até:

$$u_N = \pm \frac{M}{2} \Delta u = \pm \frac{1}{2\Delta x} \quad e \quad v_N = \pm \frac{N}{2} \Delta v = \pm \frac{1}{2\Delta y}$$

chamadas frequências de Nyquist. Uma revisão completa sobre o assunto é encontrada em [SCHWARZ et al., 1990]

5.3.3 - A integral de Stokes e o domínio de frequência

Limitando a integral de Stokes a uma conveniente calota esférica de raio ψ_0 , a superfície esférica pode ser aproximada por um plano tangente no ponto de cálculo P. Usando uma distância plana s ao invés da distância esférica ψ , $\psi = s/R$, sendo R o raio da Terra. a função de Stokes se escreve:

$$S(s) = \frac{2R}{s}$$

e o elemento de área $d\sigma = \sin\psi d\psi d\alpha$ torna-se:

$$d\sigma = \frac{1}{R^2} s ds d\alpha$$

A integral de Stokes toma então a seguinte forma:

$$N(x_p, y_p) = \frac{1}{2\pi\gamma} \int_{s=0}^{s_{max}} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \frac{\Delta g(s, \alpha)}{s} s ds d\alpha \quad (5.18)$$

ou usando um sistema de coordenadas cartesianas, ao invés de polares, com centro em P:

$$N(x_p, y_p) = \frac{1}{2\pi\gamma} \iint_T \Delta g(x, y) \frac{1}{[x_p - x]^2 + [y_p - y]^2} dx dy \quad (5.19)$$

Esta última expressão tem a forma de uma integral de convolução e como tal pode ser expressa da seguinte forma:

$$N(x, y) = \frac{1}{2\pi\gamma} \Delta g(x, y) * d_N(x, y) \quad (5.20)$$

com $d_N = (x^2 + y^2)^{-1/2}$ função peso (núcleo). Utilizando o espectro das funções tem-se:

$$N(x, y) = \frac{1}{2\pi\gamma} F^{-1}[\Delta G(u, v) \cdot D_N(u, v)] \quad (5.21)$$

A anomalia da gravidade usada na (5.21) é a anomalia modificada, conforme (5.8). Em vista da aproximação plana, uma correção pode ser adicionada para levar em conta a curvatura da terra [SCHWARZ et al., 1990]:

$$C_N = \frac{\psi}{2} \operatorname{cosec} \frac{\psi}{2}$$

Trata-se de um fator pelo qual o resultado deve ser multiplicado. Para uma distância de $\psi=10^\circ$, $C_N = 1,001$. Para um valor típico de 25 m da altura geoidal, o valor corrigido seria 25,03 m. Usando o modelo EGM96 com $n=36$, a distância de integração é de 5° , e então a correção da curvatura pode ser desprezada.

Uma segunda alternativa é aplicar a TRF à aproximação esférica da integral de Stokes em duas dimensões (2D TRF)[STRANG VAN HEES, 1990]. Aqui, assim como na aproximação plana, o principal obstáculo é a necessidade de utilizar a função núcleo de uma forma aproximada, o que impede a avaliação exata da integral.

A terceira opção, mais usada atualmente, é realizar a integral em uma dimensão (1D TRF). A característica desta alternativa é que os valores da função de Stokes para uma certa diferença de longitude entre o ponto de cálculo e o de integração são os mesmos para todos os pontos de cálculo sobre um paralelo, embora diferentes em distintos paralelos. Dessa forma, a convolução é realizada somente na direção leste-oeste. Na direção norte-sul realiza-se a integração numérica tradicional. Com isso a função núcleo é exata em toda a região de integração [HAAGMANS et al., 1993]

5.4 - A REGULARIZAÇÃO DA TERRA

A aplicação da integral de Stokes e de outras semelhantes, pressupõe que o potencial perturbador seja uma função harmônica sobre o geóide, o que implica na não existência de massas externas ao mesmo. Esta exigência é necessária para poder tratar o problema como um "problema de valor de contorno" no sentido da teoria do potencial. Estes problemas sempre envolvem a solução da equação de Laplace (3.10) para a referida função. Desta forma é necessário adotar um procedimento conveniente para remover as massas externas. Isto é feito

através das "correções" ou "reduções" gravimétricas: **ar livre, Bouguer, isostática, condensação de HELMERT, inversão de Rudsky**. É o que se denomina "regularização" (§ 5.4-1). Qualquer que seja o procedimento adotado, a implicação é uma mudança no potencial e, em consequência, nas superfícies de nível, ou seja, no geóide. Trata-se de um "efeito indireto" (EI) que resulta numa superfície ora mais ora menos discrepante do geóide, o "COGEÓIDE". Em geral objetiva-se adotar um método de regularização que resulte num efeito indireto mínimo. A correção de Bouguer, quase sempre aplicada nas interpretações geofísicas, remove totalmente o chamado platô de Bouguer causando uma grande mudança no potencial e conseqüentemente um considerável efeito indireto. A correção ar livre despreza o fato das massas topográficas estarem fora da superfície geoidal e considera simplesmente o aumento da aceleração da gravidade sobre o geóide relativamente à superfície física em função da altitude. Seu efeito indireto é pequeno. Outras correções conjugam a remoção das massas e sua restauração no interior do geóide com a correção ar livre. O resultado é a tentativa de minimizar o efeito indireto. O procedimento que tem se mostrado mais promissor para a geodésia é a conhecida "condensação de Helmert".

5.4.1 Método da condensação de Helmert

Neste método as massas topográficas são condensadas de modo a formar uma camada superficial (no sentido da teoria do potencial trata-se de uma camada de espessura desprezível) sobre o geóide, com densidade:

$$K_d = \rho h$$

de tal modo que a massa total permaneça imutável. (Este método é chamado "segundo método da condensação de Helmert", uma vez que a primeira proposta de Helmert foi transferir as massas para uma superfície paralela 21 km abaixo do geóide; esta idéia inicial visou evitar problemas de convergência na série de funções harmônicas esféricas para o potencial).

O método pode ser resumido nas seguintes etapas:

- a) Substituir o efeito das massas topográficas sobre a aceleração da gravidade observada pelo efeito da camada superficial sobre o geóide.
- b) Reduzir o valor da aceleração da gravidade observada na superfície ao geóide mediante a continuação para baixo (correção ar livre).

Após estes procedimentos a integral de Stokes pode ser aplicada resultando no cálculo de alturas do cogeóide. A razão disto é que, embora a condensação de Helmert não resulte em

mudança na quantidade de massa, resulta numa redistribuição da mesma. Isto também provoca uma mudança no potencial e portanto um EI. Há a necessidade de uma pequena correção nas alturas obtidas para transformá-las em alturas geoidais [WANG, 1990, p.19]. Dependendo da precisão esperada para o valor da altura geoidal calculada, o efeito indireto pode ser desprezado. Em regiões montanhosas a consideração desta correção é mais crítica exigindo maior atenção. Por exemplo, na região montanhosa do Canadá com elevações entre 1387 m a 3413 m, e com a média de 2130 m, [SIDERIS & FORSBERG, 1991] indica um valor de EMQ do EI de 42 cm.

Em termos do potencial gravitacional o método da condensação pode assim ser explicitado: [MARTINEC et al. , 1993]

$$V = V^g + V^t \quad (5.22)$$

sendo V^g o potencial gerado pelas massas abaixo do geóide e V^t o potencial das massas topográficas. Este último pode ainda ser decomposto em:

$$V^t = V^c + \delta V \quad (5.23)$$

onde V^c é o potencial devido à massa condensada sobre o geóide e δV o efeito indireto. Combinando as duas equações tem-se:

$$V = V^g + V^c + \delta V \quad (5.24)$$

Tem havido uma certa controvérsia sobre o cálculo do efeito de atração das massas condensadas em relação ao ponto de cálculo do mesmo: sobre a superfície física ou sobre o geóide. Esta questão está relacionada com a aceitação ou não da dependência linear da anomalia ar livre da gravidade com a altura H da topografia. [MARTINEC et. al, 1993]. Este fato, por sua vez, se verificaria na hipótese de um modelo de compensação isostática simples o que nem sempre acontece. Vários autores têm estudado o problema, entre outros, [MORITZ,1968], [WANG and RAPP, 1990], [MARTINEC et al., 1993], [MARTINEC and VANICEK, 1993].

Assim, a chamada anomalia de Helmert pode ser expressa por:

$$\Delta g^h = \Delta g_p^F - A_p + A_p^C + g_1 + \delta S \quad (5.25)$$

Admitindo que esta anomalia também se relacione linearmente com a topografia, ou seja:

$$\Delta g^H = a + 2\pi G\rho H \quad (5.26)$$

então termo g_1 tem a seguinte forma:

$$g_1 = -G\rho H_p \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H - H_p}{d^3} dx dy \quad (5.27)$$

Nestas condições pode-se escrever:

$$-A_p + A_p^C + g_1 = C$$

onde C , correção do relevo, se escreve:

$$C = \frac{1}{2} K \rho \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(H - H_p)^2}{d^3} dx dy \quad (5.28)$$

Nestas condições:

$$\Delta g^H = \Delta g_p^F + C + \delta_S \quad (5.29)$$

Desprezando o termo δ_S , por ser pequeno, a anomalia resultante é às vezes chamada anomalia de Faye. Constitui uma boa aproximação da anomalia de Helmert para a aplicação na integral de Stokes.

6. AS ALTITUDES CIENTÍFICAS

Durante muito tempo, na história da geodésia, acreditou-se que o nível médio do mar (NMM), monitorado através das observações maregráficas, materializasse uma mesma superfície equipotencial, denominada superfície geoidal. Com os estudos integrados da geodésia e da oceanografia concluiu-se que, em diferentes marégrafos, o NMM materializa diferentes superfícies equipotenciais em função do que é chamado de topografia da superfície oceânica (TSO). Ela é fruto da não homogeneidade das águas do mar em função de diferentes fatores tais como: diferenças de salinidade, de material em suspensão e de temperatura, efeito dos ventos e das correntes, etc. Entendeu-se que o modelamento da TSO, embora complicado, resultaria numa superfície de equilíbrio única em todos os marégrafos. Mais recentemente vêm-se constatando que o nível médio do mar sofre um aumento em função do desequilíbrio do efeito estufa. Determinados gases presentes na atmosfera, em particular o gás carbônico, tendem a impedir que o calor irradiado pela Terra se propague pelo espaço. A consequência benéfica deste fenômeno é a manutenção de um certo equilíbrio na temperatura do planeta, sobretudo durante a noite. A era industrial tem sido responsável pelo aumento na liberação de gás carbônico através da queima de combustíveis fósseis e de material orgânico pelas várias formas de motores a explosão ou na obtenção de energia calorífica. Isto tem resultado num sistemático aumento de gás carbônico na atmosfera o que tem comprometido o equilíbrio do efeito estufa. A atmosfera vem retendo cada vez mais calor de irradiação, provocando um lento e sistemático aumento na temperatura média da Terra. Há com certeza fenômenos naturais que também liberam grandes quantidades de CO^2 como, por exemplo, os vulcões.

Uma consequência que vem sendo observada é a expansão térmica dos oceanos, o derretimento das geleiras e das calotas polares, o aumento das tempestades. A consequência é um aumento constante no NMM nos últimos 100 anos, na razão de 1 a 3 mm por ano. Isto faz com que se tenha que estabelecer uma data para materializar o nível médio do mar. De qualquer modo, os países banhados pelo mar sempre selecionam um ou mais marégrafos para definir a origem de seu sistema de altitudes.

A partir da origem se conduz a operação de nivelamento geométrico para se estabelecer uma rede de referências altimétricas em todo um país. Esta operação é conduzida admitindo que as superfícies equipotenciais do campo de gravidade sejam paralelas. Em função da forma acentuadamente elipsoidal e das demais irregularidades de distribuição de massa da Terra real, o paralelismo das superfícies equipotenciais não ocorre (Fig. 6). Em suma, o que duas superfícies

equipotenciais tem de comum é a diferença de potencial e não a distância entre elas. Isto faz com

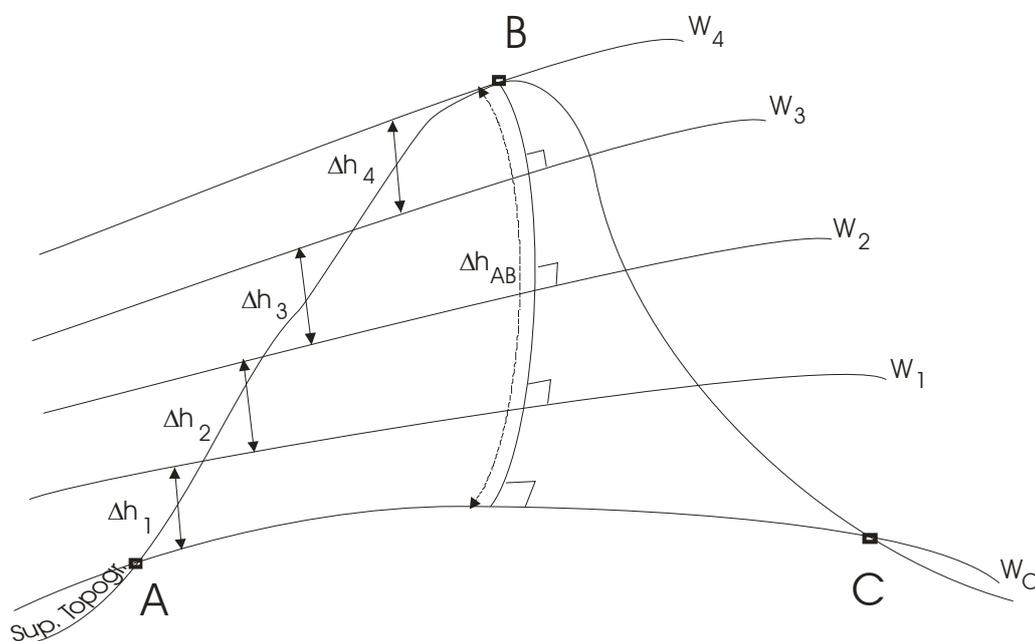


Fig. 6 – Não paralelismo das superfícies equipotenciais.

que o desnível entre duas referências de nível obtidas através do somatório dos desníveis observados em cada lance do nivelamento, seja distinto quando distintos trajetos forem percorridos.

Para sanar a dificuldade é necessário introduzir uma grandeza física ao nivelamento o que é feito através da aceleração de gravidade [FREITAS & BLITZKOW, 1999]. Define-se, então, número geopotencial C_{AB} como sendo:

$$W_B - W_A = C_{AB} = - \int_A^B g dH \quad (6.1)$$

Trata-se de uma grandeza física correspondente à diferença de potencial de gravidade W entre A e B e que, ao ser somada algebricamente em um circuito fechado, sempre resulta num valor nulo, independente do trajeto percorrido. Na prática não se conhece a aceleração de gravidade g de forma contínua sobre a superfície da Terra, mas ela pode ser determinada sobre as referências de nível (RNs). Por outro lado, os desníveis Δh são determinados através do nivelamento geométrico com espaçamento, por exemplo, equivalente a duas RNs, da ordem de 3 km. Com isso, a integral transforma-se num somatório:

$$W_B - W_A = C_{AB} \cong - \sum_{i=1}^{n-1} \bar{g} \Delta h_i \quad (6.2)$$

sendo \bar{g} a média dos valores de aceleração da gravidade entre pontos i e $i+1$ e Δh_i o desnível entre os mesmos.

O número geopotencial representa uma grandeza física, com dimensão específica (e.g., $m^2 \cdot s^{-2}$), pouco usual nas aplicações onde a altitude é exigida. Daí a conveniência em trabalhar com uma grandeza compatível com a dimensão usualmente empregada na altitude, o metro. Isto é conseguido dividindo o número geopotencial por um determinado valor da aceleração de gravidade. Se este valor for a média g_m entre a superfície física e o geóide, tem-se a altitude ortométrica: [Freitas & Blitzkow, 1999]

$$H_o = \frac{C_P}{g_m} \quad (6.3)$$

O valor médio do denominador em (6) depende do conhecimento da estrutura da crosta, ou seja, de um modelo de distribuição de densidades; portanto, sua obtenção é praticamente impossível. Trata-se do mesmo problema que ocorre com a redução do valor de g no PVCG (§ 2). A alternativa é substituir o valor da gravidade real pela gravidade normal γ_m obtendo a altitude normal como sendo:

$$H_N = \frac{C_P}{\gamma_m} \quad (6.4)$$

onde γ_m é a gravidade normal média entre o elipsóide e o ponto da superfície física [Freitas & Blitzkow, 1999, (11)]. A altitude normal representa a separação entre o elipsóide e o teluróide ou entre o quase-geóide e a superfície física (Figura 1). A vantagem da altitude normal é que ela independe do trajeto percorrido. A desvantagem é que a superfície à qual ela é referida, o quase-geóide ou o teluróide, não são superfícies de nível. Logo, dois pontos com a mesma altitude normal não estarão necessariamente sobre a mesma superfície equipotencial.

Outras possibilidades de escolha do denominador resultam em outros diferentes tipos de altitudes como: Helmert, Vignal, Baranov [Freitas & Blitzkow, 1999]. Mas uma altitude de particular interesse é a altitude dinâmica. Ela é o resultado da escolha de um valor γ_o válido para uma dada latitude padrão, e. g., 45° .

$$H_D = \frac{C_P}{\gamma_o} \quad (6.5)$$

A característica da altitude dinâmica é que ela é constante ao longo da mesma superfície equipotencial. Obviamente a altitude dinâmica difere do número geopotencial somente de um

fator de escala. Ela não tem um sentido geométrico como distância entre duas superfícies. Mas com certeza a água flui de um ponto de maior altitude dinâmica para outro de menor valor.

A partir dos números geopotenciais obtém-se a altitude ortométrica se um modelo de distribuição de densidades for disponível ou a altitude normal se esta for a opção para o sistema de altitudes, como é o caso da América do Sul.

7. BIBLIOGRAFIA

- BALMINO G., REIGBER C. & MOYNOT B. (1976). A geopotential model determined from recent satellite observing campaigns (GRIM 1). **Manuscripta Geodaetica**, 1(1), pp. 41-69.
- BLITZKOW D. (1973). **Função de transferência de modulação - Aplicação ao estudo do desempenho dos sistemas aerofotográficos**. Dissertação de Mestrado. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. Universidade Federal do Paraná. Curitiba.
- BLITZKOW D. (1986). **A combinação de diferentes tipos de dados na determinação das alturas geodais**. Tese de doutoramento. Instituto Astronômico e Geofísico. Universidade de São Paulo. São Paulo.
- BLITZKOW D. e SÁ N. C. (1983). As alturas geodais Doppler e a separação elipsóide-esferóide de referência. **Revista Brasileira de Geofísica**, 2(1): 19-24.
- BLITZKOW D. e SÁ N.C. (1985). Análise funcional e aplicações. **Revista Brasileira de Cartografia**, número 38, pp. 23-30.
- BLITZKOW D, Cintra J. P., and FORTES L. P. S. (1991). A contribution to the geoid determination. In: **Recent Geodetic and Gravimetric research in Latin America**. Edited by W. Torge. Springer-Verlag. Berlin.
- CASTRO C.A.C. Jr. (2005). Contribuição ao estabelecimento de um sistema gravimétrico para a América do Sul. Dissertação de mestrado apresentada à Escola Politécnica da USP, Departamento de Engenharia de Transportes. São Paulo.
- COOLEY J. W. and TUKEY J. W. (1965). An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. **Math. Comp.**, vol. 19, pp. 297-301.
- ESCOBAR I. (1986). **Rede Gravimétrica Fundamental Brasileira 1976 - 1986**. Departamento de Geofísica, Observatório Nacional. Rio de Janeiro.
- FINKBEINER D. T. (1978). **Introduction to matrices and linear transformations**. W. H. Freeman. San Francisco.
- FISCHER I. (1969). The geoid in South America referred to various reference systems. **Revista Cartografica IPGH**, nº 18, pp. 1-39.

- FORSBERG R. (1991). The new high-resolution geoid of the nordic area. In: **Determination of the geoid - Present and future.** Edited by R.H. Rapp and F. Sanso. Springer-Verlag. Berlin.
- FREITAS S.R.C., BLITZKOW D. (1999). Altitudes e geopotencial. International Geoid Service. Bulletin No. 9. Special Issue for South America. Milão.
- GEMAEL C. (1978). **Introdução à Geodésia Física.** Universidade Federal do Paraná, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. Curitiba.
- GEMAEL C. (1994). **Introdução ao ajustamento de observações. Aplicações geodésicas.** Editora da Universidade Federal do Paraná. Curitiba.
- GFRENER H. (1987). Parameter choice for Tikhonov regularization of ill-posed problems. In: **Inverse and ill-posed problems.** H. W. Engl and C. W. Groetsch. Academic press. N. Y.
- GREEN C. M. AND FAIRHEAD J. D. (1991). The South American Gravity project. In: **Recent Geodetic and Gravimetric Research in Latin America.** Edited by W. Torge. Springer-Verlag. Berlin
- GROTEN E. (1984). Model refinements in the solution of the boundary value problem of physical geodesy. In: **Local gravity field approximation.** Summer School. Edited by K. P. Schwarz. Calgary.
- HAAGMANS R. E. DE MIN E. and VAN GELDEREN M. (1993). Fast evaluation of convolution integral on the sphere using 1D FFT, and a comparison with existing methods for Stokes integral. **Manuscripta Geodaetica**, vol 18, pp. 227-241.
- HADAMARD J. (1923). **Lectures on the Cauchy problem in linear partial differential equation.** Yale University Press. New Haven.
- HECK B. (1988). The non-linear geodetic boundary value problem in quadratic approximation. **Manuscripta Geodaetica**, vol. 13, pp. 337-348.
- HECK B. (1989a). A contribution to the scalar free boundary value problem of physical geodesy. **Manuscripta geodaetica** (14), pp. 87-99.
- HECK B. (1991). **On the linearized boundary value problems of physical geodesy.** Ohio State University, Report 407. Columbus.
- HEISKANEN W. A. and MORITZ H. (1967). **Physical Geodesy.** W. H. Freeman. London.

- HÖRMANDER L. (1976). The boundary problems of physical geodesy. **Arch. Rat. Mech. Anal.** , 62, 1-52.
- ILK K. H. (1991). Inverse geodetic problems. In: **Geodetic Theory and Methodology**. XX General Assembly of the IUGG. Vienna.
- IVANOV V. K. (1963). On ill-posed problems. **Matematicheskii Sbornik**, 61 (2).
- KREYSZIG E. (1978). **Introductory functional analysis with applications**. John Wiley and Sons. N. Y.
- LAVRENT'YEV M. M. (1967). **Some improperly posed problems of mathematical physics**. Springer-Verlag. Berlin.
- LERCH F. J., KLOSKO S. M., LAUBSCHER R. E., WAGNER C. A. (1977). **Gravity model improvement using GEOS-3 (GEM9 and GEM10)**. Goddard Space Flight Center. Report X-921-77-246. Greenbelt.
- LERCH F. J., PUTNEY B. H., WAGNER C. A., KLOSKO S. M. (1981). Goddard Earth Models for Oceanographic applications (GEM 10B and GEM 10C). **Marine Geodesy**, vol. 5, n° 2, pp. 145-187.
- MARTINEC Z. , MATYSKA C., GRAFAREND E. W. and VANICEK P. (1993). On Helmert's 2nd condensation method. **Manuscripta Geodaetica**, vol. 18, n° 6, pp. 417-421.
- MARTINEC Z. and VANICEK P. (1993). Direct topographical effect of Helmert's condensation for a spherical geoid. Submitted to Manuscripta. Geodaetica.
- McCARTHY D. D. (1992). **IERS Technical note 13**. Observatoire de Paris. Central Bureau of IERS. Paris.
- MOLODENSKII M. S. , EREMEEV V. F. , YURKINA M. I. (1962). **Methods for study of the external gravitational field and figure of the Earth**. Israel Program for Scientific Translation, Jerusalem.
- MORITZ H. (1968). On the use of the terrain correction in solving Molodensky's problem. Technical Report 108. Department of Geodetic Science. Ohio State University. Ohio.
- MORITZ H. (1980). **Advanced Physical Geodesy**. Abacus Press. Tunbridge Wells.
- NASHED M. Z. (1987). A new approach to classification and regularization of ill- posed operator equations. In: **Inverse and ill-posed problems**. H. W. Engl and C.W. Groetsch. Academic Press. New York.

- NEREM R. S., LERCH F. J., MARSHALL J. A., PAVLIS E. C., PUTNEY B.H., TAPLEY B. D., EANES R. J., et al. (1994). Gravity Model Development for TOPEX/POSEIDON: Joint Gravity Models 1 and 2. **Journal of Geophysical Research**, vol. 99, n° C12, pp. 24421-24447.
- RAPP R. H. and NEREM R. S. (1994). **A joint GSFC/DMA project for improving the model of the Earth's gravitational field**. Joint Symposium of the IGC/ICG. Graz.
- REIGBER C., BALMINO G., MOYNOT B., MUELLER H. (1983). The GRIM3 Earth Gravity field model. **Manuscripta Geodaetica**, vol. 8, pp. 93-138.
- RUMMEL R. , SCHWARZ K. P. , GERSTL M. (1979). Least squares collocation and regularization. **Bulletin Géodésique**, (53) pp. 343-361.
- SACERDOTE F. and SANZO F. (1985). Overdetermined boundary value problems in physical geodesy. **Manuscripta Geodaetica**, vol. 10, 195-207.
- SACERDOTE F. and SANZO F. (1986). The scalar boundary value problem of physical geodesy. **Manuscripta geodaetica**, vol. 11, pp. 15-28.
- SACERDOTE F. and SANZO F. (1990). Holes in boundary and out-of-boundary data. In: **Determination of the geoid - Present and future**. Edited by R. R. Rapp and F. Sanso. Springer Verlag. Berlin.
- SCHWARZ K. P. (1984). Data types and their spectral properties. In: **Local gravity field approximation**. Edited by K. P. Schwarz. The University of Calgary.
- SCHWARZ K. P. SIDERIS M. G. , FORSBERG R. (1990). The use of FFT techniques in physical geodesy. **Geophys. Journal Int.**, vol. 100, pp. 485-514.
- SIDERIS M. G. FORSBERG R. (1991). Review of geoid prediction method in mountainous regions. In: **Determination of the geoid - Present and future**. Edited by R. H . Rapp and F. Sanso. Springer-Velarg. Berlin.
- SIDERIS M. G. (1995). **Methods and results of FFT geoid computations**. Presented at the XVII Congress of Cartography. Salvador - Bahia.
- SMITH D. E., LERCH F. J., MARSH J. G., WAGNER C. A., KOLENKIEWICZ R. and KHAN M. A. (1976). Contribution to the national geodetic satellite program by Goddard Space Flight Center. **Journal Geophysical Research**, 81(5), pp. 1006-1026.

- SOUZA M. A., MOREIRA E. M., SANTOS A. A. dos (1993). The L2 adjustment of the old LC&R 61 data set to the IGSN71 absolute datum. **Special Publication**. National Observatory. Rio de Janeiro.
- STRANG VAN HEES G. (1990). Stokes' formula using fast Fourier techniques. **Manuscripta Geodaetica**, vol 15, pp. 235-239.
- TIKHONOV A. N., ARSEININ V. Y. (1977). **Solution of ill-posed problems**. John Wiley & Son, New York.
- TORGE W. (1991). **Geodesy**-(2nd edition). De Gruyter. Berlin.
- VANICEK P. KRAKIWSKY E. (1986). **Geodesy: The concepts**. North-Holland Publ. Co. (2nd edition). Amsterdam.
- VANICEK P., KLEUSBERG A., CHANG R. G., FASHIR H. ., CHRISTOU N., HOFMAN M., KLING T., ARSENAUL T. (1987). **The Canadian geoid**. Technical Report n° 129. Dept. of Surveying Engineering-UNB. Fredericton.
- WANG Y. M. (1990). The role of the topography in gravity gradiometer reductions and in the solution of the geodetic boundary value problem using analytical downward continuation. Dept. of Geodetic Science and Surveying. **Report 405**. Ohio State University. Ohio.
- WANG Y. M. and RAPP R. H. (1990). Terrain effects on geoid undulation computation. **Manuscripta Geodaetica**, vol. 15, pp. 23-29.