

# ALTITUDE: O QUE INTERESSA E COMO EQUACIONAR ?

Denizar Blitzkow<sup>1</sup>  
Ilce de Oliveira Campos<sup>2</sup>  
Sílvia R. C. De Freitas<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Escola Politécnica da Universidade de São Paulo –Departamento de Engenharia de Transportes - EPUSP – PTR -dblitzko@usp.br

<sup>2</sup> Universidade Federal de Uberlândia - UFU– Faculdade de Engenharia - [ilce@ufu.br](mailto:ilce@ufu.br)

<sup>3</sup> Universidade Federal do Paraná – UFPR – Departamento de Geomática - [sfreitas@ufpr.br](mailto:sfreitas@ufpr.br)

## RESUMO

A altitude continua sendo um problema muito discutido em geodésia, sobretudo pela comunidade que está envolvida com a sua determinação e utilização. A discussão diz respeito ao ponto de vista conceitual e ao ponto de vista prático quando de sua determinação. Na verdade, o conceito de altitude está intimamente relacionado ao problema de valor de contorno da Geodésia Física. Em consequência, a questão precisa ser pensada não somente de um ponto de vista geométrico mas sobretudo de um ponto de vista físico. É necessário considerar a superfície escolhida como origem para as medições altimétricas e olhar para o seu significado como superfície de referência do campo de gravidade. Por outro lado, é comum o envolvimento com problemas que não exigem o conhecimento de um valor absoluto da altitude e outros que exigem, ou ainda estudos onde tão somente a diferença de altitude é o fundamental. A variação da altitude com o tempo é também considerada na engenharia e na geodinâmica. Finalmente, a materialização da superfície de referência para as altitudes precisa levar em consideração os efeitos seculares e periódicos sobre as observações maregráficas. Este trabalho se propõe a rever alguns dos conceitos e das dificuldades relativas à determinação da altitude.

**Palavras-chave:** Altimetria, Geóide, Geodésia

## HEIGHT: WHAT DOES IT MATTER AND HOW TO MANAGE?

### ABSTRACT

There is still very much concern in geodesy about the height problem, in particular, by the community involved with its realization and use. The discussions involve the concept as well as the determination of the height. The concept is strongly related to the boundary value problem of Physical Geodesy. As a consequence, the problem must be considered not only on the geometrical but also on the physical point of view. It is necessary to consider the surface selected as an origin for the measurements and look after its meaning as a reference surface of the gravity field. On the other hand, it is very usual to deal with problems that demand or not an absolute value for the height and problems for which a relative value is fundamental. The height variation with time is also considered for engineering and geodynamics. This paper intends to review some of the concepts and difficulties related to the height.

**Keywords:** Altimetry, Geoid, Geodesy

## 1. INTRODUÇÃO

A posição de pontos no espaço, sobre a superfície da Terra ou próximo a ela, é estabelecida através de três coordenadas: latitude, longitude e altitude. A latitude e a longitude geodésicas ou elipsoidais definem o que coloquialmente se denomina coordenadas planimétricas, embora não se refira a um plano propriamente dito. A componente vertical é estabelecida em função de considerações e conceitos mais requintados. No passado, quando as coordenadas planimétricas eram determinadas através da triangulação, procurava-se complementar a informação altimétrica através do nivelamento geométrico, a despeito dos problemas envolvidos com o mesmo. Na prática, as redes de triangulação e de nivelamento não eram coincidentes e, no geral, as informações planimétricas e altimétricas eram independentes entre si.

Desde o advento das observações por satélite, as determinações de posição no espaço vêm sendo resolvidas de forma simples e eficiente; assim, pode-se facilmente determinar coordenadas referidas a um elipsóide de referência. Na prática, através do satélite, obtém-se coordenadas cartesianas (X, Y, Z) que são transformadas no terno geodésico ( $\phi$ ,  $\lambda$ , h), sendo h a altitude elipsoidal, uma grandeza geométrica sem significado físico. Ela é referida à superfície elipsoidal que não é uma superfície equipotencial do campo de gravidade da Terra real, mas sim do modelo adotado, o elipsóide. Por este motivo, a altitude elipsoidal nem sempre atende a todas as exigências e muitas vezes necessita-se de um tipo de altitude que satisfaça condições específicas.

A seleção do tipo de altitude a ser usada e a escolha da superfície de referência (origem) são fundamentais em aplicações práticas da altimetria. Considerando estas opções, uma altitude pode ter significado apenas geométrico ou ter um sentido físico por constituir uma grandeza relacionada ao campo de gravidade. Saliente-se que o fluxo natural de água é regido pelo campo de gravidade e não por condições geométricas.

O presente trabalho propõe-se a descrever e a discutir os conceitos relativos ao problema da altitude e a relacioná-los aos procedimentos analíticos empregados na determinação dos diferentes tipos de altitude. Assim, segundo o procedimento de determinação, a escolha da superfície de referência e os modelos matemáticos ou físicos considerados no processamento das observações, distingue-se as seguintes altitudes:

- Geométricas: elipsoidais e niveladas.
- Científicas: dinâmicas, ortométricas, normais, etc.

No primeiro caso, é possível estabelecer uma grandeza geométrica associada com a referida altitude, em outras palavras, uma distância segundo uma direção que associa duas superfícies de referência. No segundo caso, a altitude está vinculada a um conceito físico do campo de gravidade, podendo ou não ter também uma interpretação geométrica associada.

Além disso, levanta-se as questões referentes à necessidade de obtenção do valor absoluto da altitude num ou mais pontos, do conhecimento da sua eventual variação no tempo ou, finalmente, do conhecimento da simples diferença de altitude. O primeiro caso implica em selecionar uma superfície de referência como origem, estabelecer procedimentos de observação, selecionar métodos analíticos de cálculo e fazer a determinação da altitude num ponto ou num conjunto de pontos, em suma, implantar uma rede altimétrica. Por outro lado, é comum a necessidade de controle e de monitoramento da altitude, de um ou mais pontos, no tempo, objeto da segunda questão. Isto ocorre em grandes estruturas de engenharia e na crosta terrestre, onde movimentos verticais podem ocorrer. As estruturas sofrem com deslocamentos ou deformações e a crosta tem movimentos de subducção (subsidência), obducção e deslocamento das placas tectônicas [Drewes et al., 1998]. Neste caso, há sempre a preocupação e a dificuldade de obter uma referência que, confiavelmente, seja estável, isto é, não sofra variação no tempo ou que a mesma seja controlada. Finalmente, em muitos casos, sobretudo na engenharia, é satisfatório obter a diferença de altitude num conjunto maior ou menor de pontos, numa determinada área, em relação a um valor de referência. No passado, este era escolhido, em muitos casos, de forma arbitrária; porém, cada vez mais se foi encontrando razões para optar por uma referência absoluta. É o caso, por exemplo, da implantação de uma represa, seja para abastecimento ou seja para a geração de energia (usinas hidroelétricas). O que se procura é a diferença de altitude, em relação a uma referência, numa série de pontos na região da obra visando determinar a área inundada e o volume de água armazenada.

## 2. A ALTIMETRIA E O PVCG

A teoria do potencial apresenta três problemas de valor de contorno que assim se enunciam:

a) Problema de Dirichlet ou primeiro problema de valor de contorno: conhecendo-se os valores de uma função arbitrária V sobre uma superfície S, determinar essa função V de tal forma que ela seja harmônica interna ou externamente a S e que sobre a superfície S ela assuma os valores da função escolhida.

b) Problema de Neumann ou segundo problema de valor de contorno: conhecendo-se os valores da derivada normal de uma função V sobre uma superfície S, determinar a função V que seja harmônica interna ou externamente a S.

c) Problema de Hilbert ou terceiro problema de valor de contorno: conhecendo-se os valores da combinação linear da função V e da sua derivada normal sobre a superfície S, determinar a função V nas condições anteriores.

Este último problema tem especial importância para a geodésia, pois a determinação do potencial perturbador de certa forma se relaciona a ele. Com efeito, a anomalia da gravidade, que é observada, em geral sobre a superfície física, é uma combinação linear do potencial perturbador com a sua derivada normal [Blitzkow, 2003, (2.29)]. O problema na geodésia é que a superfície é desconhecida e é ela exatamente uma das questões que precisam ser equacionadas, pois ela serve de referência para a altitude.

A forma atribuída à Terra, por convenção, é a do geóide. Este é limitado pela superfície geoidal, entendida até o momento como sendo materializada pela superfície equipotencial que coincide com o nível médio não perturbado dos mares. Em última instância, a Geodésia está preocupada com o estudo do geóide. Sabe-se que o geóide se assemelha muito a uma figura matemática regular, o elipsóide de revolução ou Terra normal. Esta é definida como tendo a mesma massa da Terra real, a mesma velocidade de rotação e cujo esferopotencial de gravidade da Terra normal sobre sua superfície seja igual ao geopotencial de gravidade da Terra real sobre a superfície do geóide. A diferença, pequena, entre o geóide e o elipsóide em termos de forma é a altura geoidal (N), medida ao longo da normal, e em termos de potencial é o potencial perturbador (T) [Blitzkow, 2003 (2.20)]. As duas grandezas se relacionam entre si através da fórmula de Brüns. (H&M, p.85, 2.144). Este estudo bem como a determinação das chamadas alturas geoidais, separação entre a superfície geoidal e a elipsoidal ao longo da normal, podem ser feitas a partir do conhecimento do campo de gravidade que modela a distribuição de massa e o efeito rotacional da Terra e, conseqüentemente, permite deduzir a forma. Na prática, o efeito rotacional sendo conhecido, o que se procura é modelar o potencial de atração ou gravitacional através do potencial perturbador. Isto é o que se denomina "Problema de Valor de Contorno da Geodésia (PVCG)". Um modelo do geopotencial, como é chamado um conjunto de coeficientes do desenvolvimento do potencial gravitacional em série de funções harmônicas esféricas, contribui decisivamente no PVCG. Os modelos mais recentes, em particular o EGM96, publicado durante o GRAGEOMAR96 (Gravity, Geoid and Marine Geodesy 1996) no Japão, e mais recentemente, os modelos vinculados às chamadas missões modernas, CHAMP e GRACE, resolveram satisfatoriamente os longos e até médios comprimentos de onda do campo gravitacional. Resta, em geral, determinar os curtos comprimentos de onda. Eles são calculados, no contexto da geodésia física, através de dados gravimétricos de superfície utilizando a integral modificada de Stokes [Blitzkow, 2003], associando ainda um modelo digital do terreno.

Uma outra alternativa é estudar diretamente a forma sem preocupação direta com o potencial. Isto é feito obtendo-se as irregularidades da superfície geoidal relativamente a um modelo teórico, o elipsóide de revolução. A separação entre as duas superfícies, como já mencionado, são as chamadas alturas geoidais. Elas podem ser obtidas a partir de observações sobre satélites artificiais (GPS) quando conduzidas sobre uma referência altimétrica compatível.

A determinação das alturas geoidais no interior dos continentes, utilizando a integral de Stokes, envolve uma dificuldade fundamental: o conhecimento de um modelo de distribuição de densidades no interior da crosta entre a superfície física e a geoidal. A razão é a necessidade de reduzir os valores da aceleração da gravidade, observados sobre a superfície física, ao geóide. A impossibilidade de conhecer adequadamente a distribuição da massa torna a proposta de Stokes para a solução do PVCG impraticável. Mais recentemente Molodenskiy propôs a superfície física como superfície de contorno. Com esta alternativa foge-se do problema de conhecimento das densidades. O resultado é a determinação da anomalia de altura  $\zeta$ , ao invés da altura geoidal N. A superfície que se vincula ao elipsóide através da anomalia de altura é o quase-geóide. Ou ainda, se a anomalia de altura for plotada a partir da superfície física obtém-se o teluróide. Contrariamente ao geóide, o quase-geóide e o teluróide não são superfícies equipotenciais. A figura 1 apresenta as grandezas e as superfícies envolvidas no PVCG.

Em suma, é essencial a coerência entre a solução do PVCG e o sistema de altitude selecionada. Neste aspecto, o modelo geoidal se coaduna com a altitude ortométrica, enquanto a anomalia de altura está vinculada ao quase-geóide e à altitude normal. Esta é a compatibilidade que precisa ser atingida nas observações GPS sobre o nivelamento.

Através da figura 1 deduz-se que:

$$h = H^N + \zeta \quad (1)$$

$$h = H + N \quad (2)$$

$$N - \zeta = H^N - H \quad (3)$$

donde se conclui que a diferença entre a altura geoidal (N) e a anomalia de altura ( $\zeta$ ) é igual à diferença entre as altitudes normal ( $H^N$ ) e ortométrica (H).

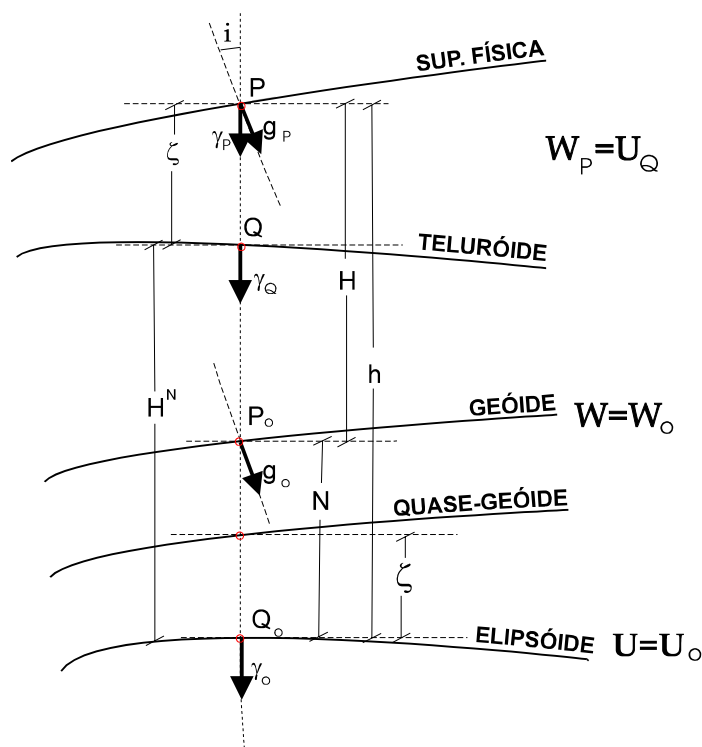


Figura 1 - Quantidades envolvidas no PVCG.

### 3. O NIVELAMENTO GEOMÉTRICO

Será denominada altitude nivelada aquela resultante da operação de nivelamento geométrico. Este consiste em realizar leituras em duas miras graduadas, ré e vante, utilizando um nível de luneta (Figura 2). O nível deve estar nivelado, portanto, estar com seu eixo ótico tangente à superfície equipotencial que passa pelo mesmo [Drewes et al., 1998] e as miras devem estar na posição vertical.

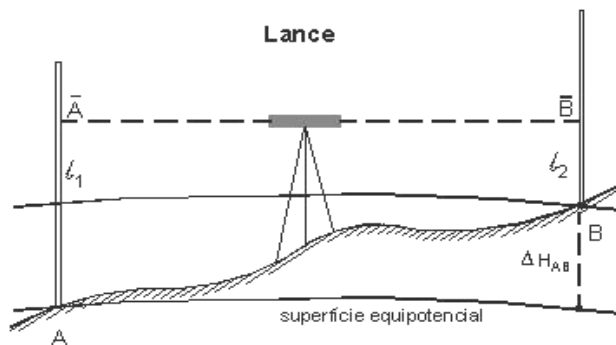


Figura 2 - Lance no nivelamento geométrico.

Diz-se que a diferença de leitura das duas miras representa a diferença de altitude dos pontos. Uma primeira questão a se perguntar é de que altitude se trata. Mas, outro ponto a enfatizar é que, na verdade, o que se obtém é a separação (distância) entre as duas superfícies equipotenciais, supostas paralelas, que passam pela base das duas miras. O paralelismo se verifica para a distância de um lance (~100 m) ou de uma seção de nivelamento (~3 km). Em distâncias maiores as superfícies equipotenciais não são paralelas; a razão é que a distribuição de massa da Terra não é homogênea [Freitas & Blitzkow, 1999]. A maior irregularidade de massa é provocada pelo achatamento nos polos. A figura 3 ilustra este problema, onde se conclui que o somatório de  $\Delta h_i$  ( $i=1,2,3,4$ ) é diferente de  $\Delta h_{AB}$ . Em tese, o que duas superfícies equipotenciais têm de constante entre elas é a diferença de potencial e não a distância. Assim, conclui-se que o nivelamento geométrico fornece resultados que dependem do trajeto percorrido.

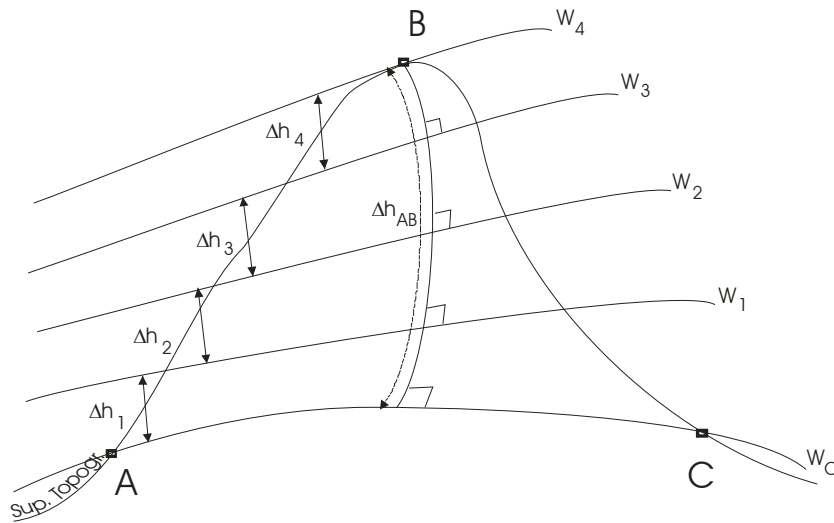


Figura 3 – Não paralelismo das superfícies equipotenciais.

#### 4. ALTITUDE CIENTÍFICA

Para sanar a dificuldade é necessário introduzir uma grandeza física ao nivelamento o que é feito através da aceleração de gravidade. Define-se, então, número geopotencial  $C_{AB}$  como sendo:

$$W_B - W_A = C_{AB} = - \int_A^B g dH \quad (4)$$

Trata-se de uma grandeza física correspondente à diferença de potencial de gravidade  $W$  entre  $A$  e  $B$  e que, ao ser somada algebricamente em um circuito fechado, sempre resulta num somatório nulo, independente do trajeto percorrido. Na prática não se conhece a aceleração de gravidade  $g$  de forma contínua sobre a superfície da Terra, mas ela pode ser determinada sobre as referências de nível (RNs). Por outro lado, os desníveis  $\Delta h$  são determinados através do nivelamento geométrico com espaçamento, por exemplo, equivalente a duas RNs, da ordem de 3 km. Com isso, a integral transforma-se num somatório:

$$W_B - W_A = C_{AB} \cong - \sum_{i=1}^n \bar{g} \Delta h_i \quad (5)$$

sendo  $\bar{g}$  a média dos valores de aceleração da gravidade entre pontos  $i$  e  $i+1$  e  $\Delta h_i$  o desnível entre os mesmos.

O número geopotencial representa uma grandeza física, com dimensão específica (e.g.,  $m^2 \cdot s^{-2}$ ), pouco usual nas aplicações onde a altitude é exigida. Daí a conveniência em trabalhar com uma grandeza compatível com a dimensão usualmente empregada na altitude, o metro. Isto é conseguido dividindo o número geopotencial por um determinado valor da aceleração de gravidade. Se este valor for a média  $g_m$  entre a superfície física e o geóide, tem-se a altitude ortométrica: [Freitas & Blitzkow, 1999]

$$H_o = \frac{C_P}{g_m} \quad (6)$$

O valor médio do denominador em (3) depende do conhecimento da estrutura da crosta, ou seja, de um modelo de distribuição de densidades; portanto, sua obtenção é praticamente impossível. Trata-se do mesmo problema que ocorre com a redução do valor de  $g$  no PVCG (§ 2). A alternativa é substituir o valor da gravidade real pela gravidade normal  $\gamma_m$  obtendo a altitude normal como sendo:

$$H_N = \frac{C_P}{\gamma_m} \quad (7)$$

sendo  $\gamma_m$  a gravidade normal média entre o elipsóide e o ponto da superfície física [Freitas & Blitzkow, 1999, (11)]. A altitude normal representa a separação entre o elipsóide e o teluróide ou entre o quase-geóide e a superfície física (Figura 1). A vantagem da altitude normal é que ela independe do trajeto percorrido. A desvantagem é que a superfície à qual ela é referida, o quase-geóide ou o teluróide,

não são superfícies de nível. Logo, dois pontos com a mesma altitude normal não estarão necessariamente sobre a mesma superfície equipotencial.

Outras possibilidades de escolha do denominador resultam em outros diferentes tipos de altitudes como: Helmert, Vignal, Baranov [Freitas & Blitzkow, 1999]. Mas uma altitude de particular interesse é a altitude dinâmica. Ela é o resultado da escolha de um valor  $\gamma_0$  válido para uma dada latitude padrão, e. g.,  $45^\circ$ .

$$H_D = \frac{C_P}{\gamma_0} \quad (8)$$

A característica da altitude dinâmica é que ela é constante ao longo da mesma superfície equipotencial. Obviamente a altitude dinâmica difere do número geopotencial somente de um fator de escala ou na unidade. Ela não tem um sentido geométrico como distância entre duas superfícies. Mas com certeza a água flui de um ponto de maior altitude dinâmica para outro de menor valor.

#### 4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A altimetria vem se desenhando como uma necessidade da mais alta importância em diversos campos de aplicação. Ora um modelo digital de elevação (MDE), como é chamado, atende satisfatoriamente, ora o tipo de altitude não se apresenta tão fundamental pois a diferença de altitude é que se caracteriza como essencial. Na engenharia a altitude precisa representar uma grandeza com significado físico quando a aplicação envolve o armazenamento ou o transporte de água. Sempre que isto ocorre e quando as dimensões de uma represa ou de um canal são consideráveis, dezenas de quilômetros, a consideração do número geopotencial é necessária. Neste caso, a operação de nivelamento geométrico precisa ser acompanhada da gravimetria.

O SIRGAS recomendou que os países da América do Sul adotassem como sistema de altitudes, para efeitos do referencial altimétrico do continente, a altitude normal. A vantagem é que a conexão de duas referências de nível neste sistema irá resultar num fechamento coerente do nivelamento. Isto não ocorre com as altitudes niveladas.

#### 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BLITZKOW, D. **Sistemas de altitudes e a determinação do geóide**. Curso proferido no Instituto Oceanográfico da Armada (INOCAR). Quiaquil, Equador, 2003.
- DREWES, H.; SÁNCHEZ, L.; BLITZKOW, D.; FREITAS, S.R.P. **Documento técnico sobre o sistema de referência vertical para a América do Sul. SIRGAS**, Boletim Informativo n. 6, 1998, p. 23–31.
- FREITAS, S.R.C.; BLITZKOW, D. **Altitudes e geopotencial**. IGeS Bulletin – Special Issue for South America, n. 9, 1999, p. 47-62.
- HEISKANEN, W.; MORITZ, H. **Physical Geodesy**. W. H. Freeman, San Francisco. 1967.